

1 Einige Grundlagen der Festkörpermechanik

In diesem Kapitel sind einige wichtige Begriffe, Konzepte und Gleichungen der Festkörpermechanik zusammengestellt. Es versteht sich, dass diese Darstellung nicht vollständig sein kann und sich nur auf das Notwendigste beschränkt. Der Leser, der sich ausführlicher informieren möchte, sei auf die Spezialliteratur verwiesen; einige Angaben hierzu finden sich am Ende des Buches.

Wie der Name schon andeutet, verfolgt die Festkörpermechanik das Ziel, das mechanische Verhalten von festen Körpern einer Analyse zugänglich zu machen. Sie basiert auf der Idealisierung des in Wirklichkeit diskontinuierlichen Materials als ein Kontinuum. Seine Eigenschaften sowie die mechanischen Größen können damit durch im allgemeinen stetige Funktionen beschrieben werden. Es ist klar, dass die darauf aufbauende Theorie ihre Grenzen dort hat, wo der diskontinuierliche Charakter des Materials eine Rolle spielt. So sind Begriffe wie *Spannungen* und *Verzerrungen* nur dann physikalisch sinnvoll anwendbar, wenn sie auf Bereiche bezogen sind, die hinreichend groß im Vergleich zu den charakteristischen Abmessungen der vorhandenen Inhomogenitäten sind (zum Beispiel bei makroskopischen Bauteilen aus polykristallinen Werkstoffen groß gegenüber der Korngröße). Hierauf ist insbesondere bei der Anwendung der Kontinuumsmechanik auf mikroskopische Bereiche zu achten.

Die Darstellung erfolgt im wesentlichen in kartesischen Koordinaten unter Verwendung der Indexschreibweise bzw. der symbolischen Notation. Sie beschränkt sich außerdem meist auf isotrope Materialien sowie auf kleine (infinitesimale) Deformationen.

1.1 Spannung

1.1.1 Spannungsvektor

Wirken auf einen Körper äußere Kräfte (Volumenkräfte \mathbf{f} , Oberflächenkräfte \mathbf{t}), so werden hierdurch verteilte innere Kräfte - die *Spannungen* - hervorgerufen. Um sie zu definieren, denken wir uns den Körper im augenblicklichen (deformierten) Zustand durch einen Schnitt getrennt (Bild 1.1a), über welchen die beiden Teilkörper durch entgegengesetzt gleich große Flächenlasten aufeinander einwirken. Ist $\Delta \mathbf{F}$ die Kraft auf ein Flächenelement ΔA der Schnittfläche, so beschreibt der Quotient $\Delta \mathbf{F}/\Delta A$ die mittlere Flächenbelastung für dieses Element. Den Grenzwert

$$\mathbf{t} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{F}}{\Delta A} = \frac{d\mathbf{F}}{dA} \quad (1.1)$$

bezeichnet man als *Spannungsvektor* in einem Punkt der Schnittfläche. Seine Komponente $\sigma = \mathbf{t} \cdot \mathbf{n}$ in Richtung des *Normaleneinheitsvektors* \mathbf{n} (senkrecht zum Flächenelement dA) heißt *Normalspannung*; die Komponente $\tau = \sqrt{t^2 - \sigma^2}$ senkrecht zu \mathbf{n} (tangential zum Flächenelement dA) nennt man *Schubspannung* (Bild 1.1b).

Der Spannungsvektor \mathbf{t} in einem Punkt hängt von der Orientierung des Schnittes, das heißt vom Normalenvektor \mathbf{n} ab: $\mathbf{t} = \mathbf{t}(\mathbf{n})$. Wir betrachten zunächst drei Schnitte senkrecht zu den Koordinatenachsen x_1, x_2, x_3 , denen die Spannungsvektoren $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3$ zugeordnet sind (Bild 1.1c). Ihre kartesischen Komponenten werden mit σ_{ij} bezeichnet, wobei die Indizes i, j die Zahlen 1, 2, 3 annehmen können. Der erste Index kennzeichnet die Orientierung des Schnittes (Richtung der Normale), während durch den zweiten Index die Richtung der Komponente zum Ausdruck kommt. Danach sind $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}$ Normalspannungen und σ_{12}, σ_{23} etc. Schubspannungen. Es sei angemerkt, dass es manchmal zweckmäßig ist eine andere Notation zu verwenden. Unter Bezug auf die Koordinaten x, y, z bezeichnet man die Normalspannungen häufig mit $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ und die Schubspannungen mit τ_{xy}, τ_{yz} etc.

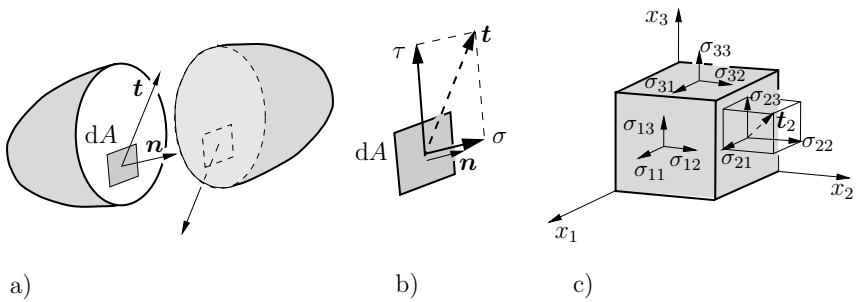


Bild 1.1 Spannungsvektor

Für das Vorzeichen von Spannungen gilt folgende Vereinbarung: Komponenten sind positiv, wenn sie an einer Schnittfläche, deren Normalenvektor in positive (negative) Koordinatenrichtung zeigt, in positive (negative) Richtung wirken.

Mittels der Komponenten lässt sich zum Beispiel der Spannungsvektor \mathbf{t}_2 in der Form $\mathbf{t}_2 = \sigma_{21}\mathbf{e}_1 + \sigma_{22}\mathbf{e}_2 + \sigma_{23}\mathbf{e}_3 = \sigma_{2i}\mathbf{e}_i$ ausdrücken. Analog gilt $\mathbf{t}_1 = \sigma_{1i}\mathbf{e}_i$ oder allgemein

$$\mathbf{t}_j = \sigma_{ji} \mathbf{e}_i . \quad (1.2)$$

Darin sind $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ die Einheitsvektoren in Richtung der Koordinaten x_1, x_2, x_3 . Außerdem wurde Gebrauch von der *Einsteinschen Summationsvereinbarung* gemacht. Danach ist über einen Ausdruck zu summieren, wenn in ihm ein und derselbe Index doppelt vorkommt; der betreffende Index durchläuft dabei der Reihe nach die Werte 1, 2, 3.

1.1.2 Spannungstensor

Die neun skalaren Größen σ_{ij} sind die kartesischen Komponenten des Cauchy'schen *Spannungstensors* $\boldsymbol{\sigma}$ (A.L. Cauchy, 1789-1857). Man kann ihn in Form der Matrix

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \quad (1.3)$$

darstellen. Durch den Spannungstensor ist der *Spannungszustand* in einem Punkt, d.h. der Spannungsvektor für jeden beliebigen Schnitt durch den Punkt, eindeutig bestimmt. Um dies zu zeigen, betrachten wir das infinitesimale Tetraeder nach Bild 1.2a. Die Orientierung der Fläche dA ist durch den Normalenvektor \mathbf{n} bzw. durch seine Komponenten n_i gegeben. Das Kräftegleichgewicht liefert dann zunächst $\mathbf{t} dA = \mathbf{t}_1 dA_1 + \mathbf{t}_2 dA_2 + \mathbf{t}_3 dA_3$ (etwaige Volumenkräfte sind von höherer Ordnung klein). Mit $\mathbf{t} = t_i \mathbf{e}_i$, $dA_j = dA n_j$ und (1.2) erhält man daraus

$$t_i = \sigma_{ij} n_j \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}, \quad (1.4)$$

wobei der Punkt in der symbolischen Schreibweise die einfache Indexsummation (hier über j) kennzeichnet. Mit dem Spannungstensor $\boldsymbol{\sigma}$ liegt demnach der Spannungsvektor \mathbf{t} für jeden Schnitt \mathbf{n} fest (hier und im weiteren wollen wir Tensoren und Vektoren alternativ durch ihre Symbole oder durch ihre Komponenten kennzeichnen und beide Schreibweisen oft parallel benutzen). Es sei angemerkt, dass (1.4) eine lineare Abbildung zweier Vektoren darstellt, durch welche $\boldsymbol{\sigma}$ als Tensor zweiter Stufe charakterisiert ist.

Aufgrund des Momentengleichgewichts, auf das wir hier nicht eingehen wollen, ist der Spannungstensor symmetrisch:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}. \quad (1.5)$$

Das heißt, die Schubspannungen in aufeinander senkrecht stehenden Schnitten sind einander paarweise zugeordnet.

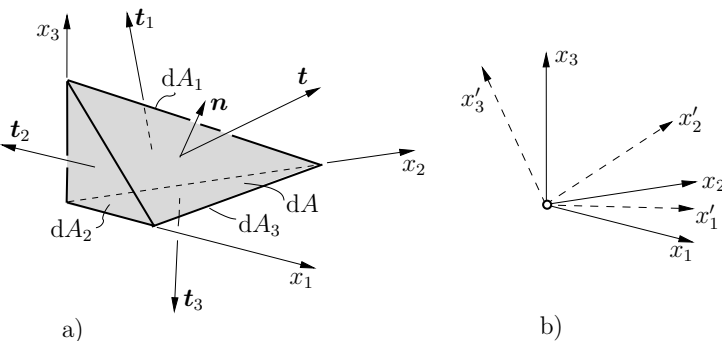


Bild 1.2 Spannungszustand

In manchen Fällen ist es notwendig, den Spannungstensor bzw. seine Komponenten in einem zum x_1, x_2, x_3 -Koordinatensystem gedrehten System x'_1, x'_2, x'_3 (Bild 1.2b) anzugeben. Der Zusammenhang zwischen den Komponenten bezüglich des einen und des anderen Systems ist durch die *Transformationsbeziehung*

$$\sigma'_{kl} = a_{ki} a_{lj} \sigma_{ij} . \quad (1.6)$$

gegeben. Darin kennzeichnet a_{ki} den Kosinus des Winkels zwischen der x'_k - und der x_i -Achse: $a_{ki} = \cos(x'_k, x_i) = \mathbf{e}'_k \cdot \mathbf{e}_i$.

Ein besonderes Achsensystem ist das *Hauptachsensystem*. Es ist dadurch ausgezeichnet, dass in Schnitten senkrecht zu den Achsen nur Normalspannungen und keine Schubspannungen auftreten. Das bedeutet, der Spannungsvektor t_i und der zugehöriger Normalenvektor n_i sind jeweils gleichgerichtet: $t_i = \sigma n_i = \sigma \delta_{ij} n_j$. Darin sind σ die Normalspannung im Schnitt und δ_{ij} das *Kronecker-Symbol* ($\delta_{ij} = 1$ für $i = j$ und $\delta_{ij} = 0$ für $i \neq j$). Gleichsetzen mit (1.4) liefert das homogene lineare Gleichungssystem

$$(\sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij}) n_j = 0 \quad \text{bzw.} \quad (\boldsymbol{\sigma} - \sigma \mathbf{I}) \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0} , \quad (1.7)$$

wobei \mathbf{I} den Einheitstensor mit den Komponenten δ_{ij} darstellt. Es hat nur dann eine nichttriviale Lösung für die n_j , wenn seine Koeffizientendeterminante verschwindet: $\det(\sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij}) = 0$. Dies führt auf die kubische Gleichung

$$\sigma^3 - I_\sigma \sigma^2 - II_\sigma \sigma - III_\sigma = 0 , \quad (1.8)$$

wobei die Größen $I_\sigma, II_\sigma, III_\sigma$ unabhängig vom Koordinatensystem, d.h. *Invarianten* des Spannungstensors sind; sie lauten

$$\begin{aligned} I_\sigma &= \sigma_{ii} = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} , \\ II_\sigma &= (\sigma_{ij} \sigma_{ij} - \sigma_{ii} \sigma_{jj}) / 2 \\ &= -(\sigma_{11} \sigma_{22} + \sigma_{22} \sigma_{33} + \sigma_{33} \sigma_{11}) + \sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2 , \\ III_\sigma &= \det(\sigma_{ij}) = \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{vmatrix} . \end{aligned} \quad (1.9)$$

Die drei Lösungen $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ von (1.8) sind sämtlich reell. Sie werden als *Hauptspannungen* bezeichnet. Je einer Hauptspannung ist eine *Haupttrichtung* (Normalenvektor n_j in Hauptachsenrichtung) zugeordnet, die sich aus (1.7) ermitteln lässt. Man kann zeigen, dass die drei Haupttrichtungen senkrecht aufeinander stehen. Die Hauptspannungen selbst sind Extremwerte der Normalspannung in einem Punkt. Bezüglich des Hauptachsensystems kann der Spannungstensor durch

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} \quad (1.10)$$

dargestellt werden.

In Schnittflächen, deren Normale jeweils senkrecht auf einer der Hauptachsen steht und mit den beiden anderen einen Winkel von 45° einschließt, treten extreme Schubspannungen auf. So wirkt zum Beispiel im Schnitt mit der Normale senkrecht zur σ_3 -Richtung eine Schubspannung $\tau_3 = \pm(\sigma_1 - \sigma_2)/2$. Allgemein sind die sogenannten *Hauptschubspannungen* gegeben durch

$$\tau_1 = \pm \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} \quad , \quad \tau_2 = \pm \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2} \quad , \quad \tau_3 = \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \quad . \quad (1.11)$$

Sind σ_1 die maximale und σ_3 die minimale Hauptspannung, so ist demnach die maximale Schubspannung

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \quad . \quad (1.12)$$

Von praktischer Bedeutung sind noch die *Oktaederspannungen*. Hierunter versteht man die Normal- und die Schubspannung in Schnitten, deren Normale mit den drei Hauptachsen gleiche Winkel einschließt. Es gilt

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{oct}} &= \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} = \frac{\sigma_{ii}}{3} = \frac{I_\sigma}{3} \quad , \\ \tau_{\text{oct}} &= \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \quad . \end{aligned} \quad (1.13)$$

Die Spannung σ_{oct} kann man auch als mittlere Normalspannung deuten: $\sigma_m = \sigma_{kk}/3 = \sigma_{\text{oct}}$.

Vielfach ist es nützlich, den Spannungstensor additiv zu zerlegen:

$$\sigma_{ij} = \frac{\sigma_{kk}}{3} \delta_{ij} + s_{ij} \quad \text{bzw.} \quad \boldsymbol{\sigma} = \sigma_m \mathbf{I} + \mathbf{s} \quad . \quad (1.14)$$

Darin beschreibt $\frac{1}{3}\sigma_{kk}\delta_{ij}$ eine Beanspruchung durch eine allseitig gleiche Spannung σ_m . Wegen der Analogie zum Spannungszustand in einer ruhenden Flüssigkeit wird dieser Anteil als *hydrostatischer Spannungszustand* bezeichnet. Den Tensor \mathbf{s} nennt man *Deviator*. Durch ihn bzw. durch seine Invarianten

$$\begin{aligned} I_s &= 0 \quad , \\ II_s &= \frac{1}{2} s_{ij} s_{ij} = \frac{1}{6} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] \\ &= \frac{1}{6} [(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2] + \sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2 \quad , \\ III_s &= \frac{1}{3} s_{ij} s_{jk} s_{ki} \end{aligned} \quad (1.15)$$

wird die Abweichung des Spannungszustandes vom hydrostatischen Zustand charakterisiert. Durch Vergleich mit (1.13) erkennt man: $II_s = \frac{3}{2}\tau_{\text{oct}}^2$.

Zur grafischen Veranschaulichung des Spannungszustandes werden häufig die *Mohrschen Spannungskreise* herangezogen (O. Mohr, 1835-1918). Hierbei handelt es sich um die Darstellung der Normalspannung σ und der zugehörigen Schubspannung τ als Spannungsbildpunkte in einem σ - τ -Diagramm für alle möglichen Schnitte. Geht man von einem Hauptachsensystem aus, so gilt mit (1.4)

$$\begin{aligned}\sigma^2 + \tau^2 &= t_i t_i = \sigma_1^2 n_1^2 + \sigma_2^2 n_2^2 + \sigma_3^2 n_3^2, \\ \sigma &= t_i n_i = \sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2.\end{aligned}$$

Damit lässt sich unter Beachtung von $n_i n_i = 1$ zum Beispiel die Identität

$$\left(\sigma - \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}\right)^2 + \tau^2 = -\sigma(\sigma_2 + \sigma_3) + \left(\frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}\right)^2 + (\sigma^2 + \tau^2)$$

in der Form

$$\left(\sigma - \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}\right)^2 + \tau^2 = n_1^2 (\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_1 - \sigma_3) + \left(\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}\right)^2 \quad (1.16)$$

schreiben. Man kann dies formal als Gleichung eines "Kreises" mit dem Mittelpunkt bei $\sigma = (\sigma_2 + \sigma_3)/2$, $\tau = 0$ und einem von n_1 abhängigen Radius auffassen. Wegen $0 \leq n_1^2 \leq 1$ beträgt der minimale Mittelpunktsabstand der Spannungsbildpunkte $(\sigma_2 - \sigma_3)/2 = \tau_1$ (für $n_1 = 0$), während der maximale Abstand $\sigma_1 + (\sigma_2 - \sigma_3)/2$ (für $n_1 = \pm 1$) ist. Analoge Überlegungen können an zwei weiteren Gleichungen durchgeführt werden, die sich aus (1.16) durch zyklische Vertauschung der Indizes ergeben. Ordnet man die Hauptspannungen nach ihrer Größe ($\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$), so erhält man zusammengefasst eine Darstellung nach Bild 1.3. Spannungsbildpunkte befinden sich danach nur in dem schraffierten Gebiet bzw. auf den Kreisen vom Radius τ_i . Die Kreise selbst entsprechen dabei jeweils Schnitten, deren Normale senkrecht zu einer der drei Hauptachsen steht.

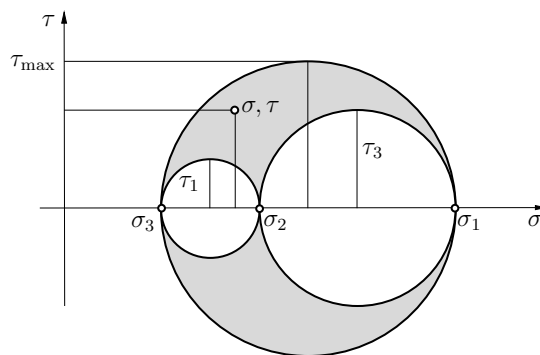


Bild 1.3 Mohrsche Spannungskreise

1.1.3 Gleichgewichtsbedingungen

Auf einen beliebigen Teilkörper, der aus einem Körper herausgeschnitten ist, wirken im allgemeinen über das Volumen V verteilte Volumenkräfte f_i sowie über die Oberfläche ∂V verteilte Flächenkräfte (Spannungsvektor) t_i . Kräftegleichgewicht herrscht dann, wenn die Resultierende dieser Kräfte verschwindet:

$$\int_{\partial V} t_i dA + \int_V f_i dV = 0. \quad (1.17)$$

Mit $t_i = \sigma_{ij}n_j$ und unter Anwendung des Gaußschen Satzes $\int_{\partial V} \sigma_{ij}n_j dA = \int_V \sigma_{ij,j} dV$ ergibt sich hieraus

$$\int_V (\sigma_{ij,j} + f_i) dV = 0. \quad (1.18)$$

Vorausgesetzt ist dabei, dass die Spannungen und ihre Ableitungen stetig sind; letztere sind durch Indizes nach dem Komma gekennzeichnet: $\sigma_{ij,j} = \partial\sigma_{ij}/\partial x_j$. Da das betrachtete Volumen V beliebig ist, folgt aus (1.18), dass für jeden Punkt des Körpers die *Gleichgewichtsbedingungen*

$$\sigma_{ij,j} + f_i = 0 \quad \text{bzw.} \quad \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f} = \mathbf{0} \quad (1.19)$$

erfüllt sein müssen. Dabei haben wir in der symbolischen Schreibweise den Vektoroperator $\nabla = (\partial/\partial x_j) \mathbf{e}_j$ verwendet.

Aus (1.19) erhält man unmittelbar die *Bewegungsgleichungen*, wenn man die bei der Bewegung auftretenden *Trägheitskräfte* $-\rho\ddot{u}_i$ als zusätzliche Volumenkräfte auffasst:

$$\sigma_{ij,j} + f_i = \rho \ddot{u}_i. \quad (1.20)$$

Darin ist ρ die Dichte; über eine Größe gesetzte Punkte kennzeichnen Ableitungen nach der Zeit.

Auf die Momentengleichgewichtsbedingung wollen wir hier nicht näher eingehen. Sie führt auf die in (1.5) schon erwähnte Symmetrie des Spannungstensors.

1.2 Deformation und Verzerrung

1.2.1 Verzerrungstensor

Zur Beschreibung der Kinematik eines deformierbaren Körpers werden üblicherweise der Verschiebungsvektor und ein Verzerrungstensor herangezogen. Zu ihrer Erklärung betrachten wir einen beliebigen materiellen Punkt P , dessen Lage im undeformierten Zustand (zum Beispiel zur Zeit $t = 0$) durch die Koordinaten (Ortsvektor) X_i gekennzeichnet wird (Bild 1.4). Ein zu P benachbarter Punkt Q

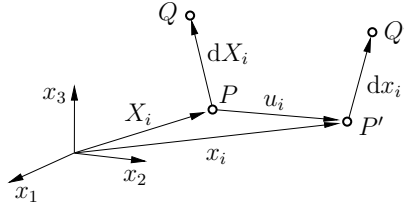


Bild 1.4 Deformation

im Abstand dS hat die Koordinaten $X_i + dX_i$. Unter der Wirkung der Belastung verschiebt sich P nach P' bzw. Q nach Q' . Ihre aktuelle Lage (zur Zeit t) ist durch die Raumkoordinaten x_i bzw. $x_i + dx_i$ gegeben. Die Verschiebung von P nach P' wird durch den *Verschiebungsvektor*

$$u_i = x_i - X_i \quad (1.21)$$

ausgedrückt.

Unter der Voraussetzung, dass eine umkehrbar eindeutige Zuordnung zwischen x_i und X_i besteht, kann man den Verschiebungsvektor u_i und den Ortsvektor x_i als Funktionen der *materiellen Koordinaten* X_i auffassen:

$$u_i = u_i(X_j, t), \quad x_i = x_i(X_j, t). \quad (1.22)$$

Zur Herleitung eines geeigneten Deformationsmaßes vergleichen wir nun die Abstände der benachbarten Punkte im deformierten und im undeformierten Zustand. Es ist zweckmäßig hierzu die Abstandsquadrate

$$\begin{aligned} ds^2 &= dx_k dx_k = \frac{\partial x_k}{\partial X_i} \frac{\partial x_k}{\partial X_j} dX_i dX_j \\ dS^2 &= dX_k dX_k = dX_i dX_j \delta_{ij} \end{aligned}$$

heranzuziehen. Mit (1.22) erhält man

$$ds^2 - dS^2 = 2 E_{ij} dX_i dX_j, \quad (1.23)$$

wobei

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} + \frac{\partial u_k}{\partial X_i} \frac{\partial u_k}{\partial X_j} \right) \quad (1.24)$$

ein symmetrischer Tensor zweiter Stufe ist. Man nennt ihn *Greenschen Verzerrungstensor* (G. Green, 1793-1841).

Es lässt sich zeigen, dass für hinreichend kleine (infinitesimale) Verschiebungsgradienten ($\partial u_i / \partial X_j \ll 1$) die Ableitung nach den materiellen Koordinaten X_j durch die Ableitung nach den Ortskoordinaten x_j ersetzt werden kann: $\partial u_i / \partial X_j \rightarrow \partial u_i / \partial x_j = u_{i,j}$. Beachtet man, dass in diesem Fall das Produkt

der Verschiebungsgradienten in E_{ij} von höherer Ordnung klein ist, so erhält man aus (1.24) den *infinitesimalen Verzerrungstensor*

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) . \quad (1.25)$$

Man kann ihn in Form der Matrix

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix} \quad (1.26)$$

darstellen, die wegen $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$ symmetrisch ist.

Geometrisch lassen sich die Komponenten $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}$ als *Dehnungen* (bezogene Längenänderungen) und $\varepsilon_{12}, \varepsilon_{23}, \varepsilon_{31}$ als *Gleitungen* (Winkeländerungen) deuten. Hingewiesen sei in diesem Zusammenhang auf die technische Notation. Unter Bezug auf ein x, y, z -Koordinatensystem finden dort häufig die Bezeichnungen $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ für die Dehnungen und $\gamma_{xy}/2, \gamma_{yz}/2, \gamma_{zx}/2$ für die Gleitungen Verwendung.

Die Eigenschaften des Verzerrungstensors können wir sinngemäß vom Spannungstensor übertragen. So existiert ein Hauptachsensystem, in dem die Gleitungen verschwinden und nur die *Hauptdehnungen* $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ auftreten. Daneben gibt es die drei Invarianten $I_\varepsilon, II_\varepsilon, III_\varepsilon$ des Verzerrungstensors. Die erste charakterisiert dabei geometrisch die *Volumendehnung* (bezogene Volumenänderung):

$$I_\varepsilon = \varepsilon_V = \varepsilon_{kk} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 . \quad (1.27)$$

Wird der Verzerrungstensor entsprechend

$$\varepsilon_{ij} = \frac{\varepsilon_{kk}}{3} \delta_{ij} + e_{ij} \quad \text{bzw.} \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{\varepsilon_V}{3} \mathbf{I} + \mathbf{e} \quad (1.28)$$

zerlegt, so beschreibt der erste Anteil die Volumenänderung, während durch den Deviator \mathbf{e} eine *Gestaltänderung* (bei gleichbleibendem Volumen) ausgedrückt wird. Angegeben sei noch die zweite Invariante des Deviators. Sie lautet in Analogie zu (1.15)

$$II_e = \frac{1}{2} e_{ij} e_{ij} = \frac{1}{6} [(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2] . \quad (1.29)$$

Bei gegebenen Verzerrungskomponenten liegen mit (1.25) sechs Gleichungen für die drei Verschiebungskomponenten vor. Soll in einem einfach zusammenhängenden Gebiet das Verschiebungsfeld (bis auf eine Starrkörperbewegung) eindeutig sein, so können die Verzerrungen nicht unabhängig voneinander sein; sie müssen den sogenannten *Verträglichkeitsbedingungen* (Kompatibilitätsbedingungen) genügen. Letztere ergeben sich aus (1.25) durch Elimination der Verschiebungen zu

$$\varepsilon_{ij,kl} + \varepsilon_{kl,ij} - \varepsilon_{ik,jl} - \varepsilon_{jl,ik} = 0 . \quad (1.30)$$

1.2.2 Verzerrungsgeschwindigkeit

Der Verzerrungstensor ist nicht immer geeignet, die Deformation bzw. die Bewegung eines deformierbaren Körpers zu beschreiben. In manchen Fällen, wie zum Beispiel in der Plastizität, ist es vielmehr zweckmäßig, Verzerrungsänderungen bzw. Verzerrungsgeschwindigkeiten zu verwenden. Wir gehen hierzu vom Geschwindigkeitsfeld $v_i(x_j, t)$ aus (Bild 1.5). Die Relativgeschwindigkeit zweier Partikel, die sich zur Zeit t in den benachbarten Raumpunkten P' und Q' befinden, wird durch

$$dv_i = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx_j = v_{i,j} dx_j \quad (1.31)$$

ausgedrückt. Hierdurch ist der Geschwindigkeitsgradient $v_{i,j}$ als Tensor zweiter Stufe definiert, den man gemäß

$$v_{i,j} = \frac{1}{2}(v_{i,j} + v_{j,i}) + \frac{1}{2}(v_{i,j} - v_{j,i}) = D_{ij} + W_{ij} \quad (1.32)$$

zerlegen kann.

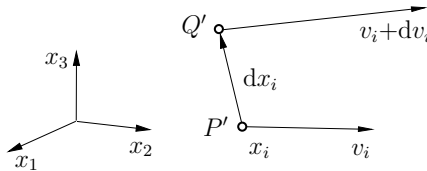


Bild 1.5 Verzerrungsgeschwindigkeit

Der symmetrische Anteil

$$D_{ij} = \frac{1}{2}(v_{i,j} + v_{j,i}) \quad (1.33)$$

wird als *Verzerrungsgeschwindigkeitstensor* bezeichnet. Er charakterisiert die zeitliche Verzerrungsänderung der momentanen Konfiguration. Das sogenannte *natürliche Verzerrungssinkrement* ergibt sich mit ihm zu

$$d\epsilon_{ij} = D_{ij} dt . \quad (1.34)$$

Wenn die Verzerrungen für alle Zeiten klein sind, dann können D_{ij} bzw. $d\epsilon_{ij}$ durch die zeitliche Ableitung des Verzerrungstensors $\dot{\epsilon}_{ij}$ bzw. durch $d\epsilon_{ij}$ ersetzt werden. Dies wollen wir im folgenden meist voraussetzen. Angemerkt sei wieder, dass auf D_{ij} bzw. $d\epsilon_{ij}$ alle Eigenschaften, die beim Spannungstensor diskutiert wurden, sinngemäß zutreffen. Daneben gelten auch die Kompatibilitätsbedingungen, wenn in (1.30) ϵ_{ij} durch D_{ij} bzw. durch $d\epsilon_{ij}$ ersetzt wird.

Der schiefsymmetrische Anteil W_{ij} in (1.32) beschreibt die augenblickliche Drehgeschwindigkeit (Spin), auf die wir hier jedoch nicht weiter eingehen.

1.3 Stoffgesetze

Wir beschränken uns im weiteren auf kleine (infinitesimale) Verzerrungen, was für eine große Klasse von Problemen zulässig ist und die Formulierung von Stoffgesetzen stark vereinfacht.

1.3.1 Elastizität

1.3.1.1 Linear elastisches Material

In Verallgemeinerung des einachsigen Hookeschen Gesetzes $\sigma = E \varepsilon$ (R. Hooke, 1635-1703) sind bei einem linear elastischen Material die Verzerrungen und die Spannungen im dreiachsigen Fall gemäß

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon} \quad \text{bzw.} \quad \sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (1.35a)$$

miteinander verknüpft. Dabei kennzeichnet der Doppelpunkt bei der symbolischen Schreibweise die Summation über zwei Indexpaare (hier k, l). Der *Elastizitätstensor* \mathbf{C} (Tensor vierter Stufe) charakterisiert mit seinen Komponenten C_{ijkl} die elastischen Eigenschaften des Materials. Man kann zeigen, dass es im allgemeinsten Fall einer Anisotropie maximal 21 voneinander unabhängige Konstanten gibt; dabei gelten die Symmetrien $C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{ijlk} = C_{klij}$. Löst man (1.35a) nach den Verzerrungen auf, so lautet das Elastizitätsgesetz

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{M} : \boldsymbol{\sigma} \quad \text{bzw.} \quad \varepsilon_{ij} = M_{ijkl} \sigma_{kl} . \quad (1.35b)$$

Darin ist $\mathbf{M} = \mathbf{C}^{-1}$ der *Nachgiebigkeitstensor* mit den Komponenten M_{ijkl} , für welche die gleichen Symmetrieeigenschaften wie für C_{ijkl} gelten.

Im Fall eines isotropen Materials ist \mathbf{C} durch alleine zwei unabhängige Konstanten festgelegt (isotroper Tensor):

$$C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) . \quad (1.36)$$

Damit erhält man aus (1.35a) das Elastizitätsgesetz

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2 \mu \varepsilon_{ij} , \quad (1.37)$$

worin λ und μ die Laméschen Konstanten sind (G. Lamé, 1795-1870). Ihr Zusammenhang mit dem Elastizitätsmodul E , dem Schubmodul G , der Querkontraktionszahl ν (Poissonsche Konstante, S.D. Poisson, 1781-1840) und dem Kompressionsmodul K ist in Tabelle 1.1 gegeben.

Löst man das Elastizitätsgesetz (1.37) entsprechend (1.35b) nach den Verzerrungen auf, so gilt mit den Beziehungen nach Tabelle 1.1

$$\varepsilon_{ij} = -\frac{\nu}{E} \sigma_{kk} \delta_{ij} + \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} . \quad (1.38)$$

Tabelle 1.1 Beziehungen zwischen den elastischen Konstanten

	Zugrunde liegendes Konstantenpaar			
	λ, μ	μ, K	E, G	E, ν
λ	λ	$K - \frac{2}{3}\mu$	$\frac{G(E-2G)}{3G-E}$	$\frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$
μ	μ	μ	G	$\frac{E}{2(1+\nu)}$
K	$\lambda + \frac{2}{3}G$	K	$\frac{GE}{3(3G-E)}$	$\frac{E}{3(1-2\nu)}$
E	$\frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}$	$\frac{9K\mu}{3K+\mu}$	E	E
ν	$\frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}$	$\frac{3K-2\mu}{2(3K+\mu)}$	$\frac{E}{2G} - 1$	ν

Eine weitere mögliche Schreibweise des isotropen Elastizitätsgesetzes folgt durch Trennung in den hydrostatischen (volumetrischen) und den deviatorischen Anteil. Mit (1.14), (1.28) und den Beziehungen nach Tabelle 1.1 ergibt sich

$$\sigma_{kk} = 3K \varepsilon_{kk}, \quad s_{ij} = 2\mu e_{ij}. \quad (1.39)$$

Ein anisotropes Material verhält sich nicht in allen Richtungen gleich. Wir wollen uns hier auf zwei Fälle beschränken. Bei *Orthotropie* hat der Werkstoff aufeinander senkrecht stehende Vorzugsrichtungen. Fallen sie mit den Koordinatenrichtungen zusammen, so lautet das Elastizitätsgesetz in Matrizenform

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{31} \\ 2\varepsilon_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} & 0 & 0 & 0 \\ h_{12} & h_{22} & h_{23} & 0 & 0 & 0 \\ h_{13} & h_{23} & h_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & h_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix}. \quad (1.40)$$

Dabei hängen die 9 von Null verschiedenen Nachgiebigkeiten h_{ij} mit den Tensorkomponenten M_{ijkl} und den technischen Konstanten E_i (Elastizitätsmoduli), ν_{ij} (Querdehnzahlen), μ_{ij} (Schubmoduli) wie folgt zusammen:

$$\begin{aligned} h_{11} = M_{1111} &= \frac{1}{E_1}, & h_{12} = M_{1122} &= -\frac{\nu_{12}}{E_1} = -\frac{\nu_{21}}{E_2}, & h_{44} = M_{2323} &= \frac{1}{\mu_{23}}, \\ h_{22} = M_{2222} &= \frac{1}{E_2}, & h_{23} = M_{2233} &= -\frac{\nu_{23}}{E_2} = -\frac{\nu_{32}}{E_3}, & h_{55} = M_{3131} &= \frac{1}{\mu_{31}}, \\ h_{33} = M_{3333} &= \frac{1}{E_3}, & h_{13} = M_{1133} &= -\frac{\nu_{13}}{E_1} = -\frac{\nu_{31}}{E_3}, & h_{66} = M_{1212} &= \frac{1}{\mu_{12}}. \end{aligned} \quad (1.41)$$

Zeigt ein orthotropes Material keine Abhängigkeit der Materialeigenschaften bei einer Drehung um eine Achse (zum Beispiel die x_3 -Achse), dann nennt man es *transversal isotrop*. Aufgrund der dann herrschenden Beziehungen zwischen den Nachgiebigkeiten

$$h_{11} = h_{22}, \quad h_{13} = h_{23}, \quad h_{44} = h_{55}, \quad h_{66} = 2(h_{11} - h_{12}) \quad (1.42)$$

wird ein solches Material durch nur 5 unabhängige Konstanten charakterisiert.

Erwärmt man ein spannungsfreies Material um die Temperaturdifferenz ΔT , so führt dies zu thermischen Dehnungen ε^{th} , die in erster Näherung proportional zur Temperaturänderung sind:

$$\varepsilon^{th} = \mathbf{k} \Delta T \quad \text{bzw.} \quad \varepsilon_{ij}^{th} = k_{ij} \Delta T. \quad (1.43)$$

Darin stellt \mathbf{k} den Tensor der Wärmedehnungskoeffizienten dar, welcher bei thermisch isotropem Material durch einen einzigen Parameter gegeben ist: $k_{ij} = k \delta_{ij}$. Fasst man die elastischen und die thermischen Verzerrungen zu den Gesamtverzerrungen ε zusammen, so erhält man das Duhamel-Neumann-Gesetz (J.M. Duhamel, 1797-1872, F. Neumann, 1798-1895)

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^{th}). \quad (1.44)$$

1.3.1.2 Formänderungsenergiedichte

Bei einem elastischen Material ist die bei einer Deformation pro Volumeneinheit geleistete Arbeit

$$U = \int_0^{\varepsilon_{kl}} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} \quad (1.45)$$

unabhängig vom Deformationsweg. In diesem Fall ist der Integrand $dU = \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}$ ein vollständiges Differential ($dU = \frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{ij}} d\varepsilon_{ij}$), und es gilt

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{ij}}. \quad (1.46)$$

Man bezeichnet $U = U(\varepsilon_{ij})$ als *Formänderungsenergiedichte* oder *spezifisches elastisches Potential*.

Neben $U(\varepsilon_{ij})$ kann man eine *spezifische Ergänzungsenergie* oder *spezifische Komplementärenergie* $\tilde{U}(\sigma_{ij})$ einführen. Sie ist definiert durch

$$\tilde{U} = \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} - U = \int_0^{\sigma_{kl}} \varepsilon_{ij} d\sigma_{ij}. \quad (1.47)$$

Analog zu (1.46) gilt

$$\varepsilon_{ij} = \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \sigma_{ij}}. \quad (1.48)$$

Im Spezialfall des linear elastischen Materials folgt die Formänderungs- bzw. die Komplementärenergiedichte durch Einsetzen von (1.35a) und (1.35b) in (1.45) und (1.47) zu

$$U = \tilde{U} = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} : \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{M} : \boldsymbol{\sigma} . \quad (1.49)$$

Sie lässt sich unter Verwendung von (1.14), (1.28) und (1.39) in zwei Teile aufspalten:

$$U = \frac{1}{2} K \varepsilon_{kk}^2 + \mu e_{ij} e_{ij} = U_V + U_G . \quad (1.50)$$

Darin ist $U_V = \frac{1}{2} K \varepsilon_{kk}^2 = \frac{1}{2} K I_\varepsilon^2$ die *Volumenänderungsenergiedichte* (=Energieanteil infolge reiner Volumendehnung), während $U_G = \mu e_{ij} e_{ij} = 2 \mu II_e$ die *Gestaltänderungsenergiedichte* (=Energieanteil infolge reiner Gestaltänderung) beschreibt.

1.3.1.3 Nichtlinear elastisches Material

Ist ein Material isotrop, so hängt die Formänderungsenergiedichte U nur von den Invarianten I_ε , II_ε , III_ε des Verzerrungstensors ab. Dabei lassen sich II_ε , III_ε auch durch die Invarianten II_e , III_e des Deviators ersetzen: $U = U(I_\varepsilon, II_e, III_e)$. Mit $I_\varepsilon = \varepsilon_{ij} \delta_{ij}$, $II_e = \frac{1}{2} e_{ij} e_{ij}$, $III_e = \frac{1}{3} e_{ij} e_{jk} e_{ki}$ und (1.46) kann man demnach ein allgemeines nichtlineares Elastizitätsgesetz in der Form

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial U}{\partial I_\varepsilon} \delta_{ij} + \frac{\partial U}{\partial II_e} e_{ij} + \frac{\partial U}{\partial III_e} e_{ik} e_{kj} \quad (1.51)$$

angeben.

Für viele Materialien kann man annehmen, dass sich die Formänderungsenergiedichte (wie beim linearen Material) entsprechend $U = U_1(I_\varepsilon) + U_2(II_e)$ aus einem Volumenänderungsanteil und einem Gestaltänderungsanteil zusammensetzt. In diesem Fall reduziert sich (1.51) auf

$$\sigma_{ij} = \frac{dU_1}{dI_\varepsilon} \delta_{ij} + \frac{dU_2}{dII_e} e_{ij} , \quad (1.52)$$

woraus sich durch Zerlegung in den hydrostatischen und den deviatorischen Anteil die folgenden Gesetzmäßigkeiten ergeben:

$$\sigma_{kk} = 3 \frac{dU_1}{dI_\varepsilon} = f(\varepsilon_{kk}) , \quad s_{ij} = \frac{dU_2}{dII_e} e_{ij} = g(II_e) e_{ij} . \quad (1.53)$$

Wird das Material zusätzlich noch als inkompressibel angesehen ($\varepsilon_{kk} = 0$), so entfällt in (1.53) die erste Gleichung. Die Funktion $g(II_e)$ kann man dann durch das einachsige Spannungs-Dehnungs-Verhalten $\sigma(\varepsilon)$ des Materials ausdrücken. Zu diesem Zweck definieren wir zunächst eine einachsige *Vergleichsspannung* oder *effektive Spannung* σ_e folgendermaßen: ein dreiachsiger Spannungszustand $\boldsymbol{\sigma}$

(bzw. \mathbf{s}) ist hinsichtlich der Materialbeanspruchung äquivalent zu einem einachsigen Spannungszustand σ_e , wenn II_s für beide gleich ist. Hiermit ergibt sich aus (1.15) mit $\sigma_1 = \sigma_e$, $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ der Zusammenhang

$$\sigma_e^2 = \frac{3}{2} s_{ij} s_{ij} = \frac{3}{2} \mathbf{s} : \mathbf{s} . \quad (1.54a)$$

Analog sehen wir beim inkompressiblen Material einen dreiachsigen Verzerungszustand $\boldsymbol{\varepsilon}$ (bzw. \mathbf{e}) als äquivalent zu einer einachsigen Dehnung ε_e an, wenn II_e in beiden Fällen gleich ist. Dies führt mit (1.29) und $\varepsilon_1 = \varepsilon_e$, $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = -\varepsilon_1/2$ auf die Definition der einachsigen *Vergleichsdehnung* oder *effektiven Dehnung*

$$\varepsilon_e^2 = \frac{2}{3} e_{ij} e_{ij} = \frac{2}{3} \mathbf{e} : \mathbf{e} . \quad (1.54b)$$

Bildet man nun unter Verwendung von (1.53), (1.54a,b) das Produkt $s_{ij} s_{ij}$, so folgt $g = \frac{2}{3} \sigma_e / \varepsilon_e$ und damit schließlich

$$s_{ij} = \frac{2}{3} \frac{\sigma_e}{\varepsilon_e} e_{ij} . \quad (1.55)$$

Als Beispiel betrachten wir einen einachsigen Spannungs-Dehnungs-Zusammenhang in Form eines Potenzgesetzes:

$$\varepsilon = B \sigma^n \quad \text{bzw.} \quad \sigma = b \varepsilon^N . \quad (1.56)$$

Darin sind $n = 1/N$ und $B = 1/b^n$ Materialkonstanten. Seine dreidimensionale Verallgemeinerung lautet unter der Voraussetzung der Inkompressibilität

$$e_{ij} = \frac{3}{2} B \sigma_e^{n-1} s_{ij} \quad \text{bzw.} \quad s_{ij} = \frac{2}{3} b \varepsilon_e^{N-1} e_{ij} . \quad (1.57)$$

Die Formänderungsenergiegedichte und die spezifische Komplementärenergie ergeben sich in diesem Fall zu

$$U = \frac{n}{n+1} s_{ij} e_{ij} , \quad \tilde{U} = \frac{1}{n+1} s_{ij} e_{ij} . \quad (1.58)$$

1.3.2 Viskoelastizität

Viskoelastische Materialien kombinieren elastisches mit viskosem Verhalten. Sie sind dadurch gekennzeichnet, dass das Materialverhalten zeitabhängig bzw. eine Funktion der Belastungs- oder Deformationsgeschichte ist. Typische viskoelastische Effekte sind Kriech- und Relaxationserscheinungen, wie sie zum Beispiel bei Polymeren oder im höheren Temperaturbereich auch bei Stählen auftreten.

1.3.2.1 Linear viskoelastisches Material

Das Stoffgesetz von linear viskoelastischen Materialien unter einachsiger Beanspruchung kann alternativ durch

$$\varepsilon(t) = \int_{-\infty}^t J(t - \tau) \frac{d\sigma}{d\tau} d\tau, \quad \sigma(t) = \int_{-\infty}^t E(t - \tau) \frac{d\varepsilon}{d\tau} d\tau \quad (1.59)$$

ausgedrückt werden. Darin sind $J(t)$ bzw. $E(t)$ Materialfunktionen, die das Verhalten bei einer plötzlich aufgebrachtten, konstanten Spannung σ_0 bzw. konstanten Dehnung ε_0 beschreiben. Man bezeichnet $J(t) = \varepsilon(t)/\sigma_0$ als *Kriechfunktion* oder *Kriechnachgiebigkeit* und $E(t) = \sigma(t)/\varepsilon_0$ als *Relaxationsfunktion* (Bild 1.6). Sie sind miteinander durch die Beziehung

$$\frac{d}{dt} \int_0^t J(t - \tau) E(\tau) d\tau = 1 \quad (1.60)$$

verknüpft. Die untere Grenze bei den Integralen in (1.59) deutet an, dass das Verhalten des Materials zum Zeitpunkt t von der gesamten zuvor durchlaufenen Spannungs- bzw. Dehnungsgeschichte abhängt.

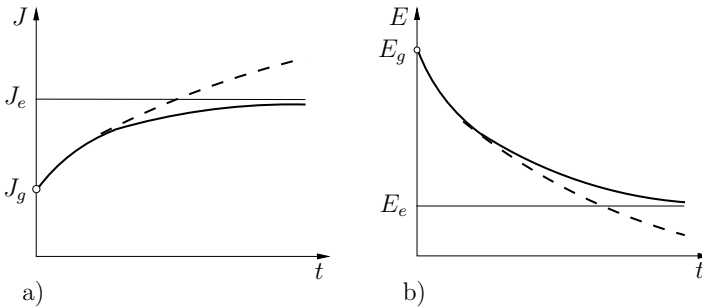


Bild 1.6 a) Kriechfunktion, b) Relaxationsfunktion

Bei isotropem Materialverhalten ist es zweckmäßig, die dreidimensionale Verallgemeinerung von (1.59) in den hydrostatischen und den deviatorischen Anteil zu trennen. Dabei setzt man häufig die bei vielen viskoelastischen Materialien zu beobachtende Tatsache voraus, dass die Volumendehnung rein elastisch erfolgt ($\sigma_{kk} = 3K\varepsilon_{kk}$). Für den deviatorischen Anteil gilt dann

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^t J_d(t - \tau) \frac{ds_{ij}}{d\tau} d\tau, \quad s_{ij} = 2 \int_{-\infty}^t G(t - \tau) \frac{de_{ij}}{d\tau} d\tau. \quad (1.61)$$

Die Kriechfunktion $J_d(t)$ und die Relaxationsfunktion $G(t)$ hängen wieder wie im einachsigen Fall zusammen.

Integrale vom Typ (1.59), (1.61) nennt man *Faltungsintegrale*. Für ihre Behandlung bietet sich die *Laplace-Transformation* an. Die Laplace-Transformierte $\bar{f}(p)$ einer Funktion $f(t)$ ist definiert als

$$\bar{f}(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt. \quad (1.62)$$

Wendet man die Transformation zum Beispiel auf die zweite Gleichung von (1.61) an, so ergibt sich unter der Annahme, dass die Verzerrungsgeschichte zum Beispiel zum Zeitpunkt $\tau = 0$ beginnt,

$$\bar{s}_{ij} = 2p \bar{G}(p) \bar{e}_{ij}. \quad (1.63)$$

Durch Vergleich mit (1.39) erkennt man, dass das transformierte viskoelastische Materialgesetz und das Elastizitätsgesetz die gleiche Form haben. Dies trifft auch auf weitere Gleichungen, wie die Gleichgewichtsbedingungen oder die kinematischen Beziehungen zu. Man spricht aus diesem Grund von der *elastisch-viskoelastischen Analogie*, aus der sich das *Korrespondenzprinzip* herleitet. Danach erhält man die Laplace-transformierte Lösung eines viskoelastischen Problems aus der Lösung des entsprechenden elastischen Problems, indem man die elastischen Konstanten geeignet durch Kriech- bzw. Relaxationsfunktion ersetzt (z.B. $G \rightarrow p \bar{G}(p)$). Die endgültige Lösung folgt dann durch Rücktransformation.

1.3.2.2 Nichtlinear viskoelastisches Material, Kriechen

Zur Beschreibung des nichtlinear viskoelastischen Verhaltens bedient man sich häufig formaler, pragmatisch begründeter Näherungen. Hierzu gehört zum Beispiel der für Polymere gedachte Ansatz (H. Leaderman, 1943)

$$\varepsilon(t) = \int_{-\infty}^t J(t - \tau) \frac{d(\sigma f)}{d\tau} d\tau. \quad (1.64)$$

Darin ist $f(\sigma)$ eine zusätzliche Materialfunktion. Sie charakterisiert die Abhängigkeit der Kriechdehnung von der Größe der angelegten konstanten Spannung σ_0 in der Art $\varepsilon(t) = \sigma_0 f(\sigma_0) J(t)$. Eine Übertragung von (1.64) auf den dreidimensionalen Fall kann sinngemäß wie beim linearen Material erfolgen.

Wegen seiner praktischen Bedeutung sei hier noch auf das Kriechen metallischer Werkstoffe eingegangen. Man unterscheidet dabei zwischen primärem, sekundärem und tertiärem Kriechen. Das sekundäre Kriechen zeichnet sich dadurch aus, dass im einachsigen Fall die Dehnungsgeschwindigkeit $\dot{\varepsilon}$ unter festgehaltener Spannung σ zeitlich konstant ist; sie hängt nur von der Größe der Spannung

ab: $\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}(\sigma)$. Zur Beschreibung dieser stationären Kriechbewegung finden unter anderen die Ansätze von Norton-Bailey (F.H. Norton, R.W. Bailey, 1929)

$$\dot{\varepsilon} = B \sigma^n \quad (1.65)$$

oder von Prandtl (L. Prandtl, 1875-1953)

$$\frac{\dot{\varepsilon}}{\dot{\varepsilon}_*} = \left[\sinh\left(\frac{\sigma}{\sigma_*}\right) \right]^n \quad (1.66)$$

sowie modifizierte Ansätze der Art

$$\frac{\dot{\varepsilon}}{\dot{\varepsilon}_*} = C \frac{d}{dt} \left(\frac{\sigma}{\sigma_*} \right)^m + \left(\frac{\sigma}{\sigma_*} \right)^n \quad (1.67)$$

Verwendung. Darin sind B , C , n , m , σ_* und $\dot{\varepsilon}_*$ Materialkonstanten.

Die Stoffgesetze für viskoses Fließen und elastisches Verhalten weisen häufig eine analoge Struktur auf. So erhält man zum Beispiel (1.65) aus (1.56), indem man die Verzerrungen durch die Verzerrungsgeschwindigkeit ersetzt. Setzt man voraus, dass die Ausdrücke (Arbeitsraten)

$$\tilde{D} = \int_0^{\sigma_{kl}} \dot{\varepsilon}_{ij} d\sigma_{ij}, \quad D = \int_0^{\dot{\varepsilon}_{kl}} \sigma_{ij} d\dot{\varepsilon}_{ij} = \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} - \tilde{D} \quad (1.68)$$

unabhängig vom Integrationsweg sind, so gelten die zu (1.48), (1.46) analogen Beziehungen

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{\partial \tilde{D}}{\partial \sigma_{ij}}, \quad \sigma_{ij} = \frac{\partial D}{\partial \dot{\varepsilon}_{ij}}. \quad (1.69)$$

Man bezeichnet $\tilde{D}(\sigma_{ij})$ als *Fließpotential* und $D(\dot{\varepsilon}_{ij})$ als *spezifische Formänderungsenergie*; die Größe $\sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}$ stellt die *spezifische Dissipationsleistung* dar.

Nimmt man an, dass das Material inkompressibel ist ($\dot{\varepsilon}_{kk} = 0$) und das Fließpotential nur von II_s abhängt, so liefert (1.69)

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{d\tilde{D}}{dII_s} s_{ij} = \frac{3}{2} \frac{\dot{\varepsilon}_e}{\sigma_e} s_{ij} \quad (1.70)$$

mit $\sigma_e = \left(\frac{3}{2} s_{ij} s_{ij}\right)^{1/2}$ und $\dot{\varepsilon}_e = \left(\frac{2}{3} \dot{\varepsilon}_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}\right)^{1/2}$. Zum Beispiel lauten dann das auf drei Dimensionen verallgemeinerte Nortonsche Kriechgesetz

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{3}{2} B \sigma_e^{n-1} s_{ij} \quad (1.71)$$

und die zugehörige spezifische Formänderungsenergie sowie das Fließpotential

$$D = \frac{n}{n+1} s_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}, \quad \tilde{D} = \frac{1}{n+1} s_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}. \quad (1.72)$$

Diese Beziehungen sind vollkommen analog zu den Gleichungen (1.57), (1.58) für das nichtlinear elastische Verhalten entsprechend einem Potenzgesetz; man muss nur die Verzerrungen durch die Verzerrungsraten ersetzen. Als Folge hiervon sind auch die Lösungen für zugeordnete Randwertprobleme analog. Das heisst, man kann die Lösung eines nichtlinear elastischen Problems auf ein zugeordnetes Kriechproblem übertragen, indem man die Verzerrungen durch die Verzerrungsraten ersetzt.

1.3.3 Plastizität

Überschreitet die Materialbeanspruchung eine bestimmte Grenze, so kommt es insbesondere bei metallischen Werkstoffen zu plastischem Fließen. Hierbei zieht im Unterschied zur Viskoelastizität eine Belastungsänderung meist eine unmittelbare (zeitunabhängige) Deformationsänderung nach sich. Plastisches Fließen hat unter anderem zur Folge, dass nach einer Entlastung bleibende Deformationen auftreten.

Bei der Beschreibung eines elastisch-plastischen Materialverhaltens wird üblicherweise angenommen, dass sich die Verzerrungen und damit auch die Verzerrungsinkremente additiv aus einem elastischen und einem plastischen Anteil zusammensetzen:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^p, \quad d\boldsymbol{\varepsilon} = d\boldsymbol{\varepsilon}^e + d\boldsymbol{\varepsilon}^p. \quad (1.73a)$$

Bezieht man die Verzerrungsinkremente auf ein zugeordnetes Zeitinkrement dt , dann lässt sich dies auch in der Form

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \quad (1.73b)$$

ausdrücken. Für den elastischen Anteil setzt man dabei einen linearen Spannungs-Dehnungs-Zusammenhang zum Beispiel in Form von (1.35a) voraus. Mit (1.73a) lautet somit das Elastizitätsgesetz

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}^e = \mathbf{C} : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p). \quad (1.74)$$

Als Stoffgesetz für den plastischen Anteil finden sowohl Formulierungen in den Verzerrungsinkrementen (inkrementelle Theorie) als auch in den totalen Verzerrungen (Deformationstheorie) Verwendung. Beide machen häufig Gebrauch von der Annahme, dass keine plastischen Volumenänderungen auftreten: $\varepsilon_{kk}^p = 0$; dies hat dann $\boldsymbol{\varepsilon}^p = \mathbf{e}^p$ zur Folge.

1.3.3.1 Fließbedingung

Wir nehmen an, dass für plastisches Fließen ein bestimmter Zustand vorliegen muss, der durch die Spannungen σ_{ij} gegeben ist. Eine solche *Fließbedingung* kann durch

$$F(\boldsymbol{\sigma}) = 0 \quad (1.75a)$$

ausgedrückt werden, was sich auch als Darstellung einer Fläche (=Fließfläche) im neundimensionalen Raum der Spannungen σ_{ij} deuten lässt. Ein Spannungszustand auf der Fließfläche ($F = 0$) charakterisiert danach Fließen, während Punkte innerhalb der Fließfläche ($F < 0$) elastischem Verhalten zugeordnet sind. Die erweiterte Form der Fließbedingung

$$F(\boldsymbol{\sigma}) \leq 0 \quad (1.75b)$$

beschreibt danach die Menge aller überhaupt möglichen (zulässigen) Spannungszustände.

Die Fließfläche kann ihre Lage und Form im Verlauf des Fließvorganges verändern. Spezialfälle sind die selbstähnliche Aufblähung (isotrope Verfestigung) und die reine Translation (kinematische Verfestigung). Bleibt die Fließfläche unverändert, so nennt man das Material idealplastisch. Aufgrund des Prinzips der maximalen plastischen Arbeit, auf das wir noch eingehen werden, ist die Fließfläche konvex.

Die Fließbedingung kann bei isotropem Material nur von den Invarianten I_σ , II_σ , III_σ oder, was gleichbedeutend ist, nur von I_σ , II_s , III_s abhängen. Berücksichtigt man, dass bei vielen Materialien (insbesondere bei metallischen Werkstoffen) der hydrostatische Anteil des Spannungszustandes nur zu elastischer Volumenänderung führt und den Fließvorgang nicht beeinflusst, so folgt aus (1.75a) die Fließbedingung

$$F(II_s, III_s) = 0. \quad (1.76)$$

Aus der Fülle der Möglichkeiten, welche (1.76) bietet, seien hier nur zwei bewährte und weit verbreitete Fließbedingungen herausgegriffen. Die von Misesche Fließbedingung (R. von Mises, 1883–1953) lautet

$$F = II_s - k^2 = 0 \quad \text{bzw.} \quad F = \frac{1}{2} s_{ij}s_{ij} - k^2 = 0. \quad (1.77a)$$

Mit (1.15) lässt sie sich auch in der Form

$$F = \frac{1}{6} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] - k^2 = 0 \quad (1.77b)$$

ausdrücken. Danach tritt Fließen auf, wenn II_s einen Wert k^2 erreicht. Äquivalent hierzu sind die Aussagen, dass für Fließen eine bestimmte Oktaederschubspannung τ_{oct} erforderlich ist bzw. dass beim linear elastischen Material die Gestaltänderungsenergiegedichte U_G begrenzt ist. Durch (1.77b) ist im dreidimensionalen Raum der Hauptspannungen eine Kreiszyylinderfläche definiert, deren Mittelachse mit der *hydrostatischen Geraden* $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ zusammenfällt und deren Radius $\sqrt{2}k$ beträgt (Bild 1.7a). Beim idealplastischen Material ist k konstant. Mit der Fließspannung σ_F unter einachsigen Zug ($\sigma_1 = \sigma_F$, $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$) und der Fließschubspannung τ_F für reinen Schub ($\sigma_1 = -\sigma_3 = \tau_F$, $\sigma_2 = 0$) gilt dann der Zusammenhang $k = \sigma_F/\sqrt{3} = \tau_F$. Im Fall einer isotropen Verfestigung hängt

k von den plastischen Deformationen ab. Dann ist σ_F durch die aktuelle Fließspannung zu ersetzen: $k = \sigma/\sqrt{3}$. Aus (1.77a) ergibt sich damit die einachsige Vergleichsspannung $\sigma_e = (\frac{3}{2}s_{ij}s_{ij})^{1/2}$, die wir schon in (1.54a) kennengelernt haben; sie wird auch von *Mises* als *Vergleichsspannung* genannt.

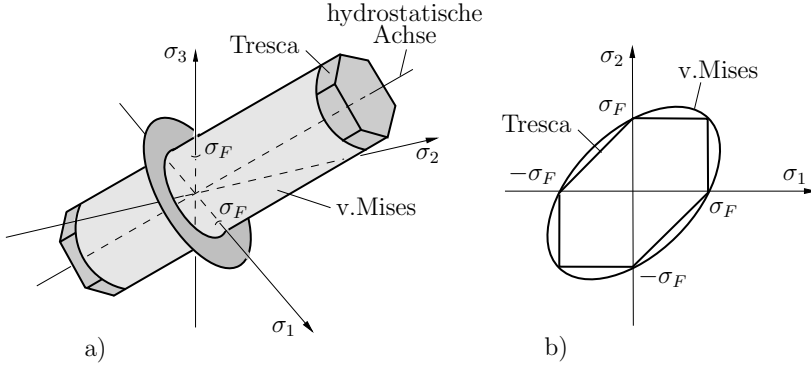


Bild 1.7 Fließbedingungen nach von Mises und Tresca

Im Spezialfall des ebenen Spannungszustandes ($\sigma_3 = 0$) folgt aus (1.77b) die Fließbedingung

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2 = \sigma_F^2 . \tag{1.78}$$

Die zugehörige Fließkurve ist eine Ellipse (Bild 1.7b).

Die Fließbedingung von H.E. Tresca (1868) geht von der Annahme aus, dass plastisches Fließen auftritt, wenn die maximale Schubspannung einen bestimmten Wert annimmt: $F = \tau_{\max} - k = 0$. Mit den Hauptschubspannungen nach (1.11) muss daher eine der Bedingungen

$$\sigma_1 - \sigma_3 \pm 2k = 0 \quad , \quad \sigma_2 - \sigma_1 \pm 2k = 0 \quad , \quad \sigma_3 - \sigma_2 \pm 2k = 0 \tag{1.79}$$

erfüllt sein. Die zugehörige Fließfläche im Raum der Hauptspannungen ist ein hexagonales Prisma, dessen Mittelachse die hydrostatische Gerade ist (Bild 1.7). Beim idealplastischen Material ist der Zusammenhang zwischen k und den Fließspannungen σ_F (einachsiger Zug) und τ_F (reiner Schub) durch $k = \sigma_F/2 = \tau_F$ gegeben.

1.3.3.2 Inkrementelle Theorie

Im weiteren wird vorausgesetzt, dass der Werkstoff dem *Prinzip der maximalen plastischen Arbeit*

$$(\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^0) d\varepsilon_{ij}^p \geq 0 \tag{1.80}$$

genügt. Darin sind σ_{ij} der tatsächliche Spannungszustand auf der Fließfläche und σ_{ij}^0 ein Ausgangszustand innerhalb oder auf der Fließfläche. Dieses Prinzip lässt

sich dahingehend interpretieren, dass unter allen Spannungszuständen $\tilde{\sigma}_{ij}$, welche die Fließbedingung erfüllen, die tatsächlichen Spannungen σ_{ij} die plastische Arbeit $\tilde{\sigma}_{ij}d\varepsilon_{ij}^p$ zum Extremum machen. Diese Extremalaussage kann in der Art

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{\sigma}_{ij}}[\tilde{\sigma}_{ij}d\varepsilon_{ij}^p - d\lambda F(\tilde{\sigma}_{ij})] = 0 \quad \text{für} \quad \tilde{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij} \quad (1.81)$$

formuliert werden, wobei $d\lambda \geq 0$ ein noch freier, Lagrangescher Multiplikator ist. Hieraus ergibt sich die *Fließregel*

$$d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}}, \quad (1.82a)$$

die wir auch in den folgenden Formen schreiben können:

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \quad \text{bzw.} \quad \dot{\varepsilon}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}}. \quad (1.82b)$$

Ohne im einzelnen darauf einzugehen sei angemerkt, dass aus dem Prinzip der maximalen plastischen Arbeit bzw. aus der Fließregel Konsequenzen erwachsen. Zu ihnen gehören unter anderen die erwähnte Konvexität der Fließfläche und die *Normalenregel*. Letztere besagt, dass die plastischen Verzerrungsinkremente normal zur Fließfläche gerichtet sind (vgl.(1.82a,b)).

Legt man die von Misessche Fließbedingung (1.77a,b) zugrunde, so folgt aus (1.82a,b) $d\varepsilon^p = d\lambda \mathbf{s}$. Die Hauptrichtungen von $d\varepsilon^p$ stimmen demnach mit denen des Deviators \mathbf{s} und folglich auch mit denen von $\boldsymbol{\sigma}$ überein. Der Faktor $d\lambda$ kann bestimmt werden, indem wir die einachsige Vergleichsspannung $\sigma_e = (\frac{3}{2}s_{ij}s_{ij})^{1/2}$ und unter Berücksichtigung der plastischen Volumenkonstanz ein einachsiges Vergleichsverzerrungsinkrement $d\varepsilon_e^p = (\frac{2}{3}d\varepsilon_{ij}^pd\varepsilon_{ij}^p)^{1/2}$ einführen. Aus $d\varepsilon_{ij}^pd\varepsilon_{ij}^p = (d\lambda)^2s_{ij}s_{ij}$ erhält man dann $d\lambda = \frac{3}{2}d\varepsilon_e^p/\sigma_e$ und damit

$$d\varepsilon_{ij}^p = \frac{3}{2} \frac{d\varepsilon_e^p}{\sigma_e} s_{ij} \quad \text{bzw.} \quad \dot{\varepsilon}^p = \frac{3}{2} \frac{\dot{\varepsilon}_e^p}{\sigma_e} \mathbf{s}. \quad (1.83a)$$

Für idealplastisches Material ist $\sigma_e = \sigma_F$; für verfestigendes Material schreibt man (1.83a) unter Verwendung des plastischen Tangentenmoduls $g = d\sigma_e/d\varepsilon_e^p = \dot{\sigma}_e/\dot{\varepsilon}_e^p$ auch häufig in der Form

$$d\varepsilon_{ij}^p = \frac{3}{2} \frac{s_{ij}}{g \sigma_e} d\sigma_e \quad \text{bzw.} \quad \dot{\varepsilon}^p = \frac{3}{2} \frac{\dot{\sigma}_e}{g \sigma_e} \mathbf{s}. \quad (1.83b)$$

Durch Zusammenfassen der elastischen und der plastischen Verzerrungsinkremente entsprechend (1.73a,b) ergibt sich schließlich als Stoffgesetz im Fließbereich ($F = 0$, $d\sigma_e > 0$) das sogenannte *Prandtl-Reuss-Gesetz*

$$\dot{\varepsilon}_{kk} = \frac{1}{3K} \dot{\sigma}_{kk}, \quad \dot{\varepsilon} = \frac{1}{2\mu} \dot{\mathbf{s}} + \frac{3}{2} \frac{\dot{\sigma}_e}{g \sigma_e} \mathbf{s}. \quad (1.83c)$$

Geht man von der Trescaschen Fließbedingung in der Form $F = \sigma_1 - \sigma_3 - k = 0$ aus ($\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$), so liefert die Fließregel in Hauptachsenrichtung

$$d\varepsilon_1^p = d\lambda, \quad d\varepsilon_2^p = 0, \quad d\varepsilon_3^p = -d\lambda. \quad (1.84)$$

Hierdurch wird ebenfalls die Bedingung plastischer Volumenkonstanz erfüllt.

1.3.3.3 Deformationstheorie

In der Deformationstheorie wird angenommen, dass zwischen den plastischen Verzerrungen und den deviatorischen Spannungen die Beziehung

$$\boldsymbol{\varepsilon}^p = \lambda \boldsymbol{s} \quad (1.85)$$

besteht, wobei der Faktor λ vom Spannungszustand und den plastischen Verzerrungen abhängt. Er ergibt sich unter Zugrundelegung der von Misesschen Fließbedingung mit der Vergleichsspannung $\sigma_e = (\frac{3}{2}s_{ij}s_{ij})^{1/2}$ und der plastischen Vergleichsverzerrung $\varepsilon_e^p = (\frac{2}{3}\varepsilon_{ij}^p\varepsilon_{ij}^p)^{1/2}$ zu $\lambda = 3\varepsilon_e^p/2\sigma_e$. Fasst man nach (1.73a) die elastischen und die plastischen Verzerrungen zusammen, so erhält man das finite *Hencky-Ilyushin-Gesetz*

$$\varepsilon_{kk} = \frac{1}{3K} \sigma_{kk}, \quad \boldsymbol{e} = \left[\frac{1}{2\mu} + \frac{3}{2} \frac{\varepsilon_e^p}{\sigma_e} \right] \boldsymbol{s}. \quad (1.86)$$

Durch Vergleich von (1.86) mit (1.55) erkennt man, dass die Deformationstheorie ein plastisches Materialverhalten wie ein nichtlinear elastisches Verhalten beschreibt. Sie ist dementsprechend nicht in der Lage zum Beispiel Entlastungsvorgänge adäquat zu modellieren. Physikalisch sinnvoll kann sie nur im Bereich monoton wachsender Belastung angewendet werden. Dabei ist sie insbesondere dann gut geeignet, wenn eine *Proportionalbelastung* vorliegt, das heisst wenn gilt

$$\boldsymbol{s} = P \boldsymbol{s}^0. \quad (1.87)$$

Darin sind \boldsymbol{s}^0 ein Bezugsspannungszustand (zum Beispiel bei der Endbelastung) und P ein skalarer Belastungsparameter. Man kann zeigen, dass in diesem Fall die Deformationstheorie und die inkrementelle Theorie äquivalent sind.

Als hinreichend gute Approximation des realen Stoffverhaltens spezialisiert man häufig die allgemeine Beziehung (1.85) durch das Potenzgesetz (1.56) bzw. (1.57). Dieses führt immer zu einer Proportionalbelastung nach (1.87), wenn die Belastung eines Körpers oder Teilkörpers durch einen einzigen Lastparameter P (z.B. durch eine Kraft) vorgegeben ist. Für die Verzerrungen und die Verschiebungen ergibt sich in diesem Fall

$$\boldsymbol{\varepsilon}^p = P^n \boldsymbol{\varepsilon}^{p0}, \quad \boldsymbol{u} = P^n \boldsymbol{u}^0. \quad (1.88)$$

Darin sind $\boldsymbol{\varepsilon}^{p0}$ und \boldsymbol{u}^0 die zum Bezugsspannungszustand \boldsymbol{s}^0 zugeordneten plastischen Verzerrungen und Verschiebungen. Sind dementsprechend die Spannungen

und Verzerrungen für eine bestimmte Last bekannt, so kennt man sie auch für alle anderen Lasten.

An dieser Stelle sei angemerkt, dass die Eigenschaften des Potenzgesetzes sinn gemäß von der Deformationstheorie auf Kriechvorgänge übertragen werden können. Aufgrund der Analogie der Stoffgesetze für nichtlinear elastisches Verhalten und für das Kriechen (vgl. Abschnitt 1.3.2.2) müssen nur die Dehnungen durch die Dehnungsraten und die Verschiebungen durch die Geschwindigkeiten ersetzt werden, d.h. es gelten dann die Beziehungen

$$\mathbf{s} = P \mathbf{s}^0, \quad \dot{\epsilon}^p = P^n \dot{\epsilon}^{p0}, \quad \dot{\mathbf{u}} = P^n \dot{\mathbf{u}}^0. \quad (1.89)$$

1.4 Energieprinzipien

Im folgenden sind einige klassische Energieprinzipien für deformierbare Körper zusammengestellt. Dabei wird davon ausgegangen, dass bei Zustandsänderungen des Körpers die materielle Oberfläche unverändert bleibt. Ein etwaiges Risswachstum ist hier also ausgeschlossen. Der kürzeren Schreibweise wegen nehmen wir noch an, dass als äußere Kräfte nur Oberflächenkräfte und keine Volumenkräfte wirken. Letztere können sinngemäß aber ohne weiteres berücksichtigt werden.

1.4.1 Energiesatz

Der Energiesatz der Kontinuumsmechanik besagt, dass die Änderung der Gesamtenergie (innere Energie + kinetische Energie) eines Körpers dem Energiefluss in den Körper entspricht. Dies kann alternativ in Form der Gleichungen

$$\dot{E} + \dot{K} = P + Q, \quad (E + K)_2 - (E + K)_1 = \int_{t_1}^{t_2} (P + Q) dt \quad (1.90)$$

ausgedrückt werden. Darin sind E die innere Energie, K die kinetische Energie und P die Leistung der äußeren Kräfte. Sie sind gegeben durch

$$E = \int_V \rho e dV, \quad K = \frac{1}{2} \int_V \rho \dot{\mathbf{u}} \cdot \dot{\mathbf{u}} dV, \quad P = \int_{\partial V} \mathbf{t} \cdot \dot{\mathbf{u}} dA, \quad (1.91)$$

wobei e die spezifische innere Energie ist. Durch Q wird der Energietransport in den Körper beschrieben, welcher nicht durch P erfasst wird (zum Beispiel Wärmetransport); wir wollen ihn hier nicht näher festlegen.

Für ein elastisches Material lässt sich ρe mit der Formänderungsenergie U identifizieren. Im Spezialfall einer quasistatischen Belastung ($K = 0$) und für $Q = 0$ lautet dann der Energiesatz

$$\Pi_2^i - \Pi_1^i = W_{12}^a. \quad (1.92)$$

Hierbei wurden die Abkürzungen

$$\Pi^i = \int_V U \, dV, \quad W_{12}^a = \int_{\partial V} \left[\int_{\mathbf{u}_1}^{\mathbf{u}_2} \hat{\mathbf{t}} \cdot d\mathbf{u} \right] dA \quad (1.93)$$

für die Formänderungsenergie des Körpers und für die Arbeit der äußeren Kräfte zwischen den Zuständen 1 und 2 eingeführt. Man nennt Π^i auch *elastisches Potential*.

1.4.2 Prinzip der virtuellen Arbeit

Wir betrachten einen Körper im Gleichgewicht, auf dessen Teiloberflächen ∂V_t bzw. ∂V_u die Belastungen $\hat{\mathbf{t}}$ bzw. die Verschiebungen $\hat{\mathbf{u}}$ vorgeschrieben sind. Die statischen und die kinematischen Grundgleichungen hierfür lauten

$$\begin{aligned} \sigma_{ij,j} &= 0 & \text{in } V, & \quad \sigma_{ij}n_j = \hat{t}_i & \text{auf } \partial V_t, \\ \varepsilon_{ij} &= \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) & \text{in } V, & \quad u_i = \hat{u}_i & \text{auf } \partial V_u. \end{aligned} \quad (1.94)$$

Ein statisch zulässiges Spannungsfeld $\boldsymbol{\sigma}^{(1)}$ erfüllt die Gleichgewichtsbedingungen und die Randbedingungen auf ∂V_t . Analog genügt ein kinematisch zulässiges Verschiebungsfeld $\mathbf{u}^{(2)}$ bzw. Verzerrungsfeld $\boldsymbol{\varepsilon}^{(2)}$ den kinematischen Beziehungen und den Randbedingungen auf ∂V_u . Multipliziert man nun die Gleichgewichtsbedingung für $\boldsymbol{\sigma}^{(1)}$ mit den Verschiebungen $\mathbf{u}^{(2)}$ und integriert über das Volumen V , so erhält man aus (1.94) unter Verwendung des Gaußschen Satzes den *allgemeinen Arbeitssatz*

$$\int_V \boldsymbol{\sigma}^{(1)} : \boldsymbol{\varepsilon}^{(2)} \, dV = \int_{\partial V_t} \hat{\mathbf{t}}^{(1)} \cdot \mathbf{u}^{(2)} \, dA + \int_{\partial V_u} \mathbf{t}^{(1)} \cdot \hat{\mathbf{u}}^{(2)} \, dA. \quad (1.95)$$

Aus (1.95) lassen sich verschiedene Gesetzmäßigkeiten herleiten. Verwendet man als Kraftgrößen die zu einem Gleichgewichtszustand gehörigen wirklichen Größen und als kinematische Größen die virtuellen Verschiebungen $\delta\mathbf{u}$ bzw. virtuellen Verzerrungen $\delta\boldsymbol{\varepsilon}$ aus der Gleichgewichtslage, dann erhält man das *Prinzip der virtuellen Arbeit* (*Prinzip der virtuellen Verrückungen*)

$$\delta W^i = \delta W^a \quad (1.96)$$

mit

$$\delta W^i = \int_V \boldsymbol{\sigma} : \delta\boldsymbol{\varepsilon} \, dV, \quad \delta W^a = \int_{\partial V_t} \hat{\mathbf{t}} \cdot \delta\mathbf{u} \, dA. \quad (1.97)$$

Die virtuellen Verrückungen sind dabei als gedacht, infinitesimal und kinematisch zulässig zu verstehen. Befindet sich ein Körper im Gleichgewicht, so ist nach diesem Prinzip die bei einer virtuellen Verrückung geleistete Arbeit δW^i der inneren Kräfte gleich der Arbeit δW^a der äußeren Kräfte.

Für ein elastisches Material entspricht die Arbeit der inneren Kräfte der Änderung des elastischen Potentials. Nach (1.45) ist nämlich $\boldsymbol{\sigma} : \delta\boldsymbol{\varepsilon} = \delta U$, woraus mit (1.97) und (1.93) die Beziehung $\delta W^i = \delta \Pi^i$ folgt. Sind zusätzlich noch die äußeren Kräfte aus einem Potential herleitbar, so wird $\delta W^a = -\delta \Pi^a$, und man erhält aus (1.96)

$$\delta \Pi = \delta(\Pi^i + \Pi^a) = 0. \quad (1.98)$$

In der Gleichgewichtslage nimmt das Gesamtpotential Π demnach einen Stationärwert an. Man kann zeigen, dass es sich dabei um ein Minimum handelt, sofern das Potential konvex ist:

$$\Pi = \Pi^i + \Pi^a = \text{Minimum}. \quad (1.99)$$

Dies ist das *Prinzip vom Stationärwert (Minimum) des Gesamtpotentials*. Es lässt sich auch in folgender Form ausdrücken: unter allen zulässigen (mit den kinematischen Randbedingungen verträglichen) Deformationen machen die wahren Deformationen das Potential Π zu einem Stationärwert (Minimum). Angemerkt sein, dass das Potential bei einem linear elastischen Material und festen Spannungs- oder Verschiebungsrandbedingungen tatsächlich konvex ist, in der Gleichgewichtslage also ein Minimum annimmt.

Aus (1.95) ergibt sich das *Prinzip der virtuellen Komplementärarbeit (Prinzip der virtuellen Kräfte)*, wenn man als Verschiebungsgrößen die wirklichen Verschiebungen bzw. Verzerrungen einsetzt und als statisch zulässige Kraftgrößen virtuelle Änderungen aus der Gleichgewichtslage verwendet. Dann folgt

$$\delta \widetilde{W}^i = \delta \widetilde{W}^a, \quad (1.100)$$

wobei

$$\delta \widetilde{W}^i = \int_V \boldsymbol{\varepsilon} : \delta \boldsymbol{\sigma} \, dV, \quad \delta \widetilde{W}^a = \int_{\partial V_a} \dot{\boldsymbol{u}} \cdot \delta \boldsymbol{t} \, dA \quad (1.101)$$

die *Komplementärarbeiten* der inneren und äußeren Kräfte sind. In Analogie zum Vorhergehenden führen wir bei elastischem Material das *innere Komplementärpotential*

$$\widetilde{\Pi}^i = \int_V \widetilde{U} \, dV \quad (1.102)$$

ein. Existiert zusätzlich noch ein äußeres Komplementärpotential mit $\widetilde{\Pi}^a = -\widetilde{W}^a$, so ergibt sich aus (1.100)

$$\delta \widetilde{\Pi} = \delta(\widetilde{\Pi}^i + \widetilde{\Pi}^a) = 0. \quad (1.103)$$

In der Gleichgewichtslage nimmt also auch das Komplementärpotential einen Stationärwert an. Es handelt sich dabei um ein Minimum, wenn $\widetilde{\Pi}$ konvex ist, was bei linear elastischen Systemen zutrifft:

$$\widetilde{\Pi} = \widetilde{\Pi}^i + \widetilde{\Pi}^a = \text{Minimum}. \quad (1.104)$$

Man nennt dies das *Prinzip vom Stationärwert (Minimum) des Komplementärpotentials*. Danach machen unter allen zulässigen (mit den statischen Randbedingungen verträglichen) Spannungsfeldern die wahren Spannungen das Komplementärpotential zu einem Stationärwert (Minimum).

1.4.3 Satz von Clapeyron, Satz von Betti

Wir führen jetzt in (1.95) als statische und kinematische Größen die wirklichen, aktuellen Größen ein. Setzt man die äußeren Kräfte als Totlasten voraus ($\mathbf{t} = \mathbf{t}(\mathbf{x})$), so entspricht die rechte Seite von (1.95) der Arbeit W^a dieser Kräfte vom undeformierten zum aktuellen, deformierten Zustand. Da Totlasten ein Potential besitzen, gilt zudem $W^a = -\Pi^a$. Für ein linear elastisches Material wird die linke Seite von (1.95) mit $\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon} = 2U$ und (1.94) zu $2\Pi^i$. Damit erhält man den *Satz von Clapeyron* (B.P.E. Clapeyron, 1799-1864)

$$2\Pi^i + \Pi^a = 0. \quad (1.105)$$

Im Sonderfall eines inkompressiblen nichtlinear elastischen Materials in Form des Potenzgesetzes (1.56) erhält man unter Verwendung von (1.58) für die linke Seite von (1.95) zunächst $\frac{n+1}{n}\Pi^i$ und damit

$$\frac{n+1}{n}\Pi^i + \Pi^a = 0. \quad (1.106)$$

Wir betrachten nun nochmals den Fall eines linear elastischen Materials mit dem Elastizitätsgesetz $\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl}$ (vgl.(1.35a)). Wegen der Symmetrie des Elastizitätstensors ($C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{ijlk} = C_{klij}$) gilt allgemein $\sigma_{ij}^{(1)}\varepsilon_{ij}^{(2)} = \sigma_{ij}^{(2)}\varepsilon_{ij}^{(1)}$. Integration über das Volumen liefert mit dem Arbeitssatz (1.95) den *Satz von Betti* (*Reziprozitätstheorem*, E. Betti, 1823-1892)

$$\int_{\partial V} \mathbf{t}^{(1)} \cdot \mathbf{u}^{(2)} dA = \int_{\partial V} \mathbf{t}^{(2)} \cdot \mathbf{u}^{(1)} dA. \quad (1.107)$$

Danach sind für zwei verschiedene Belastungszustände (1), (2) eines Körpers die Arbeiten der Randlasten des einen Zustandes an den Verschiebungen des anderen Zustandes jeweils gleich.

1.5 Ebene Probleme

1.5.1 Allgemeines

Probleme der Festkörpermechanik sind vielfach ebene (zweidimensionale) Probleme, oder sie können näherungsweise als solche beschrieben werden. Besonders wichtig für die Anwendungen sind der ebene Verzerrungszustand (EVZ) und der

ebene Spannungszustand (ESZ). Daneben besitzt der longitudinale („nichtebene“) Schubspannungszustand noch eine gewisse Bedeutung. Zu ihrer Darstellung bedienen wir uns im weiteren der technischen Notation mit den Koordinaten x, y, z , den Verschiebungen u, v, w , den Verzerrungen $\varepsilon_x, \gamma_{xy}, \dots$ und den Spannungen $\sigma_x, \tau_{xy}, \dots$.

Der *ebene Verzerrungszustand* ist dadurch gekennzeichnet, dass die Dehnungen bzw. Verschiebungen in einer Richtung (z.B. in z -Richtung) verhindert sind. In diesem Fall sind $w, \varepsilon_z, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$ Null, und alle anderen Größen hängen nur von x und y ab. Die Gleichgewichtsbedingungen (ohne Volumenkräfte), die kinematischen Beziehungen und die Kompatibilitätsbedingungen reduzieren sich dann auf

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0, \quad (1.108)$$

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \quad (1.109)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}. \quad (1.110)$$

Auch das Stoffgesetz vereinfacht sich. So erhält man zum Beispiel aus (1.38) für ein isotropes, linear elastisches Material

$$\varepsilon_x = \frac{1-\nu^2}{E} \left(\sigma_x - \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_y \right), \quad \varepsilon_y = \frac{1-\nu^2}{E} \left(\sigma_y - \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_x \right), \quad \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \quad (1.111)$$

sowie $\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y)$.

Beim *ebenen Spannungszustand* wird angenommen dass $\sigma_z, \tau_{xz}, \tau_{yz}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$ verschwinden und die restlichen Spannungen und Verzerrungen von z unabhängig sind. Ein entsprechender Zustand tritt näherungsweise (nicht exakt) in Scheiben auf, deren Dicke klein ist im Vergleich zu den Abmessungen in der Ebene und die nur durch Kräfte in der Ebene belastet werden. Die Gleichgewichtsbedingungen, die kinematischen Beziehungen und die Kompatibilitätsbedingung stimmen mit den Gleichungen (1.108 – 1.110) des EVZ überein. Die Verschiebungen u, v, w sind jetzt allerdings im allgemeinen von z abhängig. Das Stoffgesetz lautet im Fall der linearen Elastizität bei Isotropie

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu \sigma_y), \quad \varepsilon_y = \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu \sigma_x), \quad \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}; \quad (1.112)$$

außerdem gilt $E\varepsilon_z = -\nu(\sigma_x + \sigma_y)$. Die Gleichungen (1.112) weichen von (1.111) nur durch geänderte Elastizitätskonstanten ab. Lösungen von Randwertproblemen des EVZ können demnach durch Änderung der elastischen Konstanten auf den ESZ übertragen werden und umgekehrt.

Häufig ist es erforderlich, die Spannungen in einem zum x, y -System um den Winkel φ gedrehten ξ, η -System anzugeben (Bild 1.8). Die entsprechenden Trans-

formationsbeziehungen erhält man aus (1.6) zu

$$\begin{aligned} \sigma_\xi &= \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\varphi + \tau_{xy} \sin 2\varphi , \\ \sigma_\eta &= \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) - \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\varphi - \tau_{xy} \sin 2\varphi , \\ \tau_{\xi\eta} &= -\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\varphi + \tau_{xy} \cos 2\varphi . \end{aligned} \quad (1.113)$$

Sie können auch durch den Mohrschen Kreis in Bild 1.8 veranschaulicht werden.

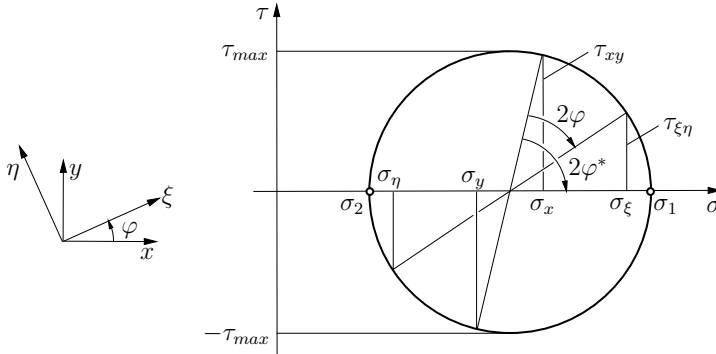


Bild 1.8 Mohrscher Spannungskreis

Eine Haupttrichtung ist sowohl im EVZ als auch im ESZ durch die z -Richtung gegeben. Die beiden anderen liegen in der x, y -Ebene; die hierzu gehörigen Hauptspannungen und Haupttrichtungen sind durch

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} , \quad \tan 2\varphi^* = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \quad (1.114)$$

bestimmt. In Schnitten unter $\varphi^{**} = \varphi^* \pm \pi/4$ tritt die Hauptschubspannung

$$\tau_3 = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (1.115)$$

auf. Sie ist für $\sigma_1 \geq \sigma_z \geq \sigma_2$ auch die maximale Schubspannung τ_{max} .

Die hier angegebenen Formeln für die Spannungen können sinngemäß auf die Verzerrungen, die Verzerrungsinkremente und die Verzerrungsgeschwindigkeiten übertragen werden.

Der *nichtebene* oder *longitudinale Schubspannungszustand* zeichnet sich dadurch aus, dass alle Größen bis auf $w, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$ verschwinden; diese sind wiederum unabhängig von z . Die Gleichgewichtsbedingung, die kinematischen Beziehungen und die Kompatibilitätsbedingung lauten in diesem Fall

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0 , \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} , \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} , \quad \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} = \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} . \quad (1.116)$$

Für linear elastisches Material gilt das Stoffgesetz

$$\gamma_{xz} = \tau_{xz}/G, \quad \gamma_{yz} = \tau_{yz}/G. \quad (1.117)$$

Seiner Einfachheit wegen wird der longitudinale Schubspannungszustand häufig als Modellfall herangezogen.

In der Plastizität und Viskoelastizität werden die Deformationen in der Regel nicht unmittelbar durch die totalen Verschiebungen und Verzerrungen sondern durch deren Inkremente bzw. durch Geschwindigkeiten beschrieben. In diesem Fall sind in den vorhergehenden Gleichungen die kinematischen Größen sinngemäß zu ersetzen.

1.5.2 Lineare Elastizität, Komplexe Methode

Zur Lösung von ebenen Problemen der linearen Elastizitätstheorie existiert eine Reihe von Verfahren. Eines der fruchtbarsten ist die Methode der komplexen Spannungsfunktionen, die hier kurz erläutert werden soll.

Bei diesem Lösungsverfahren werden die Spannungen und Verschiebungen als Funktionen der komplexen Variablen $z = x + iy = re^{i\varphi}$ bzw. der konjugiert komplexen Variablen $\bar{z} = x - iy = re^{-i\varphi}$ aufgefasst. Man kann dann zeigen, dass Lösungen der Grundgleichungen des EVZ und des ESZ aus nur zwei komplexen Funktionen $\Phi(z)$ und $\Psi(z)$ konstruiert werden können. Ihr Zusammenhang mit den kartesischen Komponenten von Spannung und Verschiebung ist durch die *Kolosovschen Formeln*

$$\begin{aligned} \sigma_x + \sigma_y &= 2[\Phi'(z) + \overline{\Phi'(z)}], \\ \sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} &= 2[\bar{z}\Phi''(z) + \Psi'(z)], \\ 2\mu(u + iv) &= \kappa\Phi(z) - z\overline{\Phi'(z)} - \overline{\Psi(z)}, \end{aligned} \quad (1.118a)$$

mit

$$\kappa = \begin{cases} 3 - 4\nu & \text{EVZ} \\ (3 - \nu)/(1 + \nu) & \text{ESZ} \end{cases} \quad (1.118b)$$

gegeben. Vielfach ist es zweckmäßig, Polarkoordinaten r, φ (Bild 1.9) zu verwenden; dann gilt

$$\begin{aligned} \sigma_r + \sigma_\varphi &= 2[\Phi'(z) + \overline{\Phi'(z)}], \\ \sigma_\varphi - \sigma_r + 2i\tau_{r\varphi} &= 2[z\Phi''(z) + \Psi'(z)z/\bar{z}], \\ 2\mu(u_r + iu_\varphi) &= [\kappa\Phi(z) - z\overline{\Phi'(z)} - \overline{\Psi(z)}]e^{-i\varphi}. \end{aligned} \quad (1.119)$$

Bei der Formulierung von Randbedingungen werden verschiedentlich noch die Beziehungen zwischen Φ, Ψ und den resultierenden Kraftkomponenten X, Y auf

den Bogen \overline{AB} bzw. deren Moment M bezüglich des Ursprungs benötigt (Bild 1.9). Es gelten

$$X + iY = \int_A^B (t_x + it_y) ds = -i \left[\Phi(z) + \overline{\Psi(z)} + z\overline{\Phi'(z)} \right]_A^B, \quad (1.120)$$

$$M = \int_A^B (x t_y - y t_x) ds = -\operatorname{Re} [z\overline{z}\Phi'(z) + z\Psi(z) - \int \Psi(z) dz]_A^B.$$

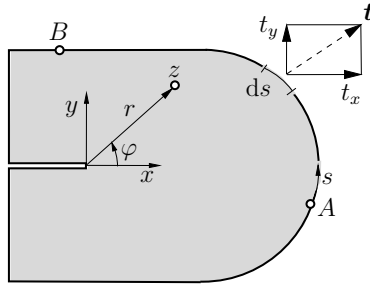


Bild 1.9 Komplexe Ebene

Lösungen des longitudinalen Schubspannungszustandes lassen sich besonders einfach darstellen. In diesem Fall können die Spannungen und die Verschiebung aus alleine einer komplexen Funktion $\Omega(z)$ gewonnen werden:

$$\begin{aligned} \tau_{xz} - i\tau_{yz} &= (\tau_{rz} - i\tau_{\varphi z})e^{-i\varphi} = \Omega'(z), \\ \mu w &= \operatorname{Re} \Omega(z). \end{aligned} \quad (1.121)$$

1.5.3 Idealplastisches Material, Gleitlinienfelder

Die Lösung von Randwertproblemen der Plastomechanik gelingt in vielen Fällen nur unter Einsatz numerischer Methoden, wie zum Beispiel des Verfahrens der Finiten Elemente. Eines der wenigen Verfahren, das eine weitgehend analytische Behandlung zulässt, ist die *Gleitlinientheorie*. Sie erlaubt die Untersuchung von Spannungen und Deformationen im Fall des ebenen Verzerrungszustandes bei Vorliegen eines starr-idealplastischen Materials, für das wir hier die von Misesche Fließbedingung zugrunde legen wollen.

Aus der Bedingung $d\varepsilon_z^p = 0$ folgt zunächst mit $d\varepsilon_{ij}^p = d\varepsilon_{ij}$ und (1.83a) für die Spannung $s_z = 0$ bzw. $\sigma_z = \sigma_3 = (\sigma_x + \sigma_y)/2 = \sigma_m$. Die Fließbedingung (1.77b) vereinfacht sich damit zu

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2 = 4k^2, \quad (1.122)$$

womit für die Hauptspannungen $\sigma_1 = \sigma_m + k$, $\sigma_2 = \sigma_m - k$ und für die maximale Schubspannung $\tau_{\max} = k$ gelten. Die Fließbedingung stellt zusammen mit den Gleichgewichtsbedingungen (1.108) ein hyperbolisches System von drei Gleichungen für die drei Unbekannten σ_x , σ_y und τ_{xy} dar.

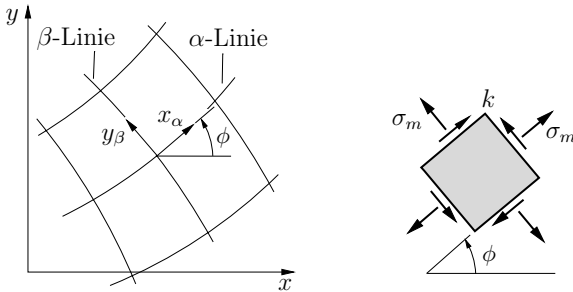


Bild 1.10 Gleitlinien

Es ist nun zweckmäßig ein orthogonales Netz von α - und β -Linien einzuführen, deren Richtungen in jedem Punkt mit den Hauptschubspannungsrichtungen übereinstimmen (Bild 1.10). Da letztere mit den Richtungen maximaler Gleitungsänderung zusammenfallen nennt man sie *Gleitlinien*. Es sei angemerkt, dass diese Linien die *Charakteristiken* des hyperbolischen Gleichungssystems sind. Bezeichnet man den Winkel zwischen der x -Achse und der Tangente an die α -Linie (=Hauptschubspannungsrichtung) mit ϕ , so folgen mit (1.114) die Beziehungen

$$\sigma_x = \sigma_m - k \sin 2\phi, \quad \sigma_y = \sigma_m + k \sin 2\phi, \quad \tau_{xy} = k \cos 2\phi. \quad (1.123)$$

Sie erfüllen die Fließbedingungen identisch. Einsetzen in die Gleichgewichtsbedingungen (1.108) liefert

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_m}{\partial x} - 2k \cos 2\phi \frac{\partial \phi}{\partial x} - 2k \sin 2\phi \frac{\partial \phi}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_m}{\partial y} - 2k \sin 2\phi \frac{\partial \phi}{\partial x} + 2k \cos 2\phi \frac{\partial \phi}{\partial y} &= 0. \end{aligned}$$

Da die Wahl des Koordinatensystems x, y beliebig ist, können wir auch ein lokales System x_α, y_β verwenden, dessen Achsen in Richtung der Tangenten an die α - bzw. an die β -Linie zeigen (Bild 1.10). Mit $\phi = 0$ vereinfachen sich die obigen Beziehungen dann zu gewöhnlichen Differentialgleichungen entlang der Gleitlinien:

$$\frac{d}{dx_\alpha} (\sigma_m - 2k\phi) = 0, \quad \frac{d}{dy_\beta} (\sigma_m + 2k\phi) = 0.$$

Integration liefert die *Henckyschen Gleichungen* (H. Hencky, 1885-1952)

$$\begin{aligned}\sigma_m - 2k\phi &= C_\alpha = \text{const} && \text{entlang } \alpha\text{-Linie,} \\ \sigma_m + 2k\phi &= C_\beta = \text{const} && \text{entlang } \beta\text{-Linie.}\end{aligned}\quad (1.124)$$

Sie erlauben bei gegebenen Spannungsrandbedingungen die Bestimmung von C_α , C_β und damit des Gleitlinien- und Spannungsfeldes. Liegen dagegen kinematische Randbedingungen vor, so reichen die Gleichungen (1.124) nicht aus. Es müssen dann noch die kinematischen Beziehungen herangezogen werden. Darauf soll hier jedoch nicht näher eingegangen werden.

Ohne Herleitung sei auf zwei geometrische Eigenschaften des Gleitlinienfeldes hingewiesen. Nach dem 1. Henckyschen Satz ist der Winkel zwischen zwei Gleitlinien einer Familie (α) im Bereich des Schnittes mit Gleitlinien der anderen Familie (β) konstant. Befindet sich danach in einer Familie ein Geradenstück, so besteht die gesamte Familie aus Geraden (z.B. parallele Geraden, Fächer). Der 2. Henckysche Satz besagt, dass bei Fortschreiten längs einer Gleitlinie sich der Krümmungsradius der orthogonalen Schar proportional zur zurückgelegten Strecke ändert. Erwähnt sei noch, dass eine Gleitlinie auch eine Unstetigkeitslinie für die Normalspannung tangential zur Gleitlinie bzw. für die Tangentialgeschwindigkeit sein kann.

Analog zum ebenen Verzerrungszustand lässt sich der longitudinale Schubspannungszustand behandeln. Hier lauten die Fließbedingung und die Gleichgewichtsbedingung

$$\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2 = k^2 = \tau_F^2, \quad \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0. \quad (1.125)$$

Wir führen nun wieder α -Linien ein, deren Richtung ϕ die Schnitte kennzeichnet, in denen die Fließspannung τ_F auftritt; auf β -Linien können wir verzichten. Mit

$$\tau_{xz} = -\tau_F \sin \phi, \quad \tau_{yz} = \tau_F \cos \phi \quad (1.126)$$

liefert dann die Gleichgewichtsbedingung

$$\frac{d\phi}{dx_\alpha} = 0 \quad . \quad (1.127)$$

Die α -Linien sind demnach Geraden.

Die Fließregel $d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda s_{ij}$ nach Abschnitt 1.3.3.2 lässt sich in diesem Fall mit

$$2\varepsilon_{13} = \gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x}, \quad 2\varepsilon_{23} = \gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} \quad (1.128)$$

als

$$d\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right) = \frac{\partial(dw)}{\partial x} = 2 d\lambda \tau_{xz}, \quad d\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right) = \frac{\partial(dw)}{\partial y} = 2 d\lambda \tau_{yz} \quad (1.129)$$

schreiben. Ersetzt man das x, y -Koordinatensystem durch das gleichberechtigte x_α, y_β -System, so nimmt sie mit (1.126) und $\phi = 0$ die Form

$$\frac{\partial(dw)}{\partial x_\alpha} = 0, \quad \frac{\partial(dw)}{\partial y_\beta} = 2 \, d\lambda \, \tau_F \quad (1.130)$$

an. Längs der α -Linie sind die Verschiebungsänderungen dw danach konstant. Geht man von einem undeformierten Anfangszustand aus, so erfahren also beim Fließen alle Punkte auf einer α -Linie die gleiche Verschiebung w .

1.6 Literatur

- Altenbach, J., Altenbach, H. (1994). *Einführung in die Kontinuumsmechanik*. Teubner, Stuttgart
- Betten, J. (2001). *Kontinuumsmechanik*. Springer, Berlin
- Betten, J. (2002). *Creep Mechanics*. Springer, Berlin
- Chakrabarty, J. (1987). *Theory of Plasticity*. McGraw-Hill, New York
- Christensen, R.M. (1982). *Theory of Viscoelasticity*. Academic Press, New York
- Doghri, I. (2000). *Mechanics of Deformable Solids*. Springer, Berlin
- Eschenauer, H., Schnell, W. (1993). *Elastizitätstheorie*. BI Wissenschaftsverlag, Mannheim
- Fung, Y.C. (1965). *Foundations of Solid Mechanics*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs
- Gould, P.L. (1994). *Introduction to Linear Elasticity*. Springer, New York
- Hill, R. (1983). *The mathematical theory of plasticity*. Clarendon Press, Oxford
- Khan, A.S. and Huang, S. (1995). *Continuum Theory of Plasticity*. John Wiley & Sons, New York
- Lemaitre, J. and Chaboche, J.-L. (2000). *Mechanics of Solid Materials*. Cambridge University Press, Cambridge
- Lubliner, J. (1990). *Plasticity Theory*. Macmillan Publ. Comp., New York
- Maugin, G.A. (1992). *The Thermomechanics of Plasticity and Fracture*. Cambridge University Press, Cambridge

- Muβchelischwili, N.I. (1971). *Einige Grundaufgaben zur mathematischen Elastizitätstheorie*. Hanser, München
- Nadai, A. (1963). *Theory of Flow and Fracture of Solids*, Vol. 1 & 2. McGraw-Hill, New York
- Rabotnov, Y.N. (1969). *Creep Problems in Structural Members*. North Holland, Amsterdam
- Sokolnikoff, I.S. (1956). *The Mathematical Theory of Elasticity*. McGraw-Hill, New York