Kapitel I.

Elliptische Funktionen

Einleitung

1. Vorbemerkung. Wenn man sich als Student nach Vorlesungen zur Funktionentheorie über ein oder zwei Semester erinnert, welche „konkreten“ Funktionen man kennen gelernt hat, so notiert man die

(i) rationalen Funktionen,
(ii) trigonometrischen und hyperbolischen Funktionen zusammen mit der Exponentialfunktion und ihre Umkehrfunktionen

sowie eventuell die

(iii) Gamma-Funktion.

Zum gleichen mageren Ergebnis kommt man, wenn man die Standard-Lehrbücher zur Funktionentheorie auf konkrete Funktionen durchsieht.

In allen drei angegebenen Beispielklassen braucht man eigentlich keine zusätzliche Theorie für die Behandlung der Funktionen, man kann sie vielmehr ohne „Funktionentheorie“, d. h. ohne Verwendung von Sätzen dieser Theorie, direkt herleiten: Man hat dabei lediglich die in der reellen Analysis üblichen Begründungen auf komplexe Argumente auszudehnen.

Historisch gesehen waren (i) und (ii) sowie die wesentlichen Teile von (iii) bis zum Beginn des 19. Jahrhunderts bekannt. Erst im 19. Jahrhundert beginnt die Funktionentheorie ihren Siegeszug durch die Analysis, nachdem eine Theorie zur Behandlung neuer Funktionenklassen entwickelt werden musste. Eine solche neue Klasse von Funktionen wird in diesem Kapitel I untersucht.

2. Integrationsprobleme. Im ausgehenden 18. und beginnenden 19. Jahrhundert wurde immer wieder das Problem der Berechnung eines Integrals der Form

$$F(x) := \int_a^x \frac{dt}{\sqrt{p(t)}} \tag{1}$$

behandelt, wobei $p(t)$ ein gegebenes reelles Polynom 3. oder 4. Grades in t ist, das im betrachteten Intervall nur positive Werte annimmt. Die analoge Frage für Polynome p vom Grad 1 oder 2 kann elementar bzw. mit den Funktionen 1(ii) gelöst werden. Im Fall (1) gelingt eine elementare Integration jedoch i. A. nicht! Integrale der Form (1) treten u. a. bei der Bestimmung der Bogenlänge von Ellipsen (vgl. **5**), Hyperbeln und der Lemniskate ($p(t) = 1 - t^4$, vgl. **4**) auf, man nennt sie daher (missverständlich) *elliptische Integrale*. Solche elliptischen Integrale findet man in der Literatur zuerst um etwa 1655 bei J. Wallis (1616–1703) und dann bei Jacob Bernoulli (1654–1705).

Will man die Problematik umgehen, die durch eventuelle Nullstellen von p entsteht, so nehme man an, dass F (lokal) eine streng monoton wachsende Umkehrfunktion G besitzt. Eine elementare Umrechnung führt dann zum (äquivalenten) Problem der Lösung der Differentialgleichung

$$G'^2 = F'(G)^{-2} = p(G). \tag{2}$$

An dieser Differentialgleichung kann man sich leicht überlegen, dass man den Fall eines Polynoms p vom Grad 4 stets auf den Fall eines Polynoms von einem Grad ≤ 3 zurückführen kann:

Proposition. *Sei $p(t)$ ein komplexes Polynom vom Grad 4 und $r \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle von $p(t)$ sowie*

$$q(t) := p'(r) \cdot t^3 + \tfrac{1}{2}p''(r) \cdot t^2 + \tfrac{1}{6}p'''(r) \cdot t + \tfrac{1}{24}p^{(iv)}(r) \in \mathbb{C}[t].$$

In diesem Fall ist G genau dann eine Lösung der Differentialgleichung $G'^2 = p(G)$, wenn entweder

$$G \equiv r \quad \text{oder} \quad H := \frac{1}{G-r}$$

die Differentialgleichung

$$H'^2 = q(H) \tag{3}$$

erfüllt.

Beweis. Es sind

(∗) $G \not\equiv r$ und $H = 1/(G-r)$ gleichwertig mit $H \not\equiv 0$ und $G = r + 1/H$.

Ist $G \not\equiv r$ eine Lösung von $G'^2 = p(G)$, so liefert eine einfache Rechnung

$$H'^2 = (G-r)^{-4} \cdot G'^2 = (G-r)^{-4} \cdot p(G) = H^4 \cdot p\left(\frac{1}{H} + r\right) = q(H),$$

also (3).

Sei nun H eine Lösung von (3). Aufgrund von $q(0) = \frac{1}{24}p^{(iv)}(0) \neq 0$ gilt $H \not\equiv 0$. Wegen (∗) ergibt eine analoge Rechnung

$$G'^2 = H^{-4} \cdot H'^2 = (G-r)^4 \cdot q\left(\frac{1}{G-r}\right) = p(G).$$

□

Hat q den Grad 3, so ersetzt man ggf. noch H durch $\alpha H + \beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $\alpha \neq 0$. Dann kann man q in der so genannten WEIERSTRASS*schen Normalform*

$$q(t) = 4t^3 - c_2 t - c_3 \tag{4}$$

annehmen. Der in der Proposition aufgezeigte Weg, von einem Polynom 4. Grades zu einem Polynom 3. Grades zu gelangen, wurde erstmals 1856 von A. CAYLEY (1821–1895) angegeben (*Coll. math. papers IV*, 60–69). Diese Reduktion wurde von K.T.W. WEIERSTRASS (1815–1897) etwa ab 1862 in seinen Vorlesungen an der Universität Berlin behandelt (*Math. Werke V*).

Ein anderer Weg einer Reduktion auf eine einfache Normalform wurde schon ab 1825 von A.M. LEGENDRE (1752–1833) (vgl. [1825; I], 4–11, oder H. WEBER [1908], §4) eingeschlagen: $p(t)$ habe nur einfache Nullstellen. Es seien $a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq b$ mit $p(a) = p(b) = 0$. Man setzt nun mit einem $0 \neq \gamma \in \mathbb{C}$:

$$H := \begin{cases} \sqrt{\gamma \cdot (G-a)}, & \text{falls Grad } p(t) = 3, \\ \sqrt{\gamma \cdot (G-a)/(G-b)}, & \text{falls Grad } p(t) = 4. \end{cases}$$

Aus (2) folgt für H eine Differentialgleichung der Form

$$H'^2 = AH^4 + BH^2 + C, \quad A, B, C \in \mathbb{C}, \quad AC \neq 0.$$

Durch geeignete Wahl von $0 \neq \gamma \in \mathbb{C}$ erhält man eine Reduktion auf die so genannte LEGENDRE*sche Normalform*

$$H'^2 = C \cdot q(H), \quad q(t) = (1-t^2) \cdot (1-k^2t^2), \quad k^2 \in \mathbb{C},\ k^2 \neq 0, 1. \tag{5}$$

Die Zahl k nennt man den *Modul* des zugehörigen elliptischen Integrals. Geht man von der WEIERSTRASSschen Normalform (4) mit

$$p(t) = 4(t-a)(t-b)(t-c)$$

aus, so kommt man z. B. auf

$$k^2 = (b-a)/(c-a).$$

Hat $p(t)$ den Grad 4, so ist k^2 das Doppelverhältnis der Nullstellen. Entsprechend nennt man ein Integral der Gestalt

$$\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} \tag{6}$$

ein Integral (erster Gattung) in LEGENDRE*scher Normalform.* Durch die Substitution $t = \sin\psi$ kann man (6) zurückführen auf Integrale der Form

$$(7) \qquad \int_0^{\varphi} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}}, \qquad \varphi = \arcsin x,$$

die ebenfalls nach LEGENDRE benannt werden.

3. FAGNANOs Beispiel. An einem über 250 Jahre alten Beispiel soll nun gezeigt werden, dass Lösungen der Differentialgleichung 2(2) zusätzliche unerwartete Eigenschaften haben können: Sei dazu $p(t) := 1 - t^4$, d. h. $k = i$ in 2(6), also

$$(1) \qquad F(x) := \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}\,, \quad 0 \le x \le 1.$$

Aufgrund von $1 - t^4 = (1-t)(1+t+t^2+t^3) \ge 1 - t$ für alle $0 \le t \le 1$ existiert das uneigentliche Integral $F(1) =: \sigma$ (vgl. **4.5**). Die Funktion $F : [\![0,1]\!] \to [\![0,\sigma]\!]$ ist streng monoton wachsend und stetig und hat daher eine streng monoton wachsende Umkehrfunktion $G : [\![0,\sigma]\!] \to [\![0,1]\!]$ mit der Eigenschaft

$$(2) \qquad G'^2 = 1 - G^4\,,\ G(0) = 0\,,\ G'(0) = 1.$$

Conte G.C. FAGNANO (1682–1766; *Opere matematiche I–III*, Mailand–Rom–Neapel 1911–1912) entdeckte um 1750 eine unerwartete Eigenschaft von F:

Satz von FAGNANO. *Für alle hinreichend kleinen $x \ge 0$ gilt*

$$2F(x) = F\left(2x \cdot \frac{\sqrt{1-x^4}}{1+x^4}\right)\,.$$

Man schreibt dies auf die Umkehrfunktion G um und erhält das

Korollar. *Für alle hinreichend kleinen $u \ge 0$ gilt*

$$G(2u) = \frac{2G(u)G'(u)}{1+G^4(u)}\,.$$

Beweis. Der Ansatz $t^2 = 2s^2/(1+s^4)$ führt zu

$$1 - t^4 = \big((1-s^4)/(1+s^4)\big)^2 \quad \text{und} \quad t \cdot dt = 2s(1-s^4)/(1+s^4)^2 \cdot ds,$$

also zu

$$\frac{dt}{\sqrt{1-t^4}} = \sqrt{2} \cdot \frac{ds}{\sqrt{1+s^4}}.$$

Die erneute Substitution $s^2 = 2r^2/(1-r^4)$, also $t = 2r \cdot \sqrt{1-r^4}/(1+r^4)$, ergibt

$$\frac{ds}{\sqrt{1+s^4}} = \sqrt{2} \cdot \frac{dr}{\sqrt{1-r^4}}, \quad \text{also} \quad \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}} = 2 \cdot \frac{dr}{\sqrt{1-r^4}}.$$

Das ist aber die Behauptung. □

An der durch (2) definierten Funktion G kann man die Herleitung von 2(4) gut exemplifizieren: Man setzt

$$H := \frac{1}{G+1} - \frac{1}{2}, \quad \text{also } G = \frac{1-2H}{1+2H}$$

und verifiziert die WEIERSTRASSsche Normalform $H'^2 = 4H^3 + H$. Mit der Substitution $G = 1/\sqrt{H}$ erhält man dagegen $H'^2 = 4H^3 - 4H$. Man vergleiche hierzu WEIERSTRASS' Arbeit über die *lemniskatische* Funktion (*Math. Werke VI*, 183–219).

FAGNANOs Werk *Produzioni matematiche* wurde L. EULER am 23.12.1751 zur Begutachtung in der Berliner Akademie vorgelegt. Diesen Tag bezeichnet JACOBI als den *Geburtstag* der elliptischen Funktionen. In der Tat gab das Studium des genannten Werkes EULER die Anregung zu seinen wichtigsten Untersuchungen über die elliptischen Integrale, insbesondere zur Entdeckung der Additionstheoreme (P. STÄCKEL und W. AHRENS [1908], 23, 31 und 34):

> *... Bei dieser Gelegenheit habe ich auch einen für Geschichte der Mathematik ungemein wichtigen Tag gefunden, an welchem unsere Akademie* EULER *auffordert, das von* FAGNANI *ihr übersandte Werk zu prüfen, ehe man dem Verfasser antwortet. Aus dieser Prüfung ist die Theorie der elliptischen Functionen entstanden* (Brief von JACOBI an FUSS vom 24.10.1847).

Im Jahre 1761 griff L. EULER (1707–1783; *Opera omnia I,* **20**, 58–107) dieses Problem auf und zeigte ein allgemeines *Additionstheorem*:

Satz von EULER. *Für alle hinreichend kleinen $x, y \geq 0$ gilt*

$$F(x) + F(y) = F\left(\frac{x\sqrt{1-y^4} + y\sqrt{1-x^4}}{1+x^2y^2}\right) .$$

Der Übergang zur Umkehrfunktion ergibt hier das

Korollar. *Für alle hinreichend kleinen $u, v \geq 0$ gilt*

$$G(u+v) = \frac{G(u)G'(v) + G(v)G'(u)}{1 + G^2(u)G^2(v)} .$$

Bald danach schreibt EULER, dass die elliptischen Integrale als selbstständige Transzendente in die Analysis eingeführt werden sollten. LEGENDRE hat diese Auffassung voll unterstützt.

Das Beispiel von FAGNANO ist in dem Sinne typisch, dass die Umkehrfunktion von Integralen der Form 2(1), d. h. die Lösungen von Differentialgleichungen der Form 2(2), eine Klasse von interessanten Funktionen bilden. Man wird dabei natürlich ins Komplexe gehen und allgemein meromorphe Funktionen zulassen. Aus der eindeutigen Lösbarkeit des Anfangswertproblems (2) erhält man

$$G(iu) = iG(u). \tag{3}$$

Das Korollar zum Satz von EULER zeigt dann, dass die Funktion G *doppelt-periodisch* sein wird: Für alle $v \in \mathbb{C}$ mit $G'(v) = 1$ gilt $G(v) = 0$ nach (2) und damit $G(u + v) = G(u)$ für alle $u \in \mathbb{C}$. Wegen (3) ist dann mit v auch iv eine Periode von G.

Die Entdeckung der doppelten Periodizität jener Umkehrfunktionen ist die Grundlage der Entwicklung der Theorie der elliptischen Funktionen durch N.H. ABEL (ab 1826) und C.G.J. JACOBI (ab 1827). Bereits gegen Ende des 18. Jahrhunderts besaß C.F. GAUSS wesentliche Ergebnisse zu den elliptischen Funktionen. Er hat dazu aber außer einer kurzen Andeutung in den *Disquisitiones arithmeticae* (*Werke I*, Art. 335 (1801)), einer Anwendung auf die Arithmetik (*Werke II*, 9–45 (1808)) und einer Anwendung auf die Theorie der Säkularstörung (*Werke III*, 331–355 (1818)) nichts veröffentlicht. Dass GAUSS in der Tat viele wesentliche Ergebnisse bekannt waren, wurde erst bei der Sichtung und Auswertung seines Nachlasses deutlich (*Werke III*, 361–490, und *VIII*, 35–117; ferner F. KLEIN und M. BRENDEL [1911]).

In diesem ersten Kapitel wird ein auf J. LIOUVILLE (1809–1882) und H. BURKHARDT (1861–1914) zurückgehender Zugang zu diesen Funktionen entwickelt, der nicht wie noch bei K.T.W. WEIERSTRASS (*Math. Werke V*) von den elliptischen Integralen ausgeht, sondern die doppelte Periodizität in den Mittelpunkt stellt. In der Literatur erscheint dieser Aufbau wohl erstmals in dem Buch von H. BURKHARDT ([1899], 2. Abschnitt). Durch das klassische Buch von HURWITZ–COURANT [1964] aus dem Jahre 1922 wurde dieser Ansatz weltweit verbreitet.

4. Die Lemniskate und ihre Bogenlänge. In der euklidischen Ebene $\mathbb{R}^2$ seien zwei verschiedene Punkte p, q gegeben. Unter einer *Lemniskate* versteht man dann den geometrischen Ort aller Punkte $z \in \mathbb{R}^2$, für welche

(1) $$|z - p| \cdot |z - q| = \frac{1}{4}|p - q|^2$$

gilt. Offenbar geht die Kurve durch den Mittelpunkt $\frac{1}{2}(p+q)$ der Strecke von p nach q. Bis auf eine Bewegung der Ebene darf man daher den Mittelpunkt als Ursprung sowie

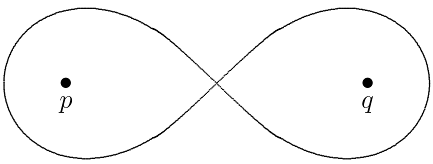

Abb.1: Die Lemniskate

$$p = \begin{pmatrix} -a \\ 0 \end{pmatrix}, \; q = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}, \; a > 0 \quad \text{und} \quad z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

also

$$((x + a)^2 + y^2) \cdot ((x - a)^2 + y^2) = a^4$$

annehmen. Dies ist gleichwertig mit $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$. Nun liegt es nahe, die Normierung $2a^2 = 1$ vorzunehmen, also den Abstand der beiden Punkte p, q auf $\sqrt{2}$ zu normieren:

(2) $$(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2.$$

Führt man hier Polarkoordinaten $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $r \geq 0$, $0 \leq \varphi < 2\pi$, ein, so wird (2) gleichwertig mit

$$r^2 = \cos 2\varphi\ ,\ 0 \leq \varphi < 2\pi. \tag{3}$$

In der Analysis lernt man, dass die Bogenlänge $s = s(t)$ einer in Polarkoordinaten $r = r(t)$ und $\varphi = \varphi(t)$ gegebenen Kurve durch die Differentialgleichung

$$s'^2 = x'^2 + y'^2 = r'^2 + r^2 \cdot \varphi'^2 \tag{4}$$

bestimmt ist.

Proposition. *Die Bogenlänge der Lemniskate wird gegeben durch*

$$s'^2 = \frac{r'^2}{1 - r^4}.$$

Beweis. Aus (3) folgt $rr' = -\sin 2\varphi \cdot \varphi'$, also auch

$$r^2 r'^2 = \sin^2 2\varphi \cdot \varphi'^2 = (1 - \cos^2 2\varphi) \cdot \varphi'^2 = (1 - r^4) \cdot \varphi'^2.$$

Wegen (4) erhält man

$$s'^2 = r'^2 \cdot \left(1 + \frac{r^4}{1 - r^4}\right) = \frac{r'^2}{1 - r^4}\,. \qquad \square$$

Beschränkt man sich etwa auf den ersten Quadranten, so kann man r als Parameter wählen. Dann wird die Bogenlänge der Lemniskate gegeben durch

$$F(R) := \int_0^R \frac{dr}{\sqrt{1 - r^4}},$$

also durch das FAGNANO–*Integral* 3(1), das in **4.5** berechnet wird. Der Satz von FAGNANO besagt dann, dass das Doppelte der Länge des Bogens zwischen dem Ursprung und dem Punkt P mit der Länge des Bogens zwischen dem Ursprung und dem Punkt Q bereinstimmt, wenn die zugehörigen Parameter $r = r_P$ und $R = r_Q$ die Beziehung

$$R = 2r \cdot \sqrt{1 - r^4}/(1 + r^4)$$

erfüllen. Die geometrische Bedeutung dieser Formel liegt in der Tatsache, dass die Quadrate von R und r wegen

$$R^2 = 4r^2 \cdot \frac{1 - r^4}{(1 + r^4)^2} \quad \text{bzw.} \quad r^2 = \frac{2t^2}{1 + t^4} \quad \text{mit} \quad t^2 = \frac{2R^2}{1 - R^4}$$

jeweils durch rationale Operationen zusammen mit dem Ziehen von Quadratwurzeln auseinander hervorgehen. Man erhält den

Satz. *Die Verdopplung des Lemniskatenbogens ist durch Konstruktion mit Zirkel und Lineal möglich.*

FAGNANO schätzte diese Verdopplung so sehr, dass er den (später ausgeführten) Wunsch äußerte, eine Lemniskate auf seinem Grabstein einzumeißeln!

Literatur: C.L. SIEGEL, *Ges. Abhandlungen III*, 249–251, und [1988].

5. Die Bogenlänge der Ellipse. Im Anschluss an die Arbeit über das FAGNANO-Integral 3(1) hat EULER noch 1761 (*Opera omnia I*, **20**, 153–200) ein Integral behandelt, das die Bogenlänge der Ellipse einschließt. Für das Integral

$$E(x) := \int_0^x \frac{1 + At^2 + Bt^4}{\sqrt{1 + Ct^2 + Dt^4}}\, dt \tag{1}$$

zeigte EULER dort die Funktionalgleichung

$$E(x) + E(y) - E(z) = xyz \cdot \left(-A - \frac{x^2 + y^2 + z^2}{2} B + \frac{x^2 y^2 z^2}{6} BD \right) \tag{2}$$

mit

$$z := \frac{x\sqrt{1 + Cy^2 + Dy^4} + y\sqrt{1 + Cx^2 + Dx^4}}{1 - Dx^2 y^2}. \tag{3}$$

Wie man sieht, herrscht im Fall $A = B = 0$ völlige Analogie zum Satz von EULER in **3**.

Ist nun eine Ellipse gegeben durch

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\ ,\ a > 0\,,\quad b > 0,$$

so gilt im ersten Quadranten

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\ ,\ y' = -\frac{b}{a}\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}\ ,\quad 0 \le x < a.$$

Damit erhält man für die Bogenlänge ein Integral der Form

$$\frac{1}{a}\int_0^x \frac{\sqrt{a^4 + (b^2 - a^2)s^2}}{\sqrt{a^2 - s^2}} ds = a \int_0^{x/a} \frac{\sqrt{1 + kt^2}}{\sqrt{1 - t^2}} dt\ ,\quad k := \frac{b^2 - a^2}{a^2},$$

wenn man $s = at$ substituiert. Da man hierfür auch

$$a \int_0^{x/a} \frac{1 + kt^2}{\sqrt{(1 - t^2)(1 + kt^2)}}\, dt$$

schreiben kann, ergibt (2) eine einfache Funktionalgleichung für die Bogenlänge.

6. ABEL und JACOBI: Eine Theorie entsteht. Das *Journal für die reine und angewandte Mathematik* oder *Crelles Journal* war Mitte des 19. Jahrhunderts international die führende mathematische Zeitschrift. Sie wurde 1826 von dem Oberbaurat A.L. CRELLE (1780–1855; ab 1828 Referent im preußischen Kultusministerium) gegründet. Der erste Band enthält 7 Arbeiten von N.H. ABEL (1802–1829). Darunter ist die berühmte Arbeit über die Unlösbarkeit der allgemeinen Gleichung 5. Grades durch Radikale. Im gleichen Band findet man eine Arbeit von C.G.J. JACOBI (1804–1851), während im zweiten Band 9 Arbeiten von JACOBI und 4 von ABEL abgedruckt sind.

Sowohl in ABELs grundlegender Arbeit *Recherches sur les fonctions elliptiques* aus dem Jahre 1827/28 (*Œuvres complètes I*, 263–388) als auch in JACOBIs berühmtem Buch *Fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum* aus dem Jahre 1829 (*Ges. Werke I*, 49–239) entsteht aus einer Theorie der elliptischen Integrale eine Theorie der elliptischen Funktionen durch Benutzung der Umkehrfunktionen der elliptischen Integrale in LEGENDREscher Normalform, wie sie etwa gleichzeitig auch JACOBI entwickelte. Die Theorie erscheint als eine natürliche Verallgemeinerung der trigonometrischen Funktionen. Ein wesentlicher Teil ist dabei der Multiplikation der elliptischen Funktionen im Sinne von **6.8** gewidmet. Es erscheint heute so, dass ABEL einige Zeit vor JACOBI im Besitz der wesentlichen Einsichten war.

In den *Fundamenta nova* übernimmt JACOBI für die obere Grenze φ des LEGENDREschen Integrals 2(7)

$$u := u(\varphi) := \int_0^{\varphi} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}} \tag{1}$$

von LEGENDRE ([1825; I], 14) die Benennung *Amplitude*, schreibt $\varphi = am\, u$ für die Umkehrfunktion von (1) und nennt die trigonometrischen Funktionen

$$\sin\varphi = \sin(am\, u)\,, \quad \cos\varphi = \cos(am\, u)\,, \quad \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} = \Delta(am\, u)$$

elliptische Funktionen. Nach Chr. GUDERMANN (1798–1852; Crelles Journal **18, 19, 20, 21, 23** und **25**) schreibt man auch kurz

$$sn\, u\,,\ cn\, u\,,\ dn\, u. \tag{2}$$

JACOBI zeigte, dass die Funktionen (2) zwei „unabhängige" Perioden haben, nämlich $4K$ und $2iK$ mit $K := u(\pi/2)$.

In der Gedächtnisrede auf JACOBI vergleicht L. DIRICHLET die Ergebnisse von ABEL und JACOBI in lesenswerter Weise (C.G.J. JACOBI, *Ges. Werke I*, 1–28). Er schreibt auf S. 10:

> Obgleich die Umgestaltung der Theorie der elliptischen Functionen, welche man Abel und Jacobi verdankt, aus dem Zusammenwirken mehrerer sich gegenseitig unterstützender Gedanken hervorgegangen ist, so scheint doch zweien dieser

> Gedanken die größte Wichtigkeit zugeschrieben werden zu müssen, weil sie alle Theile der neuen Theorie innig durchdringen. Während die früheren Bearbeiter dieses Gegenstandes das elliptische Integral der ersten Gattung als eine Function seiner Grenze ansahen, erkannten Abel und Jacobi unabhängig von einander, wenn auch der erstere einige Monate früher, die Nothwendigkeit die Betrachtungsweise umzukehren und die Grenze nebst zwei einfachen von ihr abhängigen Größen, die so unzertrennlich mit ihr verbunden sind wie der Sinus zum Cosinus gehört, als Functionen des Integrals zu behandeln, gerade wie man schon früher zur Erkenntniss der wichtigsten Eigenschaften der vom Kreise abhängigen Transcendenten gelangt war, indem man den Sinus und Cosinus als Functionen des Bogens und nicht diesen als eine Function von jenen betrachtete.
>
> Ein zweiter Abel und Jacobi gemeinsamer Gedanke, der Gedanke das Imaginäre in diese Theorie einzuführen, war von noch größerer Bedeutung und Jacobi hat es später oft wiederholt, dass die Einführung des Imaginären allein alle Räthsel der früheren Theorie gelöst habe.

Niels Henrik Abel wurde 1802 als Sohn eines mittellosen Pfarrers in dem norwegischen Dorf Find bei Stavanger geboren. Ab 1822 besuchte er die Universität von Christiania, er las bereits als Schüler klassische mathematische Literatur und bemerkte dabei, dass nicht alle der veröffentlichten Sätze durch strenge Beweise gesichert waren. Er soll sich schon damals vorgenommen haben, an der Schließung dieser Lücken zu arbeiten. Sein Lehrer Holmboe, der bereits 1839 das *Œuvres* Abels herausgab, erkannte seine außergewöhnliche Begabung. Abel erregte Aufsehen durch eine Veröffentlichung, in der er fälschlich behauptete, eine allgemeine Methode zur Auflösung der allgemeinen Gleichung fünften Grades zu besitzen. Den Nachweis, dass eine solche Methode nicht existiert, veröffentlichte er 1824 auf einem Flugblatt (*Œuvres complètes I,* 28–33).

Auf Grund dieses Erfolges erhielt er ein Stipendium für eine Auslandsreise, die ihn zunächst nach Berlin zu A.L. Crelle, dem Herausgeber des „Journals“, führte. Anschließend reiste er nach Paris zu Cauchy, wo er erkrankte. Er kehrte 1827 nach Oslo zurück und starb dort 1829 an Tuberkulose.

Carl Gustav Jacob Jacobi wurde 1804 in Potsdam als Sohn eines vermögenden Bankiers geboren. Ab 1821 studierte er an der Universität Berlin, an der er auch im Alter von nur 20 Jahren seine akademische Karriere als Privatdozent begann. Von 1826 bis 1844 war er an der Universität Königsberg tätig, wo er den Astronomen F. Bessel traf. Jacobi verfasste zahlreiche Arbeiten über elliptische Funktionen, Analysis, Zahlentheorie, Geometrie und Mechanik. Seine Arbeiten über elliptische Funktionen führten ihn zu der französischen Schule um Legendre, Fourier und Poisson, die er zweimal in Paris besuchte.

Im Jahre 1843 erkrankte Jacobi schwer an Diabetes. Seine hoch geschätzten Vorlesungen konnte er fortan nur noch selten halten. Nach einer Art Kuraufenthalt in Italien ging er 1844 als Mitglied der Preußischen Akademie der Wissenschaften zurück nach Berlin, wo er 1851 starb.

§1. Perioden und Gitter

1. Meromorphe Funktionen. Eine Funktion f heißt *meromorph* auf $\mathbb{C}$, wenn es eine abgeschlossene, diskrete Teilmenge D_f von $\mathbb{C}$ gibt, so dass

(i) $f : \mathbb{C} \setminus D_f \to \mathbb{C}$ holomorph ist und
(ii) in den Punkten von D_f Pole hat.

Dabei heißt eine abgeschlossene Teilmenge D von $\mathbb{C}$ *diskret*, wenn es zu jedem $c \in \mathbb{C}$ eine Umgebung U von c gibt, für die $D \cap U$ endlich ist. Für U kann man jede beschränkte Umgebung von c nehmen. Äquivalent kann man sagen, dass die Menge

(1) $$\{z \in D\,;\, |z| \le \rho\} \text{ für jedes } \rho > 0 \text{ endlich ist.}$$

Weiter hat f in $c \in D_f$ genau dann einen *Pol*, wenn f in c nicht holomorph fortsetzbar ist, wenn es aber eine positive ganze Zahl m und eine Umgebung U von c gibt, so dass

(2) $$(z-c)^m \cdot f(z) \quad \text{auf } U \setminus \{c\} \text{ beschränkt ist.}$$

Bezieht man das Nullstellenverhalten an den Holomorphiestellen von f ein, so ist $f \neq 0$ genau dann auf $\mathbb{C}$ meromorph, wenn es zu jedem $c \in \mathbb{C}$ ein $n \in \mathbb{Z}$, eine Umgebung U von c und eine holomorphe Funktion $g : U \to \mathbb{C}$ gibt mit der Eigenschaft

(3) $$f(z) = (z-c)^n \cdot g(z) \quad \text{für alle } z \in U \setminus \{c\} \text{ und } g(c) \neq 0.$$

Dann ist natürlich $n =: \operatorname{ord}_c f$ die *Ordnung von f in c*. Die Menge der auf $\mathbb{C}$ meromorphen Funktionen wird mit $\mathcal{M}$ bezeichnet. Dem Leser wird dringend empfohlen, Beispiele von meromorphen Funktionen zu sammeln, die über die rationalen Funktionen hinausgehen. Wegen (2) sind mit f und g natürlich auch αf, $\alpha \in \mathbb{C}$, $f+g$ und $f \cdot g$ wieder meromorph und es gilt

$$D_{\alpha f} = D_f\,,\ \alpha \neq 0\,,\ D_{f+g} \subset D_f \cup D_g\,,\ D_{fg} \subset D_f \cup D_g.$$

Nach dem Identitätssatz ist die Nullstellenmenge eines $0 \neq f \in \mathcal{M}$ abgeschlossen und diskret in $\mathbb{C}$. Damit ist auch $1/f$ auf $\mathbb{C}$ meromorph und es gilt der

Satz. *Die auf $\mathbb{C}$ meromorphen Funktionen $\mathcal{M}$ bilden einen Körper.*

Bemerkungen. a) Die meromorphen Funktionen auf $\mathbb{C}$ sind entgegen dem üblichen Sprachgebrauch nicht auf $\mathbb{C}$ definierte Abbildungen. Durch die übliche Erweiterung der Definition $f(c) := \infty$ für alle $c \in D_f$ erhält man jetzt aus jeder meromorphen Funktion f eine Abbildung $f : \mathbb{C} \to \mathbb{P}(\mathbb{C}) := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Die Verknüpfungen in $\mathcal{M}$ sind dann mit den üblichen Rechenregeln für das Rechnen mit Unendlich,

$$c + \infty = \infty\,,\quad \frac{\alpha}{0} = \infty\,,\quad \frac{\alpha}{\infty} = 0\,,\quad \alpha \cdot \infty = \infty \quad \text{für } \alpha \neq 0 \quad \text{usw.}$$

verträglich. Die Bezeichnung $\mathbb{P}(\mathbb{C})$ soll daran erinnern, dass $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ auf kanonische Weise mit dem *projektiven Raum* $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ identifiziert werden kann. Als Warnung wird vermerkt, dass weder $0 \cdot \infty$ noch $\infty \pm \infty$ definiert sind: Diese Bildungen haben keinen Sinn.
b) Algebraisch ist $\mathcal{M}$ der Quotientenkörper des Ringes aller ganzen Funktionen: Zu jedem $f \in \mathcal{M}$ gibt es auf $\mathbb{C}$ holomorphe Funktionen p und q, $q \not\equiv 0$, mit

$$f(z) = p(z)/q(z) \quad \text{für alle } \ z \in \mathbb{C} \setminus D_f.$$

Für einen Beweis vergleiche man R. Remmert [1995], Satz 3.1.5.

2. Perioden meromorpher Funktionen. Zunächst führen wir eine abkürzende, unmissverständliche Schreibweise ein: Für $\omega \in \mathbb{C}$ und $D \subset \mathbb{C}$ sei die Teilmenge $D + \omega$ von $\mathbb{C}$ erklärt durch

(1) $$D + \omega := \{d + \omega\ ;\ d \in D\}.$$

Offenbar gilt dann

(2) $$(D + \omega) + \omega' = D + (\omega + \omega') \quad \text{für} \quad \omega, \omega' \in \mathbb{C}.$$

Sei f eine meromorphe Funktion auf $\mathbb{C}$. Ein $\omega \in \mathbb{C}$ heißt *Periode* von f, wenn

(P.1) $D_f + \omega = D_f$ und
(P.2) $f(z + \omega) = f(z)$ für alle $z \in \mathbb{C} \setminus D_f$

erfüllt ist. Trivialerweise ist 0 eine Periode von f für jedes $f \in \mathcal{M}$. Es bezeichne $\operatorname{Per} f$ die Menge der Perioden von f. Wegen (2) sieht man sofort, *dass* $\operatorname{Per} f$ *stets eine Untergruppe der additiven Gruppe* $\mathbb{C}$ *ist.* Fordert man (P.2) für alle $z \in \mathbb{C}$, für welche beide Seiten von (P.2) erklärt sind, dann ist (P.1) eine Konsequenz von (P.2). Natürlich gilt $\operatorname{Per} f = \mathbb{C}$ für jede konstante Funktion f.

Lemma. *Ist $f \in \mathcal{M}$ nicht konstant, dann ist* $\operatorname{Per} f$ *eine abgeschlossene, diskrete Untergruppe der additiven Gruppe* $(\mathbb{C}, +)$.

Beweis. Ist $\operatorname{Per} f$ nicht diskret oder nicht abgeschlossen, dann gibt es paarweise verschiedene $\omega_n \in \operatorname{Per} f$, $n \geq 1$, für die $\omega := \lim_{n\to\infty} \omega_n$ existiert. Aus (P.1) folgert man $D_f + \omega = D_f$, da D_f abgeschlossen in $\mathbb{C}$ ist. Ist f in c holomorph, dann ist f also auch in $c + \omega$ holomorph und es gilt $f(c) = f(c + \omega_n)$ für alle n. Nach dem Identitätssatz ist f aber konstant gleich $f(c) = f(c + \omega)$. $\square$

Eine Beschreibung der möglichen Periodenmengen beinhaltet das

3. Fundamental-Lemma. *Ist $f \in \mathcal{M}$ nicht konstant, so tritt genau einer der drei folgenden Fälle ein:*

(I) $\operatorname{Per} f = \{0\}$.

(II) *Es gibt ein bis auf das Vorzeichen eindeutig bestimmtes* $\omega_f \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ *mit der Eigenschaft* $\operatorname{Per} f = \mathbb{Z}\omega_f := \{m\omega_f\,;\; m \in \mathbb{Z}\}$.

(III) *Es gibt* $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ *mit folgenden Eigenschaften*

(i) $\operatorname{Per} f = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2 := \{m_1\omega_1 + m_2\omega_2\,;\; m_1, m_2 \in \mathbb{Z}\}$.
(ii) ω_1, ω_2 *sind linear unabhängig über* $\mathbb{R}$.
(iii) $\tau := \omega_1/\omega_2$ *erfüllt* $\operatorname{Im}\tau > 0$, $|\operatorname{Re}\tau| \le \frac{1}{2}$ *und* $|\tau| \ge 1$.

$\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ sind offenbar genau dann linear unabhängig über $\mathbb{R}$, wenn ω_1/ω_2 nicht reell ist.

Beweis. Sei $\operatorname{Per} f \neq \{0\}$. Da $\operatorname{Per} f$ nach Lemma 2 abgeschlossen und diskret ist, gibt es nach 1(1) ein $\omega_f \in \operatorname{Per} f$ mit der Eigenschaft

$$(*) \qquad 0 < |\omega_f| = \inf\{|\omega|\,;\; 0 \neq \omega \in \operatorname{Per} f\}.$$

Wir untersuchen zunächst die Perioden auf der Geraden $\mathbb{R}\omega_f$.

Behauptung: $\operatorname{Per} f \cap \mathbb{R}\omega_f = \mathbb{Z}\omega_f$.

Beweis. Offenbar gilt $\mathbb{Z}\omega_f \subset \operatorname{Per} f \cap \mathbb{R}\omega_f$. Für ein beliebiges $\omega \in \operatorname{Per} f \cap \mathbb{R}\omega_f$ gibt es ein $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $\omega = \alpha\omega_f$. Man wählt $m \in \mathbb{Z}$ mit $|\alpha - m| < 1$ und erhält

$$|\omega - m\omega_f| = |\alpha - m| \cdot |\omega_f| < |\omega_f|.$$

Da mit ω und ω_f auch $\omega - m\omega_f$ zu $\operatorname{Per} f \cap \mathbb{R}\omega_f$ gehört, folgt $\omega = m\omega_f$ aus $(*)$. Also hat man auch $\operatorname{Per} f \cap \mathbb{R}\omega_f \subset \mathbb{Z}\omega_f$. □

Liegt $\operatorname{Per} f$ auf einer Geraden durch 0, also auf $\mathbb{R}\omega_f$, so folgt (II) aus der Behauptung. Zur Eindeutigkeit beachte man, dass $\mathbb{Z}\omega = \mathbb{Z}\omega'$ für $\omega, \omega' \in \mathbb{C}$ bereits $\omega' = \pm\omega$ impliziert.

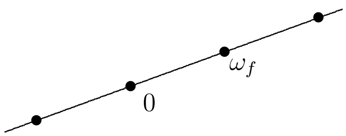

Abb. 2: Periodenmenge

Wir dürfen somit $\mathbb{Z}\omega_f \neq \operatorname{Per} f$ annehmen. Nach 1(1) existiert dann auch ein Element $\omega_1 \in \operatorname{Per} f \setminus \mathbb{Z}\omega_f$ mit

$$(**) \quad |\omega_1| = \inf\{|\omega|\,;\, \omega \in \operatorname{Per} f \setminus \mathbb{Z}\omega_f\}.$$

Sei $\omega_2 := \omega_f$. Dann gilt $\tau := \omega_1/\omega_2 \notin \mathbb{R}$ nach der Behauptung. Also sind ω_1, ω_2 linear unabhängig über $\mathbb{R}$. Indem man ggf. ω_1 durch $-\omega_1$ ersetzt, darf man ohne Einschränkung $\operatorname{Im}\tau > 0$ annehmen. Aus $(*)$ folgt

$$|\omega_1| \ge |\omega_2|, \quad \text{also} \quad |\tau| \ge 1.$$

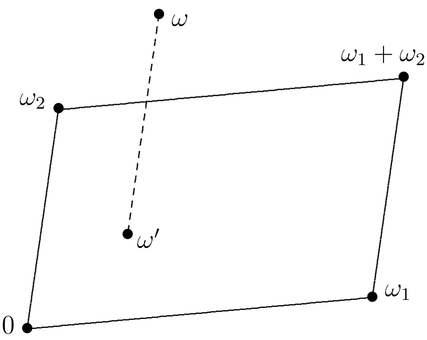

Abb. 3: Periodengitter

Wegen $(**)$ gilt

$$|\omega_1 \pm \omega_2| \geq |\omega_1|, \quad \text{also} \;\; |\tau \pm 1| \geq |\tau|$$

und damit $|\operatorname{Re} \tau| \leq 1/2$.

Offenbar gilt $\mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2 \subset \operatorname{Per} f$. Sei nun $\omega \in \operatorname{Per} f$. Da ω_1, ω_2 eine $\mathbb{R}$-Basis von $\mathbb{C}$ ist, gibt es $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ mit $\omega = \alpha_1\omega_1 + \alpha_2\omega_2$. Nun wählt man $m_j \in \mathbb{Z}$ mit $\beta_j = \alpha_j - m_j, |\beta_j| \leq \frac{1}{2}, j = 1, 2$. Dann gilt

$$\omega' := \omega - m_1\omega_1 - m_2\omega_2 = \beta_1\omega_1 + \beta_2\omega_2 \in \operatorname{Per} f.$$

Ist $\beta_1 = 0$, so folgt $\omega' = 0$ bereits aus der Behauptung. Nimmt man $\beta_1 \neq 0$ an, so gilt natürlich $\omega' \in \operatorname{Per} f \setminus \mathbb{Z}\omega_f$ und

$$\begin{aligned} |\omega'|^2 &= |\beta_1\omega_1 + \beta_2\omega_2|^2 = (\beta_1^2 \cdot |\tau|^2 + 2\beta_1\beta_2 \cdot \operatorname{Re} \tau + \beta_2^2) \cdot |\omega_2|^2 \\ &\leq (\beta_1^2 + |\beta_1|\,|\beta_2| + \beta_2^2) \cdot |\tau|^2 \cdot |\omega_2|^2 \leq \tfrac{3}{4}|\omega_1|^2 , \end{aligned}$$

wenn man (iii) berücksichtigt. Das ist ein Widerspruch zu $(**)$. Also folgt $\omega' = 0$ und auch $\operatorname{Per} f = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$, d. h. (III). □□

Es sei V ein reeller Vektorraum der endlichen Dimension $n \geq 1$, also z. B. $V = \mathbb{R}^n$. Eine Teilmenge Ω von V heißt ein *Gitter* in V, wenn es eine $\mathbb{R}$-Basis $(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)$ von V gibt mit $\Omega = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2 + \ldots + \mathbb{Z}\omega_n$. Man nennt dann $(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)$ auch eine *Basis* von Ω. Eine Darstellung eines $\omega \in \Omega$ in der Form

$$\omega = m_1\omega_1 + m_2\omega_2 + \ldots + m_n\omega_n \quad \text{mit} \quad m_1, m_2, \ldots, m_n \in \mathbb{Z}$$

nennt man auch eine *Linearkombination von ω durch $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ über $\mathbb{Z}$.* Offenbar ist mit Ω auch $\lambda\Omega := \{\lambda\omega\,;\, \omega \in \Omega\}$ ein Gitter in V, falls $0 \neq \lambda \in \mathbb{R}$. Im Fall (III) ist die Periodenmenge $\operatorname{Per} f$ also ein Gitter im $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{C}$. Im Hinblick auf Lemma 2 und das Fundamental-Lemma vermerken wir noch die

Proposition. *Jedes Gitter Ω in $\mathbb{C}$ ist abgeschlossen und diskret in $\mathbb{C}$.*

Beweis. Für $\rho > 0$ sei $M = \{\omega \in \Omega; |\omega| \leq \rho\}$. Indem man ggf. ρ durch $\rho/|\omega_2|$ ersetzt, darf man ohne Einschränkung $\Omega = \mathbb{Z}\tau + \mathbb{Z}, \tau = x + iy \in \mathbb{C}, y > 0$, annehmen. Ist $\omega = m\tau + n \in M$ mit $m, n \in \mathbb{Z}$, so folgt einerseits sogleich

$$\rho^2 \geq |m\tau + n|^2 = (mx + n)^2 + m^2y^2 \geq m^2y^2,$$

also $|m| \leq \rho/y$. Andererseits gilt

$$\rho \geq |mx + n| \geq |n| - |mx|, \quad \text{also} \quad |n| \leq \rho\,(1 + |x|/y)\,.$$

Daher ist M endlich. □

Bemerkungen. a) Einen anderen Beweis des Fundamental-Lemmas findet man in dem Buch von HURWITZ–COURANT [1964], II, 1, § 2, aus dem Jahre 1922.
b) Hinter den Fällen (II) und (III) steht der folgende allgemeine

Satz*. *Für eine Untergruppe $G \neq \{0\}$ der additiven Gruppen $(\mathbb{R}^n, +)$ sind quivalent:*

(i) *G ist diskret.*

(ii) *Es gibt linear unabhängige Vektoren $c_1, \ldots, c_r \in \mathbb{R}^n$, $1 \leq r \leq n$, mit $G = \mathbb{Z}c_1 + \ldots + \mathbb{Z}c_r$.*

Einen *Beweis* findet man z. B. bei M. KOECHER [1985], Theorem I.5.5.
c) Mit dem Fundamental-Lemma ist eine notwendige Bedingung an die Periodenmenge $\operatorname{Per} f$ einer nicht-konstanten meromorphen Funktion f hergeleitet. Dabei ist $\operatorname{Per} f = \{0\}$ sicherlich als der „allgemeine Fall“ anzusehen, jedoch ist er im vorliegenden Zusammenhang ohne Interesse. Ist $0 \neq \omega \in \mathbb{C}$, so gibt es sogar eine ganze Funktion f mit $\operatorname{Per} f = \mathbb{Z}\omega$. Man wählt einfach $f(z) = \exp(2\pi i z/\omega)$. Nach R. REMMERT, G. SCHUMACHER [2002], Satz 12.3.2, gibt es zu jeder ganzen Funktion f mit $\operatorname{Per} f = \mathbb{Z}\omega$ genau eine auf $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ holomorphe Funktion F mit der Eigenschaft

$$f(z) = F(\exp(2\pi i z/\omega)) \quad \text{für alle } \ z \in \mathbb{C}.$$

Bevor in § 3 gezeigt wird, dass es zu jedem Gitter Ω in $\mathbb{C}$ auch meromorphe Funktionen f mit $\Omega = \operatorname{Per} f$ gibt, ist eine Diskussion der fundamentalen Eigenschaften von Gittern in $\mathbb{C}$ sinnvoll. Nach der Beschreibung eines anderen Zugangs in **4** geschieht dies in den Abschnitten **5** bis **7**.

4*. JACOBIs Zugang. Im Jahre 1835 beschäftigte sich C.G.J. JACOBI (*Ges. Werke II*, 23–50) mit der Frage, wie viele „unabhängige“ Perioden eine nicht-konstante meromorphe Funktion haben kann, und zeigte, dass diese Zahl höchstens zwei ist. Seine Ergebnisse formulieren wir in moderner Sprache als

Lemma von JACOBI. *Ist Ω eine diskrete Untergruppe von $(\mathbb{C}, +)$ und sind $\omega_1, \omega_2, \omega_3 \in \Omega$ gegeben, dann gibt es $m_1, m_2, m_3 \in \mathbb{Z}$, nicht alle Null, so dass*

$$m_1\omega_1 + m_2\omega_2 + m_3\omega_3 = 0.$$

Damit sind also je drei Elemente von Ω über $\mathbb{Q}$ linear abhängig. Für einen Beweis benutzt man die so genannte

KRONECKER-Approximation. *Zu jeder positiven ganzen Zahl N und allen $\omega_1, \omega_2, \omega_3 \in \mathbb{C}$ gibt es $m_1, m_2, m_3 \in \mathbb{Z}$, nicht alle Null, mit den Eigenschaften:*

(i) $$|m_1|, |m_2|, |m_3| \leq N,$$

(ii) $$|m_1\omega_1 + m_2\omega_2 + m_3\omega_3| < \frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{N}} \cdot \max\{|\omega_1|, |\omega_2|, |\omega_3|\}.$$

Beweis. Man setzt $M := \max\{|\omega_1|, |\omega_2|, |\omega_3|\}$ und

$$\langle\, m, w\rangle := m_1\omega_1 + m_2\omega_2 + m_3\omega_3 \quad \text{für} \quad m = (m_1, m_2, m_3)\,,\; w = (\omega_1, \omega_2, \omega_3).$$

Schließlich wird das achsenparallele Quadrat in $\mathbb{C}$ mit Mittelpunkt 0 und Kantenlänge $2K$ mit $Q(K)$ bezeichnet, also

$$Q(K) := \{z \in \mathbb{C}\;;\; |\mathrm{Re}\, z| \le K\;,\; |\mathrm{Im}\, z| \le K\}.$$

Für alle $m = (m_1, m_2, m_3)^t \in \mathbb{Z}^3$ mit

$$(*) \qquad 0 \le m_1, m_2, m_3 \le N$$

gilt dann $\langle\, m, w\rangle \in Q(T)$ mit $T := 3MN$. Die Kanten von $Q(T)$ werden nun in t gleiche Teile geteilt. Damit erhält man eine Zerlegung von $Q(T)$ in t^2 Quadrate der Kantenlänge $2T/t$. Die Anzahl der $m \in \mathbb{Z}^3$ mit $(*)$ ist $(N+1)^3$. Nach dem Dirichletschen Schubfachschluss liegen im Fall $(N+1)^3 > t^2$ wenigstens zwei Punkte $\langle\, m', w\rangle$ und $\langle\, m'', w\rangle$ in einem Quadrat der Kantenlänge $2T/t$. Damit erhält man durch Differenzbildung ein $0 \ne m \in \mathbb{Z}^3$ mit (i) und

$$(**) \qquad \langle\, m, w\rangle \in Q\,(2T/t), \quad \text{also} \quad |\langle\, m, w\rangle\,| \le \sqrt{2} \cdot 2T/t.$$

Man wählt nun ein $t \in \mathbb{Z}$ mit $(N+1)^{3/2} > t \ge (N+1)^{3/2} - 1$. Dann gilt also $(N+1)^3 > t^2$ und $t \ge N^{3/2}$. Aus $(**)$ folgt somit (ii). □

Zum *Beweis* des Lemmas von Jacobi gibt es nach 1(1) ein $\rho > 0$ mit $|\omega| \ge \rho$ für alle $0 \ne \omega \in \Omega$. Für hinreichend großes N ist daher die linke Seite von (ii) gleich Null. □ □

Aus dem Lemma von Jacobi kann man nun einen neuen Beweis des Fundamental-Lemmas ableiten. Dieser Beweis ist methodisch nicht uninteressant:

Ist Ω eine diskrete Untergruppe von $\mathbb{C}$ und sind $\omega_1, \omega_2 \in \Omega$ linear unabhängig über $\mathbb{R}$, dann ergibt das Lemma von Jacobi sofort

$$(1) \qquad \Omega \subset \mathbb{Q}\omega_1 + \mathbb{Q}\omega_2.$$

Proposition. *Es gibt $N \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft*

$$\Omega \subset \frac{1}{N}(\mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2).$$

Beweis. Andernfalls würde es $\omega \in \Omega$ nach (1) mit beliebig großen Nennern geben, d. h., man hätte

$$0 \ne \omega'_k = \frac{1}{N_k}(r_k\omega_1 + s_k\omega_2) \in \Omega\;,\; k \in \mathbb{N},$$

mit ganzen Zahlen $r_k, s_k, N_k, \mathrm{ggT}(r_k, s_k, N_k) = 1$ und $N_k \to \infty$ für $k \to \infty$. Da man nach Addition geeigneter Punkte aus $\mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$ ohne Einschränkung $0 \le r_k\,,\; s_k \le N_k$, also auch $|\omega'_k| \le |\omega_1| + |\omega_2|$ für alle $k \in \mathbb{N}$ annehmen darf, würde es eine aus paarweise verschiedenen Gliedern bestehende konvergente Teilfolge von $(\omega'_k)_{k\in\mathbb{N}}$ geben. Da Ω diskret ist, erhalten wir einen Widerspruch. □

Bekanntlich (vgl. K. MEYBERG [1980], Satz 5.5.1) ist jede Untergruppe einer endlich erzeugten freien abelschen Gruppe selbst wieder frei. Nach der Proposition ist Ω eine Untergruppe einer *freien* Gruppe, also auch frei. Wegen $\mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2 \subset \Omega$ ist Ω notwendig ein Gitter.

5. Die Gruppe $\mathrm{GL}\,(2;\mathbb{Z})$**.** Die Menge

$$\mathrm{Mat}(2;\mathbb{Z}) := \left\{ U = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \;;\; a,b,c,d \in \mathbb{Z} \right\}$$

bildet bekanntlich bei Matrizen-Addition und -Multiplikation einen Ring mit Einselement $E := \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Die Gruppe der Einheiten des Ringes $\mathrm{Mat}(2;\mathbb{Z})$ heißt *allgemeine lineare Gruppe vom Grad 2 über* $\mathbb{Z}$ und wird mit $\mathrm{GL}\,(2;\mathbb{Z})$ bezeichnet:

(1) $\mathrm{GL}\,(2;\mathbb{Z}) := \{U \in \mathrm{Mat}(2;\mathbb{Z})\,;\ \text{es gibt } V \in \mathrm{Mat}(2;\mathbb{Z}) \text{ mit } UV = VU = E\}.$

Äquivalenz-Satz. *Für* $U \in \mathrm{Mat}(2;\mathbb{Z})$ *sind äquivalent:*
(i) $U \in \mathrm{GL}\,(2;\mathbb{Z})$.
(ii) $\det U = \pm 1$.
(iii) *U ist invertierbar über $\mathbb{Q}$ und* $U^{-1} \in \mathrm{Mat}(2;\mathbb{Z})$.
(iv) *Die Abbildung $U : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}^2$, $x \mapsto Ux$, ist bijektiv.*
(v) *Die Abbildung $U : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}^2$, $x \mapsto Ux$, ist surjektiv.*

Beweis. Die Implikationen (iii) $\Rightarrow$ (i) $\Rightarrow$ (iv) $\Rightarrow$ (v) sind offensichtlich.
(v) $\Longrightarrow$ (ii): Es gibt also $u, v \in \mathbb{Z}^2$ mit $Uu = \binom{1}{0}$ und $Uv = \binom{0}{1}$, d. h. $UV = E$ für $V := (u,v)$. Durch Determinantenbildung folgt $\det U \cdot \det V = 1$, also (ii).
(ii) $\Longrightarrow$ (iii): Man verwendet die bekannte Darstellung

$$U^{-1} = \frac{1}{\det U} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \qquad \text{für } \; U = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}. \qquad \square$$

Neben der Gruppe $\mathrm{GL}\,(2;\mathbb{Z})$ betrachtet man noch den Normalteiler

(2) $$\mathrm{SL}\,(2;\mathbb{Z}) := \{U \in \mathrm{GL}\,(2;\mathbb{Z})\ ;\ \det U = 1\}$$

von $\mathrm{GL}\,(2;\mathbb{Z})$, die so genannte *spezielle lineare Gruppe vom Grad 2 über* $\mathbb{Z}$. Wegen

$$\mathrm{GL}\,(2;\mathbb{Z}) = \mathrm{SL}\,(2;\mathbb{Z}) \cup \mathrm{SL}\,(2;\mathbb{Z}) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

hat $\mathrm{SL}\,(2;\mathbb{Z})$ den Index 2 in $\mathrm{GL}\,(2;\mathbb{Z})$. Die Gruppen $\mathrm{GL}\,(2;\mathbb{Z})$ bzw. $\mathrm{SL}\,(2;\mathbb{Z})$ sind „größer“ als man zunächst denkt: Für $U = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{GL}\,(2;\mathbb{Z})$ folgt zunächst $\pm 1 = \det U = ad - bc$, so dass z. B. *c und d teilerfremd sind*. Umgekehrt gilt das

Ergänzungs-Lemma. *Sind $c, d \in \mathbb{Z}$ teilerfremd, dann gibt es eine Matrix*

$$U = \begin{pmatrix} * & * \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}\,(2;\mathbb{Z}).$$

Hier ist U bis auf einen linksseitigen Faktor der Form $\left(\begin{smallmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ *mit* $k \in \mathbb{Z}$ *eindeutig bestimmt.*

Beweis. Da c, d teilerfremd sind, gibt es $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $ad-bc = 1$, d. h., $U = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ gehört zu $\mathrm{SL}\,(2;\mathbb{Z})$. Ist $V \in \mathrm{SL}\,(2;\mathbb{Z})$ eine weitere Matrix mit $V = \left(\begin{smallmatrix} * & * \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$, dann folgt

$$VU^{-1} = \begin{pmatrix} * & * \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}\,(2;\mathbb{Z}),$$

also notwendig $VU^{-1} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ mit einem $k \in \mathbb{Z}$. □

Bemerkungen. a) Das Beispiel $U = 2E$ zeigt, dass man – im Gegensatz zu der analogen Situation über einem Körper – die Bedingung „$U : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}^2$ ist injektiv“ nicht in den Äquivalenz-Satz aufnehmen kann.
b) Das Ergänzungs-Lemma erlaubt die Konstruktion von zahllosen Beispielen: Die Matrizen

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 10 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 89 & 144 \\ 144 & 233 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 514\,229 & 832\,040 \\ 832\,040 & 1\,346\,269 \end{pmatrix}$$

gehören z. B. zu $\mathrm{SL}\,(2;\mathbb{Z})$.
c) Die Ergebnisse dieses Abschnitts lassen sich cum grano salis leicht auf $n \times n$ Matrizen übertragen. Man vergleiche V.1.1 oder M. Koecher [1985], Chap. I, oder M. Newman [1972], Chap. II.

6. Basis-Lemma. *Sei Ω ein Gitter in $\mathbb{C}$ und (ω_1, ω_2) eine Basis von Ω. Für $\omega_1', \omega_2' \in \mathbb{C}$ gilt dann:*
a) *Genau dann gehören ω_1' und ω_2' zu Ω, wenn es ein* $U \in \mathrm{Mat}(2;\mathbb{Z})$ *gibt mit*

$$\begin{pmatrix} \omega_1' \\ \omega_2' \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

b) *Genau dann ist (ω_1', ω_2') eine Basis von Ω, wenn die Matrix U in* (1) *zu* $\mathrm{GL}\,(2;\mathbb{Z})$ *gehört.*

Beweis. a) Sind ω_1', ω_2' beliebige Punkte von Ω, dann gibt es $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ mit

$$\omega_1' = a\omega_1 + b\omega_2\,, \quad \omega_2' = c\omega_1 + d\omega_2,$$

also

$$\begin{pmatrix} \omega_1' \\ \omega_2' \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad U = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(2;\mathbb{Z}). \tag{$*$}$$

Gilt umgekehrt $(*)$, so gehören ω_1' und ω_2' zu Ω.
b) Ist (ω_1', ω_2') eine Basis von Ω, dann gibt es auch eine Matrix $V \in \mathrm{Mat}(2;\mathbb{Z})$ mit der Eigenschaft $\left(\begin{smallmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{smallmatrix}\right) = V \left(\begin{smallmatrix} \omega_1' \\ \omega_2' \end{smallmatrix}\right)$. Es folgt

$$\begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix} = VU \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} \omega_1' \\ \omega_2' \end{pmatrix} = UV \begin{pmatrix} \omega_1' \\ \omega_2' \end{pmatrix}.$$

Da aber (ω_1, ω_2) und (ω_1', ω_2') über $\mathbb{R}$ linear unabhängig sind, hat man $VU = UV = E$, also $U \in \mathrm{GL}\,(2;\mathbb{Z})$ nach 5(1).
Ist $U \in \mathrm{GL}\,(2;\mathbb{Z})$, dann sind (ω_1', ω_2') in $(*)$ zunächst linear unabhängig über $\mathbb{R}$. Für beliebige $\omega_1'', \omega_2'' \in \Omega$ gibt es analog ein $W \in \mathrm{Mat}(2;\mathbb{Z})$ mit

$$\begin{pmatrix} \omega_1'' \\ \omega_2'' \end{pmatrix} = W \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix}, \quad \text{also} \quad \begin{pmatrix} \omega_1'' \\ \omega_2'' \end{pmatrix} = WU^{-1} \begin{pmatrix} \omega_1' \\ \omega_2' \end{pmatrix}.$$

Damit sind ω_1'', ω_2'' jeweils Linearkombinationen von ω_1', ω_2' über $\mathbb{Z}$. Also ist ω_1', ω_2' eine Basis von Ω. $\square$

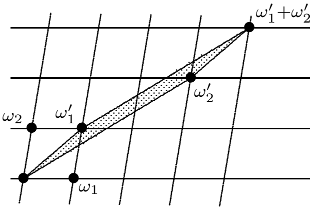

Abb. 4: Grundmaschen

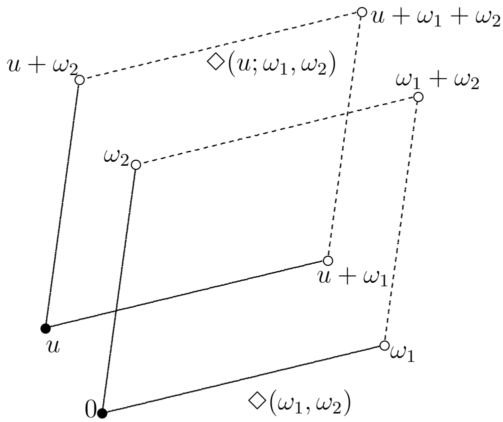

Abb. 5: Periodenparallelogramme

Es sei Ω ein Gitter in $\mathbb{C}$ und (ω_1, ω_2) eine Basis von Ω. Für $u \in \mathbb{C}$ definiert man das *Periodenparallelogramm* (bezüglich ω_1, ω_2 mit *Basispunkt* u) durch

(2) $$\Diamond(u;\omega_1,\omega_2) := \{u + \alpha_1\omega_1 + \alpha_2\omega_2 \,;\; 0 \le \alpha_1 < 1\,,\, 0 \le \alpha_2 < 1\}.$$

Im Fall $u = 0$ schreibt man auch

(3) $$\Diamond(\omega_1,\omega_2) := \Diamond(0;\omega_1,\omega_2) = \{\alpha_1\omega_1 + \alpha_2\omega_2 \,;\; 0 \le \alpha_1 < 1\,,\, 0 \le \alpha_2 < 1\}$$

und nennt $\Diamond(\omega_1,\omega_2)$ auch eine *Grundmasche* des Gitters. Jedes Periodenparallelogramm $P := \Diamond(u;\omega_1,\omega_2)$ ist ein *Fundamentalbereich* von $\mathbb{C}$ bezüglich Ω im folgenden Sinne:

Proposition A. *Zu jedem $z \in \mathbb{C}$ gibt es genau ein $\omega \in \Omega$ mit $z + \omega \in P$. Gehören insbesondere z und $z + \omega$, $\omega \in \Omega$, zu P, dann gilt $\omega = 0$.*

Beweis. Man wähle $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}$ mit $z - u = \xi_1\omega_1 + \xi_2\omega_2$ und reduziere ξ_1 und ξ_2 modulo 1. $\square$

Natürlich gibt es zu jedem Gitter viele Periodenparallelogramme, es gilt aber die

Proposition B. *Die elementar-geometrische Fläche eines beliebigen Periodenparallelogramms $P = \Diamond(u; \omega_1, \omega_2)$ ist gleich*

$$\operatorname{vol}\Omega := |\operatorname{Im}(\omega_1\overline{\omega_2})|.$$

Sie ist unabhängig von der Wahl der Basis (ω_1, ω_2) von Ω und des Basispunktes u.

Beweis. Die elementar-geometrische Fläche des Parallelogramms P ist in euklidischen Koordinaten zunächst gegeben durch (vgl. M. Koecher [1997], IV.1.6)

$$F := \left|\det\begin{pmatrix}\operatorname{Re}\omega_1 & \operatorname{Re}\omega_2\\ \operatorname{Im}\omega_1 & \operatorname{Im}\omega_2\end{pmatrix}\right|.$$

Eine Verifikation ergibt $F = |\operatorname{Im}(\omega_1\overline{\omega_2})|$. Ist nun $\omega_1' = a\omega_1 + b\omega_2$, $\omega_2' = c\omega_1 + d\omega_2$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, $ad - bc = \pm 1$, eine weitere Basis von Ω nach dem Basis-Lemma, so folgt

$$F' = |\operatorname{Im}(\omega_1'\overline{\omega_2'})| = |\operatorname{Im}(ad\omega_1\overline{\omega_2} + bc\omega_2\overline{\omega_1})| = |ad - bc| \cdot |\operatorname{Im}(\omega_1\overline{\omega_2})|,$$

also $F' = F$. □

7. Die Faktorgruppe $\mathbb{C}/\Omega$. Es sei Ω eine Untergruppe von $(\mathbb{C}, +)$. Man erklärt eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{C}$ durch

$$(1) \qquad a \equiv b \pmod{\Omega} \iff a - b \in \Omega.$$

Die Äquivalenzklassen können dann in der Form $a + \Omega$, $a \in \mathbb{C}$, geschrieben werden. Als abelsche Untergruppe von $(\mathbb{C}, +)$ ist Ω ein Normalteiler von $\mathbb{C}$. Die Faktorgruppe wird mit

$$(2) \qquad \mathbb{C}/\Omega := \{a + \Omega\ ;\ a \in \mathbb{C}\}$$

abgekürzt und die kanonische Projektion mit π bezeichnet:

$$(3) \qquad \pi : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}/\Omega\ ,\ \pi(a) := a + \Omega.$$

Ist Ω ein Gitter in $\mathbb{C}$, dann ist nach Proposition 6A für jedes beliebige Periodenparallelogramm $P = \Diamond(u; \omega_1, \omega_2)$ die Einschränkung

$$(4) \qquad \pi|_P : P \longrightarrow \mathbb{C}/\Omega \quad \text{bijektiv.}$$

Bekanntlich ist die Addition in $\mathbb{C}/\Omega$ durch

$$(5) \qquad (a + \Omega) + (b + \Omega) := (a + b) + \Omega$$

gegeben. Damit ist $\mathbb{C}/\Omega$ eine abelsche Gruppe mit Nullelement Ω. Induziert man die Topologie von $\mathbb{C}$ mit der kanonischen Projektion (3) nach $\mathbb{C}/\Omega$, betrachtet man also $\mathbb{C}/\Omega$ mit der Quotiententopologie, so wird $\mathbb{C}/\Omega$ zu einem kompakten topologischen Raum. Dabei heißt definitionsgemäß eine Teilmenge A von $\mathbb{C}/\Omega$ offen, wenn $\pi^{-1}(A)$ offen in $\mathbb{C}$ ist. Wegen (4) kann man sich $\mathbb{C}/\Omega$ als *Torus* im $\mathbb{R}^3$ vorstellen. Man hat dazu lediglich die gegenüberliegenden Seiten eines Periodenparallelogramms zu identifizieren.

Bemerkung. Mit Bemerkung 3b sieht man, dass eine diskrete Untergruppe Ω von $(\mathbb{C}, +)$ genau dann ein Gitter ist, wenn die Faktorgruppe $\mathbb{C}/\Omega$ kompakt ist.

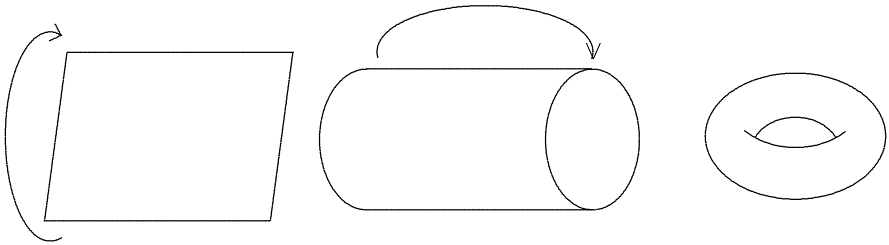

Abb. 6: Der Torus $\mathbb{C}/\Omega$

8. Bemerkungen über mehrfach unendliche Reihen. Mehrfache, also z. B. n-fach unendliche Reihen schreibt man meist in der allgemeinen Form

$$\sum_{g \in \mathbb{Z}^n} \alpha_g \quad \text{mit} \quad \alpha_g \in \mathbb{C} \tag{1}$$

und behandelt für $n > 1$ nur den Fall absoluter Konvergenz. Die Reihe (1) heiß *absolut konvergent*, wenn es ein $C > 0$ gibt mit der Eigenschaft $\sum_{g \in E} |\alpha_g| < C$ für *jede* endliche Teilmenge E von $\mathbb{Z}^n$. Für jede Bijektion $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}^n$ ist dann die Reihe $\sum_{k \in \mathbb{N}} \alpha_{\varphi(k)}$ absolut konvergent und der Grenzwert, der als $\sum_{g \in \mathbb{Z}^n} \alpha_g$ geschrieben wird, hängt nach dem Umordnungssatz (vgl. R. Remmert, G. Schumacher [2002], Satz 0.4.3) nicht von der Abzählung φ ab. Man hat damit auch den

Satz. *Eine absolut konvergente Reihe darf beliebig umgeordnet werden.*

9. Gitterinvarianten. Sei Ω ein Gitter in $\mathbb{C}$ mit einer Basis (ω_1, ω_2). Dann ist

$$\delta := \delta(\omega_1, \omega_2) := \sup\{|z - w|\,;\ z, w \in \Diamond(\omega_1, \omega_2)\} \tag{1}$$

der *Durchmesser* der zugehörigen Grundmasche. Für $\rho > 0$ sei $A_\rho(\Omega)$ die Anzahl der Gitterpunkte im abgeschlossenen Kreis um 0 mit Radius ρ, also

$$A_\rho(\Omega) := \sharp\{\omega \in \Omega\,;\ |\omega| \le \rho\}\,.$$

Satz. *Für alle $\rho \ge \delta$ gilt*

$$\frac{\pi}{\operatorname{vol}\Omega}(\rho - \delta)^2 \le A_\rho(\Omega) \le \frac{\pi}{\operatorname{vol}\Omega}(\rho + \delta)^2\,.$$

Beweis. Man vergleicht die Mengen

$$K_\rho := \{z \in \mathbb{C}\,;\ |z| \le \rho\} \quad \text{und} \quad M_\rho := \bigcup_{\omega\in\Omega, |\omega|\le\rho} \diamond(\omega;\omega_1,\omega_2)\,.$$

Aus der Definition von δ folgt

$$K_{\rho-\delta} \subset M_\rho \subset K_{\rho+\delta}\,.$$

Der Übergang zur Fläche liefert die Behauptung, denn es gilt

$$\text{Fläche } K_\rho = \pi\rho^2 \quad \text{und} \quad \text{Fläche } M_\rho = \operatorname{vol}\Omega \cdot A_\rho(\Omega)\,. \qquad \square$$

Damit erhalten wir das

Konvergenz-Lemma. *Die Reihe*

$$\sum_{0\ne\omega\in\Omega} |\omega|^{-\alpha}$$

konvergiert genau dann, wenn $\alpha > 2$.

Beweis. Sei zunächst $\alpha > 2$ und $\emptyset \ne E \subset \Omega \setminus \{0\}$ endlich sowie $M := \max\{|\omega|\,;\ \omega \in E\}$. Aus dem Satz erhält man ein $c_2 > 0$ mit

$$A_{n+1}(\Omega) - A_n(\Omega) \le \frac{\pi}{\operatorname{vol}\Omega} \cdot [(n+1+\delta)^2 - (n-\delta)^2] \le c_2 n$$

für alle $n \ge \delta$. Mit

$$c_1 := \sum_{0\ne\omega\in\Omega, |\omega|\le\delta+1} |\omega|^{-\alpha}$$

ergibt sich (vgl. W. Walter [1997; I], 5.10)

$$\sum_{\omega\in E} |\omega|^{-\alpha} \le c_1 + \sum_{n\in\mathbb{N}, \delta<n<M} (A_{n+1}(\Omega) - A_n(\Omega))n^{-\alpha} \le c_1 + c_2 \sum_{n=1}^{\infty} n^{1-\alpha} =: C < \infty\,.$$

Trivialerweise divergiert die Reihe für $\alpha \le 0$. Sei $0 < \alpha \le 2$ und $N \in \mathbb{N}, N > 2\delta$. Aus dem Satz erhält man ein $c_3 > 0$ mit

$$A_{kN}(\Omega) - A_{(k-1)N}(\Omega) \ge \frac{\pi}{\operatorname{vol}(\Omega)} \cdot \left[(kN-\delta)^2 - ((k-1)N+\delta)^2\right] \ge c_3 k$$

für alle $k \in \mathbb{Z}, k \ge 2$. Sei $E_n = \{\omega \in \Omega\ ;\ 0 < |\omega| \le nN\}$. Dann gilt

$$\sum_{\omega\in E_n} |\omega|^{-\alpha} \ge \sum_{k=2}^{n} (A_{kN}(\Omega) - A_{(k-1)N}(\Omega)) \cdot (kN)^{-\alpha} \ge c_3 N^{-\alpha} \cdot \sum_{k=2}^{n} k^{1-\alpha}\,.$$

Weil die Reihe $\sum_{k>1} k^{1-\alpha}$ für $\alpha \le 2$ divergiert (vgl. W. Walter [1997; I], 5.10), divergiert auch $\sum_{0\ne\omega\in\Omega} |\omega|^{-\alpha}$ für $\alpha \le 2$. $\square$

Eine andere Version dieses Konvergenz-Lemmas findet man in III.2.1.

Damit sind die so genannten EISENSTEIN-*Reihen*

$$(2) \qquad G_k := G_k(\Omega) := \sum_{0 \neq \omega \in \Omega} \omega^{-k} \quad \text{für } k \in \mathbb{Z}, \ \ k \geq 3$$

absolut konvergent. Da mit ω auch $-\omega$ zu Ω gehört, erhält man mit einer Umordnung wegen Satz 8 sofort $G_k = (-1)^k \cdot G_k$, also die

Proposition. *Es gilt* $G_k(\Omega) = 0$ *für ungerades* $k \geq 3$.

Zunächst kann man nicht ausschließen, dass *alle* G_k gleich Null sind, wenn das auch den unbefangenen Leser wohl wundern würde. Wir werden erst in Satz 4.2 sehen, dass alle G_k, $k \geq 4$ gerade, i. A. von Null verschieden sind.

Es gehört zu den faszinierenden Ergebnissen der noch zu entwickelnden Theorie der elliptischen Funktionen, dass diese EISENSTEIN-Reihen Polynome über $\mathbb{Q}$ in G_4 und G_6 sind (vgl. Korollar 3.3E). Zum Beispiel gilt $7G_8 = 3G_4^2$ und $11G_{10} = 5G_4G_6$. Dies steht in Analogie zu bekannten Ergebnissen über die RIEMANN*sche Zetafunktion*

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}, \quad s \in \mathbb{R}, \ \ s > 1.$$

Betrachtet man nämlich statt eines Gitters Ω eine Untergruppe „vom Rang 1“, also z. B. $\Omega = \mathbb{Z}$, dann erhält man an Stelle von (2) die Gitterinvarianten $F_k := 2\zeta(k)$, $k \geq 2$ gerade, die nach L. EULER bekanntlich rationale Vielfache von π^k sind, sich also als Monome in F_2 schreiben lassen:

$$5F_4 = F_2^2, \quad 35F_6 = 2F_2^3.$$

Man vergleiche hierzu M. KOECHER [1987], V.5.5.

Aufgaben. 1) Sei $0 \neq \omega \in \mathbb{C}$.
a) Es gibt eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von linear unabhängigen ganzen Funktionen mit Periodenmengen $\operatorname{Per} f_n \supset \mathbb{Z}\omega$.
b) Die Menge der ganzen Funktionen f mit $\operatorname{Per} f \supset \mathbb{Z}\omega$ ist ein Ring, der zum Ring der holomorphen Funktionen auf $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ isomorph ist.
2) Sei $\Omega = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$ ein Gitter in $\mathbb{C}$. Für $\omega = m_1\omega_1 + m_2\omega_2 \in \Omega$ sind äquivalent:
(i) Es gibt ein $\omega' \in \Omega$ mit $\Omega = \mathbb{Z}\omega + \mathbb{Z}\omega'$.
(ii) m_1 und m_2 sind teilerfremd.
(iii) Ist $n \in \mathbb{Z}$, $n > 1$, so gilt $\frac{1}{n}\omega \notin \Omega$.
3) Man bestimme $m_1, m_2, m_3 \in \mathbb{Z}$, nicht alle Null, so dass

$$(*) \qquad |m_1\sqrt{2} + m_2(\sqrt{3} + i\sqrt{5}) + m_3 i\sqrt{7}| < 1$$

und $m_1^2 + m_2^2 + m_3^2$ minimal unter der Bedingung $(*)$ ist.
4) Sei $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$, $d < 0$ quadratfrei, ein imaginär-quadratischer Zahlkörper der Diskriminante D und Ω der Ring der ganzen Zahlen, d. h. $\Omega = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\frac{1+\sqrt{d}}{2}$, $D = d$, falls $d \equiv 1 \pmod 4$, und sonst $\Omega = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\sqrt{d}$, $D = 4d$. Dann ist Ω ein Gitter in $\mathbb{C}$ und die Fläche eines Periodenparallelogramms ist $\frac{1}{2}\sqrt{|D|}$.

5) $\mathrm{SL}(2;\mathbb{Z})$ wird erzeugt von den Matrizen $\left(\begin{smallmatrix}1&0\\1&1\end{smallmatrix}\right)$ und $\left(\begin{smallmatrix}1&1\\0&1\end{smallmatrix}\right)$.
6) Sei $\Omega = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$ ein Gitter in $\mathbb{C}$ und δ der Durchmesser 9(1). Dann gilt

$$\delta(\omega_1, \omega_2) = \max\{|\omega_1 + \omega_2|, |\omega_1 - \omega_2|\}.$$

7) Sei $\Omega = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$ ein Gitter in $\mathbb{C}$ mit $\tau := \omega_1/\omega_2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, $|\tau| \geq 1$, $|\mathrm{Re}\,\tau| \leq \frac{1}{2}$ (vgl. **3**). Dann gilt

$$\delta(\omega_1, \omega_2) \leq \delta(\omega_1', \omega_2') \quad \text{für jede Basis} \quad (\omega_1', \omega_2') \quad \text{von } \Omega.$$

8) Sei Ω ein Gitter in $\mathbb{C}$ und $C \in \mathbb{R}$. Dann gibt es eine Basis ω_1, ω_2 von Ω mit $\delta(\omega_1, \omega_2) > C$.
9) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ beide positiv. Für $\rho > 0$ sei

$$e(\rho) := \sharp\left\{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}\,;\ \left(\tfrac{x}{a}\right)^2 + \left(\tfrac{y}{b}\right)^2 \leq \rho\right\}$$

die Anzahl der ganzen Punkte innerhalb der Ellipse. Dann gibt es ein $c > 0$, so dass

$$|e(\rho) - ab\pi\rho^2| \leq c\rho \quad \text{für alle } \rho \geq 1.$$

10) Ein anderer Beweis des Konvergenz-Lemmas 9 verläuft wie folgt:
(i) Es genügt, das Gitter $\Omega = \mathbb{Z}i + \mathbb{Z}$ zu betrachten.
(ii) Sei $\alpha > 1$. Dann gibt es $0 < c' < c$, so dass für alle $0 \neq m \in \mathbb{Z}$ gilt:

$$c' \cdot |m|^{1-\alpha} \leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} (m^2 + n^2)^{-\alpha/2} \leq c \cdot |m|^{1-\alpha}.$$

(iii) Man folgere die Behauptung des Konvergenz-Lemmas aus (i) und (ii).
11) Sei $\Omega = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$ ein Gitter in $\mathbb{C}$. Dann gilt für $\alpha > 2$

$$\sum_{0 \neq \omega \in \Omega} |\omega|^{-\alpha} = \sum_{0 \neq g \in \mathbb{Z}^2} (g^t S g)^{-\alpha/2}, \quad S = \begin{pmatrix} |\omega_1|^2 & \mathrm{Re}\,(\omega_1\overline{\omega_2}) \\ \mathrm{Re}\,(\omega_1\overline{\omega_2}) & |\omega_2|^2 \end{pmatrix}.$$

12) Sei $k \in \mathbb{Z}$, $k > 2$. Es gilt $G_k(\Omega) = 0$, falls $\Omega = \mathbb{Z}i + \mathbb{Z}$ und $k \not\equiv 0 \,(\mathrm{mod}\ 4)$ oder $\Omega = \mathbb{Z}\frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3}) + \mathbb{Z}$ und $k \not\equiv 0 \,(\mathrm{mod}\ 6)$.

§2. Der Körper der elliptischen Funktionen

Bisher ist es überhaupt nicht klar, ob es zu einem gegebenen Gitter Ω in $\mathbb{C}$ meromorphe Funktionen f gibt mit $\mathrm{Per}\, f = \Omega$ (vgl. Bemerkung 1.3c). Unter der Annahme der Existenz einer geeigneten solchen Funktion gelingt überraschenderweise schon die Beschreibung aller derartigen Funktionen. Der Existenz-Beweis wird dann in § 3 nachgeliefert.

In diesem Paragrafen sei $\Omega = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$ stets ein Gitter in $\mathbb{C}$.

1. Erste Eigenschaften elliptischer Funktionen. Eine meromorphe Funktion f auf $\mathbb{C}$ heißt *elliptisch* oder *doppelt–periodisch* bezüglich Ω, wenn Ω in der Menge $\mathrm{Per}\, f$ der Perioden von f (vgl. 1.2) enthalten ist: $\Omega \subset \mathrm{Per}\, f$. Das bedeutet also

(1) $\quad D_f + \omega = D_f \quad$ für alle $\omega \in \Omega$,

(2) $\quad f(z + \omega) = f(z) \quad$ für alle $\omega \in \Omega$ und $z \in \mathbb{C} \setminus D_f$.

Interpretiert man hier (2) derart, dass die Gleichung für alle z und ω gelten möge, für welche beide Seiten sinnvoll sind, so ist (1) eine Folge von (2). Die Bedingungen (1) und (2) sind sicher erfüllt, wenn sie für eine Basis von Ω richtig sind. Es bezeichne $\mathcal{K}(\Omega)$ die Menge der bezüglich Ω elliptischen Funktionen.

Für $0 \neq f \in \mathcal{M}$ und $c \in \mathbb{C}$ hat man bekanntlich (R. Remmert, G. Schumacher [2002], 12.1.3) eine Laurent–*Entwicklung* der Form

$$f(z) = \sum_{n \geq m} a_n (z - c)^n \;, \quad a_m \neq 0, \quad m \in \mathbb{Z},$$

die in einer punktierten Umgebung von c normal, speziell also lokal-gleichmäßig konvergiert. Hier sind die *Ordnung von f in c* wie in 1.1(3) durch $\operatorname{ord}_c f := m$ und das *Residuum von f in c* durch $\operatorname{res}_c f := a_{-1}$ erklärt.

Für $f \in \mathcal{K}(\Omega)$, $\omega \in \Omega$ und z aus einer geeigneten Umgebung von $c + \omega$ hat man

$$f(z) = f(z - \omega) = \sum_{n \geq m} a_n (z - [c + \omega])^n$$

und es folgt daher

$$\operatorname{ord}_{c+\omega} f = \operatorname{ord}_c f \quad \text{sowie} \quad \operatorname{res}_{c+\omega} f = \operatorname{res}_c f. \tag{3}$$

Damit ist speziell mit c auch $c+\omega$, $\omega \in \Omega$, ein Pol (bzw. eine Nullstelle oder eine w-Stelle) von $f \in \mathcal{K}(\Omega)$. Da sich die Pole in kompakten Mengen nicht häufen können, hat man zusammengefasst die

Proposition. *Die elliptischen Funktionen $\mathcal{K}(\Omega)$ bezüglich Ω bilden einen Unterkörper des Körpers $\mathcal{M}$ aller meromorphen Funktionen auf $\mathbb{C}$, der die konstanten Funktionen enthält. Jedes $f \in \mathcal{K}(\Omega)$ hat in jedem Periodenparallelogramm nur endlich viele Pole.*

Ein Blick auf (1) und (2) ergibt das einfache, aber wichtige

Lemma. *Mit $f(z)$ gehören auch*

$$f'(z) \quad \textit{und} \quad g(z) := f(nz + w) \quad \textit{mit} \quad 0 \neq n \in \mathbb{Z},\ w \in \mathbb{C} \text{ fest},$$

zu $\mathcal{K}(\Omega)$.

2. Die vier Sätze von Liouville. Im Jahre 1847 bemerkte J. Liouville (1809–1882), dass für elliptische Funktionen erhebliche, zunächst nicht erkennbare Einschränkungen gelten (J. Reine Angew. Math. **88**, 277–310 (1880)):

Satz A. *Ist $f \in \mathcal{K}(\Omega)$ holomorph, dann ist f konstant.*

Beweis. Sei P ein Periodenparallelogramm. Da der Abschluss von P kompakt ist, gibt es ein $C > 0$ mit $|f(z)| \leq C$ für $z \in P$. Ist $z \in \mathbb{C}$ beliebig, so gibt es nach Proposition 1.6A ein $\omega \in \Omega$ mit $z + \omega \in P$. Damit folgt

$$|f(z)| = |f(z + \omega)| \leq C,$$

so dass f auf $\mathbb{C}$ beschränkt ist. Nach dem klassischen Satz von LIOUVILLE (R. REMMERT, G. SCHUMACHER [2002], Satz 8.3.5) ist f konstant. □

Satz B. *Ist $f \in \mathcal{K}(\Omega)$ und P ein Periodenparallelogramm, dann gilt*

$$\sum_{c\in P} \operatorname{res}_c f = 0. \tag{1}$$

Beweis. Wegen 1(3) und Proposition 1.6A ist die Summe (1) endlich und unabhängig von der Wahl von P. Sei also u so gewählt, dass auf dem Rand ∂P von P keine Singularitäten liegen.
Man integriert nun f über den Rand ∂P. Nach dem Residuensatz gilt dann

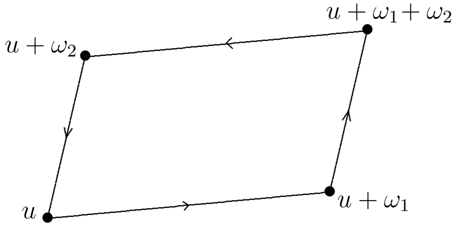

Abb. 7: Integrationsweg

$$\pm\, 2\pi i \sum_{c\in P} \operatorname{res}_c f = \int_u^{u+\omega_1} f(z)\,dz + \int_{u+\omega_1}^{u+\omega_1+\omega_2} f(z)\,dz + \int_{u+\omega_1+\omega_2}^{u+\omega_2} f(z)\,dz + \int_{u+\omega_2}^{u} f(z)\,dz$$

$$= \int_u^{u+\omega_1} (f(z) - f(z+\omega_2))dz + \int_{u+\omega_2}^{u} (f(z) - f(z+\omega_1))dz\ .$$

Wegen $f \in \mathcal{K}(\Omega)$ ist die rechte Seite aber Null. □

Satz C. *Ist $f \in \mathcal{K}(\Omega)$ nicht konstant und P ein Periodenparallelogramm, dann gilt für jedes $w \in \mathbb{C}$*

$$\sum_{c\in P} \operatorname{ord}_c(f - w) = 0, \tag{2}$$

d. h., wenn man mit den entsprechenden Vielfachheiten zählt, ist

$$\begin{aligned} \textit{Anzahl der Pole von } f \quad &= \quad \textit{Anzahl der } w\textit{-Stellen von } f \\ &= \quad \textit{Anzahl der Nullstellen von } f \end{aligned}$$

in P. Speziell nimmt jedes nicht-konstante $f \in \mathcal{K}(\Omega)$ in P jeden Wert an.

Beweis. Nach Lemma 1 ist

$$g(z) := \frac{f'(z)}{f(z) - w}$$

wieder eine elliptische Funktion bezüglich Ω und es gilt $\operatorname{res}_c g = \operatorname{ord}_c(f - w)$. Damit folgt die Behauptung aus Satz B. Weil f nicht konstant ist, besitzt $f - w$ nach (2) eine Nullstelle in P, da $f - w$ nach Satz A und 1(3) mindestens einen Pol in P hat. □

Satz D. *Ist $0 \neq f \in \mathcal{K}(\Omega)$ und P ein Periodenparallelogramm, so gilt*

$$\sum_{c \in P} (\operatorname{ord}_c f) \cdot c \in \Omega. \tag{3}$$

Beweis. Man wendet die in Satz B benutzte Methode an auf das Integral

$$2\pi i \sum_{c \in P} (\operatorname{ord}_c f) \cdot c = \int_{\partial P} z \cdot \frac{f'(z)}{f(z)} dz$$

$$= \pm \left(\int_u^{u+\omega_1} z\frac{f'(z)}{f(z)} - (z+\omega_2)\frac{f'(z+\omega_2)}{f(z+\omega_2)} dz + \int_{u+\omega_2}^{u} z\frac{f'(z)}{f(z)} - (z+\omega_1)\frac{f'(z+\omega_1)}{f(z+\omega_1)} dz \right)$$

$$= \pm \left(\omega_1 \int_u^{u+\omega_2} \frac{f'(z)}{f(z)} dz - \omega_2 \int_u^{u+\omega_1} \frac{f'(z)}{f(z)} dz \right).$$

Wegen $f(u) = f(u + \omega_j)$ gilt

$$\int_u^{u+\omega_j} \frac{f'(z)}{f(z)} dz \in 2\pi i \mathbb{Z} \quad \text{für } j = 1, 2,$$

also (3). □

Nach Satz B gibt es keine elliptischen Funktionen mit nur einem Pol 1. Ordnung in P. Entweder muss man also wenigstens zwei Pole 1. Ordnung oder einen Pol 2. Ordnung mit Residuum Null zulassen. Beide Wege wurden von K.T.W. Weierstrass beschritten, wir betrachten zunächst nur den zweiten Fall.

Zählt man die Null- und Polstellen eines nicht-konstanten $f \in \mathcal{K}(\Omega)$ mit den Vielfachheiten, dann gibt es nach Satz C Punkte $a_1, \ldots, a_r$ und $b_1, \ldots, b_r$ aus P, so dass f genau in $a_1, \ldots, a_r$ Nullstellen und genau in $b_1, \ldots, b_r$ Pole hat. Dabei wird die Vielfachheit jeweils durch die Anzahl der Wiederholungen der Punkte angegeben. Damit schreibt sich die Aussage von Satz D mit 1.7(1) in der Form

$$a_1 + \cdots + a_r \equiv b_1 + \cdots + b_r \,(\operatorname{mod} \Omega). \tag{4}$$

Diese Relation war N.H. Abel bereits 1826 bekannt (*Œuvres complètes I*, 145–211). Nach einem Vorschlag von Jacobi heißt (4) daher auch Abel*sche Relation.* Man nennt r die *Ordnung* der elliptischen Funktion f. Die Sätze A und B besagen, dass eine elliptische Funktion der Ordnung 0 konstant ist und dass es keine elliptische Funktion der Ordnung 1 gibt. Wir werden in **6.3** sehen, dass $r \geq 2$ und (4) auch hinreichend für die Existenz einer elliptischen Funktion mit vorgegebenen Null- und Polstellen sind.

3. Der Existenz-Satz und erste Folgerungen. Als erste Konsequenz der Liouvilleschen Sätze zeigt es sich in diesem und im nächsten Abschnitt, dass man allein aus der Annahme der Existenz *einer geeigneten* elliptischen Funktion eine Beschreibung aller elliptischen Funktionen folgern kann. Es sind dabei keine weiteren analytischen Schlüsse erforderlich. Dazu werden lediglich die LIOUVILLEschen Sätze angewendet!

Existenz-Satz. *Es gibt eine elliptische Funktion $\wp = \wp_\Omega$, die genau in jedem Gitterpunkt von Ω einen Pol 2. Ordnung hat und sonst holomorph ist. Ihre* LAURENT-*Reihe bei* 0 *hat die Form*

$$\wp(z) = z^{-2} + a_1 z + \ldots. \tag{1}$$

Der *Beweis* wird bis zum nächsten Paragrafen zurückgestellt (vgl. **3.1**). Nach 1(3) ist klar, dass $\wp$ an allen Polen das Residuum Null hat. Wegen Satz 2A ist $\wp$ als elliptische Funktion durch (1) eindeutig bestimmt. Man nennt $\wp$ die WEIERSTRASSsche $\wp$*–Funktion* (zum Gitter Ω).

Proposition. a) *$\wp$ ist eine gerade Funktion, d. h. $\wp(-z) = \wp(z)$. Es gilt $a_1 = 0$ in* (1).
b) *$\wp'$ ist eine ungerade Funktion, die genau an allen Gitterpunkten von Ω Pole* 3. *Ordnung hat und sonst holomorph ist.*

Beweis. a) Die elliptische Funktion $f(z) := \wp(-z) - \wp(z)$ ist nach (1) in 0 und daher überall holomorph. Nach Satz 2A ist f konstant und somit 0 nach (1).
b) Die Behauptung folgt aus a) und dem Existenz-Satz. □

Damit können wir schon alle Nullstellen von $\wp'$ angeben.

Lemma A. *Ist $\omega \in \Omega$, aber $\omega/2 \notin \Omega$, dann ist $\omega/2$ eine einfache Nullstelle von $\wp'$. Jede Nullstelle von $\wp'$ hat umgekehrt diese Form.*

Beweis. Da $\wp'$ eine ungerade elliptische Funktion ist, hat man

$$\wp'(z + \omega) = \wp'(z) = -\wp'(-z).$$

Ist $\omega/2$ kein Pol von $\wp$ und $\wp'$, d. h. $\omega/2 \notin \Omega$, dann darf man $z = -\omega/2$ setzen und erhält

$$\wp'(\omega/2) = -\wp'(\omega/2), \quad \text{also} \quad \wp'(\omega/2) = 0.$$

Sei ω_1, ω_2 eine Basis von Ω. Im Periodenparallelogramm $P = \Diamond(\omega_1, \omega_2)$ hat $\wp'$ dann die Nullstellen

$$\omega_1/2\ ,\ \omega_2/2\ ,\ (\omega_1 + \omega_2)/2\ . \tag{$*$}$$

Nach (1) hat $\wp'$ in P nur einen Pol 3. Ordnung bei 0. Gemäß Satz 2C ist die Anzahl aller Nullstellen von $\wp'$ in P (gezählt mit ihren Vielfachheiten) gleich 3. Die Nullstellen ($*$) sind daher einfach und es sind alle Nullstellen von $\wp'$ in P. Ist nun z eine beliebige Nullstelle von $\wp'$, so existiert ein $\omega' \in \Omega$ mit $z - \omega' \in P$. Dann ist aber $z - \omega'$ einer der Punkte ($*$) und somit z von der Form $\omega/2$ mit $\omega \in \Omega$, aber $\omega/2 \notin \Omega$. □

Als gerade Funktion hat $\wp$ mit u auch $-u$ als Nullstelle. Allgemein gilt das

Lemma B. *Es sei P ein Periodenparallelogramm. Zu $w \in \mathbb{C}$,*

$$w \neq \wp(\omega/2)\ ,\ \omega \in \Omega\ ,\ \omega/2 \notin \Omega, \tag{2}$$

gibt es genau zwei verschiedene Punkte $u, v \in P$ mit $\wp(u) = \wp(v) = w$. In diesem Fall gilt $u + v \in \Omega$. Gibt es umgekehrt zwei verschiedene $u, v \in P$ mit $\wp(u) = \wp(v) = w$, so gilt (2).

Beweis. Man wendet Satz 2C auf $\wp$ an. Nach (1) ist die Anzahl der w-Stellen von $\wp$ in P (gezählt mit ihren Vielfachheiten) gleich 2. Man unterscheidet die beiden Fälle:
a) Es gibt nur ein $u \in P$ mit $\wp(u) = w$. Dann ist u eine doppelte w-Stelle von $\wp$ und es folgt $\wp'(u) = 0$. Wegen (2) ist dieser Fall nach Lemma A ausgeschlossen.
b) Es gibt zwei verschiedene $u, v \in P$ mit $\wp(u) = \wp(v) = w$. Aus Satz 2D folgt dann sogleich $u + v \in \Omega$. □

Man wählt jetzt eine Basis ω_1, ω_2 von Ω, setzt $P := \diamond(\omega_1, \omega_2)$ und benutzt die Standard-Bezeichnung

$$e_k := \wp(\omega_k/2)\ ,\ k = 1, 2, 3 \quad \text{mit} \ \ \omega_3 := \omega_1 + \omega_2. \tag{3}$$

Nach Lemma A und B hat dann

$$\wp(z) - e_k \ \text{ genau eine doppelte Nullstelle in } P\text{, nämlich in } z = \omega_k/2 \tag{4}$$

für $k = 1, 2, 3$ und

$$\wp(z) - w \quad \text{zwei einfache Nullstellen in } P \text{ für } w \neq e_1, e_2, e_3. \tag{5}$$

Weil $\omega_1/2, \omega_2/2, \omega_3/2$ paarweise verschieden sind, sind nach (4) auch

$$e_1, e_2, e_3 \quad \text{paarweise verschieden.} \tag{6}$$

Diese Ergebnisse führen bereits zur ersten Differentialgleichung für $\wp$:

Satz. *Für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ gilt*

$$\wp'^2(z) = 4 \cdot (\wp(z) - e_1) \cdot (\wp(z) - e_2) \cdot (\wp(z) - e_3).$$

Beweis. Man betrachtet neben $\wp'^2$ die elliptische Funktion

$$f(z) := 4 \cdot (\wp(z) - e_1) \cdot (\wp(z) - e_2) \cdot (\wp(z) - e_3).$$

Nach (4) hat f in P Nullstellen (und zwar doppelte) genau an den Stellen

$$\omega_1/2\ ,\ \omega_2/2\ ,\ \omega_3/2 = (\omega_1 + \omega_2)/2.$$

Nach Lemma A gilt die gleiche Aussage für $\wp'^2$. Da sich die Pole in f nicht wegheben können, hat f in P nur einen Pol in 0 und zwar der Ordnung 6. Wegen (1) gilt aber

$$(*) \qquad \wp(z) = z^{-2} + \dots\,, \quad \wp'(z) = -2z^{-3} + \dots\,, \quad \wp'^2(z) = 4z^{-6} + \dots$$

und daher hat auch $\wp'^2$ in P nur einen Pol bei $z = 0$ und zwar von der Ordnung 6. Damit ist $\wp'^2/f$ eine elliptische Funktion ohne Pole, also nach Satz 2A konstant. Vergleicht man mit $(*)$ den Koeffizienten von z^{-6} in den LAURENT-Entwicklungen um 0, so sieht man, dass diese Konstante gleich 1 ist. $\square$

Bemerkungen. a) Die Definition (3) hängt natürlich von der Wahl der Basis von Ω ab. Bei einem Wechsel der Basis werden die Werte e_1, e_2, e_3 aber lediglich permutiert.
b) Wenn man bereit ist, die zunächst unbekannten Koeffizienten von z^2 und z^4 in der LAURENT-Entwicklung von $\wp$ einzubeziehen, kann man auch eine zweite Form der Differentialgleichung für $\wp$ so herleiten, wie es in **3.3** geschehen wird.
c) Eine einfache Funktion $f \in \mathcal{K}(\Omega)$ mit zwei Polen erster Ordnung ist z. B.

$$f(z) := \frac{\wp'(z) - \wp'(w)}{\wp(z) - \wp(w)}\,, \quad w \in \mathbb{C} \setminus \tfrac{1}{2}\Omega$$

(vgl. Proposition 5.1). Man sieht unschwer, dass f nur Pole 1. Ordnung an den Stellen Ω und $-w + \Omega$ besitzt.

4. Der Körper $\mathcal{K}(\Omega)$. Wegen 3(1) ist klar, dass sich bei einem Polynom in $\wp$ die Pole nicht wegheben können. Damit ist $\wp$ nicht algebraisch, also transzendent über dem Körper $\mathbb{C}$. Der Körper $\mathbb{C}(\wp)$ ist somit isomorph zum Körper aller rationalen Funktionen über $\mathbb{C}$.

Satz. a) *Die geraden elliptischen Funktionen bezüglich Ω sind genau die rationalen Funktionen in $\wp$.*
b) $\mathcal{K}(\Omega) = \mathbb{C}(\wp)[\wp']$.
c) *Der Grad der Körpererweiterung von $\mathcal{K}(\Omega)$ über $\mathbb{C}(\wp)$ ist* 2.

Wegen Satz 3 lässt sich dann jedes $f \in \mathcal{K}(\Omega)$ eindeutig schreiben als

$$(1) \qquad f = R(\wp) + Q(\wp) \cdot \wp',$$

wobei R und Q rationale Funktionen über $\mathbb{C}$ sind. Man kennt also die elliptischen Funktionen „so gut, wie man die Funktion $\wp$ kennt“.

Beweis. a) Es sei $f \in \mathcal{K}(\Omega)$ gerade und nicht konstant. Die Ordnung von f, also die Anzahl der Pole von f im Periodenparallelogramm (gezählt mit ihren Vielfachheiten), sei m. Weiter sei $P := \diamond(\omega_1, \omega_2)$ die zugehörige Grundmasche und $N := \{c \in P\,;\ f'(c) = 0\}$. Dann ist N endlich.

(i) *Die Zahl m ist gerade, $m = 2k$. Zu jeder komplexen Zahl $u \notin f(N)$ gibt es paarweise verschiedene Punkte*

$$(*) \qquad c_1, \dots, c_k\,,\ c_1', \dots, c_k' \in P\,,\ c_j + c_j' \in \Omega \quad \textit{für } j = 1, \dots, k,$$

so dass u von f in P genau an den Stellen $(*)$ angenommen wird, und zwar mit der Vielfachheit 1.

Nach Satz 2C ist die Anzahl der u-Stellen von f ebenfalls gleich m. Sei $c \in P$ mit $f(c) = u$ gegeben. Da f gerade ist, gilt auch $f(-c) = u$ und es gibt ein $\omega \in \Omega$ mit $c' = \omega - c \in P$ sowie $f(c') = u$. Im Falle $c' = c$ würde $f(c+z) = f(\omega - c + z) = f(-c+z) = f(c-z)$, also $f'(c+z) = -f'(c-z)$ und damit $f'(c) = 0$, also $u \in f(N)$ folgen. Daher sind c und $c' = \omega - c$ verschieden und die u-Stellen von f treten in Paaren auf. Wegen $u \notin f(N)$ hat jede u-Stelle die Vielfachheit 1.

(ii) *f ist eine rationale Funktion in $\wp$.*
Man wählt nun $v \neq u$ nicht aus $f(N)$ und erhält nach (i) Punkte

$$(**) \qquad d_1, \ldots, d_k\ ,\ d'_1, \ldots, d'_k\ ,\ d_j + d'_j \in \Omega \quad \text{für } j = 1, \ldots, k,$$

so dass v von f in P genau an den Stellen $(**)$ angenommen wird, und zwar mit der Vielfachheit 1. Die elliptische Funktion

$$g(z) := \frac{f(z) - u}{f(z) - v}$$

hat dann

$(***)$ Nullstellen in P genau an den Stellen $(*)$, und zwar mit der Ordnung 1, und Pole in P genau an den Stellen $(**)$, und zwar mit der Ordnung 1,

denn die Pole von f heben sich heraus.

Weil die Punkte in $(*)$ und $(**)$ paarweise verschieden sind, gilt

$$c_j, c'_j, d_j, d'_j \notin \frac{1}{2}\Omega.$$

Demnach hat

$$h(z) := \frac{(\wp(z) - \wp(c_1)) \cdot \ldots \cdot (\wp(z) - \wp(c_k))}{(\wp(z) - \wp(d_1)) \cdot \ldots \cdot (\wp(z) - \wp(d_k))}$$

ebenfalls die Eigenschaft $(***)$. Der Quotient g/h ist daher holomorph, also nach Satz 2A konstant. Aus $g \in \mathbb{C}(\wp)$ folgt wegen

$$f = \frac{vg - u}{g - 1}$$

die Behauptung.
b) Ist $f \in \mathcal{K}(\Omega)$ nicht-konstant, dann schreibt man

$$f = g + h\wp' \;\text{ mit }\; g(z) := \frac{1}{2}(f(z) + f(-z)) \;\text{ und }\; h(z) = \frac{1}{2\wp'(z)}(f(z) - f(-z)).$$

Offenbar gehören g und h zu $\mathcal{K}(\Omega)$ und sind gerade. Nach a) sind dann g und h rationale Funktionen von $\wp$.
c) Wegen $\wp' \notin \mathbb{C}(\wp)$ folgt die Behauptung aus Satz 3. $\square$

In algebraischer Formulierung erhält man das

Korollar A. *Für über* $\mathbb{C}$ *unabhängige Unbestimmte* X, Y *gilt*

$$\mathcal{K}(\Omega) \cong \mathbb{C}(X)[Y]/I(X,Y),$$

wenn $I(X,Y)$ *das von* $Y^2 - 4(X-e_1)(X-e_2)(X-e_3)$ *erzeugte Hauptideal in* $\mathbb{C}(X)[Y]$ *bezeichnet.*

Beweis. Man definiert einen Ring-Homomorphismus

$$\Phi : \mathbb{C}(X)[Y] \to \mathcal{K}(\Omega) \quad \text{durch} \quad X \mapsto \wp\,,\ Y \mapsto \wp'.$$

Nach dem Satz ist Φ surjektiv. Man schreibt nun $\varphi \in \mathbb{C}(X)[Y]$ nach Division mit Rest über dem Körper $\mathbb{C}(X)$ in der Form

$$\varphi(X,Y) = \big(Y^2 - 4(X-e_1)(X-e_2)(X-e_3)\big) \cdot q(X,Y) + r(X,Y)$$

mit $q, r \in \mathbb{C}(X)[Y]$ und $r(X,Y) = r_1(X) + r_2(X) \cdot Y$ mit $r_1(X), r_2(X) \in \mathbb{C}(X)$. Aufgrund der Differentialgleichung in Satz 3 liegt φ genau dann im Kern von Φ, wenn $r(\wp, \wp') = 0$ gilt. Wegen (1) bedeutet das $r(X,Y) = 0$. Damit erhält man Kern $\Phi = I(X,Y)$ und die Behauptung folgt aus dem Homomorphie-Satz für Ringe. □

Nach dem Satz hat $\mathcal{K}(\Omega)$ im Sinne der Algebra den Transzendenzgrad 1 über $\mathbb{C}$ (vgl. K. Meyberg [1976], Abschnitt 6.10B). Damit sind je zwei Elemente von $\mathcal{K}(\Omega)$ algebraisch abhängig und man erhält das

Korollar B. *Zu* f, g *aus* $\mathcal{K}(\Omega)$ *gibt es ein nicht-triviales Polynom* $P(X,Y)$ *in* $\mathbb{C}[X,Y]$ *mit*

$$P(f,g) = 0.$$

Bemerkung. Weil $\mathcal{K}(\Omega)$ ein Körper ist, ist $I(X,Y)$ ein maximales Ideal in $\mathbb{C}(X)[Y]$ und somit $Y^2 - 4(X-e_1)(X-e_2)(X-e_3)$ ein irreduzibles Polynom in Y über $\mathbb{C}(X)$.

5*. Divisoren. Für jede Abbildung $\varphi : \mathbb{C}/\Omega \to \mathbb{Z}$ mit endlichem Träger ist der *Grad* von φ definiert durch

$$\text{Grad } \varphi := \sum_{c \in \mathbb{C}/\Omega} \varphi(c) \in \mathbb{Z}.$$

Unter einem *Divisor* von $\mathbb{C}/\Omega$ versteht man nun eine Abbildung $\varphi : \mathbb{C}/\Omega \to \mathbb{Z}$ mit endlichem Träger und Grad $\varphi = 0$. Bei punktweiser Addition bildet die Menge Div $(\mathbb{C}/\Omega)$ aller Divisoren von $\mathbb{C}/\Omega$ eine abelsche Gruppe.

Jedem $0 \neq f \in \mathcal{K}(\Omega)$ kann nun eine Abbildung

$$\varphi_f : \mathbb{C}/\Omega \longrightarrow \mathbb{Z}\,,\ \varphi_f(c+\Omega) := \operatorname{ord}_c f,$$

zugeordnet werden. Nach 1(3) hängt diese Definition nicht von der Wahl des Vertreters c ab. Wegen Satz 2C ist dann φ_f, $f \in \mathcal{K}(\Omega)$, ein Divisor, der so genannte *Hauptdivisor* zu f.

Wir definieren einen surjektiven Gruppen-Homomorphismus

$$\Phi : \mathrm{Div}\,(\mathbb{C}/\Omega) \longrightarrow \mathbb{C}/\Omega\,, \quad \Phi(\varphi) := \sum_{c \in \mathbb{C}/\Omega} \varphi(c) \cdot c,$$

und erhalten

$$\mathrm{Div}\ (\mathbb{C}/\Omega)/\mathrm{Kern}\,\Phi \cong \mathbb{C}/\Omega.$$

Zum Nachweis von

$$\varphi_f \in \mathrm{Kern}\,\Phi \quad \text{für alle} \quad 0 \neq f \in \mathcal{K}(\Omega)$$

beachte man

$$\Phi(\varphi_f) = \sum_{c \in \mathbb{C}/\Omega} \varphi_f(c) \cdot c = \sum_{c \in P} (\mathrm{ord}_c\, f) \cdot (c + \Omega)$$

für jedes Periodenparallelogramm P von Ω. Nach Satz 2D ist die rechte Seite aber gleich Ω. In **6.3** wird man dann sehen, *dass auch umgekehrt zu jedem* $\varphi \in \mathrm{Kern}\,\Phi$ *ein* $0 \neq f \in \mathcal{K}(\Omega)$ *existiert mit* $\varphi = \varphi_f$.

Aufgaben. 1) Ein gerades $f \in \mathcal{K}(\Omega)$ nimmt alle seine Werte bereits in dem Dreieck mit den Ecken $0, \omega_1, \omega_2$ an.
2) Sei f eine elliptische Funktion, die im Periodenparallelogramm P genau zwei einfache Pole in a und b hat. Dann gilt $f(a + b - z) = f(z)$.
3) Man beschreibe alle $f \in \mathcal{K}(\Omega)$, die genau in den Punkten $\omega/2$, $\omega \in \Omega$, $\omega \notin 2\Omega$, einfache Pole haben und sonst holomorph sind.
4) Sei $\omega \in \Omega$ und $f \in \mathcal{K}(\Omega)$. Ist f ungerade, so hat f an der Stelle $z = \omega/2$ einen Pol oder eine Nullstelle und zwar von ungerader Ordnung. Ist f gerade, so ist die Ordnung von f an der Stelle $z = \omega/2$ gerade.
5) Sei $0 \neq f \in \mathcal{M}$, so dass es zu jedem $\omega \in \Omega$ ein $c(\omega) \in \mathbb{C}$ gibt mit $f(z + \omega) = c(\omega) f(z)$ für alle $z \in \mathbb{C} \setminus D_f$. Dann gilt
(i) $\mathrm{ord}_{c+\omega}\, f = \mathrm{ord}_c\, f$ für alle $c \in \mathbb{C}, \omega \in \Omega$.
(ii) $\sum_{c \in P} \mathrm{ord}_c\, f = 0$.
(iii) Ist f ganz, so existieren $a, b \in \mathbb{C}$ mit $f(z) = ae^{bz}$ für alle $z \in \mathbb{C}$.
6) Sei f eine ganze Funktion, so dass es zu jedem $\omega \in \Omega$ ein $c(\omega) \in \mathbb{C}$ gibt mit $f(z + \omega) = f(z) + c(\omega)$. Dann gibt es $a, b \in \mathbb{C}$ mit $f(z) = az + b$.
7) Es gilt $\wp''(z) = 6\wp^2(z) + 2(e_1 e_2 + e_2 e_3 + e_3 e_1)$.
8) Man bestimme ein nicht-triviales Polynom $P(X, Y)$ mit $P(\wp', \wp'') = 0$.
9) Es gilt $[\mathcal{K}(\Omega) : \mathbb{C}(\wp')] = 3$.
10) Man verschärfe Bemerkung 3a in folgender Weise: Zu e_1, e_2, e_3 definiert man

$$\overline{e}_1 = (1, 0), \ \ \overline{e}_2 = (0, 1), \ \ \overline{e}_3 = (1, 1) \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2.$$

Ist $\omega_1' = a\omega_1 + b\omega_2$, $\omega_2' = c\omega_1 + d\omega_2$ eine weitere Basis mit $M = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{GL}\,(2; \mathbb{Z})$, so betrachte man $\overline{M} \in \mathrm{GL}\,(2; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$, das aus M durch Reduktion der Komponenten mod 2 entsteht. $\overline{M}$ permutiert die Menge $\{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3\}$. Bezeichnet man die entsprechenden Größen zur neuen Basis mit einem Strich, so gilt $\overline{e_j'} = \overline{e}_j \cdot \overline{M}$, $j = 1, 2, 3$.

11) Man betrachte $f(z)$ aus Bemerkung 3c und berechne $f(w)$ sowie die Residuen von f an den Stellen $z = 0$ und $z = -w$.

12) Sind $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C}, a_1 = 0$, so existiert genau ein $f \in \mathcal{K}(\Omega)$ mit $D_f \subset \Omega$ und der LAURENT–Entwicklung $a_n z^{-n} + \dots + a_0 + \dots$ um 0.

13) Sei ω_1, ω_2 eine Basis des Gitters Ω und $f \in \mathcal{K}(2\Omega)$. Dann gehört

$$g(z) := f(z) + f(z+\omega_1) + f(z+\omega_2) + f(z+\omega_1+\omega_2)$$

zu $\mathcal{K}(\Omega)$. Welche elliptische Funktion entsteht, wenn f die zugehörige $\wp$-Funktion ist?

14) Seien $a, b \in \mathbb{C}$. Es gibt genau dann eine elliptische Funktion $f \in \mathcal{K}(\Omega)$, die in a und b holomorph ist und $f(a) \neq f(b)$ erfüllt, wenn $a \not\equiv b (\operatorname{mod} \Omega)$.

15) Es existiert kein $f \in \mathcal{K}(\Omega)$ mit $\mathcal{K}(\Omega) = \mathbb{C}(f)$.

16) Man gebe eine invariante (d. h. von 4(1) unabhängige) Beschreibung der GALOIS–Gruppe der Körpererweiterung $\mathcal{K}(\Omega) \supset \mathbb{C}(\wp)$ an.

§3. Die WEIERSTRASSsche $\wp$-Funktion

In diesem Paragrafen sei $\Omega = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$ stets ein Gitter in $\mathbb{C}$.

1. Konstruktions-Satz für die $\wp$-Funktion. Für spätere Zwecke formulieren wir die Aussage gleich etwas allgemeiner. Dazu benötigen wir die

Proposition. *Sei $K \subset \{(\omega_1, \omega_2) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}\,;\ \omega_2 \neq 0,\ \ \omega_1/\omega_2 \notin \mathbb{R}\}$ ein Kompaktum. Dann gibt es positive Konstanten α und β, so dass*

$$\alpha \cdot |m_1 i + m_2| \leq |m_1\omega_1 + m_2\omega_2| \leq \beta \cdot |m_1 i + m_2|$$

für alle $m_1, m_2 \in \mathbb{R}$ und $(\omega_1, \omega_2) \in K$.

Beweis. Aus Homogenitätsgründen darf man $m_1^2 + m_2^2 = 1$, also $|m_1 i + m_2| = 1$ voraussetzen. Die stetige Funktion $(\omega_1, \omega_2, m_1, m_2) \mapsto |m_1\omega_1 + m_2\omega_2|$ nimmt auf der kompakten Menge $K \times \{(m_1, m_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}\ ;\ m_1^2 + m_2^2 = 1\}$ ihr Minimum α und ihr Maximum β an. Weil ω_1, ω_2 über $\mathbb{R}$ linear unabhängig sind, gilt stets $m_1\omega_1 + m_2\omega_2 \neq 0$ für alle $(0,0) \neq (m_1, m_2)$. Also sind α und β positiv. □

Als Anwendung erhalten wir den

Konvergenz–Satz für die $\wp$-Funktion. *Die Reihe*

$$\wp(z; \omega_1, \omega_2) := z^{-2} + \sum_{0 \neq \omega \in \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2} \left((z-\omega)^{-2} - \omega^{-2}\right) \tag{1}$$

konvergiert absolut gleichmäßig auf jedem Kompaktum in

$$\{(z, \omega_1, \omega_2) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}\,;\ \omega_2 \neq 0,\ \omega_1/\omega_2 \notin \mathbb{R},\ z \notin \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2\}\ . \tag{2}$$

Beweis. Sei K eine kompakte Teilmenge von (2). Wir wählen ein $\rho > 0$ und ein Kompaktum $K' \subset \{(\omega_1, \omega_2) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}\ ;\ \omega_2 \neq 0,\ \omega_1/\omega_2 \notin \mathbb{R}\}$, so dass

$$K \subset K_\rho \times K',\ K_\rho = \{z \in \mathbb{C}\,; |z| \leq \rho\}\,.$$

Zu K' wählt man α nach der Proposition. Dann gilt für alle $(z, \omega_1, \omega_2) \in K$ und $(m_1, m_2) \in \mathbb{Z}$ mit $|m_1 i + m_2| \geq (\rho + 1)/\alpha$ auch

$$|\omega| \geq \rho + 1 \quad \text{für} \quad \omega = m_1\omega_1 + m_2\omega_2$$

und

$$\left|\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2}\right| = \left|\frac{2z\omega - z^2}{\omega^2(z-\omega)^2}\right| = \left|\frac{2 - z/\omega}{(1 - z/\omega)^2}\right| \cdot \frac{|z|}{|\omega|^3}$$
$$\leq \frac{3}{\left(1 - \rho/(\rho+1)\right)^2} \cdot \frac{\rho}{|\omega|^3} \leq \frac{3\rho(\rho+1)^2}{\alpha^3 \cdot |m_1 i + m_2|^3}\,.$$

Da nur endlich viele Paare $(m_1, m_2) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ mit $|m_1 i + m_2| \leq (\rho + 1)/\alpha$ existieren, folgt die Behauptung aus der absoluten Konvergenz der EISENSTEIN-Reihe $G_3(\mathbb{Z}i + \mathbb{Z})$ nach dem Konvergenz–Lemma 1.9. □

Für ein festes Gitter Ω erhält man analog das

Lemma. *Für* $k \in \mathbb{N}, k \geq 3$, *konvergiert die Reihe*

$$\sum_{\omega \in \Omega} (z - \omega)^{-k}$$

auf jedem Kompaktum in $\mathbb{C} \setminus \Omega$ *absolut gleichmäßig.*

Nun erhalten wir den angekündigten

Konstruktions-Satz für die $\wp$-Funktion. *Die Reihe*

$$\wp(z) := \wp_\Omega(z) := z^{-2} + \sum_{0 \neq \omega \in \Omega} \left((z-\omega)^{-2} - \omega^{-2}\right)\,,\ z \in \mathbb{C} \setminus \Omega\,, \tag{3}$$

konvergiert in jedem Kompaktum von $\mathbb{C}$, *das keinen Gitterpunkt enthält, absolut gleichmäßig. Die Funktion* $\wp$ *ist eine gerade elliptische Funktion bezüglich* Ω, *sie hat in den Gitterpunkten von* Ω *Pole* 2. *Ordnung mit Residuum Null und ist holomorph in* $\mathbb{C} \setminus \Omega$. *Die* LAURENT*-Reihe bei* 0 *hat die Form*

$$\wp(z) = z^{-2} + a_2 z^2 + \ldots. \tag{4}$$

Damit ist zugleich der Beweis des Existenz-Satzes 2.3 gegeben.

Man nennt $\wp(z)$ die WEIERSTRASS*sche* $\wp$*-Funktion* (zum Gitter Ω). Die Idee, eine elliptische Funktion durch eine Summe über alle Gitterpunkte zu definieren und so die doppelte Periodizität augenscheinlich zu machen, geht auf F.G.M. EISENSTEIN (1823–1852) und K.T.W. WEIERSTRASS (1815–1897) zurück. Man vergleiche hierzu die historische Anmerkung in **7**. Nachschriften kann man entnehmen, dass sich in WEIERSTRASS' Vorlesungen das „WEIERSTRASS $\wp$“ allmählich aus einem gewöhnlichen p entwickelt hat.

Beweis. Zur Abkürzung setze man

$$f_\omega(z) := (z-\omega)^{-2} - \omega^{-2} \text{ für } 0 \neq \omega \in \Omega \text{ und } K_\rho := \{z \in \mathbb{C}\,;\, |z| \leq \rho\}\ ,\ \rho > 0.$$

Die absolute, kompakt gleichmäßige Konvergenz der Reihe (3) folgt bereits aus dem Konvergenz-Satz.

Behauptung 1. *Die Reihe* (3) *stellt eine in* $\mathbb{C}$ *meromorphe Funktion dar, die genau in den Punkten von* Ω *Pole* 2. *Ordnung mit Residuum Null hat.*

Zum *Beweis* sei $\rho > 0$. Es folgt

$$\wp(z) = z^{-2} + \sum_{|\omega|<\rho+1} f_\omega(z) + \sum_{|\omega|\geq\rho+1} f_\omega(z).$$

Hier ist die erste endliche Summe meromorph auf K_ρ, während die zweite nach dem Konvergenz-Satz holomorph auf K_ρ ist. Also hat $\wp|_{K_\rho}$ genau in den Punkten $\Omega \cap K_\rho$ Pole 2. Ordnung mit Residuum 0. □

Behauptung 2. $\wp$ *ist eine gerade Funktion und es gilt* (4).

Zum *Beweis* ersetzt man ω durch $-\omega$ in der Summe (3). Wegen der absoluten Konvergenz folgt $\wp(-z) = \wp(z)$. Nun beachtet man $f_\omega(0) = 0$ für $\omega \neq 0$ und sieht, dass die Laurent-Reihe bei 0 das konstante Glied 0 hat. □

Behauptung 3. *Es gilt* $\wp(z+\omega) = \wp(z)$ *für alle* $\omega \in \Omega$ *und* $z \in \mathbb{C}\backslash\Omega$.

Zum *Beweis* hat man nach dem Konvergenz-Satz

$$\wp'(z) = -2 \cdot \sum_{\omega\in\Omega} (z-\omega)^{-3}\ ,\ z \in \mathbb{C} \setminus \Omega,$$

und diese Reihe ist nach dem Lemma absolut konvergent. Es folgt $\wp'(z+\omega) = \wp'(z)$ für $\omega \in \Omega$. Ist daher ω_1, ω_2 eine Basis von Ω, so gilt $\wp(z+\omega_j) = \wp(z) + C_j$ mit Konstanten C_j für $j = 1, 2$. Für $z := -\omega_1/2$ bzw. $z = -\omega_2/2$ folgt $C_1 = C_2 = 0$, da $\wp$ gerade ist. Damit gilt $\wp(z+\omega_j) = \wp(z)$ für $j = 1, 2$ und $\wp$ hat alle $\omega \in \Omega$ als Perioden. □

Bemerkungen. a) In Kenntnis des Satzes von Mittag–Leffler (vgl. R. Remmert [1995], Satz 6.1.3) stellt man fest, dass man hier einen Beweis jenes Satzes in einem Spezialfall wiederholt hat. Historisch ist der Satz von Mittag–Leffler aber umgekehrt nach dem Vorbild der Weierstraßschen Konstruktion der $\wp$-Funktion modelliert worden.
b) In der obigen Behauptung 3 kann der Umweg über $\wp'$ nicht ohne zusätzliche Überlegungen vermieden werden. Wir verdanken Herrn J. Elstrodt den Hinweis auf einen direkten Beweis, der auf einer genauen Betrachtung der durch Differenzbildung aus (3) für $\wp(z+\omega) - \wp(z)$ entstehenden Reihe beruht. Man vergleiche hierzu H. Hancock ([1910], Art. 270).

2. Die LAURENT-Entwicklung. Wie in 1.9(2) betrachtet man die EISENSTEIN-Reihe

$$(1) \qquad G_k := G_k(\Omega) := \sum_{0 \neq \omega \in \Omega} \omega^{-k} \quad \text{für gerades } \ k \geq 4.$$

Nach Proposition 1.9 sind die entsprechenden Reihen für ungerades $k \geq 3$ gleich Null. Man setzt schließlich

$$\gamma := \gamma(\Omega) := \min\{|\omega|\,;\, 0 \neq \omega \in \Omega\}$$

und erhält den

Satz. *Für alle* $z \in \mathbb{C}$ *mit* $0 < |z| < \gamma(\Omega)$ *gilt*

$$(2) \quad \wp(z) = z^{-2} + \sum_{n=2}^{\infty} (2n-1) G_{2n} \cdot z^{2n-2} = z^{-2} + 3G_4 \cdot z^2 + 5G_6 \cdot z^4 + \ldots\ .$$

Beweis. Aufgrund von

$$\frac{1}{(1-t)^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{1-t}\right) = \sum_{m=1}^{\infty} m t^{m-1}\ , \quad |t| < 1,$$

hat man für $\omega \neq 0$

$$\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} = \frac{1}{\omega^2}\left(\frac{1}{(1-z/\omega)^2} - 1\right) = \sum_{m=2}^{\infty} m \cdot \frac{z^{m-1}}{\omega^{m+1}}\ , \quad |z| < \gamma,$$

und daher

$$(*) \qquad \wp(z) = z^{-2} + \sum_{0 \neq \omega \in \Omega} \left(\sum_{m=2}^{\infty} m \cdot \frac{z^{m-1}}{\omega^{m+1}} \right)\ , \quad 0 < |z| < \gamma.$$

Wegen

$$\left| m \cdot \frac{z^{m-1}}{\omega^{m+1}} \right| \leq \gamma m \left(\frac{|z|}{\gamma} \right)^{m-1} \cdot |\omega|^{-3}$$

und aufgrund des Konvergenz-Lemma 1.9 ist die Reihe $(*)$ in m und ω absolut konvergent. Nach Satz 1.8 darf man also umordnen und erhält

$$\wp(z) = z^{-2} + \sum_{m \geq 2} m G_{m+1} \cdot z^{m-1}\ , \quad 0 < |z| < \gamma.$$

Wegen Proposition 1.9 ist das aber (2). $\square$

3. Die zweite Differentialgleichung. *Die* WEIERSTRASS*sche* $\wp$*-Funktion genügt der Differentialgleichung*

$$(1) \qquad \wp'^2 = 4\wp^3 - g_2 \wp - g_3.$$

Dabei sind g_2 und g_3 definiert durch

(2) $$g_2 := g_2(\Omega) := 60\ G_4(\Omega) \quad \text{und} \quad g_3 := g_3(\Omega) := 140\, G_6(\Omega)\,.$$

Man nennt g_2 und g_3 die WEIERSTRASS–*Invarianten* des Gitters Ω. Wir verwenden das LANDAU-*Symbol* und schreiben $\mathcal{O}(z^k)$ für eine Funktion $f(z)$, die $|f(z)| \leq C \cdot |z|^k$ mit einem geeigneten C für z aus einer Umgebung von 0 erfüllt.

Beweis. Ausgehend von

$$\wp(z) = z^{-2} + 3G_4 \cdot z^2 + 5G_6 \cdot z^4 + \mathcal{O}(z^6)$$

(vgl. 2(2)) berechnet man

$$\begin{array}{rcl} \wp^2(z) & = & z^{-4} + 6G_4 + 10G_6 \cdot z^2 + \mathcal{O}(z^3)\ , \\ \wp^3(z) & = & z^{-6} + 9G_4 \cdot z^{-2} + 15G_6 + \mathcal{O}(z)\ , \\ \wp'(z) & = & -2 \cdot z^{-3} + 6G_4 \cdot z + 20G_6 \cdot z^3 + \mathcal{O}(z^4)\ , \\ \wp'^2(z) & = & 4 \cdot z^{-6} - 24G_4 \cdot z^{-2} - 80G_6 + \mathcal{O}(z)\ . \end{array}$$

Daraus erhält man mit (2)

(∗) $$\wp'^2(z) - 4\wp^3(z) + g_2\wp(z) + g_3 = \mathcal{O}(z).$$

Hier gehört die linke Seite zu $\mathcal{K}(\Omega)$ und hat Pole höchstens dort, wo $\wp$ oder $\wp'$ Pole hat. Nach (∗) ist die linke Seite aber bei 0 und daher überall holomorph. Satz 2.2A zeigt, dass diese Funktion konstant ist. Nach (∗) wiederum ist diese Konstante gleich Null. □

Differenziert man (1), so folgt das

Korollar A. *Es gilt*

$$2\wp'' = 12\wp^2 - g_2.$$

Korollar B. *Für $k \in \mathbb{N}$ gilt*

$$\wp^{(k)} \in \mathbb{Z}[G_4, G_6, \wp] + \mathbb{Z}[G_4, G_6, \wp]\wp'.$$

Beweis. Dies ist für $k = 0$ und 1 richtig. Wegen (2) folgt die Aussage für $k = 2$ aus Korollar A. Nun ergibt eine Induktion die Behauptung. □

Korollar C. *Für $f \in \mathcal{K}(\Omega)$ sind quivalent:*
(i) *f ist holomorph in $\mathbb{C} \setminus \Omega$.*
(ii) *$f \in \mathbb{C}[\wp] + \mathbb{C}[\wp] \cdot \wp'$.*

Beweis. (i) $\Longrightarrow$ (ii): Subtrahiert man $\alpha\wp^n$ bzw. $\alpha\wp^n \cdot \wp'$, $\alpha \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}_0$, geeignet, von f, so kann man nun die Ordnung der Pole in den Gitterpunkten sukzessiv erniedrigen. Schließich beachte man noch $\mathrm{res}_0 f = 0$ nach Satz 2.2B.
(ii) $\Longrightarrow$ (i): Klar. □

Korollar D. *Für* $n \geq 4$ *gilt die Rekursionsformel*

$$(3) \qquad (n-3)(2n+1)(2n-1)G_{2n} = 3 \cdot \sum_{\substack{p\geq 2, q\geq 2\\ p+q=n}} (2p-1)(2q-1)G_{2p}G_{2q}.$$

Beweis. Man trägt die LAURENT-Reihe 2(2) in $\wp'' + 30\,G_4 = 6\wp^2$ nach Korollar A ein:

$$\sum_{n\geq 2}(2n-1)(2n-2)(2n-3)G_{2n}z^{2n-4} + 30G_4$$

$$= 12\sum_{n\geq 2}(2n-1)G_{2n}z^{2n-4} + 6\sum_{p\geq 2}\sum_{q\geq 2}(2p-1)(2q-1)G_{2p}G_{2q}z^{2p+2q-4}\ .$$

Ein Koeffizientenvergleich ergibt bereits die Behauptung. □

Speziell erhält man

$$(4) \quad 7G_8 = 3G_4^2\ ,\ 11G_{10} = 5G_4G_6\ , 143G_{12} = 42G_4G_8 + 25G_6^2 = 18G_4^3 + 25G_6^2$$

und das

Korollar E. *Für* $k \geq 8$ *gilt*

$$G_k \in \mathbb{Q}[G_4, G_6].$$

Korollar F. *Sei* Ω *ein Gitter in* $\mathbb{C}$ *mit zugehörigen* WEIERSTRASS*–Invarianten* g_2 *und* g_3*. Jede in einem Gebiet* $G \subset \mathbb{C}$ *meromorphe, nicht-konstante Lösung* f *der Differentialgleichung*

$$f'^2 = 4f^3 - g_2f - g_3$$

wird durch $f(z) = \wp(z+w)$, $z \in G$, *mit geeignetem* $w \in \mathbb{C}$ *gegeben. Ist* $f \in \mathcal{M}$ *eine solche Lösung, dann ist* Ω *das Periodengitter von* f*. Das Gitter* Ω *ist durch* $g_2(\Omega)$ *und* $g_3(\Omega)$*, also auch durch* $G_4(\Omega)$ *und* $G_6(\Omega)$ *eindeutig bestimmt.*

Beweis. Sei f eine in G meromorphe, nicht-konstante Lösung der angegebenen Differentialgleichung. Ist f in einer Kreisscheibe $U \subset G$ um u holomorph und f' ungleich Null in U, dann gilt bei geeigneter Wahl einer Wurzel $f' = \sqrt{4f^3 - g_2f - g_3}$. Nach Lemma 2.3B wählt man nun ein $w \in \mathbb{C}$ mit $\wp(w+u) = f(u)$ und darf darüber hinaus noch $\wp'(w+u) = f'(u)$ annehmen, indem man ggf. w durch $-w-2u$ ersetzt. Die Funktionen $f(z)$ und $g(z) := \wp(z+w)$ genügen der gleichen Differentialgleichung 1. Ordnung und stimmen im Punkt u überein. Dann folgt $f(z) = g(z)$ für alle $z \in U$ aus dem Existenz- und Eindeutigkeitssatz (vgl. W. WALTER [2000], 66). Der Identitätssatz impliziert $f(z) = g(z)$ für alle $z \in G$. Die fehlende Behauptung folgt nun aus der Tatsache, dass für die $\wp$-Funktion nach dem Konstruktions-Satz 1 das Periodengitter gleich der Polstellenmenge ist. □

Bemerkung. An Stelle der Differentialgleichung (1) kann man bei gegebener rationaler Funktion R allgemeiner nach Lösungen $w = f(z)$ der so genannten *binomischen Differentialgleichung*

$$w'^n = R(z, w) \tag{5}$$

für gegebenes $n \in \mathbb{N}$ fragen. Es gilt hier der

Satz von Malmquist und Yosida. *Besitzt* (5) *eine auf* $\mathbb{C}$ *meromorphe und transzendente Lösung, dann ist* $R(z, w)$ *ein Polynom in* w *von einem Grad* $\leq 2n$.

Einen *Beweis* findet man in E. Hille, *Ordinary differential equations in the complex domain*, J. Wiley, New York 1976, Theorem 4.6.4. Eine Klassifikation der binomischen Differentialgleichungen beschreibt N. Steinmetz, Math. Ann. **244**, 263–274 (1979).

4. Ein Vergleich der Differentialgleichungen. Neben

$$\wp'^2 = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3 \tag{1}$$

war in Satz 2.3 die Differentialgleichung

$$\wp'^2 = 4(\wp - e_1)(\wp - e_2)(\wp - e_3) \tag{2}$$

hergeleitet worden. Dabei waren e_1, e_2, e_3 wie in 2.3(3) durch

$$e_k = \wp(\omega_k/2)\ ,\ k = 1, 2, 3\ ,\ \omega_3 := \omega_1 + \omega_2, \tag{3}$$

definiert, wenn ω_1, ω_2 eine Basis von Ω ist. Da $\wp$ mehr als drei verschiedene Werte annimmt, ergibt ein Vergleich für eine Unbestimmte X über $\mathbb{C}$ den

Satz. *Es gilt*

$$4X^3 - g_2X - g_3 = 4(X - e_1)(X - e_2)(X - e_3).$$

Aus Korollar 2.4A folgt dann

Korollar A. *Für über* $\mathbb{C}$ *unabhängige Unbestimmte* X, Y *gilt*

$$\mathcal{K}(\Omega) \cong \mathbb{C}(X)[Y]/I(X, Y),$$

wenn $I(X, Y)$ *das von* $Y^2 - 4X^3 + g_2X + g_3$ *in* $\mathbb{C}(X)[Y]$ *erzeugte Hauptideal ist.*

Ein Koeffizientenvergleich im Satz ergibt das

Korollar B. *Es gilt*

$$0 = e_1 + e_2 + e_3, \tag{4}$$

$$g_2 = -4(e_1e_2 + e_2e_3 + e_3e_1), \tag{5}$$

$$g_3 = 4e_1e_2e_3. \tag{6}$$

Korollar C. *Es gilt*

$$g_2^3 - 27g_3^2 = 16(e_1-e_2)^2(e_2-e_3)^2(e_3-e_1)^2 \neq 0.$$

Beweis. Mit (4) und (5) erhält man zunächst

$$(*) \qquad g_2 = 2(e_1^2+e_2^2+e_3^2) \quad \text{bzw.} \quad g_2^2 = 16(e_1^2e_2^2+e_2^2e_3^2+e_3^2e_1^2).$$

Weiter ergeben (4) und (5) dann auch noch

$$2(e_1-e_2)^2 = 2(e_1^2+e_2^2) - 4e_1e_2 = 2g_2 - 2e_3^2 + 4e_3(e_1+e_2) = 2g_2 - 6e_3^2,$$

also

$$(e_1-e_2)^2 = g_2 - 3e_3^2.$$

Da die durch zyklische Vertauschung der e_1, e_2, e_3 entstehenden Beziehungen ebenfalls gültig sind, hat man

$$\begin{aligned} &16(e_1-e_2)^2(e_2-e_3)^2(e_3-e_1)^2 = 16(g_2-3e_1^2)(g_2-3e_2^2)(g_2-3e_3^2) \\ &= 16g_2^3 - 3\cdot 16g_2^2(e_1^2+e_2^2+e_3^2) + 9\cdot 16g_2(e_1^2e_2^2+e_2^2e_3^2+e_3^2e_1^2) - 27\cdot 16e_1^2e_2^2e_3^2\,. \end{aligned}$$

Wegen $(*)$ und (6) ist die rechte Seite aber gleich $g_2^3 - 27g_3^2$. Nach 2.3(6) sind e_1, e_2, e_3 paarweise verschieden. □

$$(7) \qquad \Delta := \Delta(\Omega) := g_2^3 - 27g_3^2$$

nennt man die *Diskriminante* und

$$(8) \qquad j := j(\Omega) := (12g_2)^3/\Delta$$

die *absolute Invariante* des Gitters Ω. Mit Korollar B und C folgt das

Korollar D. *Es gilt*

$$j = -4\cdot 12^3 \cdot \frac{(e_1e_2+e_2e_3+e_3e_1)^3}{(e_1-e_2)^2(e_2-e_3)^2(e_3-e_1)^2}.$$

Korollar E. *Für* $\lambda := \dfrac{e_2-e_3}{e_1-e_3}$ *gilt*

$$j = 256\cdot\frac{(1-\lambda+\lambda^2)^3}{\lambda^2(1-\lambda)^2}.$$

Bemerkungen. a) Die Diskriminante Δ ist (bis auf einen Faktor) zugleich auch die Diskriminante des Polynoms $f(X) := 4X^3 - g_2X - g_3$ im Sinne der Algebra (vgl. S. LANG [1993], V, § 10): Dort wird die Diskriminante des Polynoms f (bis auf einen Faktor) als die *Resultante* von f und f' erklärt, also durch

$$\det\begin{pmatrix} 4 & 0 & -g_2 & -g_3 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & -g_2 & -g_3 \\ 12 & 0 & -g_2 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 & -g_2 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 0 & -g_2 \end{pmatrix} = -64\Delta.$$

b) Die Bezeichnung „absolute Invariante“ rechtfertigt sich in **4.4**.
c) λ aus Korollar E tritt bereits in E.2 beim Übergang von der WEIERSTRASSschen zur LEGENDREschen Normalform elliptischer Integrale auf.

5. Konjugationsstabile Gitter. Ein Gitter Ω heißt *konjugationsstabil*, wenn mit ω auch die konjugiert komplexe Zahl $\overline{\omega}$ zu Ω gehört, d. h. $\Omega = \overline{\Omega}$. Die wichtigsten Beispiele für konjugationsstabile Gitter sind
a) die *Rechteck–Gitter*: $\Omega = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$ mit $\frac{1}{i}\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{R}^+$,
b) das *Sechseck–Gitter*: $\Omega = \mathbb{Z}\rho + \mathbb{Z}$ mit $\rho = \frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3})$.

Man erhält direkt die

Proposition. *Ist Ω ein konjugationsstabiles Gitter, dann gilt für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \Omega$*

$$\overline{\wp_\Omega(z)} = \wp_\Omega(\overline{z}) \quad \text{und} \quad \overline{\wp'_\Omega(z)} = \wp'_\Omega(\overline{z})\,.$$

Speziell hat man für $z \in \mathbb{C} \setminus \Omega$:
a) *$\wp_\Omega(z)$ ist reell für $z \in \mathbb{R}$ und $z \in i\mathbb{R}$,*
b) *$\wp'_\Omega(z)$ ist reell für $z \in \mathbb{R}$ und rein imaginär für $z \in i\mathbb{R}$.*

Eine Charakterisierung enthält der folgende

Satz. *Für ein Gitter $\Omega = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$ sind äquivalent:*

(i) *$g_2(\Omega)$ und $g_3(\Omega)$ sind beide reell.*
(ii) *Alle $G_k(\Omega)$, $k \geq 4$ gerade, sind reell.*
(iii) *Von den Größen e_1, e_2, e_3 sind zwei konjugiert komplex und die dritte reell oder alle drei reell.*
(iv) *Ω ist konjugationsstabil.*

Beweis. (i) $\Longleftrightarrow$ (ii): Man verwende 3(2) und Korollar 3D.
(i) $\Longleftrightarrow$ (iv): Die Behauptung folgt aus $\overline{g_2(\Omega)} = g_2(\overline{\Omega}), \overline{g_3(\Omega)} = g_3(\overline{\Omega})$ und der Tatsache, dass Ω nach Korollar 3F durch g_2 und g_3 eindeutig bestimmt ist.
(i) $\Longrightarrow$ (iii): Die Werte e_1, e_2, e_3 sind nach Satz 4 genau die Nullstellen des reellen Polynoms $4X^3 - g_2X - g_3$. Daher ist mindestens eine Nullstelle reell.
(iii) $\Longrightarrow$ (i): Man verwende 4(5) und 4(6). □

Bemerkung. Mit konjugationsstabilen Gittern kann man die elliptischen Integrale in WEIERSTRASSscher Normalform

$$\int \frac{dt}{\sqrt{q(t)}}, \quad q(t) = 4t^3 - c_2 t - c_3,$$

mit reellen c_2, c_3 berechnen (vgl. **4.5**).

6. Die durch $\wp$ definierte Abbildung für ein Rechteck-Gitter. In diesem Abschnitt sei Ω stets ein Rechteck-Gitter und

(1) $\qquad (\omega_1, \omega_2)$ eine Basis von Ω mit $\frac{1}{i}\omega_1 > 0$ und $\omega_2 > 0$.

Man überlegt sich leicht, dass ω_1 und ω_2 hierdurch eindeutig bestimmt sind.

Proposition. *Sei $z \in \mathbb{C} \setminus \Omega$.*
a) *$\wp(z)$ ist genau dann reell, wenn es ein $\omega \in \Omega$ gibt mit*

$$z \in \tfrac{\omega}{2} + \mathbb{R} \quad \textit{oder} \quad z \in \tfrac{\omega}{2} + i\mathbb{R}\,. \tag{2}$$

b) *Für $z \in \frac{\omega}{2} + \mathbb{R}$, $\omega \in \Omega$, ist $\wp'(z)$ reell. Für $z \in \frac{\omega}{2} + i\mathbb{R}$, $\omega \in \Omega$, ist $\wp'(z)$ rein imaginär.*

Beweis. Wegen (1) gilt $\frac{1}{2}(\omega - \overline{\omega}) \in \Omega$. Dann folgt

$$\overline{\wp\left(\tfrac{\omega}{2} + z\right)} = \wp\left(\tfrac{\omega}{2} + \overline{z}\right)\,, \quad \overline{\wp'\left(\tfrac{\omega}{2} + z\right)} = \wp'\left(\tfrac{\omega}{2} + \overline{z}\right) \tag{3}$$

aus Proposition 5. Weil $\wp$ gerade und $\wp'$ ungerade ist, nehmen $\wp$ und $\wp'$ an den angegebenen Stellen nur reelle bzw. rein imaginäre Werte an.
Sei nun $z \in \Diamond(\omega_1, \omega_2)$, so dass z nicht von der Form (2) ist. Wäre $\wp(z)$ reell, so würde $\wp$ wegen (3) an den vier paarweise verschiedenen Punkten

$$z, \omega_1 + \overline{z}, \omega_1 + \omega_2 - z, \omega_2 - \overline{z}$$

in $\Diamond(\omega_1, \omega_2)$ den gleichen Wert annehmen. Das widerspricht Lemma 2.3B. $\square$

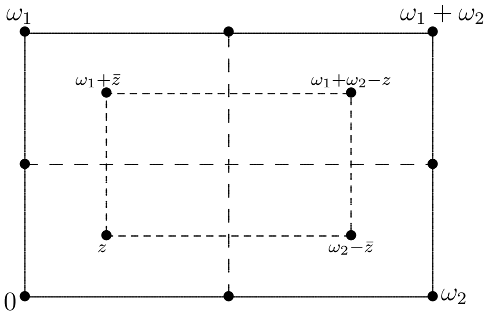

Abb. 8: Rechteckgitter

Satz. *Das Innere des Viertelrechtecks $0, \frac{\omega_1}{2}, \frac{\omega_1+\omega_2}{2}, \frac{\omega_2}{2}$ der z-Ebene wird durch $z \mapsto w = \wp(z)$ auf die untere w-Halbebene konform so abgebildet, dass der Rand des Rechtecks auf die reelle Achse (von $-\infty$ nach $+\infty$) bijektiv abgebildet wird.*

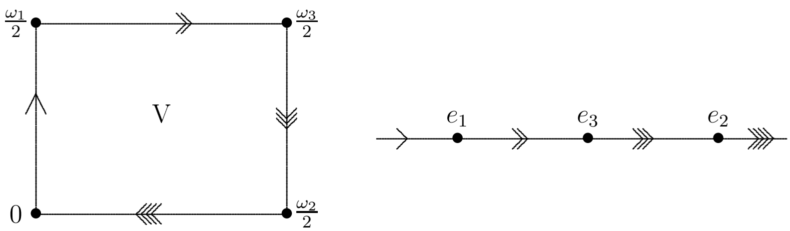

Abb. 9: Abbildungsverhalten auf dem Viertelrechteck

Beweis. Es sei V das Innere des obigen Viertelrechtecks. Für $z = x + iy$ mit $0 < x \leq \varepsilon\,,\ 0 < y \leq \varepsilon$ mit hinreichend kleinem $\varepsilon > 0$ gilt

$$\wp(z) = z^{-2} + \mathcal{O}(\varepsilon^2) = \frac{x^2 - y^2 - 2ixy}{(x^2 + y^2)^2} + \mathcal{O}(\varepsilon^2). \tag{$*$}$$

Weil $\wp(V)$ zusammenhängend ist, impliziert die Proposition

$$(**) \qquad \wp(V) \subset H \quad \text{mit} \quad H := \{w \in \mathbb{C}\,;\ \operatorname{Im} w < 0\},$$

Wegen $\wp(z+\omega/2) = \wp(-z-\omega/2) = \wp(-z+\omega/2)$ folgt

$$\begin{aligned} \wp\left(\tfrac{\omega_3}{2}+V\right) &= \wp(V) \subset H\,, \\ \wp\left(\tfrac{\omega_1}{2}+V\right) &= \wp\left(\tfrac{\omega_2}{2}+V\right) \subset \overline{H} = \{w \in \mathbb{C}\,;\ \operatorname{Im} w > 0\} = \mathbb{H}, \end{aligned}$$

so dass die Gleichheit in $(**)$ aus der Proposition und Satz 2.2C folgt. Nach Lemma 2.3A hat man $\wp'(z) \neq 0$ für alle $z \in V$. Also ist $\wp : V \to H$ biholomorph.

Für hinreichend kleines $\varepsilon > 0$ ist $f(y) := \wp(iy),\ 0 < y \leq \varepsilon$, wegen

$$f'(y) = i\wp'(iy) = 2y^{-3} + \mathcal{O}(\varepsilon), \quad \text{also} \quad f'(y) > 0,$$

sicher monoton wachsend. Aus der Differentialgleichung

$$\wp'^2 = 4(\wp - e_1)(\wp - e_2)(\wp - e_3) \quad \text{und} \quad \wp'(iy) \neq 0$$

erhält man $f'(y) > 0$ für $0 < y < \omega_1/2i$. Also ist f auf dem gesamten Intervall $]\!]0, \omega_1/2i]\!]$ streng monoton wachsend und bildet es bijektiv auf $]\!]-\infty, e_1]\!]$ ab.

Auf den anderen Seiten von V schließt man ähnlich. $\square$

Die Bilder der anderen Viertelrechtecke von $\Diamond(\omega_1, \omega_2)$ werden nach dem Schema

$$\begin{array}{|c|c|}\hline + & - \\ \hline - & + \\ \hline\end{array}$$

auf die untere bzw. obere w-Halbebene abgebildet. Dabei gilt insbesondere

$$e_1 < e_3 < e_2.$$

Mit dem Satz kann man jetzt auch gewisse Integrale der Form

$$\int \frac{dt}{\sqrt{4t^3 - gt - h}} \quad \text{mit} \;\; g, h \in \mathbb{R}$$

„berechnen“: Hat man zu g und h ein Rechteck-Gitter Ω mit $g = g_2(\Omega)$ und $h = g_3(\Omega)$ gefunden, dann gilt für $0 < r < s < \frac{\omega_2}{2}$

$$\int\limits_{\wp(s)}^{\wp(r)} \frac{dt}{\sqrt{4t^3 - gt - h}} = s - r.$$

Zum *Beweis* substituiert man $t = \wp(z)$ und beachtet $\wp'(z) < 0$.

Das Problem liegt hier natürlich darin, ein Gitter Ω der angegebenen Art zu finden. Man vergleiche dazu Korollar 4.4.

Bemerkungen. a) Natürlich kann man auch für beliebiges Gitter Ω die durch $\wp$ vermittelte Abbildung eines Periodenparallelogramms nach $\mathbb{C}$ studieren. Man vergleiche hierzu etwa E. GRAESER ([1950], 81–83).
b) Nach dem RIEMANNschen Abbildungssatz ist jedes Rechteck in $\mathbb{C}$ biholomorph äquivalent zum Einheitskreis. Eine solche biholomorphe Abbildung kann man explizit mit dem Satz und der CAYLEY–Transformation (vgl. II.1.2) konstruieren.

7. Ferdinand Gotthold Max EISENSTEIN (1823–1852) publizierte 1846/47 in *Crelles Journal* sechs *Beiträge zur Theorie der elliptischen Functionen* (vgl. *Math. Werke I*, 299–478). In diesen Arbeiten entwickelte er völlig neue Gesichtspunkte, die weit über die Arbeiten seiner Vorgänger A.M. LEGENDRE (1752–1833), N.H. ABEL (1802–1829) und C.G.J. JACOBI (1804–1851) hinausgingen. Seine Arbeiten blieben aber weitgehend unbeachtet.

L. KRONECKER (1823–1891) hatte 1891 beabsichtigt, auf der ersten Tagung der Deutschen Mathematiker Vereinigung (DMV) in Bremen einen Vortrag „über Eisenstein" zu halten. Als er aus persönlichen Gründen absagen musste, schrieb er (*Werke V*, 499) an den Präsidenten der DMV:

> *„... über seine Arbeiten sprechen. Dabei müssten dann ausser den rein arithmetischen und analytisch-arithmetischen noch ganz besonders seine rein analytischen Untersuchungen über elliptische Functionen hervorgehoben werden, welche dem Bewusstsein der Jetztzeit ganz abhanden gekommen sind, ..."*

Diese Arbeiten scheinen in der Tat im 19. Jahrhundert außer von KRONECKER nur noch von A. HURWITZ (1859–1919) in einer Fußnote (*Werke I*, 31), von H. BURKHARDT und von F. KLEIN und R. FRICKE ([1890], 24 und 150) erwähnt zu werden. Im Vorwort zu seinem Buch [1899] spricht BURKHARDT von den „EISENSTEIN–WEIERSTRASSschen Partialbruchreihen". Erst R. FRICKE (1861–1930) nennt dann EISENSTEIN in seinem Enzyklopädie-Bericht (*Analysis II. B.3*, 243 f.) *einen Vorläufer von* WEIERSTRASS. Schließlich beschreibt und würdigt H. HANCOCK ([1910], Art. 273, 280, 287, 291) ausführlich EISENSTEINs Ergebnisse.

Im Jahre 1976 erschien dann das Buch *Elliptic functions according to Eisenstein and Kronecker* von A. WEIL [1976], in dem er die EISENSTEINschen Beträge zu den elliptischen Funktionen überzeugend würdigte: Von EISENSTEIN wurden bereits 1846/47 die wesentlichen Ergebnisse über die $\wp$-Funktion, ihre Differentialgleichung und das Additionstheorem, über die σ-Funktion und die ζ-Funktion (vgl. §6) vorweggenommen. Erst ab 1862 hat K.T.W. WEIERSTRASS über entsprechende Ergebnisse in seinen Vorlesungen an der Berliner Universität vorgetragen (*Werke V*, das zugrundeliegende Manuskript hat WEIERSTRASS 1863 Herrn F. MERTENS diktiert). Die $\wp$-Funktion wird hier noch als Lösung der Differentialgleichung $\wp'^2 = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3$ eingeführt. Die Tatsache, dass bei EISENSTEIN in der Definition des Analogons der $\wp$-Funktion (sowie bei σ und ζ)

die konvergenzerzeugenden Summanden fehlen, darf einen nicht zweifeln lassen, denn EISENSTEIN ersetzt dies durch eine besondere Summationsvorschrift der entsprechenden bedingt konvergenten Reihen.

Man kann heute nicht verstehen, dass WEIERSTRASS zu keiner Zeit auf die Vorarbeiten EISENSTEINs verwiesen hat. Wenn man historisch korrekt sein wollte, müsste man im Bereich der elliptischen Funktionen alle auf WEIERSTRASS bezogenen Namen in EISENSTEIN–WEIERSTRASS umbenennen. Das hat sich aber nicht durchgesetzt, vor allem wohl deswegen, weil dieser Sachverhalt in der Lehrbuch-Literatur (noch) keinen Platz gefunden hat.

EISENSTEIN stützt alle seine Überlegungen auf Reihen über alle Gitterpunkte analog zur $\wp$-Funktion und deren elementare Manipulation. Wie er zunächst ausführt, kann seine Methode hervorragend auf die Grundlegung der trigonometrischen Funktionen angewendet werden. Dies wird in dem Buch von R. REMMERT, G. SCHUMACHER [2002], Kap. 11, §4, ausgeführt.

Ein lesenswertes Märchen und eine Würdigung EISENSTEINs findet man im Bulletin der AMS **82**, 658–663 (1976), aus der Feder von A. WEIL.

Aufgaben. 1) Für $E_j := \begin{pmatrix} e_j & e_j^2+e_ke_\ell \\ 1 & -e_j \end{pmatrix}$, $\{j,k,\ell\} = \{1,2,3\}$ gilt

$$E_j^2 = (e_j - e_k)(e_j - e_\ell)\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \quad \text{und} \quad E_jE_k = (e_k - e_j)E_\ell.$$

Die Menge $\{\lambda E_\nu\,;\, 0 \neq \lambda \in \mathbb{C}\,,\, \nu = 1,2,3\} \cup \{\lambda E; 0 \neq \lambda \in \mathbb{C}\}$ ist eine Untergruppe von $\mathrm{GL}\,(2;\mathbb{C})$.

2) Für gegebenes $\omega \in \Omega$ mit $\omega \notin 2\Omega$ wird T definiert durch

$$T(z) = T_\omega(z) := \frac{\wp(\omega/4)) - \wp(\omega/2)}{\wp(z) - \wp(\omega/2)}\ ,\ \ z \in \Omega.$$

a) T ist eine gerade elliptische Funktion bezüglich Ω mit Nullstellen 2. Ordnung in den Punkten von Ω und Polen 2. Ordnung in den Punkten $\omega/2 + \Omega$.

b) Jede gerade elliptische Funktion kann rational durch T dargestellt werden.

c) $T(z) \cdot T\,(z + \omega/2) = 1$.

3) Sei ω_1, ω_2 eine Basis von Ω. Dann gilt

$$\wp''\,(\omega_1/2) = 6e_1^2 - \frac{1}{2}g_2 = 2(e_1-e_2)(e_1-e_3),\ \ \wp^{(iv)}(\omega_1/2) = 72e_1^3 - 6e_1g_2 = 24e_1(e_1-e_2)(e_1-e_3).$$

Man leite analoge Formeln für die Werte an den Stellen $\omega_2/2$ und $\omega_3/2$ her.

4) Man bestimme e_1, e_2, e_3 für den Fall, dass $g_3 = 0$ bzw. $g_2 = 0$ gilt.

5) Sei $\Omega = \mathbb{Z}\rho + \mathbb{Z}$, $\rho = \frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3})$. Dann gilt

$$e_2 = \wp_\Omega(1/2) > 0,\ \ e_1 = \wp_\Omega(\rho/2) = -\rho e_2,\ \ e_3 = \wp_\Omega(-\overline{\rho}/2) = -\overline{\rho}e_2.$$

6) Gilt $g_3 \neq 0$, so betrachte man die normierte, homogene WEIERSTRASS-Gleichung

$$p(X,Y,Z) = \tfrac{4}{g_3}X^3 - \tfrac{g_2}{g_3}XZ^2 - Z^3 - \tfrac{1}{g_3}Y^2Z = 0.$$

Dieses Polynom soll als Determinantenfläche

$$(*) \qquad p(X,Y,Z) = \det(XA + YB - ZE) = 0$$

mit $A, B \in \mathrm{Mat}(3;\mathbb{C})$ dargestellt werden.

a) Gilt $(*)$, so besitzt A die Eigenwerte $\frac{1}{e_1}, \frac{1}{e_2}, \frac{1}{e_3}$ und B die Eigenwerte $0, \pm\frac{1}{\sqrt{-g_3}}$. Die Eigen-

werte sind jeweils paarweise verschieden.
b) Es gibt eine Lösung von $(*)$, in der A eine Diagonalmatrix und B schiefsymmetrisch ist.
7) Man gebe explizit eine biholomorphe Abbildung zwischen dem Einheitskreis und dem Einheitsquadrat $\{z \in \mathbb{C}\,;\ 0 < x, y < 1\}$ in $\mathbb{C}$ an.
8) Sei $\Omega = \mathbb{Z}i\lambda + \mathbb{Z}\lambda$, $0 \neq \lambda \in \mathbb{C}$ ein Quadratgitter. Dann sind die Nullstellen der $\wp$–Funktion genau die Punkte der Menge $\frac{1+i}{2}\lambda + \Omega$. Jede Nullstelle ist von der Ordnung 2.
9) Ist Ω ein Gitter, so dass die WEIERSTRASSsche $\wp$-Funktion nur doppelte Nullstellen hat, dann existiert ein $0 \neq \lambda \in \mathbb{C}$ mit $\Omega = \mathbb{Z}i\lambda + \mathbb{Z}\lambda$.

§4. Die Abhängigkeit vom Gitter

In diesem Paragrafen soll die Abhängigkeit der WEIERSTRASSschen $\wp$–Funktion und der EISENSTEIN–Reihen G_k vom Gitter Ω untersucht werden. Dazu sei $\Omega = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$ stets ein Gitter in $\mathbb{C}$.

1. Homogenität und Basiswechsel. Mit Ω ist natürlich auch $\lambda\Omega$ für jedes $0 \neq \lambda \in \mathbb{C}$ ein Gitter in $\mathbb{C}$. Aus 3.1(3) und 3.2(1) folgt sofort

$$(1) \qquad \wp_{\lambda\Omega}(\lambda z) = \lambda^{-2} \cdot \wp_{\Omega}(z) \quad \text{und} \quad G_k(\lambda\Omega) = \lambda^{-k} \cdot G_k(\Omega), \quad k \geq 3.$$

Mit 3.3(2), 3.4(7) und 3.4(8) ergibt sich auch

$$(2) \qquad \begin{aligned} g_2(\lambda\Omega) &= \lambda^{-4} \cdot g_2(\Omega), \quad & g_3(\lambda\Omega) &= \lambda^{-6} \cdot g_3(\Omega), \\ \Delta(\lambda\Omega) &= \lambda^{-12} \cdot \Delta(\Omega), \quad & j(\lambda\Omega) &= j(\Omega). \end{aligned}$$

Satz. *Für Gitter Ω und Ω' in $\mathbb{C}$ sind äquivalent:*
(i) *Es gibt ein $0 \neq \lambda \in \mathbb{C}$ mit $\Omega' = \lambda\Omega$.*
(ii) $j(\Omega') = j(\Omega)$.

Beweis. (i) $\Longrightarrow$ (ii): Man vergleiche (2).
(ii) $\Longrightarrow$ (i): Sei zunächst $j(\Omega') = j(\Omega) \neq 0$. Dann gilt $g_2(\Omega) \neq 0$ und $g_2(\Omega') \neq 0$ nach 3.4(8). Also existiert ein $0 \neq \lambda \in \mathbb{C}$ mit

$$g_2(\Omega') = \lambda^{-4} \cdot g_2(\Omega) = g_2(\lambda\Omega)\,.$$

Mit (2) und 3.4(7) ergibt sich

$$g_3(\Omega') = \pm\lambda^{-6} \cdot g_3(\Omega) = \pm g_3(\lambda\Omega)\,.$$

Ersetzt man ggf. λ durch $i\lambda$, so folgt $g_2(\Omega') = g_2(\lambda\Omega)$ und $g_3(\Omega') = g_3(\lambda\Omega)$. Dann erhält man $\Omega' = \lambda\Omega$ aus Korollar 3.3F. Gilt $j(\Omega) = j(\Omega') = 0$, so folgt $g_2(\Omega) = g_2(\Omega') = 0$ und $g_3(\Omega) \neq 0$ sowie $g_3(\Omega') \neq 0$ aus Korollar 3.4C. Dann erhält man die Behauptung analog. $\square$

Ist (ω_1, ω_2) eine Basis von Ω (vgl. 1.3), so schreibt man auch (vgl. 3.1(1))

(3) $\wp(z;\omega_1,\omega_2) := \wp_\Omega(z)$ und $G_k(\omega_1,\omega_2) := G_k(\Omega)$ für $k \geq 3$.

Da aber $\wp$ und die G_k nur vom Gitter Ω und nicht von der Wahl einer Basis abhängen, ergibt das Basis-Lemma 1.6 sofort

(4) $\wp(z;\omega_1',\omega_2') = \wp(z;\omega_1,\omega_2)$ und $G_k(\omega_1',\omega_2') = G_k(\omega_1,\omega_2)$ für $k \geq 3$

und

(5) $$\begin{pmatrix}\omega_1' \\ \omega_2'\end{pmatrix} = U \begin{pmatrix}\omega_1 \\ \omega_2\end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad U = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix} \in \mathrm{GL}\,(2;\mathbb{Z}),$$

also für

(6) $\omega_1' = a\omega_1 + b\omega_2$, $\omega_2' = c\omega_1 + d\omega_2$ und $a,b,c,d \in \mathbb{Z}$, $ad - bc = \pm 1$.

Für $0 \neq \lambda \in \mathbb{C}$ hat dann (1) für $k \geq 3$ auch die Form

(1') $\wp(\lambda z;\lambda\omega_1,\lambda\omega_2) = \lambda^{-2}\cdot\wp(z;\omega_1,\omega_2)$, $G_k(\lambda\omega_1,\lambda\omega_2) = \lambda^{-k}\cdot G_k(\omega_1,\omega_2)\,.$

Als Basis von Ω sind ω_1, ω_2 über $\mathbb{R}$ linear unabhängig, d. h. $\tau := \omega_1/\omega_2 \notin \mathbb{R}$. Da mit (ω_1,ω_2) auch $(-\omega_1,\omega_2)$ eine Basis von Ω ist, darf man ohne Einschränkung $\mathrm{Im}\,\tau > 0$ annehmen. Man beachte, dass dies genau dann der Fall ist, wenn das Dreieck $(0,\omega_2,\omega_1)$ positiv orientiert ist. Aus (4) und (1') folgert man daher

(7) $\wp(z;\omega_1,\omega_2) = \omega_2^{-2}\cdot\wp(z/\omega_2;\tau,1)$ und $G_k(\omega_1,\omega_2) = \omega_2^{-k}\cdot G_k(\tau,1)$ für $k \geq 3$.

Zur Untersuchung von elliptischen Funktionen bezüglich Ω darf man daher ohne wesentliche Einschränkung $\omega_2 = 1$, also

$$\Omega = \mathbb{Z}\tau + \mathbb{Z} \quad \text{mit} \quad \tau \in \mathbb{H}$$

annehmen. Dabei ist die *obere Halbebene* $\mathbb{H}$ definiert durch

$$\mathbb{H} := \{\tau \in \mathbb{C}\ ;\ \mathrm{Im}\,\tau > 0\}.$$

Wegen

(8) $$\tau' := \frac{\omega_1'}{\omega_2'} = \frac{a\omega_1 + b\omega_2}{c\omega_1 + d\omega_2} = \frac{a\tau + b}{c\tau + d} \quad \text{und} \quad \mathrm{Im}\,\tau' = \frac{ad - bc}{|c\tau + d|^2}\cdot\mathrm{Im}\,\tau$$

darf man dann aber beim Übergang von der Basis $(\tau,1)$ von Ω zur Basis $(\tau',1)$ des Gitters $\frac{1}{c\tau+d}\Omega$ mit $\tau' \in \mathbb{H}$ nur noch Matrizen $U = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d\end{smallmatrix}\right)$ aus der *speziellen linearen Gruppe über* $\mathbb{Z}$, also $\mathrm{SL}\,(2;\mathbb{Z}) := \{U \in \mathrm{GL}\,(2;\mathbb{Z})\ ;\ \det U = 1\}$, zulassen (vgl. 1.5(2)). Damit kann (4) wegen (6) und (1') in der Form

(9) $$\wp\left(\frac{z}{c\tau + d}\,;\,\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\,,\,1\right) = (c\tau + d)^2\cdot\wp(z;\tau,1)$$

bzw.

(10) $$G_k\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}, 1\right) = (c\tau + d)^k\cdot G_k(\tau,1) \quad \text{für } k \geq 4$$

geschrieben werden. Dabei sind $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ und es gilt $ad - bc = 1$.

2. Eine Reihenentwicklung für die G_k. Zur Herleitung einer solchen Entwicklung geht man von einem Gitter der Form

$$\Omega = \mathbb{Z}\tau + \mathbb{Z} \quad \text{mit } \operatorname{Im}\tau > 0, \text{ also } \tau \in \mathbb{H}, \tag{1}$$

aus und betrachtet hier τ als beliebig, aber fest. In der Bezeichnung von **1** ist

$$G_k(\tau) := G_k(\tau, 1) = \sum_{m,n}{}' (m\tau + n)^{-k}\,, \quad k \geq 4 \text{ gerade,} \tag{2}$$

wobei der Strich an dem Summenzeichen bedeuten soll, dass über alle Paare

$$(0,0) \neq (m,n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$

zu summieren ist. Natürlich kann man die G_k als Abbildungen der oberen Halbebene $\mathbb{H}$ nach $\mathbb{C}$ auffassen.

Das wesentliche Hilfsmittel besteht nun in der folgenden Verallgemeinerung der Sinus-Partial-bruchentwicklung:

Proposition. *Für alle $\tau \in \mathbb{H}$ und alle ganzen $k \geq 2$ gilt*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} (\tau + n)^{-k} = \frac{(-2\pi i)^k}{(k-1)!} \cdot \sum_{r=1}^{\infty} r^{k-1} e^{2\pi i r\tau}. \tag{3}$$

Beweis. Durch Differentiation der Cotangens-Partialbruchentwicklung (vgl. R. Remmert, G. Schumacher [2002], Satz 11.2.1) erhält man die Partialbruchentwicklung

$$\left(\frac{\pi}{\sin \pi\tau}\right)^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} (\tau + n)^{-2}\,, \quad \tau \in \mathbb{C}, \quad \tau \notin \mathbb{Z}.$$

Die rechte Seite konvergiert dabei in jedem Kompaktum in $\mathbb{C}$, das keinen Punkt von $\mathbb{Z}$ enthält, gleichmäßig. Wählt man hier $\tau \in \mathbb{H}$, so erhält man wegen $|e^{2\pi i\tau}| = e^{-2\pi \operatorname{Im}\tau} < 1$ auch

$$\left(\frac{\pi}{\sin \pi\tau}\right)^2 = \left(\frac{2\pi i}{e^{\pi i\tau} - e^{-\pi i\tau}}\right)^2 = (-2\pi i)^2 e^{2\pi i\tau} \frac{1}{(1 - e^{2\pi i\tau})^2} = (-2\pi i)^2 \cdot \sum_{r=1}^{\infty} r e^{2\pi i r\tau}\,.$$

Die Behauptung (3) ist also für $k = 2$ bewiesen. Da aber beide Seiten lokal gleichmäßig in τ konvergieren, erhält man den allgemeinen Fall durch wiederholte Differentiation nach τ. □

Die linke Seite von (3) ist offenbar in τ periodisch mit der Periode 1, die rechte Seite von (3) gibt diesen Sachverhalt in Form einer Fourier-Reihe wieder. Damit erhalten wir sogleich die Fourier–*Entwicklung* der Eisenstein–Reihen.

Satz. *Für alle $\tau \in \mathbb{H}$ und alle geraden $k \geq 4$ gilt*

$$G_k(\tau) = 2\zeta(k) + 2\frac{(2\pi i)^k}{(k-1)!} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \sigma_{k-1}(m) \cdot e^{2\pi i m\tau}\,, \quad \tau \in \mathbb{H}, \tag{4}$$

mit

$$\zeta(s) := \sum_{m=1}^{\infty} m^{-s}\,, \; s > 1, \quad \text{und} \quad \sigma_s(m) := \sum_{d\in\mathbb{N}, d|m} d^s, \;\; s \in \mathbb{R}\,.$$

Die Reihe (4) *konvergiert für $\varepsilon > 0$ in jedem Bereich $\{\tau \in \mathbb{H}\,;\, \operatorname{Im}\tau \geq \varepsilon\}$ absolut gleichmäßig. Die G_k sind auf $\mathbb{H}$ holomorph und erfüllen*

$$G_k\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right) = (c\tau + d)^k \cdot G_k(\tau) \quad \text{für alle} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}\,(2;\mathbb{Z})\,. \tag{5}$$

Wegen (4) ist nunmehr klar, dass die G_k für gerades $k \geq 4$ nicht identisch verschwinden.

Beweis. Wegen der absoluten Konvergenz nach dem Konvergenz-Lemma 1.9 für $\Omega = \mathbb{Z}\tau + \mathbb{Z}$ kann man (2) umformen in

$$G_k(\tau) = \sum_{n\neq 0} n^{-k} + \sum_{m\neq 0}\sum_{n\in\mathbb{Z}} (m\tau + n)^{-k} = 2\zeta(k) + 2\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n\in\mathbb{Z}} (m\tau + n)^{-k}\,.$$

Jetzt trägt man die Proposition ein und erhält

$$G_k(\tau) = 2\zeta(k) + 2\frac{(2\pi i)^k}{(k-1)!} \cdot \sum_{s=1}^{\infty}\sum_{r=1}^{\infty} r^{k-1} e^{2\pi i r s\tau}.$$

Schließlich fasst man die Terme mit $rs = m$ zusammen und bekommt (4). Die Holomorphie folgt aus der lokal gleichmäßigen Konvergenz der Reihe (4) und (5) ist eine Umformulierung von 1(10). □

Mit Hilfe der bekannten Formeln (vgl. M. Koecher [1987], V.5.5)

$$\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}\,, \quad \zeta(6) = \frac{\pi^6}{945} \tag{6}$$

erhält man speziell

$$G_4(\tau) = \frac{\pi^4}{45}\left(1 + 240 \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \sigma_3(m) \cdot e^{2\pi i m\tau}\right), \tag{7}$$

$$G_6(\tau) = \frac{2\pi^6}{945}\left(1 - 504 \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \sigma_5(m) \cdot e^{2\pi i m\tau}\right). \tag{8}$$

Bereits 1881 hat A. Hurwitz (1859–1919) in seiner Dissertation (*Math. Werke I*, 1–66) gezeigt, dass die algebraischen Gleichungen, denen die Reihen G_k nach Korollar 3.3D genügen, Anlass zu zahlentheoretischen Aussagen geben. Wir notieren den einfachsten Fall als

Korollar (Hurwitz-*Identität*). *Für alle* $m \in \mathbb{N}$ *gilt*

$$\sigma_7(m) = \sigma_3(m) + 120 \sum_{\substack{r,s \in \mathbb{N} \\ r+s=m}} \sigma_3(r)\sigma_3(s)\,.$$

Beweis. Man verwendet die Identität $7G_8 = 3G_4^2$ gemäß 3.3(4). Trägt man hier (7) und

$$G_8(\tau) = 2\zeta(8) + 2\frac{(2\pi)^8}{7!} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \sigma_7(m) \cdot e^{2\pi i m \tau}$$

ein, so erhält man nach Ausmultiplizieren eine Potenzreihenidentität in $q = e^{2\pi i \tau}$. Ein Koeffizientenvergleich ergibt $7\zeta(8) = 6\zeta^2(4)$ und

$$7\frac{2(2\pi)^8}{7!}\sigma_7(m) = 3\frac{\pi^8}{45 \cdot 45}\left(480\sigma_3(m) + 240 \cdot 240 \sum_{r+s=m} \sigma_3(r)\sigma_3(s)\right).$$

Das ist aber die Behauptung. □

Bemerkungen. a) Wer wegen der „Reinheit der Methode“ oder aus anderen Gründen die Werte (6) für $\zeta(4)$ und $\zeta(6)$ nicht als bekannt voraussetzen will, kann diese – und eine lineare Rekursionsformel für die $\zeta(k)$, $k \geq 4$ gerade – aus der Identität 3.3(4) durch Vergleich der Koeffizienten von $e^{2\pi i \tau}$ gewinnen.
b) Die Aussage der Proposition bleibt mit $\Gamma(k)$ statt $(k-1)!$ für beliebiges reelles $k > 1$ richtig und wird dann manchmal nach R. Lipschitz benannt (J. Reine Angew. Math. **105**, 127–156 (1889)).
c) Die im Korollar bewiesene Hurwitz-Identität ist eine Aussage über natürliche Zahlen und als solche Gegenstand der elementaren Zahlentheorie. Es ist bis jetzt jedoch kein Beweis bekannt, der innerhalb der elementaren Zahlentheorie geführt werden kann. Ein unveröffentlichter Beweis, der mit formalen (oder konvergenten) Potenzreihen mit Koeffizienten aus $\mathbb{Z}$ arbeitet, stammt von D. Zagier und N. Skoruppa (1978). Man vergleiche auch N. Skoruppa, J. Number Theory **43**, 68-73 (1993): Für eine Unbestimmte (oder reelle Variable x mit $|x| < 1$) setzt man

$$F_n := F_n(x) := \frac{x^n}{1 - x^n}$$

und bemerkt zunächst die Identität

$$(*) \qquad \sum_n \sigma_r(n) x^n = \sum_m m^r F_m.$$

Dabei sind hier und später die Summationen über alle positiven ganzen Zahlen zu erstrecken. Weiter verifiziert man

$$F_m F_n = F_{m+n}(F_m + F_n + 1).$$

Mit den Abkürzungen

$$A_k := \sum_{m+n=k} mnF_mF_n\ , \quad B_k := \sum_{n-m=k} mnF_mF_n\ , \quad C_k := kF_k \cdot \sum_m mF_m$$

beweist man dann

$$\begin{aligned} A_k &= 2F_k \cdot \sum_{m<k} m(k-m)F_m + \frac{k^3-k}{6}F_k\ , \\ B_k &= 2C_k + F_k \cdot \sum_{m<k} m(m-k)F_m - \sum_{m>k} m(m-k)F_m\ , \end{aligned}$$

also

$$A_k + 2B_k - 4C_k = \frac{k^3-k}{6}F_k - 2\sum_{m>k} m(m-k)F_m.$$

Damit folgt nun

$$\left(\sum_n n^3F_n\right)^2 = \sum_{m,n} \frac{mn}{12}((m+n)^4 + (m-n)^4 - 2m^4 - 2n^4)F_mF_n$$

$$= \sum_k \frac{k^4}{12}(A_k + 2B_k - 4C_k) = \sum_k \frac{k^4}{12}\frac{k^3-k}{6}F_k - \sum_m \frac{m}{6}F_m \cdot \sum_{k<m} k^4(m-k)\ .$$

Verwendet man nun die Summenformel für die Summen der 4. und 5. Potenzen, so erhält man

$$120\left(\sum_n n^3F_n\right)^2 = \sum_k (k^7 - k^3)F_k.$$

Wegen $(*)$ ist dies die Hurwitz-Identität.

3. Die Diskriminante. Wie in 3.3(2) bzw. 3.4(7) führt man

(1) $g_2(\tau) := 60\, G_4(\tau), \quad g_3(\tau) := 140\, G_6(\tau) \quad$ und $\quad \Delta(\tau) := g_2^3(\tau) - 27g_3^2(\tau)$

ein. Aus 2(7) und 2(8) erhält man dann

(2) $$g_2(\tau) = \frac{(2\pi)^4}{12}\left(1 + 240 \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \sigma_3(m) \cdot e^{2\pi i m\tau}\right),$$

(3) $$g_3(\tau) = \frac{(2\pi)^6}{216}\left(1 - 504 \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \sigma_5(m) \cdot e^{2\pi i m\tau}\right).$$

Satz. *Die Diskriminante* $\Delta(\tau)$ *besitzt eine* FOURIER-*Entwicklung der Form*

$$\Delta(\tau) = (2\pi)^{12} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \tau(m) \cdot e^{2\pi i m \tau}\ , \quad \tau \in \mathbb{H}, \tag{4}$$

mit Koeffizienten $\tau(m) \in \mathbb{Z}$ *und* $\tau(1) = 1$. *Die Diskriminante* $\Delta : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ *ist eine holomorphe Funktion mit* $\Delta(\tau) \neq 0$ *für alle* $\tau \in \mathbb{H}$ *und*

$$\Delta\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right) = (c\tau + d)^{12} \cdot \Delta(\tau) \quad \textit{für alle} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}\,(2; \mathbb{Z}). \tag{5}$$

Die Bezeichnung der Koeffizienten in (4) mit $\tau(m)$ ist eine Tradition, die beiden τ's sollten hier kein Anlass zur Konfusion sein.

Beweis. Mit den Abkürzungen

$$A := \sum_{m=1}^{\infty} \sigma_3(m) \cdot e^{2\pi i m \tau}\ , \quad B := \sum_{m=1}^{\infty} \sigma_5(m) \cdot e^{2\pi i m \tau},$$

hat man nach (2) und (3)

$$\Delta(\tau) = \frac{(2\pi)^{12}}{1728} \cdot \left((1 + 240A)^3 - (1 - 504B)^2\right) = (2\pi)^{12} \cdot (e^{2\pi i \tau} + \ldots) \tag{$*$}$$

und rechts steht eine Potenzreihe in $q = e^{2\pi i \tau}$. Zum Nachweis, dass hier die Koeffizienten in $\mathbb{Z}$ liegen, hat man zunächst $d^3 \equiv d^5 \,(\mathrm{mod}\ 12)$ für $d \in \mathbb{Z}$ und folglich $\sigma_3(m) \equiv \sigma_5(m) \,(\mathrm{mod}\ 12)$ für $m \in \mathbb{N}$. Bezieht man die Kongruenz also auf die Koeffizienten, so gilt $A \equiv B \,(\mathrm{mod}\ 12)$. Jetzt rechnet man modulo $1728 = 12^3$ und bekommt

$$(1 + 240A)^3 - (1 - 504B)^2 \equiv 12^2(5A + 7B) \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\ 12^3).$$

Der Nenner in $(*)$ kürzt sich also in allen Koeffizienten heraus.

Mit g_2 und g_3 (vgl. Satz 2) ist auch Δ holomorph. Man erhält $\Delta(\tau) \neq 0$ aus Korollar 3.4C. Die Beziehung (5) folgt direkt aus 2(5) und (1). $\square$

(6)

m	$\tau(m)$	Primfaktorzerlegung								
1	1		1							
2	-24	$-$	2^3	3						
3	252		2^2	3^2		7				
4	$-1\,472$	$-$	2^6						23	
5	$4\,830$		2	3	5	7			23	
6	$-6\,048$	$-$	2^5	3^3		7				
7	$-16\,744$	$-$	2^3			7		13	23	
8	$84\,480$		2^9	3	5		11			
9	$-113\,643$	$-$		3^4					23	61
10	$-115\,920$	$-$	2^4	3^2	5	7			23	

4. Die absolute Invariante. Neben der Diskriminante Δ spielt die absolute Invariante j gemäß 3.4(8) eine wichtige Rolle:

(1) $$j(\tau) := (12g_2(\tau))^3/\Delta(\tau)\ ,\ \tau \in \mathbb{H}.$$

Man beachte, dass $j(\tau)$ wegen Satz 3 für alle $\tau \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Im}\tau > 0$ erklärt ist. g_2 und Δ sind nach 3(2) und 3(4) durch FOURIER-Reihen in τ darstellbar, also Potenzreihen in $q := e^{2\pi i\tau}$. Zur Herleitung einer entsprechenden Reihe für j benötigt man die

Proposition. *Sind f und g für $|q| < 1$ konvergente Potenzreihen,*

$$f(q) = \sum_{n\geq 0} a_n q^n\ ,\ g(q) = \sum_{n\geq 0} b_n q^n\ ,\ a_n\ ,\ b_n \in \mathbb{Z},$$

mit $b_0 = 1$ und $g(q) \neq 0$ für $|q| < 1$, so ist auch f/g eine für $|q| < 1$ konvergente Potenzreihe mit Koeffizienten aus $\mathbb{Z}$.

Beweis. Zunächst sind f und g, also auch f/g für $|q| < 1$ holomorph, also dort in eine Potenzreihe entwickelbar, deren Koeffizienten wir mit c_n bezeichnen. Aus

$$\left(\sum_{n\geq 0} c_n q^n\right) \cdot \left(\sum_{n\geq 0} b_n q^n\right) = \sum_{n\geq 0} a_n q^n$$

sowie $b_0 = 1$ folgt die Rekursionsformel

$$c_0 = a_0\ ,\ c_m = a_m - \sum_{n=0}^{m-1} c_n b_{m-n}\ ,\ m \geq 1.$$

Also sind alle c_m ganze Zahlen. □

Damit erhalten wir den

Satz A. *Die absolute Invariante $j : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ ist holomorph und besitzt eine FOURIER-Entwicklung der Form*

(2) $$j(\tau) = e^{-2\pi i\tau} + \sum_{m\geq 0} j_m \cdot e^{2\pi i m\tau} = e^{-2\pi i\tau} + 744 + 196884 \cdot e^{2\pi i\tau} + \ldots$$

mit $j_m \in \mathbb{Z}$ für alle $m \geq 0$. Es gilt

(3) $$j\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right) = j(\tau) \quad \textit{für alle} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2;\mathbb{Z})\,.$$

Beweis. Die Holomorphie folgt mit (1) aus Satz 2 und Satz 3. Spaltet man einen Faktor q aus Δ ab, so kann man die Proposition anwenden und erhält (2) aus 3(2) und 3(4). Schließlich ist (3) eine Konsequenz von 2(5) und 3(5). □

Man wird später (Satz 6.6) sehen, dass die Koeffizienten j_m sogar alle positiv sind. Durch (3) wird gleichzeitig der Name „absolute Invariante“ motiviert. Es gilt aber auch die Umkehrung von (3):

Satz B. *Sind $\tau, \tau' \in \mathbb{H}$ und gilt $j(\tau') = j(\tau)$, dann gibt es eine Matrix $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in$ $\mathrm{SL}\,(2;\mathbb{Z})$ mit*

$$\tau' = \frac{a\tau + b}{c\tau + d}.$$

Beweis. Nach Voraussetzung gilt $j(\mathbb{Z}\tau' + \mathbb{Z}) = j(\mathbb{Z}\tau + \mathbb{Z})$. Es folgt $\mathbb{Z}\tau' + \mathbb{Z} = \mathbb{Z}\lambda\tau + \mathbb{Z}\lambda$ für ein $0 \neq \lambda \in \mathbb{C}$ aus Satz 1. Dann sind also $(\tau', 1)$ und $(\lambda\tau, \lambda)$ zwei Basen eines Gitters. Nach dem Basis-Lemma 1.6 gibt es daher $M = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in$ $\mathrm{GL}\,(2;\mathbb{Z})$ mit $\tau' = a\lambda\tau + b\lambda, 1 = c\lambda\tau + d\lambda$, also $\tau' = \frac{a\tau+b}{c\tau+d}$. Da aber τ und τ' in $\mathbb{H}$ liegen, folgt $\det M = 1$ aus 1(8). □

Eine später in Korollar III.5.2A in schärferer Form zu beweisende Aussage notieren wir bereits jetzt als

Satz C. *Zu jedem $c \in \mathbb{C}$ gibt es ein $\tau \in \mathbb{H}$ mit $j(\tau) = c$.*

Beweis. Wir nehmen an, dass $j(\tau) \neq c$ für alle $\tau \in \mathbb{H}$ gilt. Dann ist

$$F(\tau) = \frac{j'(\tau)}{j(\tau) - c}$$

holomorph auf $\mathbb{H}$. Wir betrachten das Integral

$$\int_\gamma F(\tau)d\tau\,,\ \gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4 + \gamma_5\,,$$

mit dem Weg $\gamma = \partial G$ aus nebenstehender Abbildung. Aus (3) folgt

$$F(\tau + 1) = F(\tau)\,,\ F(-1/\tau) = \tau^2 \cdot F(\tau)\,.$$

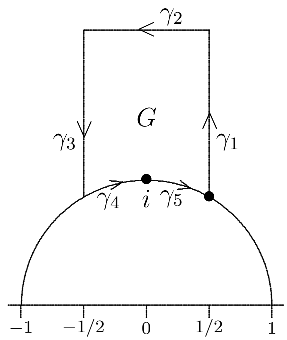

Abb. 10: Integrationsweg

Daraus ergibt sich

$$\int_{\gamma_1} F(\tau)d\tau + \int_{\gamma_3} F(\tau)d\tau = \int_{\gamma_4} F(\tau)d\tau + \int_{\gamma_5} F(\tau)d\tau = 0.$$

Nach der Proposition und (2) besitzt $F(\tau)$ eine FOURIER-Entwicklung der Form

$$F(\tau) = \sum_{m\geq 0} a_m e^{2\pi i m\tau}\,, \quad a_0 = -2\pi i\,.$$

Damit erhält man $\int_{\gamma_2} F(\tau)d\tau = 2\pi i$. Mit dem Residuensatz folgt nun

$$2\pi i \cdot \sum_{\tau\in G} \mathrm{ord}_\tau(j - c) = \int_\gamma F(\tau)d\tau = 2\pi i\,.$$

Das ist ein Widerspruch. Also existiert ein $\tau \in \mathbb{H}$ mit $j(\tau) = c$. □

Betrachtet man scheinbar allgemeiner an Stelle von $j(\tau)$, d. h. an Stelle eines Gitters der Form $\mathbb{Z}\tau + \mathbb{Z}$, $\tau \in \mathbb{H}$, die absolute Invariante $j(\Omega)$ für ein beliebiges Gitter Ω von $\mathbb{C}$ gemäß 3.4(8), so zeigt Satz 1

$$(4) \qquad j(\Omega) = j\left(\omega_1/\omega_2\right), \quad \text{falls } \operatorname{Im}\left(\omega_1/\omega_2\right) > 0.$$

Die Bedeutung des Satzes A für elliptische Funktionen liegt nun in dem

Korollar. *Sind $c_2, c_3 \in \mathbb{C}$ mit $c_2^3 - 27c_3^2 \neq 0$, dann gibt es genau ein Gitter Ω in $\mathbb{C}$ mit*

$$c_2 = g_2(\Omega) \quad \textit{und} \quad c_3 = g_3(\Omega).$$

Beweis. Nach Satz C gibt es ein Gitter Ω mit

$$j(\Omega) = \frac{(12c_2)^3}{c_2^3 - 27c_3^2}.$$

a) $c_2 = 0$: Dann ist $j(\Omega) = 0$, also $g_2(\Omega) = 0$, $g_3(\Omega) \neq 0$. Man wählt nun ein $0 \neq \lambda \in \mathbb{C}$ mit $g_3(\Omega) = \lambda^6 c_3$. Wegen 1(2) folgt

$$g_3(\lambda\Omega) = \lambda^{-6} \cdot g_3(\Omega) = c_3 \quad \text{und} \quad g_2(\lambda\Omega) = \lambda^{-4} \cdot g_2(\Omega) = 0 = c_2.$$

b) $c_2 \neq 0$: Dann ist $j(\Omega) \neq 0$, also $g_2(\Omega) \neq 0$. Man wählt nun ein $0 \neq \lambda \in \mathbb{C}$ mit $g_2(\Omega) = \lambda^4 c_2$. Es folgt $g_2(\lambda\Omega) = c_2$ und aus $j(\lambda\Omega) = j(\Omega)$ erhält man $c_3^2 = g_3^2(\lambda\Omega)$. Die Existenz ergibt sich, indem man ggf. λ durch $i\lambda$ ersetzt.

Die Eindeutigkeit ergibt sich in beiden Fällen aus Korollar 3.3F. □

Bemerkung. Aufgrund des Korollars, das auch als *Inversions–Satz* bezeichnet wird, kann man mit der zugehörigen WEIERSTRASSschen $\wp$–Funktion, die in E.2 genannten Differentialgleichungen und Integrationsprobleme lösen.

5. Berechnung des FAGNANO–Integrals. Wir wenden nun die Ergebnisse an, um das in E.3(1) beschriebene FAGNANO–Integral zu berechnen. Dazu sei

$$(1) \qquad \Gamma(s) := \int_0^\infty t^{s-1} e^{-t} dt, \quad s \in \mathbb{C}, \ \operatorname{Re}(s) > 0,$$

die *Gamma–Funktion* (vgl. R. REMMERT [1995], 2.3.2).

Proposition. *Es gilt*

$$\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{4x^3 - 4x}}\, dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1 - t^4}}\, dt = \frac{\Gamma(1/4)^2}{4\sqrt{2\pi}}.$$

Beweis. Durch die Substitution $x = 1/t^2$ geht das erste Integral in das zweite über. Aus (1) folgert man

$$\Gamma(1/4)^2 = \int_0^\infty \int_0^\infty (xy)^{-3/4} e^{-(x+y)} dx\, dy.$$

Mit der Substitution $x = r^2 \cos^2 \varphi,\ y = r^2 \sin^2 \varphi$ erhält man

$$\begin{aligned} \Gamma(1/4)^2 &= 4\sqrt{2} \cdot \int_0^\infty e^{-r^2} dr \cdot \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{\sin(2\varphi)}}\, d\varphi \\ &= 4\sqrt{2\pi} \cdot \int_0^{\pi/4} \frac{1}{\sqrt{\sin(2\varphi)}}\, d\varphi = 4\sqrt{2\pi} \cdot \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^4}}\, dt\ , \end{aligned}$$

wenn man R. Remmert, G. Schumacher [2002], 12.4.6, und darüber hinaus die Substitution $t = \sqrt{\sin(2\varphi)}$ verwendet. □

Nun berechnen wir zunächst die Eisenstein–Reihen zum Gitter $\mathbb{Z}i + \mathbb{Z}$.

Satz A. *Es gilt*

$$g_2(\mathbb{Z}i + \mathbb{Z}) = \frac{\Gamma(1/4)^8}{16\pi^2} \quad \textit{und} \quad g_3(\mathbb{Z}i + \mathbb{Z}) = 0.$$

Beweis. Wegen $\mathbb{Z}i + \mathbb{Z} = i(\mathbb{Z}i + \mathbb{Z})$ folgt aus 1(2)

$$g_3(\mathbb{Z}i + \mathbb{Z}) = g_3(i(\mathbb{Z}i + \mathbb{Z})) = -g_3(\mathbb{Z}i + \mathbb{Z}), \quad \text{also}\ \ g_3(\mathbb{Z}i + \mathbb{Z}) = 0.$$

Andererseits erhält man aus 3(2)

$$g_2(\mathbb{Z}i + \mathbb{Z}) = g_2(i) = \frac{(2\pi)^4}{12}(1 + 240 \cdot \sum_{m=1}^\infty \sigma_3(m) \cdot e^{-2\pi m}) > 0.$$

Dann existiert nach 1(2) ein $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda > 0$, so dass $\Omega := \lambda(\mathbb{Z}i + \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}i\lambda + \mathbb{Z}\lambda$ bereits $g_2(\Omega) = 4$ und $g_3(\Omega) = 0$ erfüllt. Wegen $4x^3 - 4x = 4x(x-1)(x+1)$ folgt $e_1 = -1$, $e_2 = 1$, $e_3 = 0$ aus Satz 3.4. Mit Satz 3.6 sowie $\wp = \wp_\Omega$ ergibt sich

$$\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{4x^3 - 4x}}\, dx = \int_{\lambda/2}^0 \frac{\wp'(t)}{\sqrt{4\wp(t)^3 - 4\wp(t)}}\, dt = \int_0^{\lambda/2} dt = \frac{\lambda}{2},$$

wenn man die Differentialgleichung 2.3 sowie $\wp'(t) < 0$ auf $]\!]0, \lambda/2[\![$ verwendet. Die Proposition führt auf $\lambda = \Gamma(1/4)^2/(2\sqrt{2\pi})$. Aus 1(2) ergibt sich dann

$$g_2(\mathbb{Z}i + \mathbb{Z}) = \lambda^4 \cdot g_2(\Omega) = \frac{\Gamma(1/4)^8}{16\pi^2}.$$

□

Korollar *Sei* $\Omega = \mathbb{Z}i + \mathbb{Z}$ *und* $\wp = \wp_\Omega$ *die zugehörige* WEIERSTRASS*sche* $\wp$–*Funktion. Ist* $0 < R \leq 1$*, so gilt für das* FAGNANO–*Integral* E 3(1)

$$\int\limits_0^R \frac{1}{\sqrt{1-t^4}}\,dt = \frac{\Gamma(1/4)^2}{2\sqrt{2\pi}}\,\xi\ ,$$

wobei $\xi \in \rrbracket 0, 1/2\rrbracket$ *bestimmt ist durch*

$$\wp_\Omega(\xi) = \frac{\Gamma(1/4)^4}{8\pi R^2}.$$

Beweis. Setzt man $\lambda = \Gamma(1/4)^2/(2\sqrt{2\pi})$, so folgt mit Satz A

$$\lambda\xi = \lambda \int\limits_\xi^0 \frac{\wp'(s)}{\sqrt{4\wp^3(s) - 4\lambda^4\wp(s)}}\,ds \ = \lambda \int\limits_{\lambda^2/R^2}^\infty \frac{1}{\sqrt{4x^3 - 4\lambda^4 x}}\,dx = \int\limits_0^R \frac{1}{\sqrt{1-t^4}}\,dt,$$

wenn man die Substitution $x = \lambda^2/t^2$ verwendet. □

Ein entsprechendes Ergebnis soll nun noch für das Sechseck–Gitter hergeleitet werden. Analog zur Proposition erhält man das

Lemma. *Es gilt*

$$\int\limits_1^\infty \frac{1}{\sqrt{4x^3-4}}\,dx = \int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^6}}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}\cdot\Gamma(1/6)}{6\cdot\Gamma(2/3)}\ .$$

Beweis. Die erste Gleichung folgt mit der Substitution $x = t^{-2}$. Aus (1) erhält man

$$\Gamma(1/2)\cdot\Gamma(1/6) = \int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty x^{-1/2}y^{-5/6}e^{-(x+y)}dx\,dy$$

Mit der Substitution $x = r\cos^2\varphi$, $y = r\sin^2\varphi$ ergibt sich

$$\Gamma(1/2)\cdot\Gamma(1/6) = 2\int\limits_0^\infty\int\limits_0^{\pi/2} r^{-1/3}(\sin\varphi)^{-2/3}e^{-r}d\varphi\,dr = 6\Gamma(2/3)\cdot\int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^6}}\,dt,$$

wenn man im letzten Schritt $t = (\sin\varphi)^{1/3}$ substituiert. Wegen $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ (vgl. R. REMMERT, G. SCHUMACHER [2002], 12.4.6) folgt die Behauptung. □

Nun können wir die EISENSTEIN–Reihen zum Gitter $\mathbb{Z}\rho + \mathbb{Z}$ berechnen.

Satz B. *Sei* $\rho = \frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3})$*. Dann gilt*

$$g_2(\mathbb{Z}\rho + \mathbb{Z}) = 0 \quad \textit{und} \quad g_3(\mathbb{Z}\rho+\mathbb{Z}) = \frac{4\pi^3\cdot\Gamma(1/6)^6}{3^6\cdot\Gamma(2/3)^6}.$$

Beweis. Aus $\rho^2 = \rho - 1$ folgt $\rho(\mathbb{Z}\rho + \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}\rho + \mathbb{Z}$ und mit 1(2)

$$g_2(\mathbb{Z}\rho + \mathbb{Z}) = g_2(\rho(\mathbb{Z}\rho + \mathbb{Z})) = \rho^{-4} \cdot g_2(\mathbb{Z}\rho + \mathbb{Z}), \quad \text{also} \quad g_2(\mathbb{Z}\rho + \mathbb{Z}) = 0$$

wegen $\rho^{-4} \neq 1$. Andererseits erhält man aus 3(3)

$$g_3(\mathbb{Z}\rho + \mathbb{Z}) = \frac{(2\pi)^6}{216}(1 - 504 \cdot \sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m \sigma_5(m) \cdot q^m), \quad q = e^{-\pi\sqrt{3}}.$$

Aus der Abschätzung

$$\frac{\sigma_5(m+1)q^{m+1}}{\sigma_5(m)q^m} \leq \left(\frac{m+1}{m}\right)^5 \zeta(5) \cdot q \leq 2^5 \cdot \frac{\pi^4}{90} \cdot q < 1$$

folgt, dass $(\sigma_5(m)q^m)_{m\geq 1}$ eine monoton fallende Nullfolge ist. Nach dem LEIBNIZ–Kriterium ist $g_3(\mathbb{Z}\rho+\mathbb{Z})$ daher positiv. Dann existiert nach 1(2) ein $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda > 0$, so dass das Gitter $\Omega = \lambda(\mathbb{Z}\rho + \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}\lambda\rho + \mathbb{Z}\lambda$ bereits $g_2(\Omega) = 0$ und $g_3(\Omega) = 4$ erfüllt. Weil 1 die einzige reelle Nullstelle von $4x^3 - 4$ und $\wp(x) = \wp_\Omega(x)$ für $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$ nach Proposition 3.5 reell ist, folgt

$$e_2 = 1 \quad \text{und} \quad \lim_{x\downarrow 0} \wp_\Omega(x) = \infty.$$

Da die $\wp$–Funktion auf $]\!]0, \lambda/2]\!]$ streng monoton ist, ergibt sich

$$\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{4x^3 - 4}}\, dx = \int_{\lambda/2}^0 \frac{\wp'(t)}{\sqrt{4\wp(t)^3 - 4}}\, dt = \int_0^{\lambda/2} dt = \lambda/2,$$

wenn man die Differentialgleichung in Satz 2.3 verwendet. Das Lemma führt auf den Wert $\lambda = \sqrt{\pi} \cdot \Gamma(1/6)/\big(3 \cdot \Gamma(2/3)\big)$. Aus 1(2) ergibt sich dann

$$g_3(\mathbb{Z}\rho + \mathbb{Z}) = \lambda^6 \cdot g_3(\Omega) = \frac{4\pi^3 \cdot \Gamma(1/6)^6}{3^6 \cdot \Gamma(2/3)^6}. \qquad \square$$

Bemerkung. Aus den Eigenschaften der Gamma-Funktion (vgl. R. REMMERT [1995], 2.2.2) folgert man leicht

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1 - t^6}}\, dt = \frac{\Gamma(1/3)^3}{4\pi\sqrt[3]{2}}, \quad g_3(\mathbb{Z}\rho + \mathbb{Z}) = \left(\frac{\Gamma(1/3)^3}{2\pi}\right)^6.$$

Aufgaben. 1) Für $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ ist $\tau \mapsto \wp(z;\tau,1)$ eine meromorphe Funktion auf $\mathbb{H}$. Man bestimme die Pole und die Hauptteile der LAURENT-Entwicklungen. Man entwickle $\wp(z;\tau,1)$ in eine FOURIER-Reihe bezüglich τ.
2) Zu paarweise verschiedenen $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ mit $\alpha + \beta + \gamma = 0$ gibt es genau ein Gitter Ω mit $e_1 = \alpha$, $e_2 = \beta$ und $e_3 = \gamma$.
3) Das Gitter Ω erfüllt genau dann $g_3(\Omega) = 0$ bzw. $j(\Omega) = 1728$, wenn es ein $0 \neq \lambda \in \mathbb{C}$ gibt

mit $\Omega = \mathbb{Z}i\lambda + \mathbb{Z}\lambda$. Das Gitter Ω erfüllt genau dann $g_2(\Omega) = 0$ bzw. $j(\Omega) = 0$, wenn es ein $0 \neq \lambda \in \mathbb{C}$ gibt mit

$$\Omega = \mathbb{Z}\tfrac{1}{2}(1 + i\sqrt{3})\lambda + \mathbb{Z}\lambda.$$

4) Genau dann gilt $j(\Omega) \in \mathbb{R}$ (vgl. 3.5), wenn es ein $0 \neq \lambda \in \mathbb{C}$ gibt, so dass $\lambda\Omega$ konjugationsstabil ist. Es gilt $j(\tau) \in \mathbb{R}$, falls $2\mathrm{Re}\,(\tau) \in \mathbb{Z}$.
5) e_1, e_2, e_3 sind genau dann alle reell, wenn $g_2(\Omega)$ und $g_3(\Omega)$ reell sind und $\Delta(\Omega) > 0$ gilt.
6) Ω ist genau dann ein Gitter, bei dem die Nullstellen von $\wp_\Omega(z)$ in $\frac{1}{2}\Omega$ enthalten sind, wenn $\Omega = \mathbb{Z}i\lambda + \mathbb{Z}\lambda$ für ein $0 \neq \lambda \in \mathbb{C}$ gilt.
7) Wie in Korollar 4.4E betrachte man die Funktion

$$\lambda : \mathbb{H} \to \mathbb{C}\,,\ \lambda(\tau) := \frac{\wp(1/2; \mathbb{Z}\tau + \mathbb{Z}) - \wp((\tau+1)/2; \mathbb{Z}\tau + \mathbb{Z})}{\wp(\tau/2; \mathbb{Z}\tau + \mathbb{Z}) - \wp((\tau+1)/2; \mathbb{Z}\tau + \mathbb{Z})}.$$

Dann ist λ holomorph mit $\lambda(\tau) \neq 0, 1$ und erfüllt

$$\lambda\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right) = \lambda(\tau) \quad \text{für alle} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}\,(2;\mathbb{Z}) \ \text{ mit } \ b \equiv c \equiv 0\,(\mathrm{mod}\ 2),$$
$$\lambda(\tau + 1) = 1 - \lambda(\tau), \quad \lambda(-1/\tau) = 1/\lambda(\tau).$$

8) Sei $\lambda : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ wie in Aufgabe 7 definiert. Dann existiert zu $\gamma \in \mathbb{C}$ mit $\gamma \neq 0, 1$ ein $\tau \in \mathbb{H}$ mit $\lambda(\tau) = \gamma$.
9) Man berechne ein Analogon der Hurwitz-Identität für σ_9 und σ_{11}, in der nur σ_3 und σ_5 vorkommen.

§5. Elliptische Kurven und das Additionstheorem der $\wp$-Funktion

Wenn es nicht ausdrücklich anders gesagt wird, ist $\Omega = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$ auch in diesem Paragrafen ein beliebiges Gitter in $\mathbb{C}$ und $\wp(z) = \wp_\Omega(z) = \wp(z; \omega_1, \omega_2)$ die zugehörige Weierstrasssche $\wp$-Funktion.

1. Das Additionstheorem. *Für alle $z, w \in \mathbb{C}$ mit $z, w, z \pm w \notin \Omega$ gilt*

(1) $$\wp(z + w) + \wp(z) + \wp(w) = \frac{1}{4}\left(\frac{\wp'(z) - \wp'(w)}{\wp(z) - \wp(w)}\right)^2.$$

Man hat dazu zunächst die

Proposition. *Für $w \in \mathbb{C} \setminus \frac{1}{2}\Omega$ ist*

(2) $$f(z) := f(z; w) := \frac{1}{2}\frac{\wp'(z) - \wp'(w)}{\wp(z) - \wp(w)}$$

eine elliptische Funktion zum Gitter Ω mit Polen erster Ordnung in den Punkten

(3) $$z \in \Omega \quad \textit{und} \quad z \in -w + \Omega$$

und Hauptteilen

$$f(z;w) = -\frac{1}{z} - \wp(w)\cdot z + \mathcal{O}(z^2) \quad \textit{bei} \quad z = 0, \tag{4}$$

$$f(z;w) = \frac{1}{z+w} + c(w) + \mathcal{O}(z+w) \quad \textit{bei} \quad z = -w. \tag{5}$$

Der Koeffizient $c(w)$ wird sogleich bestimmt.

Beweis. Außer an den Stellen (3) ist f zunächst an den Stellen $z \in w + \Omega$ nicht definiert. Wegen

$$\lim_{z\to w} f(z;w) = \frac{1}{2}\lim_{z\to w}\frac{(\wp'(z)-\wp'(w))/(z-w)}{(\wp(z)-\wp(w))/(z-w)} = \frac{1}{2}\frac{\wp''(w)}{\wp'(w)}$$

und Lemma 2.3A liegen hier aber hebbare Singularitäten vor. Bei $z = 0$ verwendet man $\wp(z) = z^{-2} + \mathcal{O}(z^2)$, also $\wp'(z) = -2z^{-3} + \mathcal{O}(z)$ zum Beweis von (4). Bei $z = -w$ liegt nach 2.3(5) ein einfacher Pol vor, dessen Residuum sich nach Satz 2.2B zu 1 ergibt. □

1. Beweis des Additionstheorems und der Nachweis von

$$c(w) = 0. \tag{5'}$$

(Ein 2. Beweis folgt in Abschnitt 5.) Man betrachte die elliptische Funktion

$$g(z) := (f(z;w))^2 - \wp(z+w) - \wp(z) - \wp(w)\ ,\ w \in \mathbb{C}\setminus \tfrac{1}{2}\Omega.$$

Nach der Proposition hat g höchstens in den Punkten (3) Pole. Bei $z = 0$ gilt

$$g(z) = (z^{-2} + 2\wp(w)) - \wp(w) - z^{-2} - \wp(w) + \mathcal{O}(z) = \mathcal{O}(z), \tag{$*$}$$

und bei $z = -w$ ist

$$g(z) = \frac{1}{(z+w)^2} + \frac{2c(w)}{z+w} - \frac{1}{(z+w)^2} + \mathcal{O}(1) = \frac{2c(w)}{z+w} + \mathcal{O}(1).$$

Danach hätte g höchstens Pole erster Ordnung an den Stellen $-w + \Omega$. Nach Satz 2.2B können solche Pole aber nicht auftreten. Es folgt also $c(w) = 0$ und g ist nach Satz 2.2A konstant. Aus $(*)$ ergibt sich $g = 0$.

Die bisher ausgeschlossenen Fälle $\omega \in \Omega$, $w = \omega/2 \notin \Omega$ folgen nun aus Stetigkeitsgründen. □

Korollar A. *Für* $z \in \mathbb{C}\setminus\frac{1}{2}\Omega$ *gilt*

$$\wp(2z) = -2\wp(z) + \frac{1}{4}\left(\frac{\wp''(z)}{\wp'(z)}\right)^2. \tag{6}$$

Beweis. Für $w \to z$ erhält man (6) aus (1). □