PEARSON Education

PEARSON Studium

wi wirtschaft

Knut Sydsæter
Peter Hammond

Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler

Basiswissen mit Praxisbezug

2., aktualisierte Auflage

Prentice Hall

PEARSON Studium

Einführung, III: Verschiedenes

3

ÜBERBLICK

Ein Astronom, ein Physiker und ein Mathematiker reisen mit dem Zug durch Schottland. Durch das Zugfenster sehen sie eine Schafherde grasend auf der Wiese.
Da meint der Astronom: „In Schottland sind die Schafe schwarz."
Protestierend meint der Physiker: „In Schottland sind einige Schafe schwarz."
Daraufhin der Mathematiker: „In Schottland existiert eine Schafherde und alle von ihnen sind schwarz – zumindest auf einer Seite."

Dieses Einführungskapitel beginnt mit Summen und Summennotation. Die meisten Studierenden der Wirtschaftswissenschaften werden dies insbesondere für ihre Statistik- und Ökonometrie-Veranstaltungen benötigen.

Argumentationen in Mathematik verlangen straffe logische Schlussfolgerungen, Argumentationen in den Wirtschaftswissenschaften bilden keine Ausnahme von dieser Regel. Wir präsentieren hier deshalb einige grundlegende Konzepte der Logik. Ein kurzer Abschnitt über mathematische Beweisführung mag nützlich sein für die ambitionierteren Studierenden.

Es folgt eine kurze Einführung in die Mengentheorie. Gelegentlich wird dies direkt in ökonomischen Argumentationen gebraucht. Häufiger wird es benötigt, um mathematische Resultate zu verstehen, die Ökonomen benutzen.

3.1 Summennotation

Ökonomen machen häufig Gebrauch von Volkszählungs-Daten. Nehmen Sie an, dass ein Land in sechs Regionen aufgeteilt ist. N_i sei die Anzahl der Bewohner in Region i. Dann ist die Gesamtanzahl der Bewohner gegeben durch

$$N_1 + N_2 + N_3 + N_4 + N_5 + N_6$$

Es ist üblich eine abkürzende Notation für solche langen Summen zu verwenden. Der große griechische Buchstabe Sigma Σ wird gewöhnlich als **Summationssymbol** verwendet, und die Summe wird geschrieben als

$$\sum_{i=1}^{6} N_i$$

Dies wird gelesen „Summe von $i = 1$ bis $i = 6$ über N_i." Wenn es n Regionen gibt, dann ist

$$N_1 + N_2 + \cdots + N_n \tag{$*$}$$

eine mögliche Notation für die Gesamtanzahl der Bevölkerung. Hier deutet $\cdots$ an, dass das offensichtliche Muster sich fortsetzt und mit dem letzten Term N_n endet. In Summennotation schreiben wir

$$\sum_{i=1}^{n} N_i$$

Diese Notation sagt uns, dass wir die Summe von allen Termen bilden sollen, die entstehen, wenn wir für i nacheinander alle ganzen Zahlen einsetzen, beginnend mit $i = 1$ und endend mit $i = n$. Das Symbol i heißt der **Summationsindex**. Es ist eine

„Hilfsvariable“, die durch jeden anderen Buchstaben (der noch nicht für irgendetwas anderes gebraucht wurde) ersetzt werden kann. Daher stellen sowohl $\sum_{j=1}^{n} N_j$ als auch $\sum_{k=1}^{n} N_k$ dieselbe Summe wie in $(*)$ dar.

Die obere und untere Grenze können jeweils variiert werden. Zum Beispiel ist

$$\sum_{i=30}^{35} N_i = N_{30} + N_{31} + N_{32} + N_{33} + N_{34} + N_{35}$$

die Gesamtanzahl der Bevölkerung in den sechs Regionen, die mit 30 bis 35 beziffert sind.

Nehmen Sie allgemein an, dass p und q ganze Zahlen sind mit $q \geq p$. Dann bedeutet

$$\sum_{i=p}^{q} a_i = a_p + a_{p+1} + \cdots + a_q$$

die Summe, die sich ergibt, wenn man für i alle aufeinander folgenden ganzen Zahlen einsetzt, beginnend mit $i = p$ und endend mit $i = q$. Wenn die obere mit der unteren Summationsgrenze übereinstimmt, reduziert sich die „Summe“ auf einen Term. Und wenn die obere Grenze kleiner als die untere Grenze ist, gibt es überhaupt keine Terme. Deshalb ist es Konvention diese „Summe“ als Null zu betrachten.

Beispiel 1

Berechnen Sie: (a) $\sum_{i=1}^{5} i^2$ (b) $\sum_{k=3}^{6} (5k - 3)$ (c) $\sum_{j=0}^{2} \frac{1}{(j+1)(j+3)}$.

Lösung:

(a) $$\sum_{i=1}^{5} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 1 + 4 + 9 + 16 + 25 = 55$$

(b) $$\sum_{k=3}^{6} (5k - 3) = (5 \cdot 3 - 3) + (5 \cdot 4 - 3) + (5 \cdot 5 - 3) + (5 \cdot 6 - 3) = 78$$

(c) $$\sum_{j=0}^{2} \frac{1}{(j+1)(j+3)} = \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 5} = \frac{40 + 15 + 8}{120} = \frac{63}{120} = \frac{21}{40}$$

Summen und Summennotation erscheinen häufig in den Wirtschaftswissenschaften. Oft gibt es neben dem Summationsindex mehrere Variablen oder Parameter. Es ist wichtig, dass man solche Summen interpretieren kann. In jedem Fall sagt Ihnen der Summationsindex, dass es eine Summe von Termen gibt. Die Summe entsteht, indem man aufeinanderfolgende ganze Zahlen für den Summationsindex einsetzt, beginnend mit der unteren Grenze und endend mit der oberen Grenze.

Beispiel 2

Schreiben Sie als ausführliche Summe

$$\text{(a)}\ \sum_{i=1}^{n} p_t^{(i)} q^{(i)} \qquad \text{(b)}\ \sum_{j=-3}^{1} x^{5-j} y^j \qquad \text{(c)}\ \sum_{i=1}^{N} (x_{ij} - \overline{x}_j)^2$$

Lösung:

$$\text{(a)}\ \sum_{i=1}^{n} p_t^{(i)} q^{(i)} = p_t^{(1)} q^{(1)} + p_t^{(2)} q^{(2)} + \cdots + p_t^{(n)} q^{(n)}$$

$$\begin{aligned}\text{(b)}\ \sum_{j=-3}^{1} x^{5-j} y^j &= x^{5-(-3)} y^{-3} + x^{5-(-2)} y^{-2} + x^{5-(-1)} y^{-1} + x^{5-0} y^0 + x^{5-1} y^1 \\ &= x^8 y^{-3} + x^7 y^{-2} + x^6 y^{-1} + x^5 + x^4 y\end{aligned}$$

$$\text{(c)}\ \sum_{i=1}^{N} (x_{ij} - \overline{x}_j)^2 = (x_{1j} - \overline{x}_j)^2 + (x_{2j} - \overline{x}_j)^2 + \cdots + (x_{Nj} - \overline{x}_j)^2$$

Beachten Sie, dass t *kein* Summationsindex in (a) und j *kein* Summationsindex in (c) ist.

Beispiel 3

Schreiben Sie die folgenden Summen mit Hilfe des Summenzeichens:

(a) $1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^{81}$ (b) $a_i^6 + a_i^5 b_j + a_i^4 b_j^2 + a_i^3 b_j^3 + a_i^2 b_j^4 + a_i b_j^5 + b_j^6$

Lösung:

(a) Dies ist einfach, wenn wir beachten, dass $1 = 3^0$ und $3 = 3^1$, so dass die Summe geschrieben werden kann als $3^0 + 3^1 + 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^{81}$. Der allgemeine Term ist 3^i, und wir erhalten

$$1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^{81} = \sum_{i=0}^{81} 3^i$$

(b) Dies ist schwieriger. Beachten Sie jedoch, dass sich die Indizes i und j nicht verändern. Der Exponent von a_i nimmt in jedem Schritt um 1 ab, von 6 beginnend auf 0, während der Exponent von b_j Schritt für Schritt wächst von 0 beginnend auf 6. Der allgemeine Term hat die Gestalt $a_i^{6-k} b_j^k$, wobei k von 0 bis 6 variiert. Deshalb ist

$$a_i^6 + a_i^5 b_j + a_i^4 b_j^2 + a_i^3 b_j^3 + a_i^2 b_j^4 + a_i b_j^5 + b_j^6 = \sum_{k=0}^{6} a_i^{6-k} b_j^k$$

Beispiel 4

(Preisindizes) Um zusammenzufassen, wie sich die Preise von verschiedenen Gütern verändert haben (d. h. gestiegen oder gefallen sind), sind eine Reihe von verschiedenen *Preisindizes* vorgeschlagen worden.

Betrachten Sie einen „Warenkorb“ mit n Gütern. Definieren Sie für $i = 1, \ldots, n$

$$q^{(i)} = \text{Anzahl der Einheiten des Gutes } i \text{ im Warenkorb}$$
$$p_0^{(i)} = \text{Preis pro Einheit des Gutes } i \text{ im Jahr } 0$$
$$p_t^{(i)} = \text{Preis pro Einheit des Gutes } i \text{ im Jahr } t$$

Dann gibt

$$\sum_{i=1}^{n} p_0^{(i)} q^{(i)} = p_0^{(1)} q^{(1)} + p_0^{(2)} q^{(2)} + \cdots + p_0^{(n)} q^{(n)}$$

die Kosten des Warenkorbs im Jahr 0 an, während

$$\sum_{i=1}^{n} p_t^{(i)} q^{(i)} = p_t^{(1)} q^{(1)} + p_t^{(2)} q^{(2)} + \cdots + p_t^{(n)} q^{(n)}$$

die Kosten des Warenkorbs im Jahr t angibt. Ein Preisindex für das Jahr t mit Jahr 0 als Basisjahr ist dann definiert durch

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} p_t^{(i)} q^{(i)}}{\sum_{i=1}^{n} p_0^{(i)} q^{(i)}} \cdot 100 \qquad \textbf{(Preisindex)} \tag{1}$$

Wenn die Kosten des Warenkorbs 1032 im Jahr 0 und die Kosten desselben Warenkorbs im Jahr t sich auf 1548 belaufen, dann ist der Preisindex $(1548/1032) \cdot 100 = 150$.

Für den Fall, dass die Mengen $q^{(i)}$ die Verbrauchszahlen aus dem Jahr 0 sind, heißt dieser Index **Preisindex von Laspeyres**. Wenn aber die Mengen $q^{(i)}$ die Verbrauchszahlen aus dem Jahr t sind, heißt dieser Index **Preisindex von Paasche**.

Aufgaben für Kapitel 3.1

1. Berechnen Sie die folgenden Summen:

(a) $\sum_{i=1}^{10} i$ (b) $\sum_{k=2}^{6} (5 \cdot 3^{k-2} - k)$ (c) $\sum_{m=0}^{5} (2m+1)$

(d) $\sum_{l=0}^{2} 2^{2^l}$ (e) $\sum_{i=1}^{10} 2$ (f) $\sum_{j=1}^{4} \frac{j+1}{j}$

2. Berechnen und vereinfachen Sie die folgenden Summen:

(a) $\sum_{k=-2}^{2} 2\sqrt{k+2}$ (b) $\sum_{i=0}^{3} (x+2i)^2$ (c) $\sum_{k=1}^{n} a_{ki} b^{k+1}$ (d) $\sum_{j=0}^{m} f(x_j)\,\Delta x_j$

3. Drücken Sie die folgenden Summen mit Hilfe des Summenzeichens aus:

(a) $4 + 8 + 12 + 16 + \cdots + 4n$

(b) $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \cdots + n^3$

(c) $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{2n+1}$

(d) $a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$

(e) $3x + 9x^2 + 27x^3 + 81x^4 + 243x^5$

(f) $a_i^3 b_{i+3} + a_i^4 b_{i+4} + \cdots + a_i^p b_{i+p}$

(g) $a_i^3 b_{i+3} + a_{i+1}^4 b_{i+4} + \cdots + a_{i+p}^{p+3} b_{i+p+3}$

(h) $81297 + 81495 + 81693 + 81891$

4. Berechnen Sie den Preisindex (1), wenn $n = 3$, $p_0^{(1)} = 1$, $p_0^{(2)} = 2$, $p_0^{(3)} = 3$, $p_t^{(1)} = 2$, $p_t^{(2)} = 3$, $p_t^{(3)} = 4$, $q^{(1)} = 3$, $q^{(2)} = 5$ und $q^{(3)} = 7$.

5. Setzen Sie die korrekten Summationsgrenzen in den Summen auf der rechten Seite ein.

(a) $\sum_{k=1}^{10} (k-2)t^k = \sum_{m=} mt^{m+2}$

(b) $\sum_{n=0}^{N} 2^{n+5} = \sum_{j=} 32 \cdot 2^{j-1}$

6. Betrachten Sie ein Land, das in 100 Regionen aufgeteilt ist. Für ein bestimmtes Jahr sei c_{ij} die Anzahl der Einwohner, die aus der Region i in die Region j, $i \neq j$ umziehen. Wenn z. B. $i = 25$ und $j = 10$, dann schreiben wir $c_{25,10}$ für c_{ij}. Erläutern Sie die Bedeutung der Summen: (a) $\sum_{j=1}^{100} c_{ij}$, (b) $\sum_{i=1}^{100} c_{ij}$.

7. Entscheiden Sie, welche der folgenden Gleichungen allgemein gültig sind. (Beachten Sie insbesondere die richtige Antwort zu (b).)

(a) $\sum_{k=1}^{n} ck^2 = c \sum_{k=1}^{n} k^2$

(b) $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \right)^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2$

(c) $\sum_{j=1}^{n} b_j + \sum_{j=n+1}^{N} b_j = \sum_{j=1}^{N} b_j$

(d) $\sum_{k=3}^{7} 5^{k-2} = \sum_{k=0}^{4} 5^{k+1}$

(e) $\sum_{i=0}^{n-1} a_{i,j}^2 = \sum_{k=1}^{n} a_{k-1,j}^2$

(f) $\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k} = \frac{1}{k} \sum_{k=1}^{n} a_k$

3.2 Regeln für Summen. Newtons Binomische Formeln

Die folgenden Eigenschaften von Summen sind im Umgang mit der Summennotation sehr hilfreich:

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i \qquad \textbf{(Additivität)} \qquad (1)$$

$$\sum_{i=1}^{n} ca_i = c \sum_{i=1}^{n} a_i \qquad \textbf{(Homogenität)} \qquad (2)$$

Die Beweise sind ziemlich einfach und direkt. Zum Beispiel beweist man (2) so:

$$\sum_{i=1}^{n} ca_i = ca_1 + ca_2 + \cdots + ca_n = c(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) = c \sum_{i=1}^{n} a_i$$

Die Homogenitätseigenschaft besagt, dass ein konstanter Faktor aus der Summe herausgezogen werden kann. Wenn insbesondere $a_i = 1$ ist für alle i, dann ist

$$\sum_{i=1}^{n} c = nc \tag{3}$$

Dies besagt, dass die Summe über eine Konstante c gleich dem n-fachen von c ist, wenn n die Anzahl der Summanden ist (und jeder Summand gleich c ist).

Die Summationsregeln können kombiniert angewendet werden, um Formeln wie die folgende zu erhalten

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i - c_i + d) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i - \sum_{i=1}^{n} c_i + nd$$

Beispiel 1

Berechnen Sie die Summe

$$\sum_{m=2}^{n} \frac{1}{(m-1)m} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{(n-1)n}$$

und nutzen Sie dabei, dass $\dfrac{1}{(m-1)m} = \dfrac{1}{m-1} - \dfrac{1}{m}$.

Lösung:

$$\begin{aligned}
\sum_{m=2}^{n} \frac{1}{m(m-1)} &= \sum_{m=2}^{n}\left(\frac{1}{m-1} - \frac{1}{m}\right) = \sum_{m=2}^{n} \frac{1}{m-1} - \sum_{m=2}^{n} \frac{1}{m} \\
&= \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}\right) \\
&= 1 - \frac{1}{n}
\end{aligned}$$

Um die letzte Gleichheit zu erhalten, beachten Sie bitte, dass die meisten Terme sich gegeneinander aufheben. Die einzigen Ausnahmen sind der erste Term innerhalb der ersten Klammer und der letzte Term innerhalb der letzten Klammer. Dieser Trick erweist sich hier und bei der Berechnung vieler ähnlicher Summen dieser Art als sehr hilfreich und vereinfachend.

Beispiel 2

Das **arithmetische Mittel** (oder der **Mittelwert**) μ_x von T Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_T$ ist ihr Durchschnitt, definiert als die Summe über all diese Zahlen, dividiert durch die Anzahl der Summanden, T, d. h. $\mu_x = \frac{1}{T}\sum_{i=1}^{T} x_i$.

Beweisen Sie, dass $\sum_{i=1}^{T}(x_i - \mu_x) = 0$ und $\sum_{i=1}^{T}(x_i - \mu_x)^2 = \sum_{i=1}^{T} x_i^2 - T\mu_x^2$.

Lösung: Die Differenz $x_i - \mu_x$ ist die Abweichung zwischen x_i und dem Mittelwert. Wir beweisen zunächst, dass die Summe dieser Abweichungen 0 ist, indem wir die obenstehende Definition von μ_x verwenden:

$$\sum_{i=1}^{T}(x_i - \mu_x) = \sum_{i=1}^{T} x_i - \sum_{i=1}^{T} \mu_x = \sum_{i=1}^{T} x_i - T\mu_x = T\mu_x - T\mu_x = 0$$

Ferner ist die Summe der Quadrate dieser Abweichungen

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{T}(x_i - \mu_x)^2 &= \sum_{i=1}^{T}(x_i^2 - 2\mu_x x_i + \mu_x^2) = \sum_{i=1}^{T} x_i^2 - 2\mu_x \sum_{i=1}^{T} x_i + \sum_{i=1}^{T} \mu_x^2 \\ &= \sum_{i=1}^{T} x_i^2 - 2\mu_x T\mu_x + T\mu_x^2 = \sum_{i=1}^{T} x_i^2 - T\mu_x^2\end{aligned}$$

Indem wir durch T dividieren, erhalten wir, dass die mittlere quadratische Abweichung, $(1/T)\sum_{i=1}^{T}(x_i - \mu_x)^2$, gleich dem Mittel der Quadrate, $(1/T)\sum_{i=1}^{T} x_i^2$, minus dem Quadrat des Mittelwerts, μ_x^2, ist.

Nützliche Formeln

Ein (sehr) anspruchsvoller Lehrer forderte einst seine Schüler auf, die Summe von $81\,297 + 81\,495 + 81\,693 + \cdots + 100\,899$ zu bilden. Dies sind 100 Summanden und die Differenz zwischen den aufeinander folgenden Summanden ist konstant gleich 198. Gauß, der später einer der weltweit führenden Mathematiker wurde, war in dieser Klasse (in seinem 10. Lebensjahr) und gab die richtige Antwort innerhalb weniger Minuten. In Aufgabe 5 sind Sie gefragt, es wenigstens genauso gut wie Gauß zu machen, aber vorher werden wir noch einige Hilfen geben.

Angewandt auf das einfachere Problem, die Summe $x = 1 + 2 + \cdots + n$ zu bestimmen, wäre Gauß' Argument etwa so: Schreiben Sie zunächst die Summe x auf zwei Arten

$$\begin{aligned}x &= 1 + 2 + \cdots + (n-1) + n \\ x &= n + (n-1) + \cdots + 2 + 1\end{aligned}$$

Indem Sie die senkrecht übereinander stehenden Terme jeweils addieren, erhalten Sie

$$\begin{aligned}2x &= (1+n) + \big[2 + (n-1)\big] + \cdots + \big[(n-1) + 2\big] + (n+1) \\ &= (1+n) + (1+n) + \cdots + (1+n) + (1+n) = n(1+n)\end{aligned}$$

Durch Auflösen nach x erhalten wir das Ergebnis:

$$\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n+1) \tag{4}$$

Die beiden folgenden Summationsformeln sind gelegentlich nützlich in Anwendungen. Prüfen Sie, ob diese Formeln für $n = 1$, 2 und 3 gültig sind. Für Beweise siehe Aufgabe 3.7.2.

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \tag{5}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left[\frac{1}{2}n(n+1)\right]^2 = \left[\sum_{i=1}^{n} i\right]^2 \tag{6}$$

Newtons Binomische Formeln

Wir wissen alle, dass $(a+b)^1 = a+b$ und $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Wenn wir die letzte Gleichheit benutzen und außerdem $(a+b)^3 = (a+b)(a+b)^2$ und $(a+b)^4 = (a+b)(a+b)^3$ schreiben, finden wir heraus, dass

$$\begin{aligned}
(a+b)^1 &= a+b \\
(a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\
(a+b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\
(a+b)^4 &= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4
\end{aligned}$$

Die entsprechende Formel für $(a+b)^m$, wobei m irgendeine natürliche Zahl ist, ist die folgende:[1]

Newtons Binomische Formeln

$$(a+b)^m = a^m + \binom{m}{1}a^{m-1}b + \cdots + \binom{m}{m-1}ab^{m-1} + \binom{m}{m}b^m \tag{7}$$

Dabei sind die **Binomialkoeffizienten** $\binom{m}{k}$ definiert für $m = 1, 2, \ldots$ und für $k = 0, 1, 2, \ldots, m$ durch

$$\binom{m}{k} = \frac{m(m-1)\ldots(m-k+1)}{k!}, \qquad \binom{m}{0} = 1$$

Insbesondere ist $\binom{m}{1} = m$ und $\binom{m}{m} = 1$. Wenn z. B. $m = 5$, erhalten wir

$$\binom{5}{2} = \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 10, \qquad \binom{5}{3} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 10, \qquad \binom{5}{4} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 5$$

Aus (7) folgt dann

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

[1] Wenn n eine natürliche Zahl ist, so sei $n!$ (gelesen als „n Fakultät") definiert durch $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot (n-1) \cdot n$. Zum Beispiel $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$. Es ist außerdem eine nützliche Konvention $0! = 1$ zu setzen.

Die Koeffizienten, die sich in der Entwicklung aufeinander folgender Potenzen von $(a + b)$ ergeben, bilden das folgende Muster, das **Pascal'sches Dreieck** genannt wird (obwohl es schon um das Jahr 1100 herum in China bekannt war, lange bevor Blaise Pascal geboren wurde):

$$
\begin{array}{ccccccccccccccccccc}
&&&&&&&&&1&&&&&&&&& \\
&&&&&&&&1&&1&&&&&&&& \\
&&&&&&&1&&2&&1&&&&&&& \\
&&&&&&1&&3&&3&&1&&&&&& \\
&&&&&1&&4&&6&&4&&1&&&&& \\
&&&&1&&5&&10&&10&&5&&1&&&& \\
&&&1&&6&&15&&20&&15&&6&&1&&& \\
&&1&&7&&21&&35&&35&&21&&7&&1&& \\
&1&&8&&28&&56&&70&&56&&28&&8&&1& \\
1&&9&&36&&84&&126&&126&&84&&36&&9&&1
\end{array}
$$

Diese Tabelle kann unendlich lange fortgesetzt werden. Die Zahlen in diesem Dreieck sind die Binomialkoeffizienten. Zum Beispiel sind die Zahlen in Zeile 6 (wenn die erste Zeile mit 0 beziffert ist)

$$\binom{6}{0} \quad \binom{6}{1} \quad \binom{6}{2} \quad \binom{6}{3} \quad \binom{6}{4} \quad \binom{6}{5} \quad \binom{6}{6}$$

Erkennen Sie zunächst, dass die Zahlen symmetrisch zur Mittelachse sind. Diese Symmetrie kann so ausgedrückt werden:

$$\binom{m}{k} = \binom{m}{m-k} \tag{8}$$

Zum Beispiel ist $\binom{6}{2} = 15 = \binom{6}{4}$. Zweitens, abgesehen von der 1 an beiden Enden jeder Zeile, ist jede Zahl die Summe der zwei angrenzenden Zahlen in der Zeile darüber. Zum Beispiel, 56 in der achten Zeile ist die Summe von 21 und 35 in der Zeile sieben. In Symbolen bedeutet das:

$$\binom{m+1}{k+1} = \binom{m}{k} + \binom{m}{k+1} \tag{9}$$

In Aufgabe 4 sollen Sie diese beiden Eigenschaften beweisen.

Aufgaben für Kapitel 3.2

1. Benutzen Sie die Resultate in (4) und (5), um $\sum_{k=1}^{n}(k^2 + 3k + 2)$ zu bestimmen.

2. Benutzen Sie die Binomischen Formeln, um $(a + b)^6$ zu bestimmen.

3. (a) Beweisen Sie, dass $\sum_{k=1}^{8}(a_{k+1} - a_k) = a_9 - a_1$ und allgemein, dass

$$\sum_{k=1}^{n}(a_{k+1} - a_k) = a_{n+1} - a_1.$$

(b) Benutzen Sie das Resultat aus (a), um die folgenden Ausrücke zu berechnen:

(i) $\displaystyle\sum_{k=1}^{50}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$ (ii) $\displaystyle\sum_{k=1}^{12}\left(3^{k+1} - 3^k\right)$ (iii) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(ar^{k+1} - ar^k\right)$

4. (a) Zeigen Sie, dass $\binom{5}{3} = \frac{5!}{2!3!}$, und dass allgemein

$$\binom{m}{k} = \frac{m!}{(m-k)!k!}.$$

(b) Überprüfen Sie durch direkte Berechnung, dass

$$\binom{8}{3} = \binom{8}{8-3} \quad \text{und} \quad \binom{8+1}{3+1} = \binom{8}{3} + \binom{8}{3+1}.$$

(c) Verwenden Sie (10), um (8) und (9) zu verifizieren.

5. Beweisen Sie die Summenformel für eine **arithmetische Reihe**:

$$\sum_{i=0}^{n-1}(a + id) = na + \frac{n(n-1)d}{2}$$

Wenden Sie das Resultat auf die Summe an, von der angenommen wird, dass Gauß sie in der Schule berechnet hat.

3.3 Doppelsummen

Häufig muss man mehrere Summenzeichen zusammenfügen. Betrachten Sie z. B. die folgende rechteckige Anordnung von Zahlen.

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{matrix} \tag{1}$$

Diese Anordnung kann als *Arbeitsblatt (spreadsheet)* angesehen werden. Eine typische Zahl in dieser Anordnung oder Zahlenfeld hat die Form a_{ij}, wobei $1 \leq i \leq m$ und $1 \leq j \leq n$. (Zum Beispiel kann a_{ij} die Gesamteinnahmen einer Firma aus ihren Verkäufen in Region i im Monat j bezeichnen.) Es gibt insgesamt $n \cdot m$ Zahlen. Wir wollen die Summe aller Zahlen in diesem Feld bestimmen, indem wir zunächst die Summe der Zahlen in jeder der m Zeilen bestimmen und dann all diese Zeilensummen addieren. Die m verschiedenen Zeilensummen können in der Form $\sum_{j=1}^{n} a_{1j}$, $\sum_{j=1}^{n} a_{2j}$,

$\ldots, \sum_{j=1}^{n} a_{mj}$ geschrieben werden. (In unserem Beispiel sind diese Zeilensummen die Gesamteinnahmen in jeder Region, summiert über alle n Monate.) Die Summe dieser m Summen ist gleich $\sum_{j=1}^{n} a_{1j} + \sum_{j=1}^{n} a_{2j} + \cdots + \sum_{j=1}^{n} a_{mj}$, was geschrieben werden kann als $\sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\right)$. Wenn wir stattdessen die Zahlen in jeder der n Spalten zuerst addieren und dann die Summe dieser n Spaltensummen bilden, erhalten wir:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{i1} + \sum_{i=1}^{m} a_{i2} + \cdots + \sum_{i=1}^{m} a_{in} = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\right)$$

(Wie interpretieren Sie diese Summe in unserem ökonomischen Beispiel?) In beiden Fällen haben wir die Summe aller Zahlen in diesem Zahlenfeld berechnet. Aus diesem Grunde muss gelten:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} a_{ij}$$

Dabei haben wir, der üblichen Praxis folgend, die Klammern weggelassen. Diese Formel besagt, dass es *in einer (endlichen) Doppelsumme nicht auf die Reihenfolge der Summation ankommt*. Es ist wichtig zu bemerken, dass die Summationsgrenzen für i und j unabhängig voneinander sind.

Beispiel 1

Berechnen Sie $\displaystyle\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4}(i+2j)$.

Lösung:

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4}(i+2j) = \sum_{i=1}^{3}\big[(i+2)+(i+4)+(i+6)+(i+8)\big]$$

$$= \sum_{i=1}^{3}(4i+20) = 24+28+32 = 84$$

Sie sollten überprüfen, ob Sie dasselbe Resultat erhalten, wenn Sie zunächst über i summieren.

Aufgaben für Kapitel 3.3

1. Berechnen Sie die folgenden Doppelsummen:

(a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4} i \cdot 3^j$ (b) $\displaystyle\sum_{s=0}^{2}\sum_{r=2}^{4}\left(\frac{rs}{r+s}\right)^2$ (c) $\displaystyle\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} i \cdot j^2$

2. Betrachten Sie eine Gruppe von Personen, von denen jede eine bestimmte Anzahl Einheiten von m verschiedenen Gütern hat. Sei a_{ij} die Anzahl der Einheiten des Gutes i, die Person j ($i = 1, \dots, m$; $j = 1, \dots, n$) besitzt. Erklären Sie in Worten die Bedeutung der folgenden Summen:

(a) $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}$ (b) $\sum_{i=1}^{m} a_{ij}$ (c) $\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} a_{ij}$

3. Beweisen Sie, dass die Summe aller Zahlen in dem Dreieck

$$\begin{array}{lllll} a_{11} & & & & \\ a_{21} & a_{22} & & & \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mm} \end{array}$$

geschrieben werden kann als $\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{i} a_{ij}\right)$ oder als $\sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=j}^{m} a_{ij}\right)$.

Anspruchsvollere Aufgabe

4. Betrachten Sie die $m \cdot n$ Zahlen a_{ij} in dem rechteckigen Zahlenfeld (1). Bezeichnen Sie den arithmetischen Mittelwert aller Zahlen mit $\overline{a}$ und den Mittelwert aller Zahlen in der j-ten Spalte mit $\overline{a}_j$, so dass

$$\overline{a} = \frac{1}{mn}\sum_{r=1}^{m}\sum_{s=1}^{n} a_{rs}, \qquad \overline{a}_j = \frac{1}{m}\sum_{r=1}^{m} a_{rj}$$

Beweisen Sie, dass

$$\sum_{r=1}^{m}\sum_{s=1}^{m}(a_{rj} - \overline{a})(a_{sj} - \overline{a}) = m^2(\overline{a}_j - \overline{a})^2 \qquad (*)$$

3.4 Einige Aspekte der Logik

Wir haben die Bedeutung der mathematischen Modelle in den empirischen Wissenschaften und besonders in den Wirtschaftswissenschaften betont. Je komplizierter die zu beschreibenden Phänomene sind, desto wichtiger ist es, exakt zu sein. Fehler in Modellen, die in praktischen Situationen angewendet werden, können katastrophale Konsequenzen haben. Zum Beispiel musste in den Frühphasen des U.S.-Raumfahrtprogramms eine Rakete, deren Herstellung Millionen von Dollar gekostet hatte, nur wenige Sekunden nach dem Start zerstört werden, weil in dem Computerprogramm zur Kontrolle des Steuerungssystems ein Semikolon fehlte. Ein aktuelleres Beispiel ist der „Mars lander", der zu Beginn des Jahres 2000 wegen einer Verwechslung zwischen dem metrischen und dem U.S.-Maßsystem ausbrannte.

Auch wenn die Konsequenzen weniger dramatisch sind, passieren Fehler in der mathematischen Schlussweise leicht. Hier folgt ein einfaches Beispiel, wie ein Studierender (oder sogar ein Professor) fehlerhafte Logik benutzen könnte und damit zu einer falschen Lösung eines Problems käme.

Beispiel 1

Finden Sie eine mögliche Lösung für die Gleichung

$$x + 2 = \sqrt{4 - x}$$

„Lösung“: Indem man jede Seite der Gleichung quadriert, erhält man $(x + 2)^2 = (\sqrt{4 - x})^2$ und damit $x^2 + 4x + 4 = 4 - x$. Indem man diese letzte Gleichung umordnet, erhält man $x^2 + 5x = 0$. Indem man x kürzt, hat man $x + 5 = 0$ und daher $x = -5$.

Nach dieser Schlussfolgerung sollte die Antwort $x = -5$ sein. Wir wollen dies überprüfen. Für $x = -5$, haben wir $x + 2 = -3$. Jedoch ist $\sqrt{4 - x} = \sqrt{9} = 3$, so dass diese Antwort falsch ist. (Merken Sie sich, wie weise es ist, die Probe zu machen, wann immer Sie glauben, eine Gleichung gelöst zu haben.)

Dieses Beispiel zeigt die Gefahren von Routineberechnungen ohne gründliches Nachdenken auf. Es wird vielleicht leichter, ähnliche Fehler zu vermeiden, nachdem Sie die Struktur solcher logischer Schlussweisen gründlicher studiert haben.

Aussagen

Behauptungen, die entweder wahr oder falsch sind, heißen **Aussagen**. Die meisten der Aussagen in diesem Buch sind mathematische Aussagen. Andere Arten von Aussagen treten im täglichen Leben auf. „Alle Individuen, die atmen, sind lebendig“ ist ein Beispiel einer wahren Aussage, während „alle Individuen, die atmen, sind gesund“ eine falsche Aussage ist. Beachten Sie: Wenn die Worte in der Formulierung solch einer Aussage keine präzise Bedeutung besitzen, wird es oft schwierig sein, zu entscheiden, ob die Aussage wahr oder falsch ist. Zum Beispiel ist die Ausage „67 ist eine große Zahl“ weder wahr noch falsch ohne präzise Definition einer „großen Zahl“.

Nehmen Sie an, dass eine Aussage, wie „$x^2 - 1 = 0$“, eine oder mehrere Variablen enthält. Indem wir verschiedene reelle Zahlen für die Variable x einsetzen, können wir viele verschiedene Aussagen erzeugen, von denen einige wahr und einige falsch sind. Aus diesem Grunde sagen wir, dass solch eine Aussage eine **offene Aussage** ist. Es zeigt sich, dass die Aussage $x^2 - 1 = 0$ wahr ist für $x = 1$ oder -1, aber sonst nicht. Deshalb ist eine offene Aussage nicht einfach wahr oder falsch. Sie ist weder wahr noch falsch, solange wir keinen speziellen Wert für die Variable wählen.

Implikationen

Um in jedem Schritt einer Kette von logischen Schlüssen die Übersicht zu behalten, ist es oft hilfreich, Implikations-Pfeile (Folge-Pfeile) zu verwenden.

Nehmen Sie an, P und Q seien zwei Aussagen, so dass gilt: Wenn P wahr ist, so ist notwendig auch Q wahr. In diesem Fall schreiben wir gewöhnlich

$$P \implies Q \tag{$*$}$$

Dies wird gelesen als „P impliziert Q“ oder „wenn P, dann auch Q“, oder „Q ist eine Folgerung aus P.“ Andere Möglichkeiten, dieselbe Implikation auszudrücken, sind u. a. „Q, wenn P“, „P nur, wenn Q“ und „Q ist eine Implikation (Folgerung) von P“. Das Symbol $\implies$ ist ein **Implikations-Pfeil** (Folge-Pfeil) und der Pfeil zeigt in die Richtung der logischen Implikation. Es folgen einige Beispiele korrekter Implikationen.

Beispiel 2

(a) $x > 2 \implies x^2 > 4$

(b) $xy = 0 \implies x = 0$ oder $y = 0$

(c) x ist ein Quadrat $\implies$ x ist ein Rechteck

(d) x ist eine gesunde Person $\implies$ x atmet leicht

Beachten Sie, dass das Wort „oder“ in der Mathematik das „einschließende (inklusive) oder“ bedeutet, d. h. „P oder Q“ schließt den Fall ein, in dem P und Q beide wahr sind.

Alle Aussagen vor und nach dem Implikationspfeil in Beispiel 2 sind offene Aussagen, genauso wie die meisten Aussagen in der Mathematik. Eine Implikation $P \implies Q$ bedeutet, dass für jeden Wert einer Variablen, für den P wahr ist, auch Q wahr ist.

In manchen Fällen, in denen die Implikation ($*$) wahr ist, kann es auch möglich sein, einen logischen Schluss in die andere Richtung zu ziehen:

$$Q \implies P$$

In solchen Fällen können wir beide Implikationen zusammen in einer einzigen **logischen Äquivalenz** schreiben:

$$P \iff Q$$

Wir sagen dann, dass „P äquivalent zu Q“ ist. Weil beide Aussagen „P, wenn Q“ und „P nur, wenn Q“ wahr sind, sagen wir auch „P dann und nur dann, wenn Q“, das im Englischen oft als „P iff Q“ (if and only if) geschrieben wird. Das Symbol $\iff$ ist ein **Äquivalenz-Pfeil.**

Wir sehen, dass in Beispiel 2 der Implikations-Pfeil in (b) durch einen Äquivalenz-Pfeil ersetzt werden kann, weil auch die folgende Aussage wahr ist: $x = 0$ oder $y = 0$ impliziert, dass $xy = 0$ gilt. Beachten Sie jedoch, dass keine andere Implikation in Beispiel 2 durch einen Äquivalenz-Pfeil ersetzt werden kann. Denn, wenn x^2 größer als 4 ist, ist es nicht notwendig wahr, dass x größer als 2 ist (z. B. könnte x gleich -3 sein); auch ist ein Rechteck nicht notwendig ein Quadrat; und schließlich, wenn Person x leicht atmet, bedeutet dies nicht, dass x gesund ist.

Notwendige und hinreichende Bedingungen

Es gibt andere allgemein übliche Ausdrucksweisen dafür, dass die Aussage P die Aussage Q impliziert oder dass P äquivalent zu Q ist. Daher sagen wir, wenn die Aussage P die Aussage Q impliziert, P ist eine „hinreichende Bedingung“ für Q, d. h.: damit Q wahr ist, reicht es, dass P wahr ist. Dementsprechend gilt: Wenn wir wissen, dass P gilt, dann ist es sicher, dass auch Q gilt. In diesem Fall sagen wir, dass Q eine „notwendige Bedingung“ für P ist, denn Q muss notwendigerweise wahr sein, wenn P wahr ist. Daher gilt:

P ist eine **hinreichende Bedingung** für Q bedeutet:	$P \implies Q$
Q ist eine **notwendige Bedingung** für P bedeutet:	$P \implies Q$

Wenn wir die Implikation in Beispiel 2 (c) in dieser Weise formulierten, hieße es:

Eine hinreichende Bedingung dafür, dass x ein Rechteck ist, wäre,
dass x ein Quadrat ist.
oder
Eine notwendige Bedingung dafür, dass x ein Quadrat ist, wäre,
dass x ein Rechteck ist.

Der entsprechende verbale Ausdruck für $P \iff Q$ ist einfach: *P ist eine notwendige und hinreichende Bedingung für Q.*

Es ist nach dem Vorangehenden wohl selbstverständlich, dass es sehr wichtig ist, zwischen den Aussagen, „P ist eine notwendige Bedingung für Q“ (d. h. $Q \implies P$) und „P ist eine hinreichende Bedingung für Q“ (d. h. $P \implies Q$) zu unterscheiden. Um es auf den Punkt zu bringen, betrachten Sie die zwei Aussagen:

Atmung ist eine notwendige Bedingung für eine Person, um gesund zu sein.

Atmung ist eine hinreichende Bedingung für eine Person, um gesund zu sein.

Die erste ist sicherlich wahr. Die zweite jedoch ist falsch, weil auch kranke Menschen noch atmen.

Auf den folgenden Seiten werden wir wiederholt von notwendigen und hinreichenden Bedingungen sprechen. Das Verständnis dieser und die Unterscheidung zwischen diesen beiden Bedingungen ist eine notwendige Bedingung für das Verständnis vieler ökonomischer Analysen. Es ist jedoch bei weitem keine hinreichende Bedingung.

Das Lösen von Gleichungen

Implikations- und Äquivalenz-Pfeile sind sehr nützlich, um Fehler beim Lösen von Gleichungen zu vermeiden. Betrachten Sie zunächst das folgende Beispiel.

Beispiel 3

Finden Sie alle x, so dass $(2x-1)^2 - 3x^2 = 2\left(\frac{1}{2} - 4x\right)$ ist.

Lösung: Indem man $(2x-1)^2$ und auch die rechte Seite ausmultipliziert, erhält man eine neue Gleichung, die offensichtlich dieselben Lösungen hat wie die ursprüngliche Gleichung:

$$(2x-1)^2 - 3x^2 = 2\left(\tfrac{1}{2} - 4x\right) \iff 4x^2 - 4x + 1 - 3x^2 = 1 - 8x$$

Indem man $8x - 1$ zu jeder Seite der zweiten Gleichung addiert, erhält man den äquivalenten Ausdruck

$$4x^2 - 4x + 1 - 3x^2 = 1 - 8x \iff x^2 + 4x = 0$$

Nun ist $x^2 + 4x = x(x+4)$, und der letzte Ausdruck ist genau dann 0, wenn $x = 0$ oder $x = -4$ ist. Das heißt

$$x^2 + 4x = 0 \iff x(x+4) = 0 \iff x = 0 \quad \text{oder} \quad x = -4$$

Wenn wir alles zusammen betrachten, haben wir eine Kette von Äquivalenzpfeilen erhalten, die zeigt, dass die gegebene Gleichung für die zwei Werte $x = 0$ und $x = -4$ erfüllt ist und für keine anderen Werte von x.

Beispiel 4

Finden Sie alle x, so dass $x + 2 = \sqrt{4-x}$. (Siehe Beispiel 1.)

Lösung: Quadrieren beider Seiten der gegebenen Gleichung ergibt:

$$(x+2)^2 = \left(\sqrt{4-x}\right)^2$$

Folglich ist $x^2 + 4x + 4 = 4 - x$, d. h. $x^2 + 5x = 0$. Aus der letzten Gleichung folgt:

$$x(x+5) = 0 \quad \text{woraus folgt} \quad x = 0 \;\text{ oder }\; x = -5$$

Damit ist es eine notwendige Bedingung dafür, dass x eine Lösung von $x + 2 = \sqrt{4-x}$ ist, dass $x = 0$ oder $x = -5$ ist. Wenn wir diese beiden möglichen Werte für x in die Originalgleichung einsetzen, sehen wir, dass nur $x = 0$ die Gleichung erfüllt. Die einzige Lösung der Gleichung ist daher $x = 0$.

Warum war es in Beispiel 1 nötig, zu prüfen, ob die gefundenen Werte tatsächlich die Gleichung lösen, während diese Probe in Beispiel 3 nicht nötig war? Um diese Frage zu beantworten, müssen wir die logische Struktur unseres Lösungsweges zu Beispiel 1 untersuchen. Wenn wir mit Buchstaben versehene Implikations-Pfeile benutzen, können wir die Lösung wie folgt beschreiben:

$$x + 2 = \sqrt{4-x} \overset{(a)}{\Longrightarrow} (x+2)^2 = 4 - x \overset{(b)}{\Longrightarrow} x^2 + 4x + 4 = 4 - x$$
$$\overset{(c)}{\Longrightarrow} x^2 + 5x = 0 \overset{(d)}{\Longrightarrow} x(x+5) = 0 \overset{(e)}{\Longrightarrow} x = 0 \;\text{ oder }\; x = -5$$

Die Implikation (a) ist wahr (weil gilt: $a = b \Longrightarrow a^2 = b^2$ und $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$). *Es ist jedoch wichtig zu beachten, dass diese Implikation nicht durch eine Äquivalenz ersetzt werden kann.* Wenn $a^2 = b^2$, dann ist entweder $a = b$ oder $a = -b$; es muss nicht wahr sein, dass $a = b$ gilt. Die Implikationen (b), (c), (d) und (e) sind auch alle wahr und darüberhinaus hätten sie alle als Äquivalenzen geschrieben werden können, obwohl dies nicht nötig ist, um die Lösung zu finden. Wir haben also eine Kette von Implikationen erhalten, die von der Gleichung $x + 2 = \sqrt{4 - x}$ zu der Aussage „$x = 0$ oder $x = -5$" führt. Da die Implikation (a) nicht umgekehrt werden kann, gibt es keine Kette von Implikationen in die umgekehrte Richtung. Wir haben herausgefunden: Wenn eine Zahl x die Gleichung $x + 2 = \sqrt{4 - x}$ erfüllt, dann muss x entweder 0 oder -5 sein; kein anderer Wert kann die gegebene Gleichung erfüllen. Wir haben jedoch bisher nicht gezeigt, dass einer der Werte 0 oder -5 tatsächlich die Gleichung erfüllt. Bevor wir nicht 0 und -5 in die Gleichung eingesetzt haben, können wir nicht sehen, dass nur $x = 0$ eine Lösung ist. *Beachten Sie, dass in diesem Fall die Probe, die wir vorgeschlagen haben, nicht nur dazu dient, unsere Berechnungen zu überprüfen, sie ist in diesem Fall auch eine logische Notwendigkeit.*

Wenn wir auf Beispiel 1 zurückschauen, erkennen wir jetzt, dass wir dort zwei Fehler begangen haben. Erstens ist die Implikation $x^2 + 5x = 0 \Rightarrow x + 5 = 0$ falsch, weil $x = 0$ auch eine Lösung von $x^2 + 5x = 0$ ist. Zweitens ist es logisch notwendig, zu überprüfen, ob 0 oder -5 tatsächlich die Gleichung erfüllen.

Die zur Lösung des Beispiels 4 angewendete Methode ist die am meisten gebräuchliche Methode. Es wird zunächst eine Kette von Implikationen aufgestellt, die mit der gegebenen Gleichung startet und mit allen möglichen Lösungen endet. Indem wir jeden dieser möglichen Lösungswerte überprüfen, finden wir heraus, welche von ihnen tatsächlich die Gleichung erfüllen. Selbst dann, wenn die Kette von Implikationen auch eine Kette von Äquivalenzen ist, ist solch eine Probe eine nützliche Überprüfung sowohl der Logik als auch der Berechnungen.

Aufgaben für Kapitel 3.4

1. Implikationen und Äquivalenzen können auf Arten ausgedrückt werden, die sich von den bereits erwähnten unterscheiden. Stellen Sie die logischen Schlüsse in den folgenden Aussagen mit Hilfe der Implikations- oder Äquivalenz-Pfeile dar.

(a) Die Gleichung $2x - 4 = 2$ ist nur erfüllt, wenn $x = 3$.

(b) Wenn $x = 3$ ist, dann ist $2x - 4 = 2$.

(c) Die Gleichung $x^2 - 2x + 1 = 0$ ist erfüllt, wenn $x = 1$ ist.

(d) Wenn $x^2 > 4$ ist, dann ist $|x| > 2$ und umgekehrt.

2. Lösen Sie die Gleichung $\dfrac{(x+1)^2}{x(x-1)} + \dfrac{(x-1)^2}{x(x+1)} - 2\dfrac{3x+1}{x^2-1} = 0$.

3. Betrachten Sie die folgenden sechs Implikationen und entscheiden Sie in jedem Fall, (i) ob die Implikation wahr ist und (ii) ob die umgekehrte Implikation wahr ist. (x, y und z seien reelle Zahlen.)

(a) $x = 2$ und $y = 5 \Longrightarrow x + y = 7$

(b) $(x-1)(x-2)(x-3) = 0 \Longrightarrow x = 1$

(c) $x^2 + y^2 = 0 \Longrightarrow x = 0$ oder $y = 0$

(d) $x = 0$ und $y = 0 \Longrightarrow x^2 + y^2 = 0$

(e) $xy = xz \Longrightarrow y = z$

(f) $x > y^2 \Longrightarrow x > 0$

4. Betrachten Sie die Aussage $2x + 5 \geq 13$.

(a) Ist die Bedingung $x \geq 0$ notwendig, hinreichend oder beides notwendig und hinreichend, damit die Ungleichung erfüllt ist?

(b) Beantworten Sie dieselbe Frage, wenn $x \geq 0$ ersetzt wird durch $x \geq 50$.

(c) Beantworten Sie dieselbe Frage, wenn $x \geq 0$ ersetzt wird durch $x \geq 4$.

5. Lösen Sie die folgenden Gleichungen:

(a) $x + 2 = \sqrt{4x + 13}$

(b) $|x + 2| = \sqrt{4 - x}$

(c) $x^2 - 2|x| - 3 = 0$

6. Lösen Sie die folgenden Gleichungen:

(a) $\sqrt{x-4} = \sqrt{x+5} - 9$

(b) $\sqrt{x-4} = 9 - \sqrt{x+5}$

7. Füllen Sie die leeren Rechtecke aus mit „dann und nur dann“, wenn dies zu einer wahren Aussage führt. Schreiben Sie alternativ „wenn“ oder „nur wenn“.

(a) $x = \sqrt{4}$ $\boxed{}$ $x = 2$

(b) $x(x+3) < 0$ $\boxed{}$ $x > -3$

(c) $x^2 < 9$ $\boxed{}$ $x < 3$

(d) $x(x^2 + 1) = 0$ $\boxed{}$ $x = 0$

(e) $x^2 > 0$ $\boxed{}$ $x > 0$

(f) $x^4 + y^4 = 0$ $\boxed{}$ $x = 0$ oder $y = 0$

8. Betrachten Sie den folgenden Versuch, die Gleichung $x + \sqrt{x+4} = 2$ zu lösen: „Es folgt aus der gegebenen Gleichung, dass $\sqrt{x+4} = 2 - x$. Quadrieren beider Seiten ergibt $x+4 = 4-4x+x^2$. Nach Umordnen der Terme erkennt man, dass diese Gleichung $x^2 - 5x = 0$ impliziert. Indem wir x kürzen, erhalten wir $x - 5 = 0$, und diese Gleichung ist erfüllt, wenn $x = 5$.“

(a) Kennzeichnen Sie mit Pfeilen die Implikationen oder Äquivalenzen, die in dem Text ausgedrückt werden. Welche von ihnen sind korrekt?

(b) Geben Sie eine Lösung zu dieser Gleichung.

Anspruchsvollere Aufgabe

9. Wenn P eine Aussage ist, so wird die *Negation* von P mit $\neg P$ bezeichnet. Wenn P wahr ist, dann ist $\neg P$ falsch und umgekehrt. Zum Beispiel ist die Negation der Aussage $2x + 3y \leq 8$ gegeben durch $2x + 3y > 8$. Formulieren Sie für jede der 6 folgenden Aussagen die Negation so einfach wie möglich.

(a) $x \geq 0$ und $y \geq 0$.

(b) Alle x erfüllen $x \geq a$.

(c) Weder x noch y ist kleiner als 5.

(d) Für jedes $\varepsilon > 0$, existiert ein $\delta > 0$ so dass B erfüllt ist.

(e) Jeder mag Katzen.

(f) Jeder liebt jemanden einige Zeit.

3.5 Mathematische Beweise

In allen Bereichen der Mathematik werden die wichtigsten Resultate **Theoreme** oder *Sätze* genannt. Die Konstruktion logisch einwandfreier Beweise kann oft sehr kompliziert sein. Zum Beispiel behauptet das „Vierfarben-Theorem“, dass jede Landkarte in der Ebene höchstens vier Farben benötigt, um alle angrenzenden Regionen in verschiedenen Farben darstellen zu können. Der Beweis verlangt, dass Hunderttausende von verschiedenen Fällen überprüft werden müssen, eine Aufgabe, die unmöglich ist ohne ein hochentwickeltes Computer-Programm.

In diesem Buch lassen wir oft formale Beweise von Theoremen weg. Stattdessen legen wir den Schwerpunkt darauf, einen guten intuitiven Hintergrund zu vermitteln über das, was die Theoreme uns sagen wollen. Obwohl Beweise keinen großen Platz einnehmen in diesem Buch, ist es dennoch nützlich, einiges über die verschiedenen Beweismethoden in der Mathematik zu wissen.

Jedes mathematische Theorem kann als Implikation formuliert werden

$$P \Longrightarrow Q \tag{$*$}$$

wobei P eine Aussage oder eine Reihe von Aussagen darstellt, die *Voraussetzungen* (Prämissen, „das, was wir wissen“) genannt werden und Q ist eine oder eine Reihe von Aussagen, die *(Schluss-)Folgerungen* („das, was wir wissen wollen“) genannt werden.

Gewöhnlich ist es der natürliche Weg ein Resultat der Art $(*)$ zu beweisen, indem man mit den Voraussetzungen P beginnt und sich nach und nach zu den Folgerungen Q vorarbeitet. Wir nennen diese Vorgehensweise einen **direkten Beweis**. Manchmal ist es jedoch vorteilhafter, die Implikation $P \Longrightarrow Q$ durch einen **indirekten Beweis** zu beweisen. In diesem Fall beginnen wir mit der Annahme, dass Q nicht wahr ist und zeigen dann auf dieser Grundlage, dass P auch nicht wahr sein kann. Dies ist völlig legitim, da die folgende Äquivalenz gilt:

$$P \Longrightarrow Q \qquad \text{ist äquivalent zu} \qquad \textit{Nicht } Q \Longrightarrow \textit{Nicht } P$$

Es ist hilfreich, diese logische Regel in einem konkreten Anwendungsfall zu betrachten:

> „Wenn es regnet, wird das Gras nass.“

drückt genau dasselbe aus wie

> „Wenn das Gras nicht nass wird, dann regnet es nicht.“

Beispiel 1

Benutzen Sie die zwei Beweismethoden, um zu zeigen, dass gilt:
$-x^2 + 5x - 4 > 0 \Longrightarrow x > 0$.

Lösung:

(a) *Direkter Beweis:* Sei $-x^2 + 5x - 4 > 0$. Addition von $x^2 + 4$ zu jeder Seite ergibt $5x > x^2 + 4$. Weil $x^2 + 4 \geq 4$ ist für alle x, folgt $5x > 4$ und damit $x > 4/5$. Insbesondere ist dann $x > 0$.

(b) *Indirekter Beweis:* Sei $x \leq 0$. Dann ist $5x \leq 0$ und damit ist $-x^2 + 5x - 4$ als Summe von drei nichtpositiven Termen ≤ 0.

Deduktive und induktive Schlussfolgerung

Die zwei gerade vorgestellten Beweismethoden sind Beispiele der *deduktiven Schlussweise*, d. h. Schlussweisen, die auf konsistenten Regeln der Logik beruhen. Im Gegensatz dazu benutzen viele Zweige der Wissenschaft *induktive Schlussweisen*. Dabei werden allgemeine Schlüsse gezogen, die nur auf wenigen (manchmal auch vielen) Beobachtungen beruhen. Die Aussage „das Preisniveau hat in den letzten n Jahren in jedem Jahr zugenommen, deshalb wird es im nächsten Jahr auch zunehmen“ ist ein Beispiel einer induktiven Schlussweise. Diese induktive Vorgehensweise ist dennoch von fundamentaler Bedeutung in den experimentellen und empirischen Wissenschaften trotz der Tatsache, dass darauf beruhende Schlussfolgerungen niemals absolut sicher sind. In der Tat erweisen sich solche Beispiele induktiver Schlussweisen (oder der implizierten Vorhersagen) in den Wirtschaftswissenschaften oft im Nachhinein als falsch.

In der Mathematik ist induktive Schlussweise nicht als Beweismethode anerkannt. Nehmen Sie an, dass Studierende in einem Geometrie-Kurs zeigen sollen, dass die Summe der Winkel in einem Dreieck immer 180 Grad ist. Wenn sie gewissenhaft so genau wie möglich 1000 Dreiecke ausmessen und zeigen, dass in jedem Fall die Summe der Winkel 180 ist, würde das nicht als Beweis für diese Behauptung gelten. Es würde ein sehr gutes Anzeichen dafür sein, dass die Behauptung wahr ist, aber es ist kein mathematischer Beweis. Ebenso ist in der Betriebswirtschaft die Tatsache, dass die Gewinne eines Unternehmens in jedem der letzten 20 Jahren angestiegen sind, keine Garantie dafür, dass sie auch in diesem Jahr wieder steigen werden.

Aufgaben für Kapitel 3.5

1. Betrachten Sie die folgende (zweifelhafte) Aussage: „Wenn die Inflation steigt, fällt die Arbeitslosigkeit.“ Welche der folgenden Aussagen sind äquivalent zu der gegebenen?

(a) Damit die Arbeitslosigkeit fällt, muss die Inflation steigen.

(b) Eine hinreichende Bedingung für das Fallen der Arbeitslosigkeit ist, dass die Inflation steigt.

(c) Arbeitslosigkeit kann nur fallen, wenn die Inflation steigt.

(d) Wenn die Arbeitslosigkeit nicht fällt, steigt die Inflation nicht.

(e) Eine notwendige Bedingung für das Steigen der Inflation ist das Fallen der Arbeitslosigkeit.

2. Analysieren Sie die folgende Grabinschrift: (a) mit Hilfe der Logik; (b) von einem poetischen Gesichtspunkt aus.

Diejenigen, die ihn kannten, liebten ihn.
Diejenigen, die ihn nicht liebten, kannten ihn nicht.

3. Zeigen Sie durch einen indirekten Beweis: Wenn x und y ganze Zahlen sind und xy eine ungerade Zahl ist, dann sind x und y beide ungerade.

3.6 Wesentliches aus der Mengenlehre

Im täglichen Leben fassen wir ständig Objekte derselben Art zu Gruppen zusammen. Zum Beispiel sprechen wir von dem Lehrkörper einer Fakultät einer Universität und meinen damit alle lehrenden Mitglieder des akademischen Personals. Ein Garten besteht aus allen Pflanzen, die darin wachsen. Wir sprechen von den schottischen Firmen mit mehr als 300 Beschäftigten, allen Steuerzahlern in Deutschland, die 1998 zwischen 50 000 und 100 000 DM verdient haben. In allen Fällen haben wir eine Vereinigung von Objekten, betrachtet als ein Ganzes. In der Mathematik nennen wir solch eine Vereinigung eine **Menge** und ihre Objekte heißen **Elemente** oder ihre **Mitglieder**.

Wie wird eine Menge spezifiziert? Die einfachste Methode ist es, alle Mitglieder in irgendeiner Reihenfolge zwischen den zwei Klammern { und } aufzulisten. Ein Beispiel ist die Menge $S = \{a, b, c\}$, deren Mitglieder die drei ersten Buchstaben im Alphabet sind. Oder es könnte eine Menge sein, die aus drei Mitgliedern besteht, die durch die Buchstaben a, b und c repräsentiert werden. Zum Beispiel, wenn $a = 0$, $b = 1$ und $c = 2$ ist, dann ist $S = \{0, 1, 2\}$. Außerdem bezeichnet S die Menge der Wurzeln der kubischen Gleichung $(x - a)(x - b)(x - c) = 0$ in der Unbekannten x, wobei a, b und c drei beliebige reelle Zahlen sind.

Zwei Mengen A und B werden als **gleich** betrachtet, wenn jedes Element aus A ein Element von B und jedes Element von B ein Element von A ist. In diesem Fall schreiben wir $A = B$. Das bedeutet, dass die zwei Mengen aus genau denselben Elementen bestehen. Folglich ist $\{1, 2, 3\} = \{3, 2, 1\}$, weil die Reihenfolge, in der die Elemente aufgelistet sind, keine Bedeutung hat. Ferner ist $\{1, 1, 2, 3\} = \{1, 2, 3\}$, weil eine Menge sich nicht ändert, wenn einige Elemente mehrfach aufgelistet sind.

Nehmen Sie jetzt an, dass Sie in ein Restaurant zum Essen gehen, das eine Auswahl von mehreren Hauptgerichten anbietet. Vier Gerichte stehen zur Auswahl – Fisch, Pasta, Omelett und Huhn. Dann hat die *zulässige Menge F* der verfügbaren Gerichte diese vier Mitglieder und ist vollständig bestimmt durch

$$F = \{\text{Fisch, Pasta, Omelett, Huhn}\}$$

Beachten Sie, dass die Reihenfolge, in der die Gerichte aufgelistet sind, keine Bedeutung hat. Die Menge F bleibt dieselbe, auch wenn Sie die Reihenfolge der Gerichte auf der Speisekarte vertauschen.

Spezifikation einer Eigenschaft

Nicht jede Menge kann definiert werden, indem man alle ihre Mitglieder auflistet. Ein Grund dafür ist, dass manche Mengen unendlich sind, d. h. sie enthalten unendlich viele Mitglieder.

Und solche unendlichen Mengen kommen in der Tat sehr oft in den Wirtschaftswissenschaften vor. Betrachten Sie z. B. die *Budget-Menge*, die in der Konsumforschung auftritt. Nehmen Sie an, es gebe zwei Güter, deren Mengen mit x und y bezeichnet seien. Eine Einheit dieser Güter könne zu Preisen p bzw. q gekauft werden. Ein Konsumbündel (x, y) ist ein Paar von Mengen dieser zwei Güter. Der Wert dieses Bündels zu Preisen p und q ist $px+qy$. Nehmen Sie an, dass ein Verbraucher einen Betrag m für den Kauf dieser beiden Güter zur Verfügung hat. Dann ist die *Budget-Beschränkung* $px + qy \leq m$ (unter der Annahme, dass der Verbraucher die Freiheit hat, weniger auszugeben). Wenn man ferner akzeptiert, dass die Mengen, die von jedem Gut konsumiert werden, nicht negativ sein müssen, dann besteht die *Budget-Menge*, die mit B bezeichnet werden soll, aus denjenigen Konsumbündeln (x, y), die die drei Ungleichungen $px + qy \leq m$, $x \geq 0$ und $y \geq 0$ erfüllen. (Die Menge B ist in Abb. 4.4.12 gezeigt.) Die Standardnotation für solch eine Menge ist

$$B = \{(x, y): px + qy \leq m,\ \ x \geq 0,\ \ y \geq 0\} \tag{1}$$

Die Klammern { } werden weiterhin gebraucht und bedeuten „die Menge bestehend aus“. Anstatt alle Mitglieder aufzulisten, was unmöglich ist für die unendliche Menge der Punkte in der dreieckigen Budget-Menge B, wird die Menge in zwei Teilen definiert. Links vom Doppelpunkt gibt (x, y) die Gestalt eines typischen Mitglieds der Menge B an, hier ein Konsumbündel, das genauer angegeben wird durch die jeweiligen Mengen der zwei Güter. Rechts vom Doppelpunkt werden die drei Eigenschaften, die diese typischen Mitglieder erfüllen müssen, aufgelistet und dadurch wird die Menge dann spezifiziert. Dies ist ein Beispiel der allgemeinen Spezifikation:

$$S = \{\text{Typisches Mitglied : definierende Eigenschaften}\}$$

Beachten Sie, dass es nicht nur unendliche Mengen sind, die durch ihre Eigenschaften spezifiziert werden können – endliche Mengen können auch auf diese Weise spezifiziert werden. Tatsächlich *müssen* einige endliche Mengen auf diese Art definiert werden, wie z. B. die Menge aller Menschen, die gegenwärtig leben.

Elemente einer Menge

Wie bereits gesagt, enthalten Mengen Mitglieder oder Elemente. Es gibt eine Standardnotation, die die Beziehung zwischen einer Menge und ihren Mitgliedern beschreibt. Zunächst bedeutet

$$x \in S$$

dass x *ein Element von* S ist. Beachten Sie das spezielle Symbol $\in$ (welches eine Variante des griechischen Buchstaben ϵ oder „epsilon“ ist).

Um auszudrücken, dass x *kein* Mitglied von S ist, schreiben wir $x \notin S$. Zum Beispiel $d \notin \{a, b, c\}$ bedeutet: d ist kein Element der Menge $\{a, b, c\}$.

Zur weiteren Illustration der Notation zur Mengenmitgliedschaft kehren wir zu dem Beispiel mit den Hauptgerichten zurück. Konfrontiert mit der Wahl aus der Menge $F = \{\text{Fisch, Pasta, Omelette, Huhn}\}$ bezeichne s Ihre aktuelle Wahl. Dann gilt natürlich $s \in F$. Dies ist es, was wir meinen mit „zulässiger Menge" – es ist nur möglich ein Mitglied aus dieser Menge zu wählen und nichts anderes (nichts außerhalb dieser Menge).

A und B seien zwei beliebige Mengen. Dann ist A eine **Teilmenge** von B, wenn jedes Element von A auch ein Element von B ist. Wir schreiben dann $A \subseteq B$. Insbesondere gilt $A \subseteq A$. Aus den Definitionen folgt, dass $A = B$ genau dann gilt, wenn $A \subseteq B$ und $B \subseteq A$.

Mengenoperationen

Mengen können in vielen verschiedenen Weisen kombiniert werden. Besonders wichtig sind die drei Operationen: Vereinigung, Durchschnitt und Differenz von Mengen, wie in Tabelle 1 gezeigt wird.

Notation	Name	Die Menge besteht aus
$A \cup B$	A **Vereinigung** B	den Elementen, die zu wenigstens einer der Mengen A und B gehören.
$A \cap B$	A **Durchschnitt** B	den Elementen, die zu A und B gehören.
$A \setminus B$	A **minus** B	den Elementen, die zu A, aber nicht zu B gehören.

Tabelle 1

Daher gilt:

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ oder } x \in B\}$$
$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ und } x \in B\}$$
$$A \setminus B = \{x : x \in A \text{ und } x \notin B\}$$

Beispiel 1

Es sei $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ und $B = \{3, 6\}$. Bestimmen Sie $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ und $B \setminus A$.

Lösung: $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A \cap B = \{3\}$, $A \setminus B = \{1, 2, 4, 5\}$, $B \setminus A = \{6\}$.

Ein ökonomisches Beispiel erhalten wir, wenn wir Steuerzahler in Utopia im Jahre 2001 betrachten. A sei die Menge all derjenigen Steuerzahler, die ein Einkommen von wenigstens 15 000 und sei B die Menge all derjenigen, die einen Nettowert von wenigstens 150 000 haben. Dann wäre $A \cup B$ die Menge derjenigen Steuerzahler, die wenigstens 15 000 verdient haben oder die einen Nettowert von wenigstens 150 000 hatten, während $A \cap B$ diejenigen Steuerzahler sind, die wenigstens 15 000 verdienten und die auch einen Nettowert von wenigstens 150 000 hatten. Schließlich wäre $A \setminus B$ die Menge derjenigen, die wenigstens 15 000 verdienten, aber weniger als 150 000 Netto hatten.

Wenn zwei Mengen A und B keine gemeinsamen Elemente haben, sagt man, sie seien **disjunkt**. Das Symbol „$\emptyset$" bezeichnet die Menge, die keine Elemente enthält. Sie heißt die **leere Menge**. Daher sind die Mengen A und B genau dann disjunkt, wenn $A \cap B = \emptyset$.

Eine Ansammlung von Mengen wird oft als **Familie** von Mengen bezeichnet. Wenn man eine bestimmte Familie von Mengen betrachtet, ist es meistens natürlich daran zu denken, dass jede Menge in dieser Familie eine Teilmenge einer speziellen festen Menge Ω ist, die wir ab jetzt als **Grundmenge** bezeichnen. In dem vorangehenden Beispiel wäre die Menge aller Steuerzahler in Utopia im Jahre 2001 die offensichtliche Wahl einer Grundmenge.

Wenn A eine Teilmenge der Grundmenge Ω ist, dann ist $\Omega \setminus A$ nach der Definition der Differenz (von Mengen) die Menge derjenigen Elemente von Ω, die nicht zu A gehören. Diese Menge heißt das **Komplement** von A in Ω und wird manchmal mit $\mathscr{C}A$ bezeichnet, so dass $\mathscr{C}A = \Omega \setminus A$. Andere Notationen für das Komplement von A sind u. a. A^c und $\tilde{A}$.

Wenn man die Notation $\mathscr{C}A$ oder irgendeine äquivalente Bezeichnungsweise benutzt, ist es wichtig, darüber im Klaren zu sein, bezüglich welcher Grundmenge Ω das Komplement gebildet werden soll.

Beispiel 2

Die Grundmenge Ω sei die Menge aller Studierenden einer bestimmten Universität. Ferner sei F die Menge der weiblichen Studierenden, M die Menge aller Mathematik-Studierenden, C die Menge der Studierenden, die im Universitätschor sind, B die Menge aller Biologie-Studierenden und T die Menge aller Tennisspieler. Beschreiben Sie die folgenden Mengen: $\Omega \setminus M$, $M \cup C$, $F \cap T$, $M \setminus (B \cap T)$, and $(M \setminus B) \cup (M \setminus T)$.

Lösung: $\Omega \setminus M$ besteht aus denjenigen Studierenden, die nicht Mathematik studieren, $M \cup C$ aus denjenigen Studierenden, die Mathematik studieren und/oder im Chor sind. Die Menge $F \cap T$ besteht aus denjenigen weiblichen Studierenden, die Tennis spielen. Die Menge $M \setminus (B \cap T)$ enthält diejenigen Mathematik-Studierenden, die nicht sowohl Biologie studieren als auch Tennis spielen. Schließlich enthält die letzte Menge $(M \setminus B) \cup (M \setminus T)$ diejenigen Studierenden, die entweder Mathematik, aber nicht Biologie studieren, oder Mathematik studieren, aber nicht Tennis spielen. Sehen Sie, dass die beiden letzten Mengen gleich sind. (Für beliebige Mengen M, B und T gilt: $(M \setminus B) \cup (M \setminus T) = M \setminus (B \cap T)$. Es wird einfacher sein, diese Gleichheit zu verifizieren, wenn Sie die folgende Diskussion der Venn-Diagramme gelesen haben.)

Venn-Diagramme

Wenn man die Beziehungen zwischen mehreren Mengen betrachtet, ist es instruktiv und extrem hilfreich, jede Menge durch eine Region in der Ebene darzustellen. Die Region wird so dargestellt, dass alle Elemente, die zu einer bestimmten Menge gehören, in einer abgeschlossenen Region der Ebene enthalten sind. In dieser Art dargestellte Diagramme heißen **Venn-Diagramme**. Die im vorigen Abschnitt besprochenen Definitionen können wie in Abb. 1 illustriert werden.

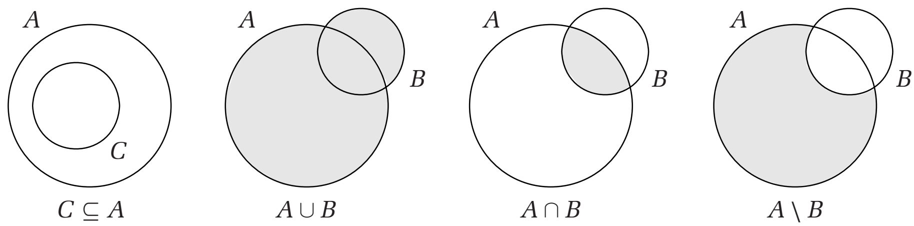

Abbildung 1: Venn-Diagramme

Indem man die Definitionen direkt benutzt oder indem man Mengen durch Venn-Diagramme darstellt, kann man Formeln herleiten, die universell gültig sind, unabhängig davon, welche Mengen betrachtet werden. Zum Beispiel folgt die Formel $A \cap B = B \cap A$ sofort aus der Definition des Durchschnitts zweier Mengen. Es ist etwas schwieriger, auf direktem Wege nachzuvollziehen, dass die folgende Beziehung für alle Mengen A, B und C gültig ist:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \qquad (*)$$

Mit Hilfe eines Venn-Diagramms jedoch sehen wir sehr leicht, dass die Mengen auf der rechten und linken Seite jeweils die schattierte Menge in Abb. 2 darstellen. Das Gleichheitszeichen in $(*)$ ist deshalb gültig.

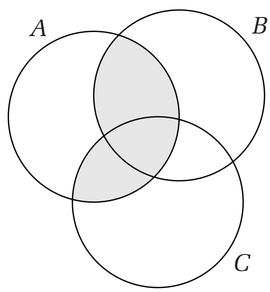

Abbildung 2

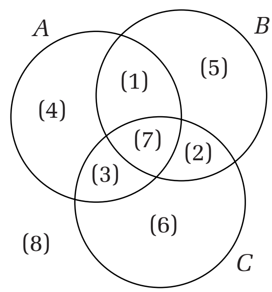

Abbildung 3

Es ist wichtig, dass die drei Mengen A, B und C in einem Venn-Diagramm so gezeichnet werden, dass alle möglichen Relationen zwischen einem Element und jeder der drei Mengen dargestellt werden. Mit anderen Worten: Die acht folgenden verschiedenen Mengen sollten alle nicht leer sein:

(1) $(A \cap B) \setminus C$ (2) $(B \cap C) \setminus A$ (3) $(C \cap A) \setminus B$ (4) $A \setminus (B \cup C)$

(5) $B \setminus (C \cup A)$ (6) $C \setminus (A \cup B)$ (7) $A \cap B \cap C$ (8) $\mathcal{C}(A \cup B \cup C)$

(Siehe Abb. 3.) Beachten Sie jedoch, dass diese Darstellungsmöglichkeit von Mengen in der Ebene leicht unübersichtlich wird, wenn vier oder mehr Mengen beteiligt sind, weil es dann mindestens 16 (= 2^4) Regionen in solch einem Venn-Diagramm geben müsste.

Aus der Definition des Durchschnitts und der Vereinigung (oder mit Hilfe eines Venn-Diagramms) folgt leicht, dass $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ und dass $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$. Folglich spielt es keine Rolle, wo die Klammern gesetzt werden. In solchen Fällen können die Klammern weggelassen werden und die Ausdrücke geschrieben werden als $A \cup B \cup C$ und $A \cap B \cap C$. Beachten Sie jedoch, dass die Klammern im Allgemeinen in dem Ausdruck $A \cap (B \cup C)$ nicht entfernt werden dürfen, weil diese Menge nicht immer gleich $(A \cap B) \cup C$ ist. Beweisen Sie diese Tatsache, indem Sie die drei Mengen $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3\}$ und $C = \{4, 5\}$ betrachten oder benutzen Sie ein Venn-Diagramm.

Aufgaben für Kapitel 3.6

1. Es sei $A = \{2, 3, 4\}$, $B = \{2, 5, 6\}$, $C = \{5, 6, 2\}$ und $D = \{6\}$.

(a) Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr sind: $4 \in C$; $5 \in C$; $A \subseteq B$; $D \subseteq C$; $B = C$ und $A = B$.

(b) Bestimmen Sie $A \cap B$; $A \cup B$; $A \setminus B$; $B \setminus A$; $(A \cup B) \setminus (A \cap B)$; $A \cup B \cup C \cup D$; $A \cap B \cap C$ und $A \cap B \cap C \cap D$.

2. F, M, C, B und T seien die Mengen aus Beispiel 2. Beschreiben Sie die folgenden Mengen: $F \cap B \cap C$, $M \cap F$ und $((M \cap B) \setminus C) \setminus T$.

3. Eine Umfrage ergab, dass 50 Personen Kaffee und 40 Tee mögen. Beide Zahlen schließen 35 ein, die Kaffee und Tee mögen. Schließlich gab es noch 10, die weder Kaffee noch Tee mögen. Wie viele Personen insgesamt haben an der Umfrage teilgenommen?

4. Mit Bezug auf Beispiel 2 schreiben Sie die folgenden Aussagen in Mengennotation:

(a) Alle Biologie-Studierende sind Mathematik-Studierende.

(b) Es gibt weibliche Studierende der Biologie im Universitätschor.

(c) Kein Tennisspieler studiert Biologie.

(d) Die weiblichen Studierenden, die weder Tennis spielen noch zum Universitätschor gehören, studieren alle Biologie.

5. Stellen Sie eine komplette Liste aller verschiedenen Teilmengen der Menge $\{a, b, c\}$ auf. Wie viele gibt es, wenn die leere Menge und die Menge selbst auch dazu gehören. Erstellen Sie dasselbe für die Menge $\{a, b, c, d\}$.

6. Bestimmen Sie, welche der folgenden Formeln gültig sind. Wenn irgendeine Formel falsch ist, so finden Sie ein Gegenbeispiel, um dies zu illustrieren. Nutzen Sie ein Venn-Diagramm, wenn Sie es als hilfreich erachten.

(a) $A \setminus B = B \setminus A$

(b) $A \subseteq B \iff A \cup B = B$

(c) $A \subseteq B \iff A \cap B = A$

(d) $A \cap B = A \cap C \Longrightarrow B = C$

(e) $A \cup B = A \cup C \Longrightarrow B = C$

(f) $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \setminus C$

7. Wenn A eine Menge mit einer endlichen Anzahl von Elementen ist, so bezeichne $n(A)$ die Anzahl der Elemente in A. Wenn A und B beliebige endliche Mengen sind, so beweisen Sie:

(a) $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

(b) $n(A \setminus B) = n(A) - n(A \cap B)$

8. (a) An einer Umfrage zur Untersuchung der Frage, welche Zeitung A, B oder C sie an einem bestimmten Tag gelesen hatten, nahmen 1000 Personen teil. Die Antworten zeigten, dass 420 A, 316 B und 160 C gelesen hatten. Diese Zahlen schließen 116 ein, die A und B gelesen hatten, 100, die A und C gelesen hatten und 30, die B und C gelesen hatten. Und dann gab es noch 16, die alle drei Zeitungen gelesen hatten.

(i) Wie viele hatten A, aber nicht B gelesen?

(ii) Wie viele hatten C, aber weder A noch B gelesen?

(iii) Wie viele hatten weder A noch B noch C gelesen?

(b) Bezeichnen Sie die gesamte Menge aller 1000 Personen in der Umfrage mit Ω (die Grundmenge). Unter Verwendung der Notation aus Aufgabe 7, haben wir z. B. $n(A) = 420$ und $n(A \cap B \cap C) = 16$. Beschreiben Sie die in (i), (ii) und (iii) von Teil (a) gegebenen Zahlen unter Benutzung derselben Notation. Warum ist $n(\Omega \setminus (A \cup B \cup C)) = n(\Omega) - n(A \cup B \cup C)$?

3.7 Mathematische Induktion

Beweisführung durch mathematische oder vollständige Induktion ist eine wichtige Technik, um Formeln für natürliche Zahlen zu beweisen. Betrachten Sie z. B. die Summe der ersten n ungeraden Zahlen. Wir bemerken, dass

$$\begin{aligned} 1 &= 1 &&= 1^2 \\ 1+3 &= 4 &&= 2^2 \\ 1+3+5 &= 9 &&= 3^2 \\ 1+3+5+7 &= 16 &&= 4^2 \\ 1+3+5+7+9 &= 25 &&= 5^2 \end{aligned}$$

Dies lässt ein allgemein gültiges Muster vermuten, nämlich, dass die Summe der ersten n ungeraden Zahlen gleich n^2 ist:

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2 \tag{$*$}$$

Um zu zeigen, dass dies allgemein gilt, können wir wie folgt vorgehen. Nehmen Sie an, dass die Formel in $(*)$ korrekt ist für eine gewisse natürliche Zahl $n = k$, so dass

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1) = k^2$$

Indem wir die nächste ungerade Zahl $2k + 1$ zu jeder Seite addieren, erhalten wir

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1) + (2k + 1) = k^2 + (2k + 1) = (k + 1)^2$$

Dies ist jedoch die Formel (∗) für $n = k + 1$. Damit haben wir bewiesen: Wenn die Summe der ersten k ungeraden Zahlen k^2 ist, dann ist die Summe der ersten $k + 1$ ungeraden Zahlen gleich $(k+1)^2$. Diese Implikation, zusammen mit der Tatsache, dass (∗) gültig *ist* für $n = 1$, impliziert, dass (∗) allgemein gültig ist. Denn wir haben gerade gezeigt: wenn (∗) wahr ist für $n = 1$, dann ist es wahr für $n = 2$; und wenn es für $n = 2$ wahr ist, dann ist es wahr für $n = 3$; ...; und wenn es für $n = k$ wahr ist, dann ist es wahr für $n = k + 1$; usw.

Ein Beweis dieser Art heißt *Beweis durch Induktion*. Er verlangt zu zeigen, dass die Formel tatsächlich wahr ist für $n = 1$ und zweitens, dass die Formel auch für $n = k+1$ gültig ist, *wenn* sie für $n = k$ gültig ist. Es folgt durch Induktion, dass die Formel dann für alle natürlichen Zahlen n gültig ist.

Beispiel 1

Beweisen Sie durch Induktion, dass für alle positiven ganzen Zahlen gilt:

$$3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + \cdots + 3^n = \frac{1}{2}(3^{n+1} - 3)$$

Lösung: Für $n = 1$ sind beide Seiten 3. Nehmen Sie an, dass (∗) gültig ist für $n = k$. Dann gilt:

$$3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + \cdots + 3^k + 3^{k+1} = \frac{1}{2}(3^{k+1} - 3) + 3^{k+1} = \frac{1}{2}(3^{k+2} - 3)$$

Dies ist (∗) für $n = k + 1$. Damit ist durch Induktion (∗) gültig für alle n.

Auf der Grundlage dieses Beispiels kann die allgemeine Struktur eines Induktionsbeweises wie folgt beschrieben werden: Wir wollen beweisen, dass eine mathematische Formel $A(n)$, die von n abhängt, für alle natürlichen Zahlen n gültig ist. In den beiden vorausgehenden Beispielen waren die entsprechenden Aussagen $A(n)$ gegeben durch:

$$A(n)\colon 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$$
$$A(n)\colon 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + \cdots + 3^n = \tfrac{1}{2}(3^{n+1} - 3)$$

Die in jedem Beweis verlangten Schritte sind wie folgt: Zeigen Sie zunächst, dass $A(1)$ gültig ist, d. h., dass die Formel korrekt ist für $n = 1$. Beweisen Sie dann für jede natürliche Zahl k: Wenn $A(k)$ gültig ist, dann folgt, dass auch $A(k + 1)$ gültig ist. Dabei wird $A(k)$ die *Induktionshypothese* genannt und der Schritt von $A(k)$ auf $A(k+1)$ heißt *der Induktionsschritt* in dem Beweis. Wenn der Induktionsschritt für eine beliebige natürliche Zahl k bewiesen ist, dann ist, durch Induktion, die Aussage $A(n)$ für alle n gültig. Das allgemeine Prinzip kann jetzt formuliert werden:

Das Prinzip der mathematischen Induktion

Es sei $A(n)$ eine Aussage für alle natürlichen Zahlen n und es gelte

(a) $A(1)$ ist wahr.

(b) Wenn die Induktionshypothese $A(k)$ wahr ist, dann ist auch $A(k+1)$ wahr für jede natürliche Zahl k. (1)

Dann ist $A(n)$ wahr für alle natürlichen Zahlen n.

Das Prinzip der Induktion erscheint unmittelbar einleuchtend. Wenn die Gültigkeit von $A(k)$ für jedes k die Gültigkeit von $A(k+1)$ impliziert, dann ist wegen der Gültigkeit von $A(1)$ auch $A(2)$ gültig, was wiederum bedeutet, dass $A(3)$ gültig ist usw. (Eine Analogie: Betrachten Sie eine Leiter mit einer unendlichen Anzahl von Stufen. Nehmen Sie an, dass Sie die erste Stufe erklimmen können. Nehmen Sie weiter an, dass Sie nach jeder Stufe jeweils die nächste ersteigen können. Dann sind Sie in der Lage, zu jeder beliebigen Stufe hinaufzukommen.)

Das Prinzip der mathematischen Induktion kann leicht auf den Fall verallgemeinert werden, in dem wir eine Aussage $A(n)$ für jede natürliche Zahl größer oder gleich einer beliebigen Zahl n_0 haben. Nehmen Sie an, dass wir beweisen können, dass $A(n_0)$ gültig ist und dass ferner für jedes $k \geq n_0$, gilt: Wenn $A(k)$ wahr ist, dann ist auch $A(k+1)$ wahr. Dann folgt, dass $A(n)$ wahr ist für alle $n \geq n_0$.

Aufgaben für Kapitel 3.7

1. Beweisen Sie Aussage (4) in Kapitel 3.2 durch Induktion:

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n+1) \qquad (*)$$

2. Beweisen Sie die Formeln (5) und (6) in Kapitel 3.2 durch Induktion.

3. Beweisen Sie das Folgende durch Induktion:

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1} \qquad (*)$$

4. $1^3 + 2^3 + 3^3 = 36$ ist teilbar durch 9. Zeigen Sie durch Induktion, dass die Summe $n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$ dreier aufeinander folgender Kubikzahlen immer durch 9 teilbar ist.

Aufgaben zur Wiederholung für Kapitel 3

1. Berechnen Sie die folgenden Summen:

(a) $\sum_{i=1}^{4} \frac{1}{i(i+2)}$ (b) $\sum_{j=5}^{9} (2j-8)^2$ (c) $\sum_{k=1}^{5} \frac{k-1}{k+1}$

2. Berechnen Sie die folgenden Summen:

(a) $\sum_{n=2}^{5} (n-1)^2(n+2)$ (b) $\sum_{k=1}^{5} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$ (c) $\sum_{i=-2}^{3} (i+3)^i$

3. Drücken Sie die folgenden Summen in der Summennotation aus:

(a) $3 + 5 + 7 + \cdots + 199 + 201$ (b) $\frac{2}{1} + \frac{3}{2} + \frac{4}{3} + \cdots + \frac{97}{96}$

4. Drücken Sie diese Summen in der Summennotation aus:

(a) $4 \cdot 6 + 5 \cdot 7 + 6 \cdot 8 + \cdots + 38 \cdot 40$ (b) $\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \cdots + \frac{1}{x^n}$

(c) $1 + \frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{5} + \frac{x^6}{7} + \cdots + \frac{x^{32}}{33}$ (d) $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots - \frac{1}{80} + \frac{1}{81}$

5. Welche der folgenden Gleichungen sind immer richtig und welche sind manchmal falsch?

(a) $\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=3}^{n+2} a_{j-2}$ (b) $\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + \sum_{i=1}^{n} b_i^2$

(c) $\sum_{k=0}^{n} 5a_{k+1,j} = 5\sum_{k=1}^{n+1} a_{k,j}$ (d) $\sum_{i=1}^{3} \left(\frac{a_i}{b_i}\right) = \frac{\sum_{i=1}^{3} a_i}{\sum_{i=1}^{3} b_i}$

6. Betrachten Sie die folgenden Implikationen und entscheiden Sie in jedem Fall: (i) ob die Implikation wahr ist und (ii) ob die umgekehrte Implikation wahr ist. (x und y sind reelle Zahlen.)

(a) $x = 5$ und $y = -3 \Longrightarrow x + y = 2$ (b) $x^2 = 16 \Longrightarrow x = 4$

(c) $(x-3)^2(y+2) > 0 \Longrightarrow y > -2$ (d) $x^3 = 8 \Longrightarrow x = 2$

7. Sei $A = \{1, 3, 4\}$, $B = \{1, 4, 6\}$, $C = \{2, 4, 3\}$ und $D = \{1, 5\}$.

Bestimmen Sie $A \cap B$; $A \cup B$; $A \setminus B$; $B \setminus A$; $(A \cup B) \setminus (A \cap B)$; $A \cup B \cup C \cup D$; $A \cap B \cap C$ und $A \cap B \cap C \cap D$.

8. Die Grundmenge sei $\Omega = \{1, 2, 3, 4, \ldots, 11, 12\}$. Definieren Sie $A = \{1, 4, 6\}$ und $B = \{2, 11, 12\}$. Bestimmen Sie $A \cap B$; $A \cup B$; $\Omega \setminus B$; $\mathscr{C}A = \Omega \setminus A$.

9. Eine ***A*** Fakultät für Geisteswissenschaften hat 1000 Studierende. Die Anzahlen der Studierenden, die die folgenden Sprachen studieren, seien Englisch (E) 780; Französisch (F) 220; und Spanisch (S) 52. Unter diesen sind 110, die Englisch und Französisch, 32, die Englisch und Spanisch, 15, die Französisch und Spanisch studieren. Schließlich sind unter all diesen Zahlen noch 10 Studierende, die alle drei Sprachen studieren.

(a) Wie viele studieren Englisch und Französisch, aber nicht Spanisch?

(b) Wie viele studieren Englisch, aber nicht Französisch?

(c) Wie viele studieren keine Sprachen?

10. (**Bernoullische Ungleichung**) Zeigen Sie durch Induktion, dass für alle natürlichen Zahlen n und alle $x \geq -1$ gilt:

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx$$