Vorwort

Noch ein mikroökonomisches Lehrbuch?

Oftmals wird die Mikrotheorie als Sammelsurium von abstrakten Rechenregeln dargestellt. Durch diese „Liebe zum mathematischen Detail" verliert der Studierende jedoch meist den Blick für das Wesentliche: die Konzepte und die Methodik, die die Mikrotheorie zur Erklärung von Marktwirtschaften liefert. Ziel dieses Buches ist es deshalb, einmal den entgegengesetzten Weg zu gehen. Von Anfang an steht die folgende umfassende Fragestellung im Brennpunkt des Buches: *Warum beobachtet man in privaten Marktwirtschaften, in denen jeder unabhängig voneinander und nach eigenen Interessen handelt, kein Chaos, sondern einen Zustand, der an ein Gleichgewicht erinnert?* Diese zentrale Frage wird in diesem Buch auf unterschiedlichem Detaillierungsgrad beantwortet. Schließlich wird dann das mikroökonomische Totalmodell einer geschlossenen Volkswirtschaft eine Erklärung liefern.

Die *Grundzüge der analytischen Mikroökonomie* finden im Buch *Grundzüge der analytischen Makroökonomie* (Hens und Strub [2004]) ihre Weiterentwicklung. Diese Verbindung zwischen Mikro- und Makroökonomie ist ein weiteres Argument für die Verfassung eines neuen Lehrbuches.

Was dieses Buch kennzeichnet

In Teil I des Buches wird ein ökonomisches Gesamtmodell stufenweise aufgebaut. In jedem Schritt – Robinson-Ökonomie – zwei Güter – drei Güter – beliebig viele Konsumenten und Produzenten – beliebig viele Güter – wird jeweils eine geschlossene Volkswirtschaft im Gesamtbild analysiert, statt die Aufmerksamkeit des Lesers ausschließlich auf einen Teilmarkt zu lenken.

Das ursprünglich grob gerasterte Bild verfeinert sich also zum mikroökonomisch-detailgetreuen Bild der privaten Marktwirtschaft, und der Leser kann das Gesamtbild derselben schon ab dem ersten Schritt erkennen.

Die Teile II und III befassen sich mit Vertiefungen und Erweiterungen des Modells, ohne den Ansatz einer Gesamtmodellierung zu verlaßen, was noch einmal dieses Werk von der vielfältigen Konkurrenz unterscheidet.

Am Ende jedes Buchteils findet der Leser/die Leserin jeweils eine Übungssammlung, womit der Stoff wiederholt, geübt und vertieft werden kann. Alle Übungen sind in zwei Schwierigkeitsstufen unterteilt. Ein Übungsbuch mit Lösungen und zusätzlichen Aufgaben ist zudem separat erhältlich. Interessenten sind auf die Homepage `www.analytischevwl.com` hingewiesen, wo aktuelle Informationen zu diesem Werk zu finden sind.

Wir haben uns für die alte, unmodifizierte deutsche Rechtschreibung entschieden mit dem Argument, daß die Sprache wie der Markt eine spontane Institution ist, die man lieber (bis auf einige klar abgegrenzte Hilfsmaßnahmen) ohne Interventionismus pflegt. Anstatt des sprachlichen Interventionismus bevorzugen wir die alte gebräuchliche Sprachkonvention.

Buchaufbau

Nachdem **im 1. Kapitel** die fundamentalen mikroökonomischen Grundgedanken eingeführt wurden, bauen wir zwischen dem 2. und dem 5. Kapitel das mikroökonomische Gesamtmodell auf, das in seiner Endversion die analytische Betrachtung von beliebig vielen Individuen, Firmen und Gütern ermöglicht.
Kapitel 2 analysiert den vereinfachten Fall **einer** Ökonomie mit **einem** Konsumenten, **einer** Firma und **zwei** Gütern, nämlich der Zeit (Freizeit oder Arbeitszeit) und einem Konsumgut. Ein einfaches Beispiel im ersten Abschnitt zeigt, wo der übliche Lehrweg über die Partialanalyse scheitert.
Im 3. Kapitel führen wir ein drittes Gut ein: **Kapital**. Dadurch können wir die Produktionsseite ausführlicher modellieren, denn mit Kapital haben wir eine zweidimensionale Darstellung der Produktionsmöglichkeiten und sogar eine dreidimensionale Erfassung des Konsumverhaltens.
Im 4. Kapitel wird nicht mehr von der Annahme eines einzigen Konsumenten und Produzenten ausgegangen, was die Einführung der Idee der Pareto-Effizienz sowie der Marktaggregation ermöglicht. Als Folge davon wird die Tauschtheorie vorgestellt und menschliche Interaktionen durch Märkte werden erklärt.
Kapitel 5 verläßt die letzte einschränkende Annahme dreier Güter. Dadurch wird das allgemeine Gesamtmodell erreicht, auf das die Vertiefungs- und Erweiterungskapitel aufbauen können.

Im 6. Kapitel findet der Leser/die Leserin Aufgaben zum ersten Buchteil.

Nach der Darstellung des Grundmodells von Marktwirtschaften wenden wir uns im **Teil II** Modellvertiefungen zu, um die Existenz, die Eindeutigkeit und die Effizienz von Walras-Gleichgewichten aufzuzeigen.
Die für die Existenz eines Walras-Gleichgewichts notwendigen Annahmen stellen wir in **Kapitel 7** vor.
Kapitel 8 baut auf dem siebten auf, indem es die Eindeutigkeit sowie die Stabilität solcher Gesamtgleichgewichte untersucht. Dabei spielt die sogenannte Marktüberschußnachfragefunktion eine wesentliche Rolle.
Im 9. Kapitel behandeln wir ausführlich beide Hauptsätze der Wohlfahrtstheorie. Dieses Thema wird im Kapitel zur Frage der Gerechtigkeit nochmals aufgegriffen. Außerdem wird die Idee der Pareto-Effizienz klar herausgearbeitet und dargelegt.
Der Vertiefungsteil endet mit den Aufgaben von **Kapitel 10**.

Teil III erweitert die Perspektive mit einigen Modellerweiterungen: öffentliche Güter, externe Effekte, Wohlfahrtsökonomik und unvolkommener Wettbewerb, sowohl ohne als auch mit Marktzutritt. Wir behandeln diese Themen im Rahmen des allgemeinen Modells, was unser Buch von den meisten anderen Lehrbüchern abgrenzt. Jedes Kapitel endet mit einigen weiterführenden Gedanken und Literaturhinweisen für den interessierten Leser.
Das 11. Kapitel beschäftigt sich mit Gütern, bei denen weder Rivalität noch Ausschließbarkeit im Konsum bestehen. Solche Güter heißen öffentliche Güter und werden nicht von **Privatpersonen** angeboten, so mindestens nach herrschender Meinung in der Volkswirtschaftslehre. Zuerst behandeln wir die Effizienzfragen, stellen dann einige Lösungsansätze vor und besprechen zudem mögliche unorthodoxe Alternativen.
Die im **12. Kapitel** behandelten externen Effekte sind mit öffentlichen Gütern eng verwandt und entsprechen der formalen Behandlung vieler aktueller Probleme wie z.B. der Umweltverschmutzung. Anhand einiger Beispiele zeigen wir formal die drei gängigen Lösungsansätze dazu: Schadensobergrenzen, Pigou-Steuern und handelbare Zertifikate. Das Kapitel schließt mit dem alternativen Ansatz von Coase.
Die „heiße Frage der Gerechtigkeit“, deren Schlußfolgerung scheinbar die Umverteilung von Einkommen und Vermögen ist, behandeln wir im **13. Kapitel**. Dieses Kapitel hat nicht nur eine besondere wirtschaftspolitische Bedeutung, sondern vor allem eine methodologische. Hier sollten die in **Teil I** schon dargestellten Grenzen der Nutzenmodellierung klar werden. Die Nichtmeßbarkeit des Nutzens verunmöglicht die Existenz einer eindeutigen Wohlfahrtsfunktion, die als Maßstab für Umverteilungspolitiken dient. Wenn wir hingegen dem ordinalen Nutzenkonzept konsistent folgen möchten, dann erhalten wir das *Arrows Unmöglichkeitstheorem*, das auch einer rationalen Wohlfahrtspolitik widerspricht.

Kapitel 14 befaßt sich mit Monopolen und Oligopolen, also mit unvollkommenem Wettbewerb. Auch hier wird unser Buch durch seine ganzheitliche Behandlung gekennzeichnet, die auch den unvollständigen Wettbewerb im Gesamtgleichgewicht betrachtet.
Die im 14. Kapitel eingeführten Themen werden im **15. Kapitel** weiterentwickelt, indem wir den Marktzutritt modellieren. Dies erfolgt in einer ersten Phase unter vollständigen Informationen, in einer zweiten sogar mit asymmetrischen Informationen (was der Alltagsrealität eher entspricht).
Kapitel 16 enthält wieder Aufgaben zum Stoff aus Teil III.

Anschließend an die drei Hauptteile findet der Leser einen ausführlichen vierten Teil, bestehend aus Anhängen.
Anhang A entspricht einem *Crash-Kurs* in Spieltheorie, denn diese Modellierung ist für den Erweiterungsteil unentbehrlich.
Anhang B wiederholt wichtige mathematische Begriffe und **Anhang C** enthält einige Literaturhinweise für die interessierte Leserschaft, der wir mit dem **Literatur- und Sachverzeichnis** auch entgegenkommen möchten.

Danksagung

Das Buch basiert auf der hervorragenden Ausbildung in Mikroökonomie, die Thorsten Hens in Bonn genießen durfte. Besonderer Dank geht an *Werner Hildenbrand*, *Reinhard John* und *Urs Schweizer*.

Dieses Werk wäre ohne die Hilfe vieler Kollegen bestimmt nicht in dieser Form entstanden, wenn überhaupt. Das von Paolo Pamini weiterentwickelte Gerüst des ersten Buchteils stammt aus einem Skript zur Vorlesung „Mikroökonomische Theorie“, die Thorsten Hens an der Universität Bielefeld in den Wintersemestern 1996/97 und 1997/98 hielt. Besonderen Dank schulden wir *Claudia Pott*, welche aus teilweise schwer verständlichen Aufzeichnungen ein hervorragendes Skript geschaffen hatte.

Nachdem dieser erste Entwurf mit seinem Autor nach Zürich umzog, kümmerte sich dann *Franco Rezzonico* um die sehr zeitaufwendige Text- und Bildereingabe in LaTeX. *Fabio Bossi* hat ebenfalls bei der Bearbeitung der Textentwürfe sowie der Graphiken intensiv geholfen. Ihm sind wir zudem für die Homepage-Gestaltung dankbar. *Patrick Reali*, *Andreas Tupak*, *Christoph Nitzsche*, *Marc Sommer* und *Carlo Strub* möchten wir ebenfalls für ihre wertvolle LaTeX-Unterstützung danken. Die Korrektureingabe wurde von *Markus Regez* und *Tan Schelling* übernommen und anschließlich von *Carolin Bonn-Meuser*, *Julia Buge* sowie *Martin Vlcek* zum Abschluß gebracht. Wir sind ihnen extrem dankbar.

János Mayer (Universität Zürich) war wie immer außerordentlich hilfsbereit. Er hat bei einigen komplizierten Beweisen mitgewirkt und die Konsistenz der mathematischen Herleitungen im ganzen Buch geprüft. Besonderer Dank geht auch an *Reinhard John* (Universität Bonn), der die erste Version des Buches sehr aufmerksam gelesen hat und uns auf einige Inkonsistenzen hinwies.
Martine Baumgartner war unsere wichtige Drehscheibe für den organisatorischen Beistand und den Kontakt zwischen uns beiden Autoren.

Einen besonderen Dank sei *Martina Bihn* vom Springer-Verlag ausgesprochen, nicht nur für ihre Geduld beim Warten auf die jeweilige nächste Buchversion, sondern vor allem auch für ihren entscheidenden Input, dieses Buch als *Pendant* zu den *Grundzügen der analytischen Makroökonomie* zu schreiben.

Es gilt die übliche Erklärung, daß wir alleine für alle Fehler verantwortlich sind, wobei jeder im anderen Ko-Autor eine sehr gute Ausrede finden kann.

Zürich,
Februar 2008

Thorsten Hens
Paolo Pamini

2

Das Grundmodell: Arbeit und Konsum

„Arbeite nur, die Freude kommt von selbst!“

Johann Wolfgang von Goethe

Schon ab diesem allerersten analytischen Kapitel soll als Ansatz gewählt werden, daß wir uns gleichzeitig Gedanken über den Güter- und den Arbeitsmarkt machen möchten. Diese Sichtweise hilft, die Wechselwirkungen zu betonen.

2.1 Angebots-Nachfrage-Diagramm eines Marktes

Nach den in Kapitel 1 präsentierten fundamentalen mikroökonomischen Grundgedanken können wir das berühmteste Diagramm der ökonomischen Theorie vorstellen: den Graph der Nachfrage- und Angebotskurve. Da wir ab sofort die Ökonomie in ihrer Ganzheit studieren möchten, führen wir gleich den Güter- und den Arbeitsmarkt ein.

2.1.1 Gütermarkt

Wir führen zuerst die Darstellung für den Gütermarkt ein, wobei folgende Notationsvereinbarung getroffen wird:

1. Die Angebotsbeziehung – vom Preis zum Konsumgut – wird mit $y(p)$ bezeichnet und stellt die Menge y dar, die bei einem Marktpreis p angeboten wird.

2. Die Nachfragebeziehung – vom Preis zum Konsumgut – wird mit $x(p)$ bezeichnet und stellt die Menge x dar, die bei einem Marktpreis p nachgefragt wird.

3. $\overset{*}{p}$ ist der markträumende Preis, d.h. der Preis, bei dem die Nachfrage dem Angebot entspricht.

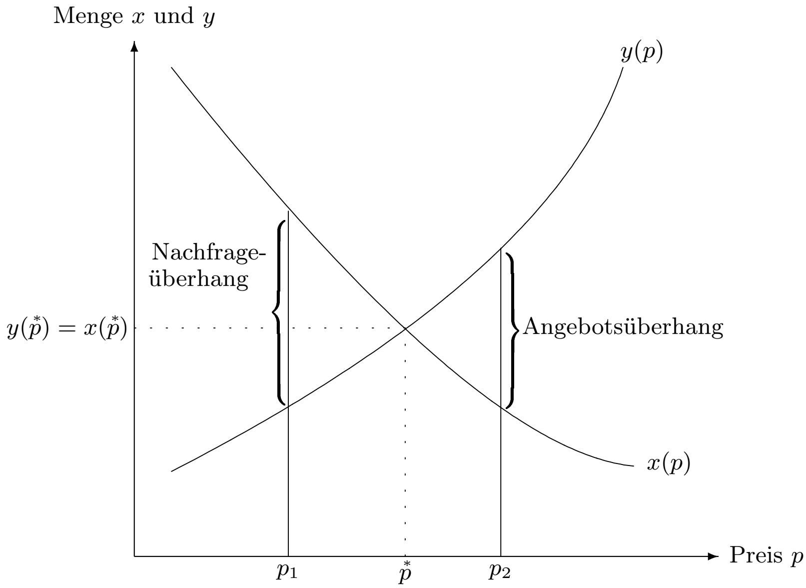


Abb. 2.1. Das Gütermarktdiagramm.

Abbildung 2.1 stellt in einem Diagramm die Angebotsfunktion $y(p)$ und die Nachfragefunktion $x(p)$ dar.

Bevor wir das Gleichgewichtskonzept vorstellen, sei die Aufmerksamkeit des Lesers auf die Achsenbeschriftungen gelenkt. Aus Gründen, die später in diesem Buch ersichtlich werden, haben wir uns für eine mathematisch korrekte aber unkonventionelle Darstellung entschieden: auf der waagerechten Achse befindet sich der Preis, d.h. die unabhängige Variable, während die abhängige Variable – die Menge $x(p)$ bzw. $y(p)$ – sich auf der senkrechten Achse befindet. Eine Konvention der Mathematik fordert, daß die unabhängige Variable auf der waagerechten, und die abhängige auf der senkrechten Achse steht.
Seitdem in der Volkswirtschaftslehre das graphische Instrumentarium eingeführt wurde, traf man hingegen eine Konvention, die der mathematischen entgegengesetzt ist: Nämlich, daß der Preis auf die senkrechte und die Menge auf die waagerechte Achse gesetzt werden. Diese Gewohnheit stammt von dem Ökonomen Alfred Marshall (1824– 1942), der um die Jahrhundertwende seine

Graphiken nach dieser Konvention einführte.
Wir sind uns bewußt, daß diese unkonventionelle Entscheidung unser Buch von den meisten Lehrbüchern unterscheidet. In den folgenden Kapiteln wird uns genau diese Entscheidung den Umgang mit einem größeren verschachtelten Modell vereinfachen, wodurch viele Kettenreaktionen analysierbar werden.

Wir haben den markträumenden Preis $\overset{*}{p}$ konzeptionell schon eingeführt und graphisch in Abbildung 2.1 dargestellt. Wieso sollte aber der Markt – wie von Adam Smith behauptet – zu einem stabilen Zustand streben, „Gleichgewicht“ genannt, und diesen Zustand nie mehr verlassen, sobald er einmal erreicht ist?

1. Sei $p_1 < \overset{*}{p}$, dann übersteigt die Nachfrage das Angebot und die Produzenten werden den Preis sowie die angebotene Menge erhöhen, um mehr zu verdienen. Daraus folgt, daß p_1 steigt, so daß er sich $\overset{*}{p}$ annähert. Die Anbieter bewegen sich entlang der Angebotskurve.

2. Sei hingegen $p_2 > \overset{*}{p}$. Dann übersteigt das Angebot die Nachfrage, und die Produzenten müssen die Preise senken, um alle Güter absetzen zu können. Sie bewegen sich entlang der Angebotskurve. Daraus folgt, daß p_2 sinkt und p auch in diesem Fall sich $\overset{*}{p}$ annähert.

Ist also der Markt durch kleine Schwankungen einmal nicht im Gleichgewicht, pendelt er sich bald darauf wieder bei $\overset{*}{p}$ ein, da dort weder ein Angebots- noch ein Nachfrageüberhang besteht.

2.1.2 Arbeitsmarkt

Wir wenden uns nun dem Arbeitsmarkt zu und folgen denselben Grundgedanken, die wir beim Gütermarkt schon vorgestellt haben. Abbildung 2.2 stellt wiederum das Ganze graphisch dar. Dabei gilt eine ähnliche Notation wie bei dem Gütermarkt:

1. Die Angebotsbeziehung – vom Lohn zur Arbeitsleistung – wird mit $l^s(w)$ bezeichnet und stellt die Arbeitsleistung l^s dar, die bei einem Marktlohn w von den Arbeitnehmern angeboten wird. l^s wird dabei in Arbeitsstunden, w in Geldeinheiten pro Arbeitsstunde gemessen.

2. Die Nachfragebeziehung – vom Lohn zur Arbeitsleistung – wird mit $l^d(w)$ bezeichnet und stellt die Arbeitsleistung l^d dar, die bei einem Marktlohn w von den Firmen nachgefragt wird.

3. $\overset{*}{w}$ ist der Gleichgewichtslohn, d.h. der Preis für Arbeitsleistung, bei dem die Nachfrage der Firmen dem Angebot der Arbeitnehmer entspricht. Hier stellt sich das maximale Beschäftigungsvolumen ein.

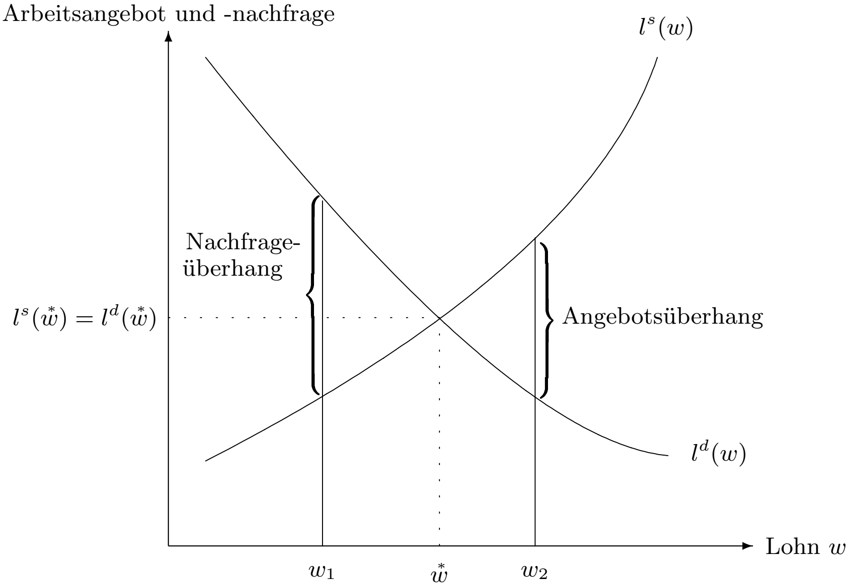


Abb. 2.2. Das Arbeitsmarktdiagramm.

Man beachte, daß die Lohnsumme $w \cdot min\{l^s(w), l^d(w)\}$ nicht notwendig im Punkt $\overset{*}{w}$ maximal ist: Befinden wir uns z.B. in w_2, werden weniger Arbeiter für mehr Lohn beschäftigt, so daß die Lohnsumme evtl. sogar höher ist, es aber zu Arbeitslosigkeit kommt. Dies haben die Arbeitnehmervertreter in vielen Ländern erkannt, sodaß eine Situation mit Arbeitslosigkeit und Lohnersatzleistungen der Vollbeschäftigung vorgezogen wird. Diesen Gedanken werden wir in der Makroökonomik vertiefen.[1] In der Mikroökonomik gehen wir davon aus, daß sich letzlich der Lohn $\overset{*}{w}$ einstellt.

2.1.3 Komparative Statik

In einem Gleichgewicht gibt es keinen Ursache-Wirkungszusammenhang sondern eine Simultanität: Denn die Höhe des Angebots wird durch die Höhe der Nachfrage bestimmt *und umgekehrt.* Die *komparative Statik* stellt einen Ursache-Wirkungszusammenhang von exogenen auf endogene Größen her.

Beispiel 2.1. Auf dem Gütermarkt wird eine Verkaufssteuer t eingeführt, die von den Produzenten abgeführt wird.

[1] Das Buch Hens und Strub [2004] entspricht der makroökonomischen Fortsetzung der hier eingeführten Theorie.

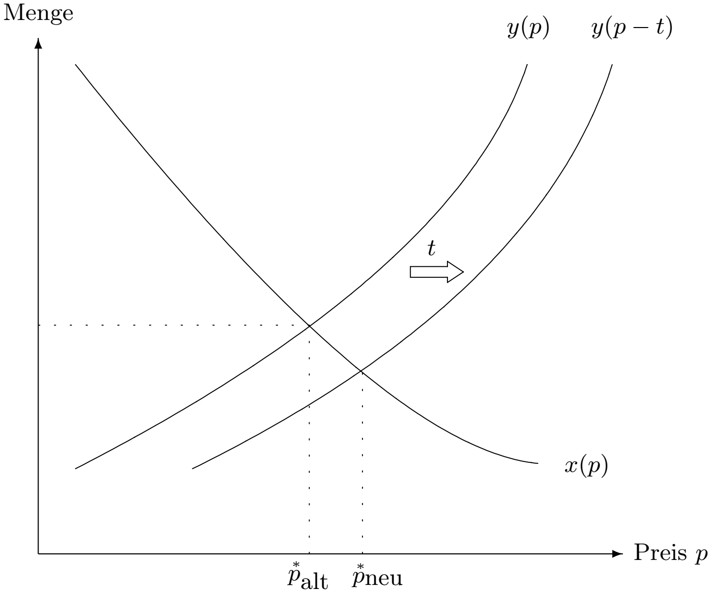


Abb. 2.3. Die Einführung einer Mengensteuer.

Wie in Abbildung 2.3 gezeichnet, verschiebt sich durch die Verkaufssteuer die Angebotskurve um t nach rechts, da erst zum Preis $p + t$ genauso viel angeboten wird wie zuvor. Daraus folgt, daß $\overset{*}{p}$ steigt, d.h. der neue Gleichgewichtspreis liegt zwischen dem alten Gleichgewichtspreis $\overset{*}{p}$ und $\overset{*}{p} + t$; die Verkaufssteuer wird also sowohl von den Produzenten als auch von den Konsumenten getragen. Gibt es aber ein Maß, um zu entscheiden, ob der Gleichgewichtspreis näher an $\overset{*}{p}$ oder $\overset{*}{p} + t$ liegt?

Abbildung 2.4 stellt einen ersten Extremfall dar: Ist die Nachfragekurve $x(p)$ senkrecht (völlig elastisch), dann bleibt $\overset{*}{p}$ trotz der Verkaufssteuer gleich. In diesem Fall tragen nur die Produzenten die Steuer.
Eine völlig elastische Nachfrage bedeutet wörtlich, daß die Mengenreaktionen der Nachfrageseite auf Preisveränderungen in riesigem Umfang stattfinden: Die Nachfrage reagiert auf Preisveränderungen extrem sensibel, und das Crowding Out – falls der Preis zunimmt – ist vollständig.

Aus Abbildung 2.5 ist ersichtlich, was mit einer waagerechten Nachfragekurve $x(p)$ (völlig unelastisch) passieren würde: Die Preisveränderung wäre maximal und $\overset{*}{p}$ würde sich in vollem Umfang um t erhöhen. Mit anderen Worten, hier tragen nur die Konsumenten die Steuer.
Der graphische Verlauf von $x(p)$ zeigt sehr deutlich, was eine völlig unelastische Nachfrage bedeutet: Die Nachfrage reagiert nicht auf Preisveränderungen. Die Nachfrage nach Tabak zum Beispiel ist so ein Fall.

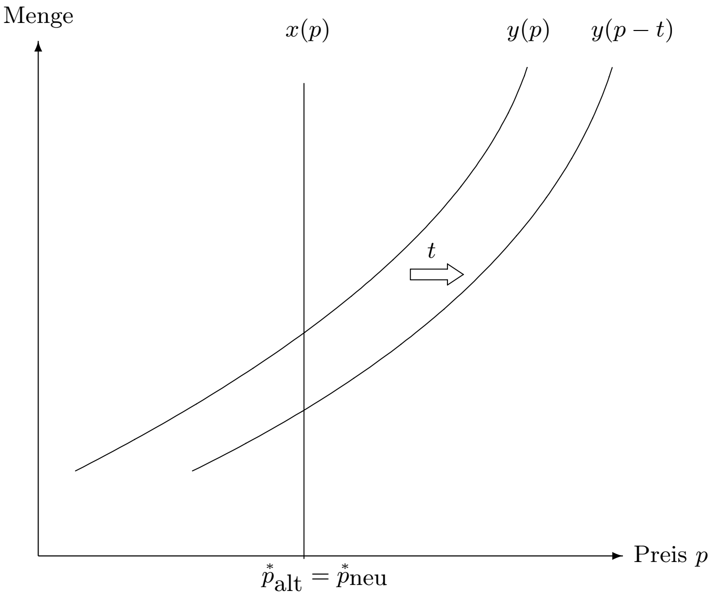


Abb. 2.4. Die Einführung einer Mengensteuer bei vollkommen elastischer Nachfrage, d.h. $\varepsilon_{x,p} = -\infty$.

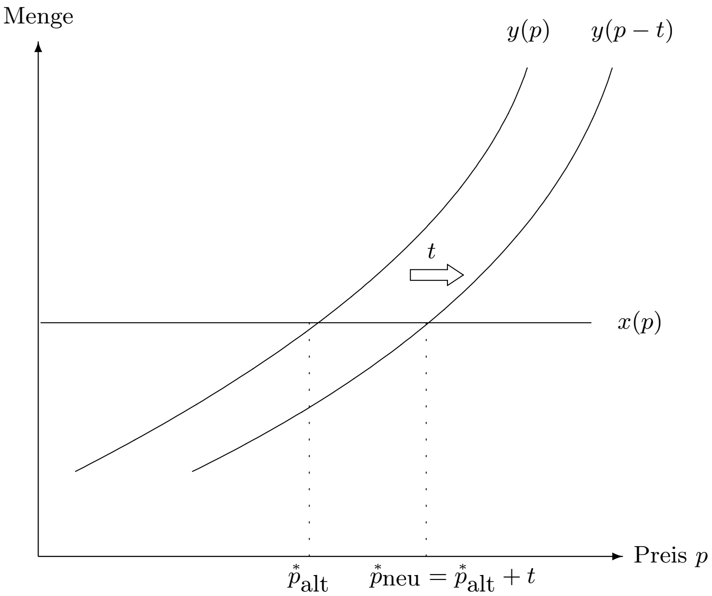


Abb. 2.5. Die Einführung einer Mengensteuer bei vollkommen unelastischer Nachfrage, d.h. $\varepsilon_{x,p} = 0$.

Somit können wir die wohl begründete Vermutung anstellen, daß die Elastizität dem gesuchten Maß entspricht.

Definition 2.2 (Preiselastizität).
Die Elastizität der Nachfrage nach dem Preis berechnet sich aus

$$\varepsilon_{x,p} = \lim_{\Delta p \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta p} \cdot \frac{p}{x} = \frac{\partial x}{\partial p} \cdot \frac{p}{x} \quad .$$

Die Elastizität des Angebots nach dem Preis ist analog

$$\varepsilon_{y,p} = \lim_{\Delta p \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta p} \cdot \frac{p}{y} = \frac{\partial y}{\partial p} \cdot \frac{p}{y} \quad .$$

Die Elastizität beschreibt die prozentuale Veränderung der Nachfrage als Resultat einer 1%-igen Preisteigerung. Streng genommen, gilt dies nur für kleine Änderungen. Nachdem wir den Elastizitätsbegriff eingeführt haben, können wir uns nun der analytischen Betrachtung von dem widmen, was wir in den obigen Paragraphen beschrieben und graphisch dargestellt haben.

Aus der Gleichgewichtsgleichung

$$y(p - t) = x(p)$$

bilden wir das totale Differential[2]

$$y'(p - t)[\mathrm{d}p - \mathrm{d}t] = x'(p)\,\mathrm{d}p$$

daraus folgt, daß

$$\begin{aligned}
(y'(p-t) - x'(p))\ \mathrm{d}p &= y'(p-t)\,\mathrm{d}t \\
\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} &= \frac{y'(p-t)}{y'(p-t) - x'(p)} \\
&= \frac{1}{\frac{y'(p-t)-x'(p)}{y'(p-t)}} \\
&= \frac{1}{1 - \frac{x'(p)}{y'(p-t)}} \quad .
\end{aligned} \tag{2.1}$$

Sei nicht vergessen, daß

$$\varepsilon_{x,p} = x'(p)\,\frac{p}{x}$$

woraus für $x'(p)$ und $y'(p)$ folgt, daß

[2] Hinweis zur Notation $x'(p)$ statt $\frac{\partial x}{\partial p}$, da nur ein Argument in $x(p)$ vorkommt.

$$x'(p) = \varepsilon_{p,x} \frac{x}{p}$$
$$y'(p) = \varepsilon_{p,y} \frac{y}{p} \quad .$$

Gehen wir davon aus, daß im Gleichgewicht $x = y$ gilt und wir von $t = 0$ starten, ergibt sich

$$\frac{x'(p)}{y'(p)} = \frac{\varepsilon_{x,p}}{\varepsilon_{y,p}} \quad .$$

Dies können wir in (2.1) einsetzen, um die gesuchte analytische Beziehung zwischen der Preisveränderung und den Elastizitäten formal darzustellen:

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{1 - \frac{\varepsilon_{x,p}}{\varepsilon_{y,p}}} \quad . \tag{2.2}$$

Gleichung (2.2) kann leicht interpretiert werden:

1. Abbildung 2.4 stellt eine senkrechte Nachfragekurve dar, die einer vollkommenen preiselastischen Nachfrage entspricht, d.h. dem Fall, wo $\varepsilon_{x,p} = -\infty$ ist. Die Steuerzunahme verursacht in dieser Situation keine Preisveränderung, was auch von Gleichung (2.2) bestätigt wird:
$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{1 - \infty}$$
$$= 0 \quad .$$

2. Abbildung 2.5 stellt eine waagerechte Nachfragekurve dar, die einer vollkommenen preisunelastischen Nachfrage entspricht, d.h. dem Fall, wo $\varepsilon_{x,p} = 0$ ist. Die Steuerzunahme verursacht in dieser Situation eine Preisveränderung im Verhältnis eins zu eins, was auch von Gleichung (2.2) bestätigt wird:
$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{1 - 0}$$
$$= 1 \quad .$$

Die obige Analyse betrifft die zwei Extremfälle und alle Möglichkeiten dazwischen. Aus ihr ist ersichtlich, daß eine Mengensteuer die abgesetzte Menge bestimmt nicht erhöht, d.h. Steuern können nicht die Produktion stützen. Im besten Fall: Nur wenn die Nachfrage nach dem Preis vollkommen unelastisch ist, sinkt die Produktion nicht.
Abschließend sei bemerkt, daß ökonomische Modelle kaum quantitative Prognosen liefern können. Sie ermöglichen aber, gewiße qualitative Eigenschaften zu untersuchen, wie das obige Beispiel gezeigt hat.

2.2 Interdependenz von Güter- und Arbeitsmarkt

Veränderungen auf dem Arbeitsmarkt wirken sich auf den Gütermarkt aus und umgekehrt, so daß Arbeitsangebot und -nachfrage indirekt auch von p abhängen, und Güterangebot und -nachfrage auch von w beeinflußt werden. Analytisch sollten wir deswegen unsere bisherige Notation wie folgt anpassen:

$$\text{Arbeitsmarkt}\begin{cases} l^s(p,w) & \text{Arbeitsangebot} \\ l^d(p,w) & \text{Arbeitsnachfrage} \end{cases}$$

$$\text{Gütermarkt}\begin{cases} y(p,w) & \text{Güterangebot} \\ x(p,w) & \text{Güternachfrage} \end{cases}$$

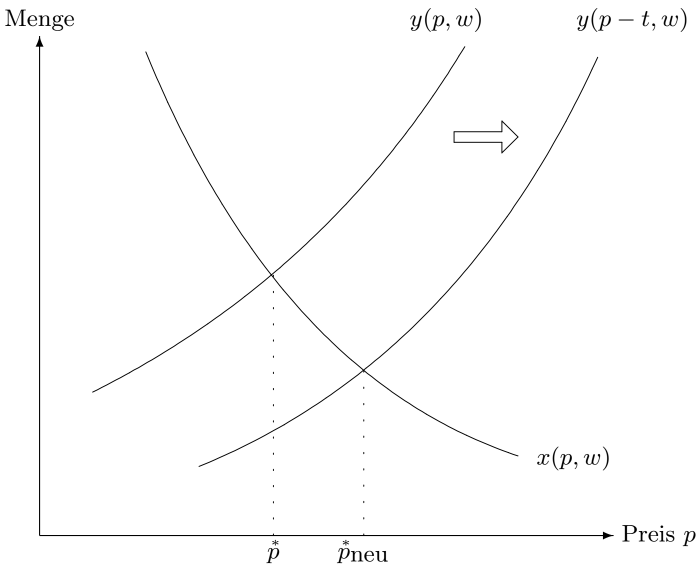


Abb. 2.6. Der Primäreffekt nach der Einführung einer Mengensteuer auf dem Gütermarkt.

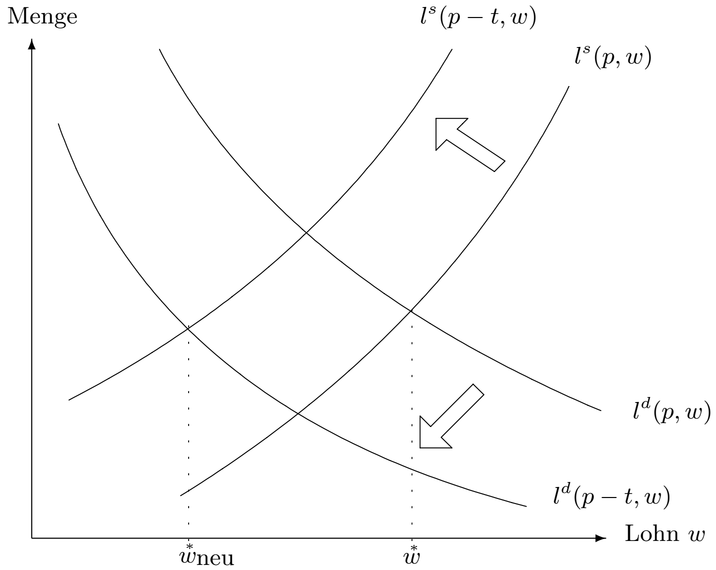


Abb. 2.7. Der Sekundäreffekt auf dem Arbeitsmarkt nach der Einführung einer Mengensteuer auf dem Gütermarkt.

Beispiel 2.3. Einführung (oder Erhöhung) einer Verkaufssteuer t.
Der *Primäreffekt* auf dem Gütermarkt entspricht der waagerechten Verschiebung des Güterangebotes um t, wie in Abbildung 2.6 dargelegt.
Die Preissteigerung bewirkt dann auf dem Arbeitsmarkt zunächst das Verschieben der Nachfragekurve nach links, da sich die auf dem Gütermarkt abgesetzte Menge reduziert hat, was eine kleinere Produktion und Beschäftigung impliziert. Zudem, da der Lohn nun real gesehen weniger wert ist, nimmt auch das Arbeitsangebot der Arbeitnehmer ab. Diese Kaufkraftabnahme heißt *Sekundäreffekt* und ist in Abbildung 2.7 dargestellt.
Ebenso wirkt sich die Änderung des Gleichgewichtslohns wieder als *Tertiäreffekt* auf den Gütermarkt aus usw.

Fazit: Graphisch kann komparative Statik in einem interdependenten System von Märkten nicht sinnvoll analysiert werden, da man das Ausmaß der Kreuzauswirkungen nicht modellieren kann: man kann nicht zeigen, daß der Tertiäreffekt den Primäreffekt zum Beispiel nicht dominiert!

Die Interdependenz zwischen Arbeits- und Gütermarkt kann in einem *Kreislaufsdiagramm* dargestellt werden: Wie bestimmen nach dem Rationalitätsprinzip die Firmen ihre Arbeitsnachfrage sowie ihr Güterangebot bzw. die Haushalte ihr Arbeitsangebot und ihre Güternachfrage? Abbildung 2.8 faßt genau diese Kreislaufbeziehung graphisch zusammen.

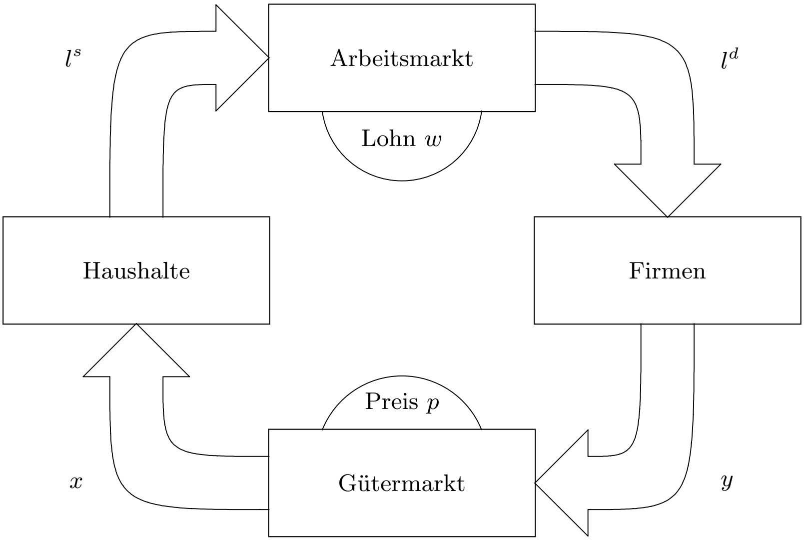


Abb. 2.8. Der wirtschaftliche Kreislauf.

Wie können wir stattdessen analytisch vorgehen? Natürlich könnte man das Angebots-Nachfragesystem wie folgt als Gleichungssystem aufschreiben und dann wieder total differenzieren:

$$\begin{aligned} l^d(p-t,w) &= l^d(p,w) \\ y(p-t,w) &= x(p,w) \quad . \end{aligned}$$

Es ergibt sich in Matrizenschreibweise

$$\begin{bmatrix} \partial_p l^s - \partial_p l^d, \partial_w l^s - \partial_w l^d \\ \partial_p y - \partial_p x, \partial_w y - \partial_w x \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{d}p \\ \mathrm{d}w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_p l^s \\ \partial_p y \end{pmatrix} \mathrm{d}t \quad ,$$

was durch Invertieren der Matrix zur Lösung von dp und dw führt.[3] Hieraus ist ersichtlich, daß man die Angebots- und Nachfragefunktion genau kennen muß. Abschnitt 2.3 modelliert die Produktionsseite, d.h. das Verhalten der Firmen, das zur Ausformulierung der Arbeitsnachfrage und des Güterangebotes führen wird. In ähnlicher Weise vertiefen wir in Abschnitt 2.4 die Entscheidungen bei den Konsumentenentscheidungen, die zur Güternachfrage- und Arbeitsangebotsmodellierung führen werden. Mit diesen Informationen werden wir sowohl graphisch als auch analytisch in Abschnitt 2.5 den wirtschaftlichen Kreislauf gänzlich betrachten und die bisher vorgestellten Zweifel lösen.

[3]Hinweis auf vereinfachte Notation: Ab dieser Stelle benutzen wir im ganzen Buch die allgemeine Schreibweise $\partial_p\, l^d(w,p)$ als Abkürzung für $\frac{\partial l^d(w,p)}{\partial p}$.

2.3 Produzentenentscheidung bei einem Faktor

Ziel dieses Abschnitts ist die Modellierung der Produzentenentscheidung bei einem Produktionsfaktor, hier die *Arbeit.* In den späteren Kapiteln werden wir das Modell um zusätzliche Produktionsfaktoren erweitern, typischerweise um das *Kapital.* Hier müssen wir zunächst die grundlegenden Prinzipien und Methodologien aufzeigen, die uns nach der Haushaltstheorie wieder eine Kreislaufbetrachtung ermöglichen werden.

2.3.1 Gewinnmaximierung

Die *Firmen* entscheiden über ihre Arbeitsnachfrage $l^d(p,w)$ sowie über ihr Güterangebot $y(p,w)$. Der Zusammenhang zwischen diesen beiden Größen, d.h. die Menge der technisch möglichen Kombinationen von Arbeit und Output, ist gegeben durch die Technologie- oder Produktionsfunktion T, welche in Abbildung 2.9 dargestellt ist. Die Produktionsfunktion $T(l^d)$ entspricht der maximal produzierbaren Angebotsmenge, d.h. der Grenze des Produktionsbereichs. Es gilt somit $y \leqslant T(l^d)$. Dabei treffen wir folgende Standardannahmen

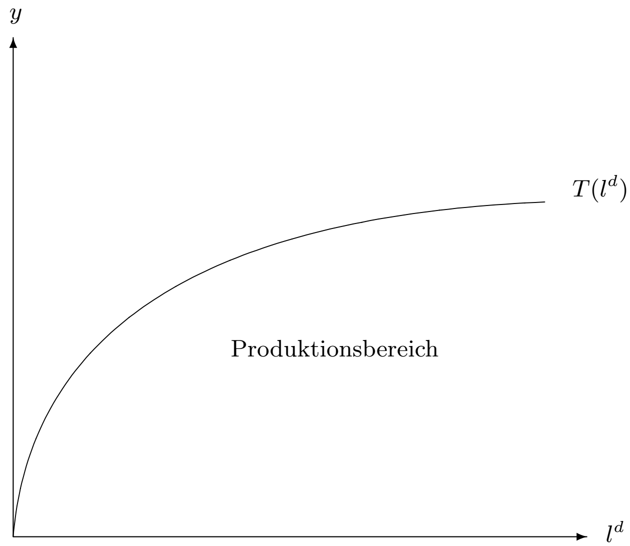


Abb. 2.9. Die Technologie- oder Produktionsfunktion $T(l^d)$ mit einem einzigen Produktionsfaktor.

über die Produktionsfunktion:

1. Sie ist zweimal stetig differenzierbar.

2. Sie beginnt im Ursprung, d.h. $T(0) = 0$.
3. Sie hat abnehmende Grenzerträge: Einerseits hat sie eine positive erste Ableitung $T'(l^d) > 0$, was positive Grenzerträge impliziert, andererseits ist ihre zweite Ableitung negativ im Vorzeichen, $T''(l^d) < 0$, was abnehmenden Grenzerträgen, oder in anderen Worten, einem strikt konkaven Verlauf gleichkommt.

Handelt die Firma nach dem Rationalitätsprinzip, so versucht sie, ihren Gewinn zu maximieren. Der Gewinn π wird buchhalterisch als Differenz zwischen Erlös und Kosten definiert. Der Erlös entspricht dem Stückpreis p multipliziert mit der Anzahl y, während in unserem einfachen Modell die Kosten den Lohnkosten entsprechen, also Stundenlohn w multipliziert mit den nachgefragten Arbeitsstunden l^d. Analytisch wird der Gewinn deshalb so definiert:

$$\pi = p \cdot y - w \cdot l^d \quad . \tag{2.3}$$

Graphische Lösung des Maximierungsproblems

Man zeichnet Isogewinnlinien

$$\{(l^d, y) \mid p \cdot y - w \cdot l^d = \pi\}$$

ein, d.h. Geraden mit den Kombinationen von l^d und y, die zu einem festen Gewinn π führen. Diese Geraden haben die Gleichung

$$y = \frac{w}{p} \cdot l^d + \frac{\pi}{p} \quad .$$

Aus der Gleichung der Isogewinnlinien ist ersichtlich, daß ihre Steigung $\frac{w}{p}$ ist, wie es im übrigen für $\pi = 0$ und $l^d = 1$ leicht beweisbar ist:

$$\begin{aligned} \pi &= p \cdot y - w \cdot l^d \\ 0 &= p \cdot y - w \\ y &= \frac{w}{p} \quad . \end{aligned}$$

Um den Gewinn π zu maximieren, muß die Isogewinnlinie so lange verschoben werden, bis sie T in genau einem Punkt berührt. Die optimale Isogewinnlinie ist also die Tangente von T mit der Steigung $\frac{w}{p}$, wobei T der Graph der Funktion $T(\cdot)$ ist. Im Gewinnmaximum ist der Grenzertrag – die Ableitung von $T(l^d)$ nach l^d – gleich dem Lohn-Preis-Verhältnis $\frac{w}{p}$:

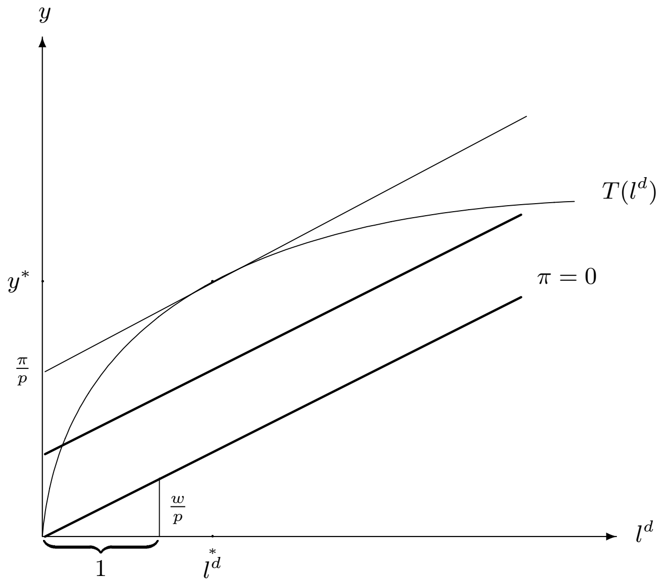


Abb. 2.10. Graphische Lösung des Gewinnmaximierungsproblem mit einem Faktor.

$$T'(l^d) = \frac{w}{p} \tag{2.4}$$

$$p \cdot T'(l^d) = w \tag{2.5}$$

Die obigen Optimalitätsbedingungen spielen in der Mikroökonomie eine zentrale Rolle. Sie besagen, daß eine zusätzliche Arbeitseinheit sich nur dann lohnt, wenn sie nicht mehr kostet als sie einbringt. Gleichung 2.4 ist in realen Größen geschrieben und bedeutet „Das Grenzprodukt muß im Gewinnmaximum dem Reallohn entsprechen", während Gleichung 2.5 in nominalen Größen dargestellt ist – also in EUR oder CHF – und heißt „Das Wertgrenzprodukt muß im Gewinnmaximum dem Nominallohn – dem Gehalt – entsprechen".

Algebraische Lösung

Um den maximalen Gewinn zu erreichen, müssen wir zunächst das Problem in eine mathematisch präzise Form überführen:

$$\pi(p, w) = \max_{y, l^d} \quad p \cdot y - w \cdot l^d \qquad \text{s.t.} \qquad y < T(l^d) \quad . \tag{2.6}$$

Die Formulierung 2.6 bedeutet: „*Maximiere bezüglich Produktion* y *und Arbeitseinsatz* l^d *den Gewinn* π*, definiert als Erlös* $p \cdot y$ *minus Kosten* $w \cdot l^d$*, indem* *man beachte („s.t.“ steht für das Englische* „subject to“ *oder* „such that“*), daß die Produktion y unbedingt durch die verfügbare Technologie* $T(\cdot)$ *und den gewählten Arbeitseinsatz* l^d *erreicht werden muß“.*

Was nach „s.t.“ steht, heißt *Nebenbedingung.* Sie können wir in den zu maximierenden Ausdruck einsetzen, um das reduzierte Maximierungsproblem

$$\pi(p, w) = \max_{l^d} \quad p \cdot T(l^d) - w \cdot l^d$$

ohne Nebenbedingung zu erhalten.

Die sogenannte *Bedingung erster Ordnung* (BEO, oder in der internationalen englischen Notation FOC für *first order condition*) erhalten wir, indem die erste Ableitung auf Null gesetzt wird:

$$\begin{aligned} \pi'(l^d) = p \cdot T'(l^d) - w &\overset{!}{=} 0 \\ p \cdot T'(l^d) &= w \quad . \end{aligned} \tag{FOC}$$

Die *Bedingung zweiter Ordnung* (BZO, oder in der internationalen englischen Notation SOC für *second order condition*) ist erfüllt, wenn die zweite Ableitung ein negatives Vorzeichen hat:

$$\begin{aligned} \pi''(l^d) &\overset{!}{<} 0 \quad , \\ \text{also} \quad T''(l^d) &< 0 \quad . \end{aligned} \tag{SOC}$$

Die Bedingung erster Ordnung führt zum gleichen Ergebnis wie die graphische Lösung; die Bedingung zweiter Ordnung entspricht genau der getroffenen Standardannahme über die strikte Konkavität der Technologiefunktion, die die Existenz eines Maximums gewährleistet. Abbildung 2.45 weiter hinten im Buch auf Seite 78 zeigt, daß diese Bedingung nicht vergessen werden darf.

2.3.2 Preisvariation in der Produzentenentscheidung

Beispiel 2.4. Wie verändern sich Arbeitsnachfrage, Produktion und Gewinn, wenn der Preis bzw. der Lohn steigt?

Graphische Betrachtung

Angenommen, der Preis steigt von $p(1)$ auf $p(2)$, dann fällt die Steigung der Isogewinnlinie. Dies bewirkt, daß sowohl y als auch l^d steigen, und π ebenfalls

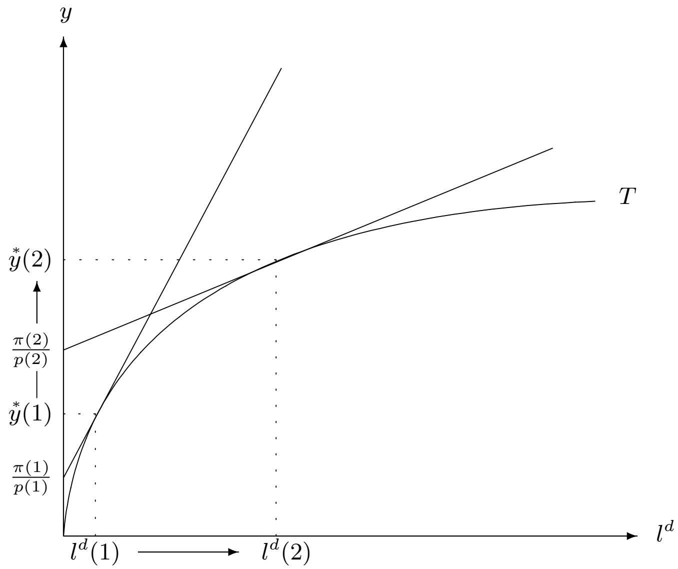


Abb. 2.11. Abnahme des Reallohnes und neues Gewinnmaximum.

steigt, da $\frac{\pi}{p}$ steigt.
Umgekehrt gilt: Bei steigendem Lohn w steigt $\frac{w}{p}$ und damit fallen y, l^d sowie π. Zusammenfassend können wir folgendes feststellen:

$$\begin{array}{ll} \partial_p\, l^d(p,w) > 0 & \partial_w\, l^d(p,w) < 0 \\ \partial_p\, y(p,w) > 0 & \partial_w\, y(p,w) < 0 \\ \partial_p\, \pi(p,w) > 0 & \partial_w\, \pi(p,w) < 0 \end{array}$$

Analytische Lösung

Wir möchten uns Schritt für Schritt den Änderungen von l^d, y und π widmen.

1. Änderung von l^d

Im Gewinnmaximum gilt: $p \cdot T'(l^d) = w$. Aus dieser Gleichung bilden wir das totale Differential $T'(l^d)\,\mathrm{d}p + p \cdot T''(l^d)\,\mathrm{d}l^d = \mathrm{d}w$, woraus mit $\mathrm{d}p = 0$ folgt, daß

$$\boxed{\partial_w\, l^d(p,w) = \frac{\mathrm{d}l^d}{\mathrm{d}w} = \frac{1}{p \cdot T''(l^d)} < 0}$$

da $T''(l^d) < 0$. Analog, mit $\mathrm{d}w = 0$, erhalten wir

$$\boxed{\partial_p\, l^d(p,w) = \frac{\mathrm{d}l^d}{\mathrm{d}p} = \frac{-T'(l^d)}{p \cdot T''(l^d)} > 0}$$

da $T'(l^d) > 0$.

2. Änderung von y

Für den Output gilt: $y(p,w) = T(l^d(p,w))$. Unter den oben schon abgeleiteten Eigenschaften folgt, daß

$$\boxed{\partial_p\, y(p,w) = T'(l^d) \cdot \partial_p\, l^d(p,w) > 0}$$

und

$$\boxed{\partial_w\, y(p,w) = T'(l^d) \cdot \partial_w\, l^d(p,w) < 0}$$

3. Änderung von π

Der Gewinn ist nach Gleichung 2.3 wie folgt definiert:

$$\pi(p,w) = p \cdot y(p,w) - w \cdot l^d(p,w) \quad .$$

Für unsere Zwecke sind die Vorzeichen der beiden partiellen Ableitungen von Bedeutung. Beginnen wir mit der partiellen Ableitung vom Gewinn nach dem Preis:

$$\begin{aligned}
\partial_p\, \pi(p,w) &= y(p,w) + p \cdot \partial_p\, y(p,w) - w \cdot \partial_p\, l^d(p,w) \\
&= y(p,w) + p \cdot T'(l^d) \cdot \partial_p\, l^d(p,w) - w \cdot \partial_p\, l^d(p,w) \\
&= y(p,w) + \partial_p\, l^d(p,w)[\underbrace{p \cdot T'(l^d) - w}_{=0}]
\end{aligned}$$

Man beachte, daß bei optimaler Produktion $p \cdot T'(l^d) = w$ ist, wie wir oben gezeigt haben. Somit erhalten wir die erste gesuchte Beziehung:

$$\boxed{\partial_p\, \pi(p,w) = y(p,w) > 0}$$

Wir können uns jetzt der partiellen Ableitung vom Gewinn nach dem Nominallohn widmen:

$$\begin{aligned}
\partial_w\, \pi(p,w) &= p \cdot \partial_w\, y(p,w) - l^d(p,w) - w \cdot \partial_w\, l^d(p,w) \\
&= p \cdot T'(l^d) \cdot \partial_w\, l^d(p,w) - l^d(p,w) - w \cdot \partial_w\, l^d(p,w) \\
&= \partial_w\, l^d(p,w) \cdot [\underbrace{pT'(l^d) - w}_{=0}] - l^d(p,w)
\end{aligned}$$

um die zweite gesuchte Beziehung zu zeigen:

$$\boxed{\partial_w \, \pi(p,w) = -l^d(p,w) < 0}$$

Die letzten zwei eingerahmten Eigenschaften, die sich auf die partiellen Ableitungen der Gewinnfunktion beziehen, heißen in der Literatur *Hotelling Lemma.*[4]
Das Lemma von Hotelling besagt, daß bei optimaler Produktion die partielle Ableitung der Gewinnfunktion nach dem Güterpreis die verkaufte Menge ist, während die partielle Ableitung nach dem jeweiligen Faktorpreis der (negative) Faktoreinsatz ist. Für den Gütermarkt wird implizit angenommen, daß entweder ein Gleichgewicht oder Nachfrageüberhang herrscht.

Man sollte insbesondere darauf achten, daß $y(p,w)$ sowie $l^d(p,w)$ die optimalen Mengen darstellen, die den Gewinn maximieren. Durch das Lemma von Hotelling kann man somit die Güterangebots- und die Faktornachfragekurve einer Firma direkt aus der Gewinnfunktion ablesen. Eine andere wichtige Konsequenz aus dem, was wir oben hergeleitet haben, ist noch folgende: Ist die Gewinnfunktion stetig differenzierbar, dann sind Güterangebot und Faktornachfrage eindeutig bestimmt; sind *vice versa* Güterangebot und Faktornachfrage eindeutig bestimmt, dann muß die Gewinnfunktion $\pi(p,w)$ differenzierbar sein!

2.4 Konsumentenentscheidung bei zwei Gütern

Wir schließen vorläufig das Thema der Firmen ab und widmen unsere Aufmerksamkeit den *Haushalten*. Wegen der Kreislaufbetrachtung dürfen wir die Konsumenten nicht einfach gleichsetzen mit der Nachfrage, denn sie kaufen ja auf der einen Seite Güter, *bieten aber gleichzeitig Arbeit* (im Sinne von Arbeitsleistung) an. Aus diesem Grund heißt dieser Abschnitt nicht *Theorie der Nachfrage*, wie es in vielen Lehrbüchern der Fall ist. In wenigen Schritten werden wir die Güternachfrage *sowie* das Arbeitsangebot modelliert haben. Wie wir schon im ersten Kapitel eingeführt haben, unterscheiden sich Nachfrage und Angebot methodologisch gar nicht, da beide Aspekte generelle Theorien der menschlichen Handlung sind: Bei jeder Transaktion sind *beide Parteien sowohl Anbieter als auch Nachfrager* von Gütern!

[4] Der interessierte Leser sei auf Hotelling [1932] verwiesen.

2.4.1 Nutzenmaximierung

Konsummenge und Präferenzrelation

Der Konsument entscheidet sich für eine bestimmte Nachfrage nach Konsumgütern und Freizeit. Die Arbeitszeit ergibt sich automatisch als Komplement zur Freizeit: Die Stunden eines Tages, die nicht als Freizeit „konsumiert“ werden, entsprechen der Arbeitszeit. Dabei führen wir folgende Notation ein:

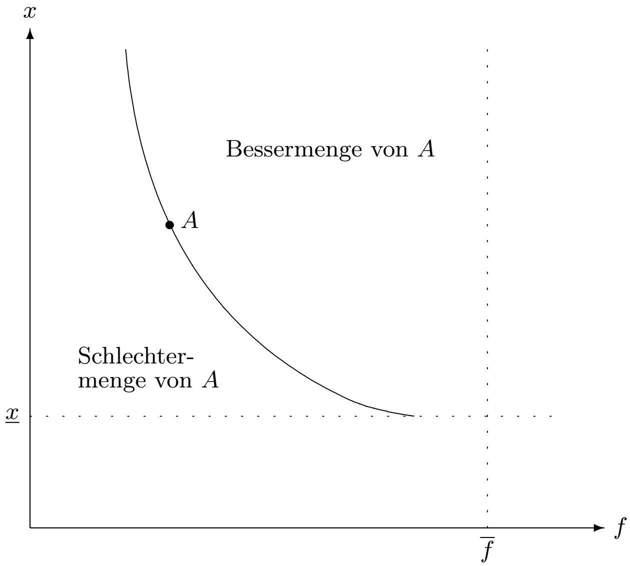


Abb. 2.12. Die Konsummenge $\mathbb{X}$.

1. $\underline{x}$ stellt die *Konsumuntergrenze* dar, die nicht unterschritten werden darf. Man könnte meinen, $\underline{x}$ sei fürs Überleben unentbehrlich.

2. Analog wird Freizeit f nach oben bei $\overline{f}$ begrenzt, da sie selbstverständlich täglich 24 Stunden nicht überschreiten kann.

Die Konsummenge $\mathbb{X}$ enthält alle menschlich möglichen Konsum-Freizeit-Kombinationen, wie in Abbildung 2.12 als Diagramm dargestellt. Mathematisch wird $\mathbb{X}$ wie folgt definiert:[5]

[5]In einigen Abbildungen wird es eine Abweichung von Konventionen der analytischen Geometrie der Ebene geben. Z.B. in Abbildung 2.15 ist der Punkt als

$$\mathbb{X} = \left\{(x, f) \quad | \quad 0 \leqslant \underline{x} \leqslant x \quad \text{und} \quad 0 \leqslant f \leqslant \overline{f}\right\} \quad .$$

Die Indifferenzkurve zu einem Punkt A gibt alle „A gleich guten“ Güter-Kombinationen an. Güter, wie der Name selber suggeriert, haben *per Definition* die Eigenschaft: *Je mehr davon, desto besser.* Es kann deswegen bei Gütern keine Sättigung auftreten, sonst wären sie ja keine Güter mehr. Anders gesagt bedeutet ökonomisch „Gut“ nicht einfach „Ware“, sondern „Ware, die Nutzen bringt“. Nach einem Sättigungspunkt wäre diese gesättigte Ware kein Gut mehr, denn wegen der erreichten Sättigung kann eine zusätzliche Einheit keinen Nutzenzuwachs erzeugen.
Die Indifferenzkurve ist somit typischerweise streng monoton fallend, denn eine Kombination kann nur dann zu A gleichwertig sein, wenn von einem Gut mehr, vom anderen weniger nachgefragt wird.

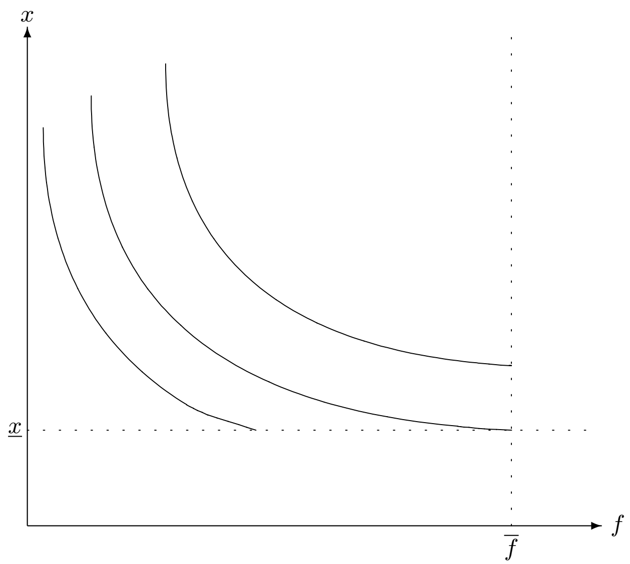


Abb. 2.13. Die Indifferenzkurvenschar in $\mathbb{X}$.

Eine Indifferenzkurvenschar ordnet die Konsummenge mittels einer Präferenzrelation, d.h. für alle $A, B \in \mathbb{X}$ gilt entweder $A \succ B$ (A wird B vorgezogen), $A \prec B$ (B wird A vorgezogen) oder $A \sim B$ (der Konsument ist zwischen A und B indifferent). Abbildung 2.13 legt auf die Fläche $\mathbb{X}$ die Indifferenzkurven.

$(x(1), f(1))$ dargestellt, obwohl $x(1)$ die Koordinate bezüglich der senkrechten und $f(1)$ bezüglich der waagerechten Koordinatenachse sind. Grund dafür ist die gewählte Form $U(x, f)$ für die Nutzenfunktion, also Argumente in umgekehrter Reihenfolge als die Reihenfolge der Koordinatenachsen.

Eine Präferenzrelation hat gewiße Eigenschaften, welche Grundbausteine der Rationalität sind. Eine *schwache Präferenz* wird durch $A \succeq B$ notiert und heißt „das Güterbündel A ist dem Konsumenten mindestens ebenso lieb wie das Güterbündel B.“ Sie wird folgend charakterisiert.

1. Reflexivität $\quad \forall A \in \mathbb{X} \quad$ gilt: $\quad A \succeq A$.
2. Transitivität $\quad \forall A, C, D \in \mathbb{X} \quad$ gilt: $\quad A \succeq C$ und $C \succeq D \quad \Rightarrow \quad A \succeq D$
   Es wird in anderen Worten angenommen, daß die Präferenzreihenfolge zwischen Güterbündeln der transitiven Eigenschaft genügt.
3. Vollständigkeit $\quad \forall A, D \in \mathbb{X} \quad$ gilt: $\quad A \succeq D$ oder $A \preceq D$
   Die Vollständigkeit besagt, daß alle Güterbündel miteinander vergleichbar sind.

Die *Indifferenz* wird mit $A \sim B$ bezeichnet und bedeutet

$$A \succeq B \quad \wedge \quad B \succeq A \quad .$$

Die *starke Präferenz* wird charakterisiert durch $A \succeq B$ und keine Indifferenz zwischen A und B, man schreibt in diesem Fall $A \succ B$.

Die Präferenzrelation wird durch eine Nutzenfunktion repräsentiert,

$$\begin{array}{cccc} U: & \mathbb{X} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ U: & (x, f) & \mapsto & u \end{array}$$

die jedem Paar (x, f) einen bestimmten Nutzen u zuordnet. $A \succ B$ ist dann gleichbedeutend mit $U(A) > U(B)$ und $A \sim B$ mit $U(A) = U(B)$. Die darstellende Nutzenfunktion ist nur bis auf streng monotone Transformationen bestimmt, d.h. man darf z.B. eine Konstante addieren oder $U(\cdot)$ mit einem positiven Faktor multiplizieren, ohne die Präferenzordnung zu ändern. Formal würden wir folgendes sagen:

Satz 1 (Streng monotone Transformationen) *Falls $m : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ streng monoton steigend ist und $B \prec A$ gilt, dann gilt auch $m(U(B)) < m(U(A))$.*

Die ökonomische Bedeutung von Satz 1 bezieht sich auf den in Abschnitt 1.4 schon vorgestellten Unterschied zwischen ordinalem und kardinalem Nutzen. Nur weil die ordinale Beziehung von Nutzenniveaus verschiedener Güterkombinationen (sprich die Präferenzordnung und nicht ihre Intensität oder ihr Wert) für uns relevant ist, sind monotone Transformationen annehmbar. Durch solche Transformationen ändern wir in der Tat den Nutzenwert, nicht aber die Reihenfolge zwischen Güterbündeln.

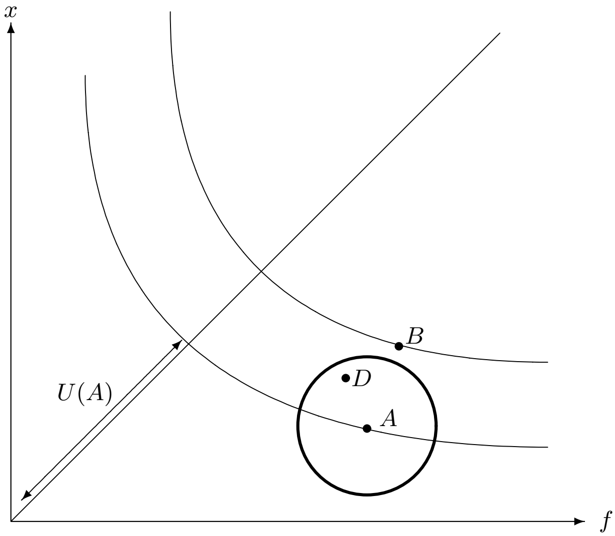


Abb. 2.14. Die graphische Implikation stetiger Präferenzen.

Damit wir die Präferenzrelation analytisch modellieren können, ist die Annahme der Stetigkeit wichtig. Intuitiv bedeutet Stetigkeit, daß kleine Änderungen der Güterbündel nicht zu sprunghaften Änderungen der Präferenzrelation führen.

Definition 2.5 (Stetigkeit von Präferenzrelationen).
Eine Präferenzrelation heißt stetig, *wenn für jedes Paar konvergenter Folgen* $A_n \to A$ *und* $B_n \to B$ *mit* $A_n \succeq B_n$ *für alle* n *gilt, daß* $A \succeq B$. *Äquivalent ist die Prüfung, ob die Bessermenge von* B, *d.h.* $\{A_n | A_n \succeq B\}$, *sowie die Schlechtermenge von* B, *d.h.* $\{A_n | A_n \preceq B\}$, *abgeschlossen sind.*

Daraus folgt ein zweiter wichtiger Satz:

Satz 2 (Stetige Präferenzen) *Falls die Präferenzrelation stetig ist, dann gibt es eine stetige, darstellende Nutzenfunktion.*

Abbildung 2.14 veranschaulicht die obigen Beziehungen, indem dieselben Buchstaben für die Punktebezeichnung gewählt wurden. Zur Konstruktion einer Nutzenfunktion aus einer Präferenzrelation ordnet man z.B. jeder Indifferenzkurve den Abstand zum Ursprung ihres Schnittpunktes mit der Diagonalen zu.

Beispiel 2.6. Lexikographische Ordnung.
Mit „Lexikographischer Ordnung“ meint man den Ordnungsansatz, der für die Wörtereinordnung in einem Lexikon angewandt wird: ausschließlich nach einem Kriterium (in dem Fall, der alphabetischen Ordnung). *In der Lexikographischen Ordnung gibt es keine stetige Nutzenfunktion!* Abbildung 2.15 zeigt uns gerade diesen Fall.
Zieht z.B. jemand „Konsum“ immer „Freizeit“ vor, ist $U(x(1), f(1)) > U(x(2), f(2))$ genau dann, wenn entweder (*1. Möglichkeit*) $x(1) > x(2)$ oder wenn (*2. Möglichkeit*) $x(1) = x(2)$ und gleichzeitig $f(1) > f(2)$ (Freizeit ist ja auch in diesem Fall ein Gut). Hier ist jeder Punkt oberhalb von $(x(2), f(2))$ „besser“ als $(x(1), f(1))$, da der x-Wert höher ist.
Daher kann man, obwohl $U(x(2), f(2)) < U(x(1), f(1))$ gilt, keine Umgebung von $(x(2), f(2))$ finden, die nur Punkte C mit $C \prec (x(1), f(1))$ enthält. Dadurch ist das Stetigkeitskriterium nicht mehr erfüllt!

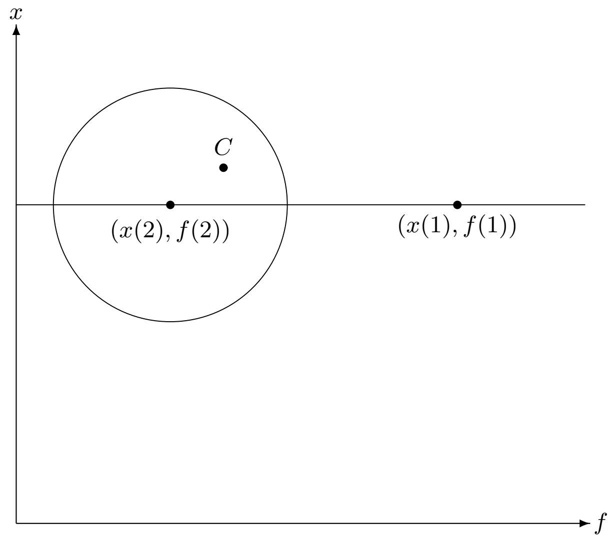


Abb. 2.15. Lexikographische Präferenzen verletzen das Stetigkeitskriterium.

Ein exakter Beweis zu obigem Beispiel kann in Debreu [1959] nachgelesen werden. Obwohl $(x(1), f(1))$ bei gleichem Konsum sehr viel mehr Freizeit als $(x(2), f(2))$ erlaubt, würde eine minimale Erhöhung des Konsums die Präferenzordnung umkehren.

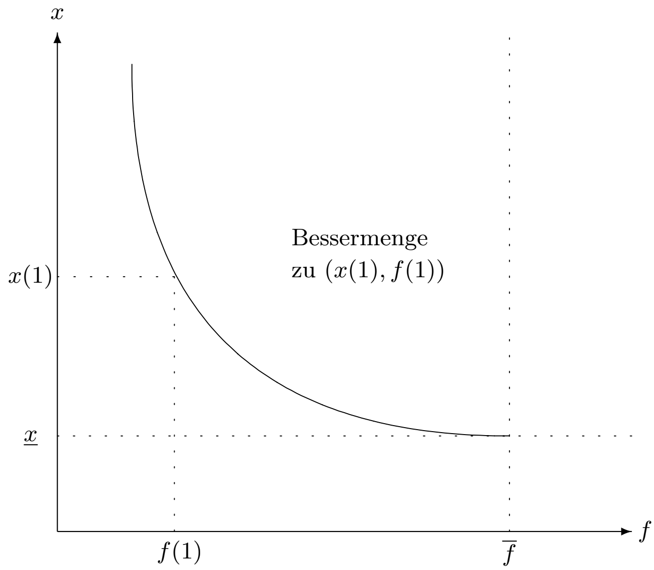


Abb. 2.16. Die Bessermenge und die Quasi-Konkavität von $U(\cdot)$.

Bevor wir die Nutzenmaximierung der Konsumenten vorstellen, seien zuletzt die Standardannahmen über die Nutzenfunktion genannt, die obige kritische Fälle ausschließen:[6]

1. Stetige Differenzierbarkeit
2. Monotonie: $(x(1), f(1)) > (x(2), f(2)) \quad \Rightarrow \quad U(x(1), f(1)) > U(x(2), f(2))$
3. Strikte Quasi-Konkavität: Die Bessermenge zu $(x(1), f(1))$, also $\{(x, f)| U(x, f) > U(x(1), f(1))\}$, ist $\forall(x(1), f(1))$ strikt konvex. Abbildung 2.16 bezieht sich genau auf diesen Punkt.

Eine Abschwächung der Monotonieannahme ist die sogenannte lokale Nichtsättigung, d.h. für alle (x, f) mit $x \geqslant \underline{x}$, $f \leqslant \overline{f}$ gibt es in jeder Umgebung von (x, f) bessere Güterkombinationen. Der Leser/die Leserin sei zudem auf Anhang B für eine tiefere mathematische Behandlung der Konvexität verwiesen.

[6] Anmerkungen zur Verdeutlichung der Annahmen: Eine Menge ist konvex, falls die Verbindungsstrecke zwischen zwei Punkten dieser Menge in der Menge liegt. Sie heißt strikt konvex, falls die Verbindungsstrecke im Inneren der Menge liegt.
Ein Vektor von Zahlen $(x(1), f(1))$ ist größer als ein Vektor $(x(2), f(2))$, falls keine Komponente des zweiten größer als die entsprechende Komponente des ersten ist und die Vektoren nicht identisch sind, also $x(1) \geqslant x(2)$ und $f(1) \geqslant f(2)$ und mindestens eine dieser Ungleichung strikt ist.

Die Restriktion der Nutzenmaximierung: die Budgetgerade

Die Formalisierung des Rationalitätsprinzips besteht darin, daß der Konsument seinen Nutzen zu maximieren versucht. Die Zielfunktion ist also

$$\max_{(x,f)\in\mathbb{X}} U(x,f) \quad .$$

Als Nebenbedingung muß man eine Budgetrestriktion beachten, denn die Ausgaben dürfen nicht höher als die Einnahmen sein. Dabei werden die Ausgaben als $p \cdot x$ berechnet. Die Einnahmen bestehen aus dem Gehalt (Einnahmen durch Arbeit)

$$w \cdot l^s = w \cdot (\overline{f} - f)$$

sowie aus Gewinnausschüttungen von Firmen π.

Stellen wir die Bedingung „Ausgaben kleiner gleich Einnahmen" formal dar, bekommen wir

$$\begin{aligned} & p \cdot x \leqslant w \cdot (\overline{f} - f) + \pi \\ \text{oder} \qquad & p \cdot x + w \cdot f \leqslant w \cdot \overline{f} + \pi = b \end{aligned}$$

Die Budgetmenge wird formal wie folgt geschrieben:

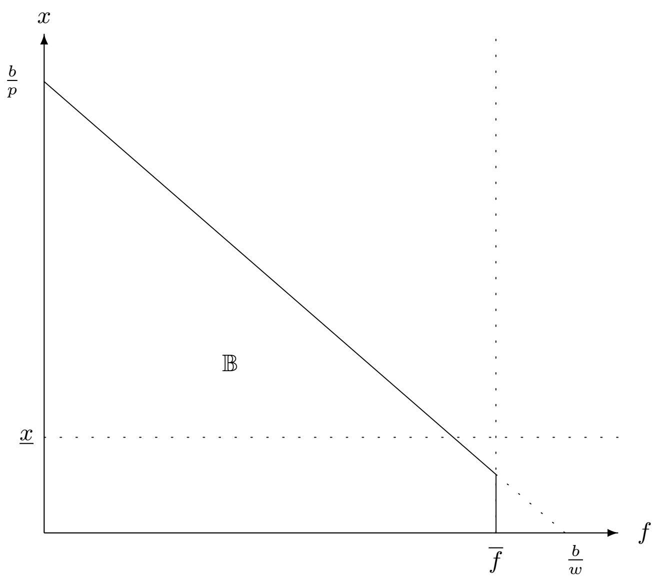


Abb. 2.17. Die Veranschaulichung der Budgetgerade.

$$\mathbb{B}(p,w) = \{(x,f) \in \mathbb{X} | p \cdot x + w \cdot f \leqslant w \cdot \overline{f} + \pi\}$$

Die zulässigen Kombinationen von Gut x und Freizeit f liegen nicht oberhalb der Budgetgerade mit Steigung $-\frac{w}{p}$ und analytischer Form $x = \frac{b}{p} - \frac{w}{p} \cdot f$, wie in Abbildung 2.17 dargestellt.

Man beachte zudem die Rolle der Obergrenze an Freizeit $\overline{f}$ und der Untergrenze an Konsum $\underline{x}$ in der Gestaltung der Budgetgerade. Sehen wir zuerst von $\underline{x}$ ab: Der Achsenabschnitt der Budgetgerade mit der f-Achse wäre $\frac{b}{w}$, es kann ja aber auch passieren (wie in Abbildung 2.17), daß dieser Abschnitt die Obergrenze $\overline{f}$ überschreitet, was zu einem „Abknicken" der Budgetgerade führt. Da bei $\overline{f}$ gar nicht mehr gearbeitet wird, kommt die Höhe der Budgetgeraden in diesem Punkt dem Realgewinn $\frac{\pi}{p}$ gleich: Das sich hier befindende Individuum würde ausschließlich aus Gewinnbeteiligungen leben und den ganzen Tag als Freizeit genießen.
Würden wir zusätzlich auch $\underline{x}$ betrachten, dürfte es dann bei diesem Knick um keine Lösung gehen, denn er unterschreitet den minimalen Konsum $\underline{x}$. Gültige Wahlen des Individuums müssen unbedingt über $\underline{x}$ und links von $\overline{f}$ liegen.

Der Einfachheit halber werden wir nun manchmal diese zwei Restriktionen graphisch und analytisch verlassen unter der Annahme, daß der relevante Optimierungsbereich beide Bedingungen erfüllt. Der Leser sollte aber diese unterliegenden Beschränkungen nie vergessen. Wir kommen im Abschnitt 2.6.2 hierauf zurück.
Man könnte die Budgetgerade auch anders interpretieren: Jedes Individuum hat eine sogenannte *Anfangsausstattung* an (x, f) in der Höhe von $(\frac{\pi}{p}, \overline{f})$. Dieser Punkt ist *immer* erreichbar und stellt den Ursprung allfälliger Bewegungen entlang der Budgetgerade. Die Budgetgerade *muß* deswegen immer durch $(\frac{\pi}{p}, \overline{f})$ laufen.

Graphische Lösung des Nutzenmaximierungsproblems

Die höchste erreichbare Indifferenzkurve ist diejenige, wie in Abbildung 2.18 gezeigt, die die Budgetgerade in genau einem Punkt berührt. Damit ergeben sich für das Nutzenmaximum des Konsumenten folgende Bedingungen:

1. Damit das nutzenmaximierende Güterbündel $(\overset{*}{x}, \overset{*}{f})$ erreichbar ist (kaufbar), muß es auf der Budgetgeraden liegen, d.h. formal

$$p \cdot \overset{*}{x} + w \cdot \overset{*}{f} = b \quad .$$

   Ein Punkt unterhalb der Budgetgeraden ist nie optimal, da die Nutzenfunktion monoton oder zumindest lokal nicht gesättigt ist.

2. Die Steigung der Indifferenzkurve in $(\overset{*}{x}, \overset{*}{f})$ kommt der Steigung der Budgetgeraden gleich, also $-\frac{w}{p}$. Die durch $(\overset{*}{x}, \overset{*}{f})$ laufende Indifferenzkurve kann formal wie folgt definiert werden:

$$\text{Indiff}\,(\overset{*}{x}, \overset{*}{f}) = \{(x, f) \in \mathbb{X} \,|\, U(x, f) = U(\overset{*}{x}, \overset{*}{f})\} \quad .$$

Da man entlang dieser Indifferenzkurve – per Definition – immer auf demselben Nutzenniveau bleibt, können wir das totale Differential gleich Null setzen

$$\partial_x U(\overset{*}{x}, \overset{*}{f})\, \mathrm{d}x + \partial_f U(\overset{*}{x}, \overset{*}{f})\, \mathrm{d}f = 0$$

woraus die Steigung der Indifferenzkurve folgt

$$\text{GRS}_{f,x} \overset{\text{def}}{=} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}f} = -\frac{\partial_f U(\overset{*}{x}, \overset{*}{f})}{\partial_x U(\overset{*}{x}, \overset{*}{f})} \quad ,$$

welche Grenzrate der Substitution heißt.

Die obige Bedingung „*Die Steigung der Indifferenzkurve in* $(\overset{*}{x}, \overset{*}{f})$ *kommt der Steigung der Budgetgerade gleich*“ hat somit eine wichtige Implikation, nämlich

$$\text{GRS}_{f,x} = -\frac{w}{p}$$
$$\frac{\partial_f U(\overset{*}{x}, \overset{*}{f})}{\partial_x U(\overset{*}{x}, \overset{*}{f})} = \frac{w}{p} \quad ,$$

was die sogenannte *Marginalbedingung* darstellt.

Abbildung 2.18 bezieht sich gerade auf diesen Fall. Die erste Eigenschaft eines Nutzenoptimums zeigt die Erreichbarkeit davon, die zweite hingegen die Optimalität: subjektives Tauschverhältnis ($\text{GRS}_{f,x}$) entspricht objektivem Tauschverhältnis ($-\frac{w}{p}$).

Was wir hier rein graphisch und bald auch analytisch zeigen, ist ein wichtiges Prinzip für jeden Ökonomen: Damit eine optimale Handlung überhaupt beobachtbar ist oder getätigt wird, müssen *immer* zwei Bedingungen erfüllt sein. Erstens muß die Handlung *machbar* sein, zweitens muß das handelnde Subjekt sie *wünschen*. Anders gesagt entspricht das dem Motto „Können und Wollen“.

Analytische Lösung des Nutzenmaximierungsproblems

Die analytische Herleitung des Nutzenmaximums wird die Marshall'schen Nachfragefunktionen liefern. Wir stellen zuerst das Maximierungsproblem nochmals formal vor

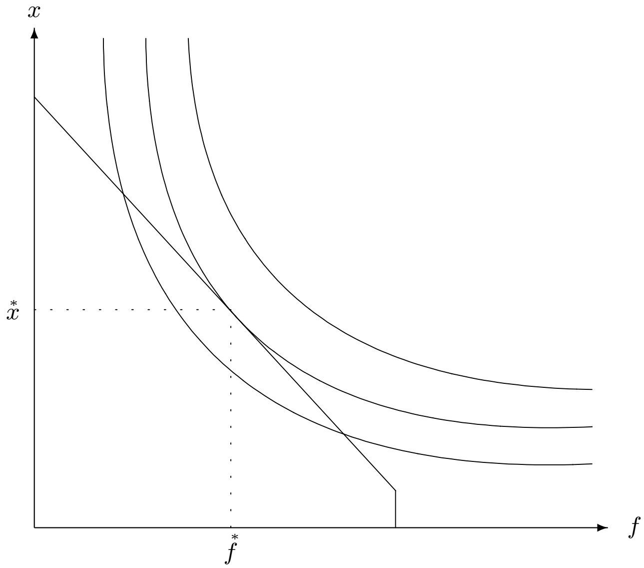


Abb. 2.18. Das Nutzenmaximum bei gegebenem Einkommen.

$$\max_{(x,f)\in\mathbb{X}} U(x,f) \quad \text{s.t.} \quad p\cdot x + w\cdot f = b \quad .$$

Dieses werden wir durch Einsetzen lösen. Wir formulieren zuerst die Nebenbedingung um in:

$$x = \frac{b - w\cdot f}{p}$$

und setzen sie in die Zielfunktion ein

$$\max_{\left(\frac{b-wf}{p},f\right)\in\mathbb{X}} U\left(\frac{b-w\cdot f}{p}, f\right) \quad .$$

1. Die Bedingung erster Ordnung (FOC) lautet

$$U'\left(\frac{b-w\cdot f}{p}, f\right) = -\frac{w}{p}\cdot\partial_x U(x,f) + \partial_f U(x,f) \overset{!}{=} 0 \quad ,$$

   was die Optimalitätbedingung liefert

$$\frac{\partial_f U(\overset{*}{x},\overset{*}{f})}{\partial_x U(\overset{*}{x},\overset{*}{f})} = \frac{w}{p} \quad \text{s.t.} \quad x = \frac{b-w\cdot f}{p}$$

2. Die Bedingung zweiter Ordnung (SOC) lautet hingegen

$$U''\left(\frac{b-w\cdot f}{p}, f\right) \overset{!}{<} 0$$

und ist erfüllt, da $U(\cdot)$ quasi-konkav ist, wie im Anhang B genau erklärt wird.

Statt der (SOC) kann man auch nur die strenge Monotonie und die strikte Quasi-Konkavität der Zielfunktion fordern, die sie hinreichende Bedingungen für ein eindeutiges Optimum sind. In unseren Modellen sind diese meistens vorhanden.

Damit wir mit der analytischen Maximierung fertig sind, müssen wir noch die *Überprüfung der Randlösungen* vornehmen: Abbildung 2.19 stellt genau diesen kritischen Fall graphisch dar.

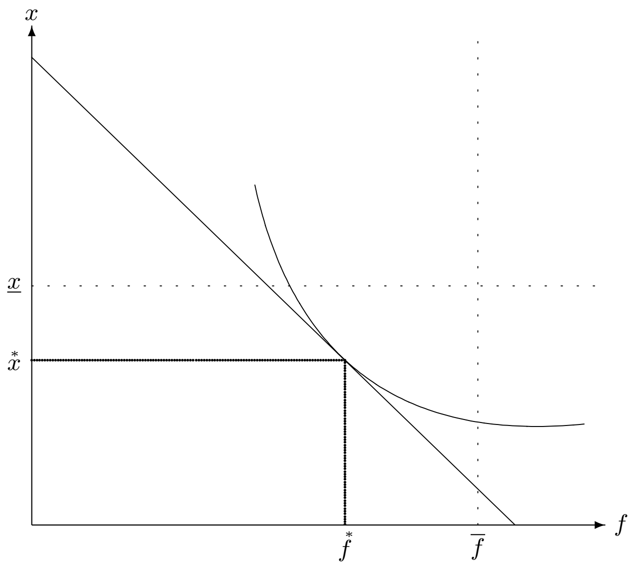


Abb. 2.19. Ein verbotenes Optimum.

Falls sich Budgetgerade und Indifferenzkurve im zulässigen Bereich nicht berühren, was bei $\overset{*}{x} < \underline{x}$ oder $\overset{*}{f} > \bar{f}$ der Fall ist, erfüllt die durch die (FOC) berechnete Lösung die Ungleichungs-Nebenbedingungen nicht. Der Punkt $(\overset{*}{x}, \overset{*}{f})$ ist nicht zulässig und somit keine Lösung des restringierten Optimierungsproblems. Da im tatsächlichen Optimum $\mathrm{GRS}_{f,x} = -\frac{w}{p}$ so nie erfüllt ist, kann man die Lösung graphisch oder formal über Kuhn-Tucker Bedingungen ermitteln.

Anmerkung 2.7 (Monotone Transformationen).
$(\overset{*}{x}, \overset{*}{f})$ ändert sich nicht, falls statt $U(x, f)$ eine strikt-monotone Transformation $m(U(x, f))$ gewählt wurde, denn in der FOC tritt zusätzlich ein Term $m'(U)$ auf, welcher sich in der Grenzratenbildung herauskürzt.

Anmerkung 2.8 (Marshall'sche Nachfragefunktionen).
Die Lösungen dieses Maximierungsproblems heißen die *Marshall'schen Nachfragefunktionen* $\hat{x}(p, w, b)$ und $\hat{f}(p, w, b)$.

Bei den Marshall'schen Nachfragefunktionen sei betont, daß die Argumente w, p und b voneinander nicht unabhängig sind, denn sie hängen durch $b = w\bar{f} + \pi$ zusammen.

2.4.2 Einkommensvariation und Konsumentenentscheidung

Jetzt, da wir Nutzenfunktionen maximieren können, verfügen wir über alle Werkzeuge, um eine komparative statische Analyse durchzuführen: Wie ändert sich das optimale Güterbündel, wenn das verfügbare Einkommen zu- oder abnimmt? Die folgende Definition unterscheidet zwischen normalen und inferioren Gütern.[7]

Definition 2.9 (Normales Gut, inferiores Gut).
Das Gut x heißt normales Gut*, falls für die Marshall'sche Nachfragefunktion gilt: $\partial_b \hat{x}(p, w, b) > 0$. x heißt* inferiores Gut*, falls für die Marshall'sche Nachfragefunktion gilt: $\partial_b \hat{x}(p, w, b) < 0$. Dies ist eine lokale Eigenschaft, gültig in einer Umgebung des gegenwärtigen Punktes (p, w, b), d.h. für andere Parameterkonstellationen kann das normale Gut ein inferiores Gut sein.*

In anderen Worten sind normale Güter solche, deren Nachfrage mit steigendem Einkommen zunimmt und inferiore Güter solche, deren Nachfrage mit höherem Einkommen abnimmt. Kaviar und Champagner sind typische normale Güter, Hamburger inferiore.
Die Budgetgleichung schließt aus, daß beide Güter inferior sind, sonst ist jede Kombination möglich. Wie Grafik 2.20 zeigt, sind nicht immer alle Güter normal.

[7] Hier der Fall für x, dasselbe gilt auch für f.

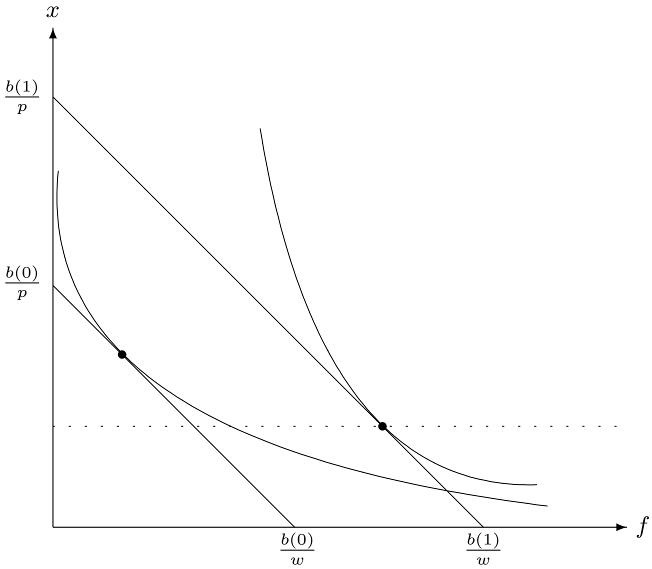


Abb. 2.20. Nutzenmaximierung schließt inferiore Güter nicht aus.

Um sicherzugehen, daß *beide Güter normal* sind, kann man zusätzlich zu den bisherigen Standardannahmen eine der beiden folgenden Zusatzannahmen treffen.

1. U ist additiv seperabel mit strikt konkaven Summanden.

Satz 3 (Additiv separable Nutzenfunktion) *Ist die Nutzenfunktion additiv separabel, d.h. gilt $U(x, f) = g(x)+h(f)$ und $g(\cdot)$, $h(\cdot)$ sind streng konkav, dann sind beide Güter normal.*

Bemerkung: Strenge Konkavität ist vorhanden, wenn $g''(x) < 0$. Da U streng monoton ist müssen die Glieder der Summe auch streng monoton sein, d.h. $g'(x) > 0, \forall x$

Beweis. Durch Widerspruch. Sei $(x(0), f(0))$ das alte Konsumoptimum beim Einkommen $b(0)$, und analog $(x(1), f(1))$ das neue beim Einkommen $b(1)$, und gelte $b(0) < b(1)$. Da sich weder p noch w ändert, muß in beiden Fällen gelten, daß

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}f} = \mathrm{GRS}_{f,x}(\overset{*}{x}, \overset{*}{f}) = -\frac{h'(\overset{*}{f})}{g'(\overset{*}{x})} \overset{!}{=} -\frac{w}{p} \quad .$$

1. Sei x ein inferiores Gut (d.h. $x(0) > x(1)$), aber f ein normales Gut (d.h. $f(0) < f(1)$), dann gilt
$$-\mathrm{GRS}_{f,x}(x(1), f(1)) = \frac{h'(f(1))}{g'(x(1))} < \frac{h'(f(0))}{g'(x(0))} = \frac{w}{p}$$
wegen der strengen Konkavität von $g(\cdot)$ und $h(\cdot)$, was die notwendige Optimalitätsbedingung verletzt.
2. Sei hingegen f ein inferiores Gut (d.h. $f(0) > f(1)$), aber x ein normales Gut (d.h. $x(0) < x(1)$), dann gilt
$$-\mathrm{GRS}_{f,x}(x(1), f(1)) = \frac{h'(f(1))}{g'(x(1))} > \frac{h'(f(0))}{g'(x(0))} = \frac{w}{p}$$
wegen der strengen Konkavität von $g(\cdot)$ und $h(\cdot)$, was auch die notwendige Optimalitätsbedingung verletzt.

Da ausgeschlossen ist, daß beide Güter x und f inferiore Güter sind, ist der Satz per Widerspruch bewiesen.

□

2. U stellt homothetische Präferenzen dar.

Man nennt Präferenzen *homothetisch*, wenn die Grenzraten der Substitution entlang Strahlen durch den Ursprung konstant bleiben, d.h. $\mathrm{GRS}(\lambda x, \lambda f) = \mathrm{GRS}(x, f)$ für alle $\lambda > 0$.

Anmerkung 2.10 (Homothetische Präferenzen und Homogenität von $U(\cdot)$). Falls die Präferenzrelation homothetisch ist, dann gibt es eine linear-homogene Nutzendarstellung ersten Grades, d.h.
$$U(\lambda x, \lambda f) = \lambda \cdot U(x, f) \quad \forall \lambda > 0 \quad .$$

Würden wir die schon bekannte Beziehung zwischen Ausgaben und Einkommen
$$p \cdot \overset{*}{x} + w \cdot \overset{*}{f} = b$$
links und rechts mit λ multiplizieren, bekommen wir die Identität
$$p \cdot \lambda \overset{*}{x} + w \cdot \lambda \overset{*}{f} = \lambda b \quad .$$

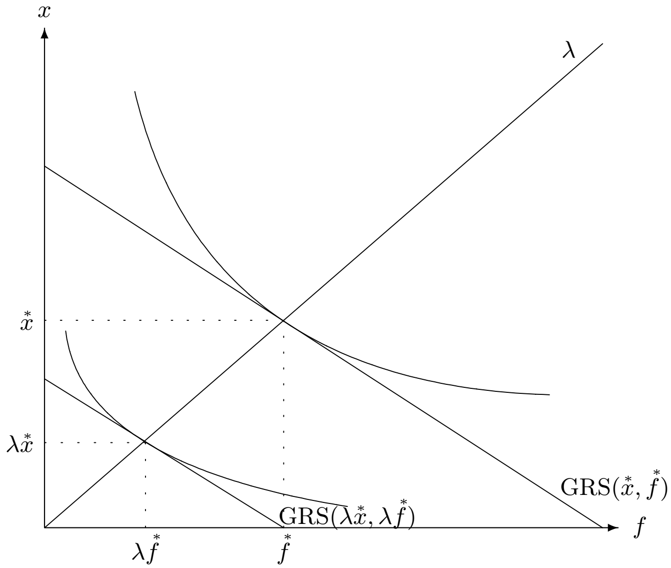


Abb. 2.21. Homothetische Präferenzen.

Hieraus können wir folgen, daß die Marshall'schen Nachfragen linear im Einkommen sind, falls Tangenten zu $(\overset{*}{x}, \overset{*}{f})$ und $(\lambda\overset{*}{x}, \lambda\overset{*}{f})$ parallel bleiben, was wir formal sehr einfach beweisen können[8]

$$\begin{aligned}
\mathrm{GRS}_{f,x}(\overset{*}{x}, \overset{*}{f}) &= -\frac{w}{p} \\
&= -\frac{\frac{\partial U(\overset{*}{x},\overset{*}{f})}{\partial f}}{\frac{\partial U(\overset{*}{x},\overset{*}{f})}{\partial x}} \\
&= -\frac{\frac{\partial U(\lambda\overset{*}{x},\lambda\overset{*}{f})}{\partial f}}{\frac{\partial U(\lambda\overset{*}{x},\lambda\overset{*}{f})}{\partial x}} \qquad \text{(wegen der Homogenität von } U(\cdot)\text{)} \\
&= \mathrm{GRS}_{f,x}(\lambda\overset{*}{x}, \lambda\overset{*}{f})
\end{aligned}$$

Fazit: Falls die Präferenzen homothetisch sind, d.h. falls $U(x, f)$ linear homogen ist, dann sind die Marshall'schen Nachfragen linear im Einkommen

$$\begin{aligned}
\hat{x}(p, w, \lambda b) &= \lambda \hat{x}(p, w, b) \quad \text{sowie} \\
\hat{f}(p, w, \lambda b) &= \lambda \hat{f}(p, w, b) \quad ,
\end{aligned}$$

[8] Da $U(\cdot)$ positiv homogen vom Grad 1 ist, folgt, daß die partiellen Ableitungen homogen vom Grad 0 sind. Es gilt einfach: $\partial_f U(\overset{*}{x}, \overset{*}{f}) = \partial_f U(\lambda\overset{*}{x}, \lambda\overset{*}{f})$ und $\partial_x U(\overset{*}{x}, \overset{*}{f}) = \partial_x U(\lambda\overset{*}{x}, \lambda\overset{*}{f})$.

was in Abbildung 2.21 dargestellt wird. Also sind beide Güter normal.

Einkommens-Konsum-Kurve und Engelkurven

Wir möchten jetzt weitere Darstellungen der schon vorgestellten Beziehungen behandeln. Wir betrachten den Pfad in $\mathbb{X}$, der über alle Optimalpunkte gebildet wird. Die *Einkommens-Konsum-Kurve* (EKK) besteht aus allen durch die Änderung von b erreichbaren Optima. Die EKK liegt somit im x-f-Diagramm und besteht aus zweidimensionalen Punkten. Betrachtet man nun die aus einer Änderung von b induzierte Änderung von x oder f, dann erhält man die *Engelkurve* für x oder für f.

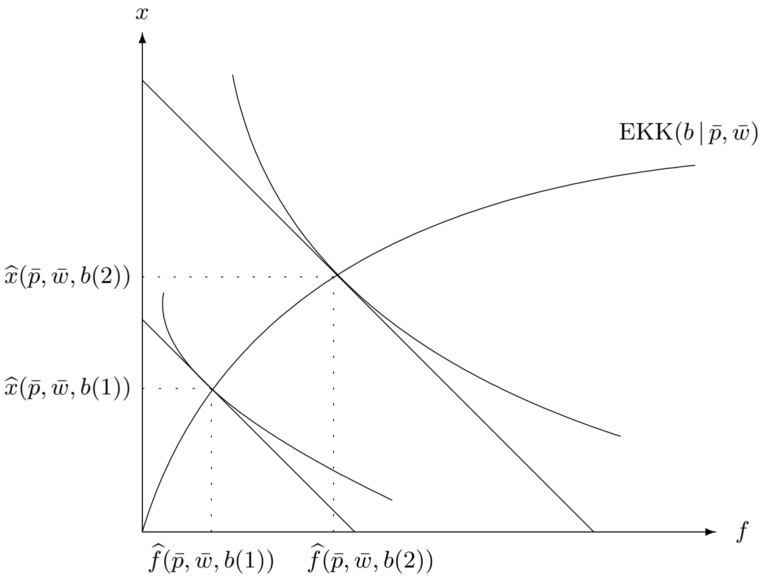


Abb. 2.22. Die Einkommens-Konsum-Kurve bei gegebenen Preisen $\bar{p}$ und $\bar{w}$.

Definition 2.11 (Einkommens-Konsum-Kurve – EKK).
Die Marshall'schen Nachfragen bei fixen Preisen $\bar{p}$ *und* $\bar{w}$ *und variablem Einkommen* b*, d.h.* $\hat{f}(\bar{p}, \bar{w}, b)$ *und* $\hat{x}(\bar{p}, \bar{w}, b)$*, lassen sich in der Einkommens-Konsum-Kurve (EKK) darstellen:*

$$EKK(b \,|\, \bar{p}, \bar{w}) = \Big(\hat{f}(\bar{p}, \bar{w}, b), \hat{x}(\bar{p}, \bar{w}, b)\Big)$$
$$= \Big\{(\overset{*}{x}, \overset{*}{f}) \in \mathbb{X} \quad b > 0 \,|\, (\overset{*}{x}, \overset{*}{f}, b) \quad \textit{löst} \quad \max U(x, f) \quad \textit{s.t.} \quad \bar{p} \cdot x + \bar{w} \cdot f = b\Big\}$$

Die Einkommens-Konsum-Kurve ist in Abbildung 2.22 dargestellt.

Definition 2.12 (Engelkurve).
Betrachtet man $\hat{x}(\bar{p}, \bar{w}, b)$ *und* $\hat{f}(\bar{p}, \bar{w}, b)$ *getrennt und stellt man die Relation zwischen ihnen und* b*, erhält man die sogenannten Engelkurven.*

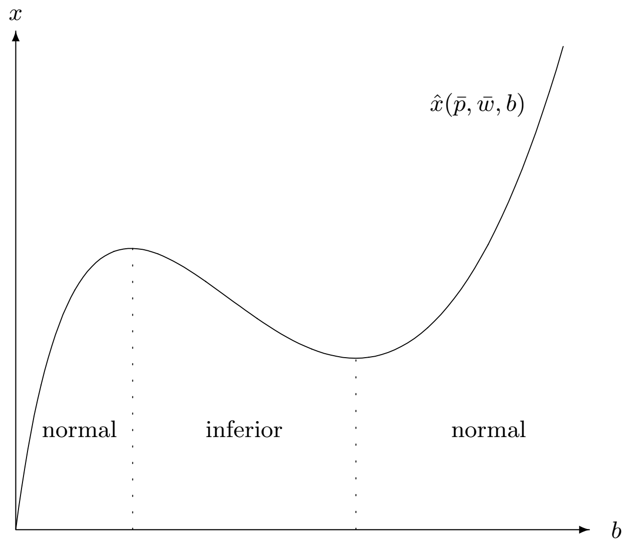


Abb. 2.23. Eine Engelkurve von $\hat{x}(\bar{p}, \bar{w}, b)$ bei gegebenen Preisen $\bar{p}$ und $\bar{w}$.

Abbildungen 2.23 und 2.24 zeigen zwei beispielhafte Engelkurven für $\hat{x}(\bar{p}, \bar{w}, b)$ und $\hat{f}(\bar{p}, \bar{w}, b)$. An dem Vorzeichen der Steigung der Engelkurven kann man erkennen, für welche Einkommen b die Güter x und f normale bzw. inferiore Güter sind.

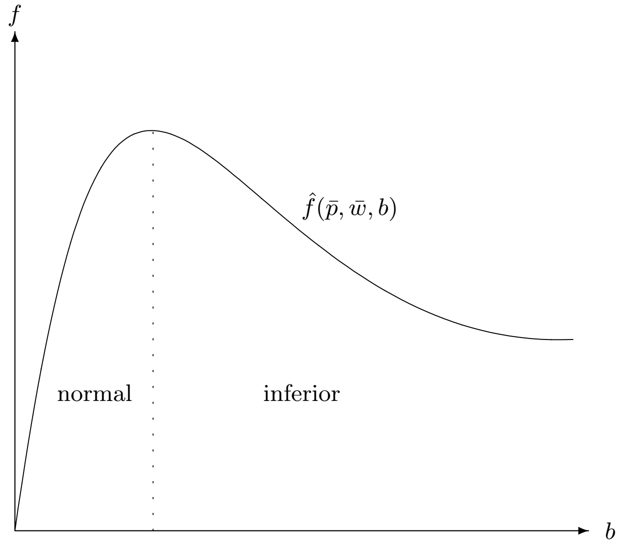


Abb. 2.24. Eine Engelkurve von $\hat{x}(\bar{p}, \bar{w}, b)$ bei gegebenen Preisen $\bar{p}$ und $\bar{w}$.

Die Steigung der Engelkurve entspricht zudem dem Vorzeichen der Einkommenselastizität.

Definition 2.13 (Einkommenelastizität).
Die Elastizität der Nachfrage nach dem Einkommen (oder Budget) berechnet sich aus

$$\eta_{x,b} = \lim_{\Delta b \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta b} \cdot \frac{b}{x} = \frac{\partial x}{\partial b} \cdot \frac{b}{x} \quad .$$

Dabei meint man mit x die Marshall'sche Nachfrage $\hat{x}$. x ist normal, wenn $\eta_{x,b} > 0$ und demzufolge inferior, wenn $\eta_{x,b} < 0$.

Anmerkung 2.14 (Homothetische Präferenzen und EKK).
Bei homothetischen Präferenzen sind sowohl EKK als auch die Engelkurven Geraden durch den Ursprung, und die Einkommenselastizität ist gleich 1.

Abbildung 2.21 zeigt den ersten Fall.

2.4.3 Preisvariation und Konsumentenentscheidung

Falls sowohl p als auch w mit demselben $\lambda > 0$ multipliziert werden, dann entspricht dies einer Einkommensreduktion um den Faktor $\frac{1}{\lambda}$, was wir schon in Abschnitt 2.4.2 ausführlich behandelt haben. Wir betrachten nun solche Variationen von p und w, bei denen sich die Steigung der Budgetgeraden $-\frac{w}{p}$ ändert.

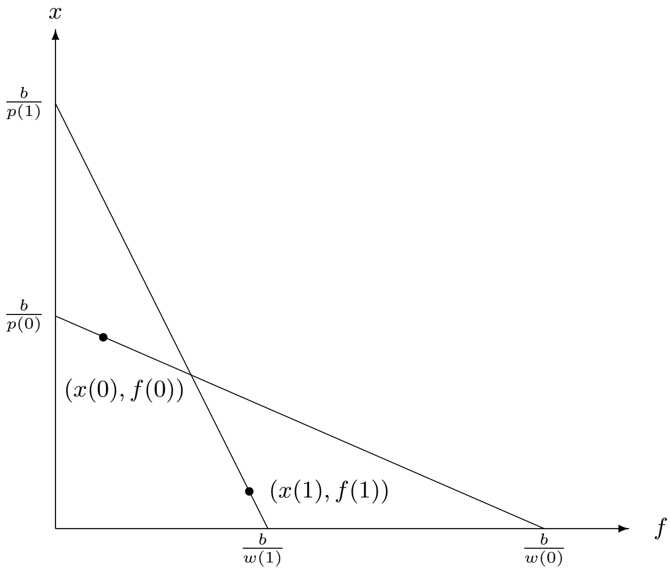


Abb. 2.25. Widersprüchliche Konsumwahlen und das Axiom der offenbarten Präferenzen. Hier $p(0) > p(1)$ und/oder $w(0) < w(1)$.

Abbildung 2.25 zeigt einen solchen Fall. Fragt der Konsument für $p(0)$ und $w(0)$ das Güterbündel $(x(0), f(0))$ nach, sollte sich bei rationalem Verhalten des Konsumenten die Nachfrage nach der Preisänderung nicht im Bereich um $(x(1), f(1))$ befinden, da dies unterhalb der ursprünglichen Budgetgeraden liegt, also auch vorher schon hätte gewählt werden können. Diese kurze Überlegung entspricht dem berühmten *Axiom der offenbarten Präferenzen.*

Definition 2.15 (Axiom der offenbarten Präferenzen – AoP).

1. *Falls der Konsument in Situation* $(p(0), w(0), b(0))$ *die Nachfrage* $(x(0), f(0))$ *wählt, aber auch* $(x(1), f(1))$ *hätte wählen können, dann offenbart er uns, daß er* $(x(0), f(0))$ *gegenüber* $(x(1), f(1))$ *vorzieht.*
2. *Falls der Konsument in Situation* $(p(1), w(1), b(0))$ *die Nachfrage* $(x(1), f(1))$ *wählt, aber auch* $(x(0), f(0))$ *hätte wählen können, dann offenbart er uns, daß er* $(x(1), f(1))$ *gegenüber* $(x(0), f(0))$ *vorzieht.*

Zieht der Konsument so in einer Situation $(x(0), f(0))$ vor und in einer anderen $(x(1), f(1))$, handelt er inkonsistent und verletzt das obige Axiom. Abbildung 2.26 zeigt graphisch die Implikation des AoP: Ausgehend von $(x(0), f(0))$ muß die durch eine Abnahme in p und eine Zunahme in w induzierte Nachfrageverschiebung sich im gezeigten Bereich befinden. Der gezeigte Punkt $(x(1), f(1))$ genügt zum Beispiel dieser Bedingung.

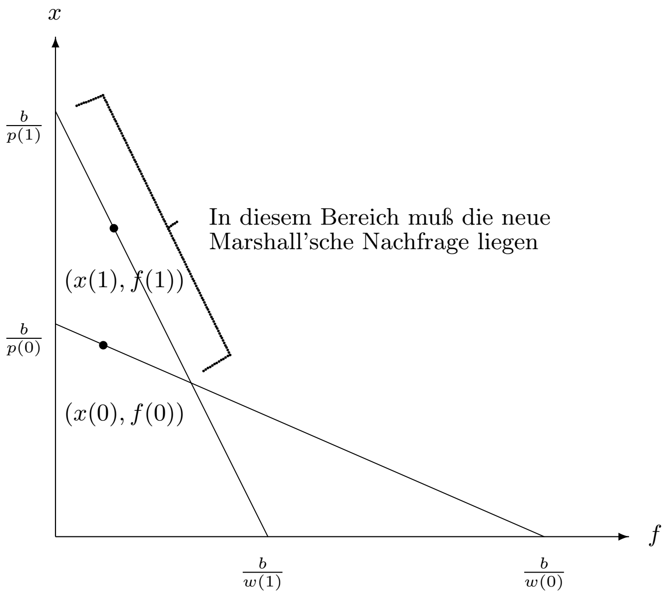


Abb. 2.26. Die Implikation des Axioms der offenbarten Präferenzen.

Anmerkung 2.16 (Mathematische Präzisierung).
Ist $p(1) \cdot x(0) + w(1) \cdot f(0) < b(0)$, muß für $(x(0), f(0)) \neq (x(1), f(1))$ die Ungleichung $p(0) \cdot x(1) + w(0) \cdot f(1) > b(0)$ gelten, damit sich der Konsument konsistent verhält. In diesem Bereich muß die neue Nachfrage liegen.

Die obige mathematische Präzisierung heißt auf deutsch: „Wenn das alte Konsumoptimum unter den neuen Preisen kaufbar ist, dann muß das neue Konsumoptimum unter den alten Preisen nicht kaufbar sein, damit der Konsument sich konsistent verhält.“

Satz 4 (AoP und Nutzenmaximierung)

1. *Falls (x, f) aus der Nutzenmaximierung hergeleitet ist, so erfüllt (x, f) das AoP.*
2. *Falls (x, f) das AoP erfüllt, dann gibt es eine Nutzenfunktion, aus der (x, f) hergeleitet werden kann.*

Anmerkung 2.17 (Mehr-Güter-Fall).
Teil 2 von Satz 4 gilt nicht notwendigerweise für den Fall mit mehr als zwei Gütern, denn dabei braucht man zusätzlich eine Art Transitivitätseigenschaft des AoP.

Giffengüter und Stabilität von Gleichgewichten

Fällt die Nachfrage immer mit steigendem Preis, d.h. sind immer $\partial_p \hat{x}(p, w, b) < 0$ und $\partial_w \hat{f}(p, w, b) < 0$?

Diese Frage ist wichtig für die Stabilität von Gleichgewichten. Ist $x(p, w)$ steigend in p, dann ist der Gleichgewichtspreis nicht notwendigerweise stabil, denn im in Abbildung 2.27 dargestellten Beispiel gilt: Rechts von $\overset{*}{p}$ würde p aufgrund der höheren Nachfrage weiter steigen, links von $\overset{*}{p}$ würde die mangelnde Nachfrage die Preise weiter sinken lassen.

Auch auf dem Arbeitsmarkt gibt es nicht zwingend einen stabilen Gleichgewichtslohn, nämlich, wenn die Nachfrage nach Freizeit steigend im Lohn ist. In einem solchen Fall wäre das Arbeitsangebot fallend im Lohn. Rechts von $\overset{*}{w}$ würde w dann weiter steigen, links davon weiter fallen.

Da die Nutzenmaximierung im Preis steigende Marshall'sche Nachfragefunktionen nicht ausschließt, können die oben vorgestellten Fälle wohl auftauchen. Wir nennen in diesem Fall das Gut ein *Giffengut*.

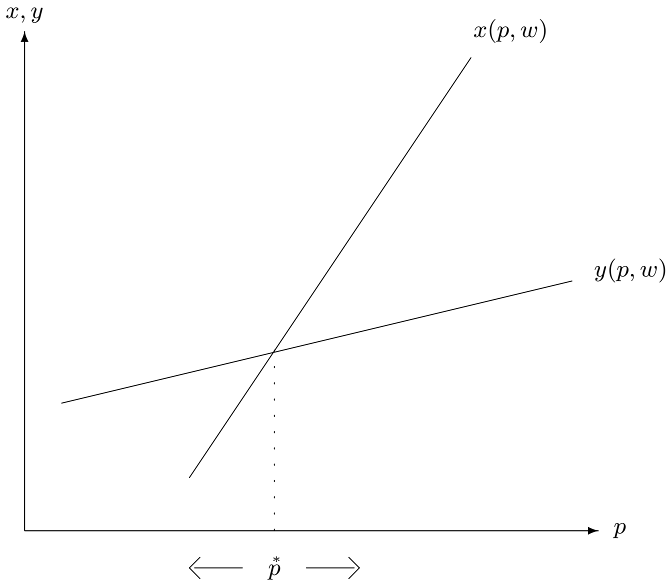


Abb. 2.27. Im Preis steigende Güternachfrage und nicht stabiles Gleichgewicht.

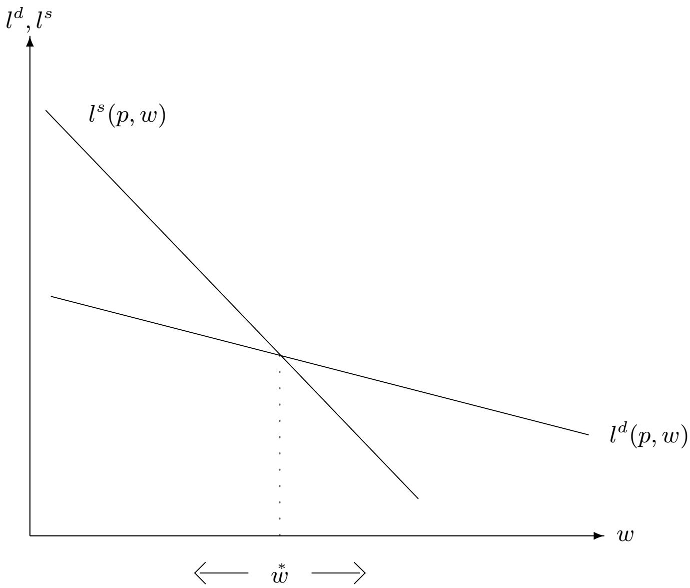


Abb. 2.28. Im Preis sinkendes Arbeitsangebot und nicht stabiles Gleichgewicht.

Definition 2.18 (Giffengut).
Ein Gut, dessen Nachfrage mit steigendem Preis steigt, heißt Giffengut.
Falls $\partial_p \hat{x}(p, w, b) > 0$*, dann ist* x *ein Giffengut.*
Falls $\partial_w \hat{f}(p, w, b) > 0$*, dann ist* f *ein Giffengut.*

Es sollte hier erwähnt werden, daß Giffengut zu sein eine lokale Eigenschaft ist und von den Parametern (p, w, b) abhängt.

Satz 5 (Nutzenmaximierungshypothese und Giffengüter)
Die Nutzenmaximierungshypothese schließt Giffengüter nicht aus!

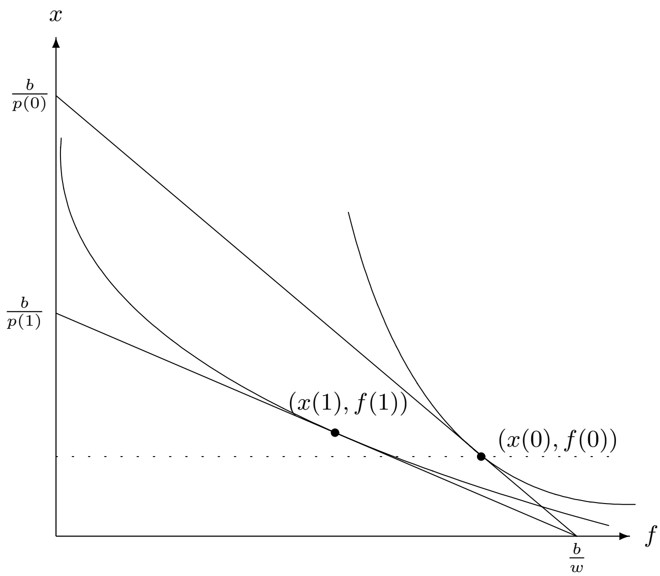


Abb. 2.29. x ist ein Giffengut: $p(1) > p(0)$ und $x(1) > x(0)$.

Woran können wir Giffengüter erkennen? Nehmen wir an, für $p(0)$ und $w(0)$ wird $(x(0), f(0))$ nachgefragt, und p steigt auf $p(1) > p(0)$. Liegt dann die neue Nachfrage $(x(1), f(1))$ oberhalb von $(x(0), f(0))$, wäre x ein Giffengut – dies wird durch die Nutzenmaximierung nicht ausgeschlossen, denn wir könnten zwei Indifferenzkurven zeichnen, die $(x(0), f(0))$ bzw. $(x(1), f(1))$ rationalisieren.

Abbildung 2.29 bezieht sich auf diesen Fall. Hier kann man direkt ablesen, daß x ein Giffengut ist, denn wenn der Preis von $p(0)$ auf $p(1)$ steigt, nimmt auch die Nachfrage nach x zu. Ein nützliches Werkzeug für die Bestimmung von Giffengütern ist die Preis-Konsum-Kurve.

Definition 2.19 (Preis-Konsum-Kurve – PKK).
Die Marshall'schen Nachfragen bei fixem Preis eines Gutes und fixem Budget $\hat{x}(p,\bar{w},\bar{b})$ und $\hat{f}(p,\bar{w},\bar{b})$ lassen sich für variable Preise in der Preis-Konsum-Kurve (PKK) darstellen:

$$
\begin{aligned}
PKK(p \,|\, \bar{w}, \bar{b}) &= \Big(\hat{f}(p,\bar{w},\bar{b}), \hat{x}(p,\bar{w},\bar{b}\Big) \\
&= \Big\{(\overset{*}{x}, \overset{*}{f}) \in \mathbb{X} \quad p > 0 \quad | \quad (\overset{*}{x}, \overset{*}{f}, p) \quad \textit{löst} \\
&\qquad \max_{(x,f)\in\mathbb{X}} U(x,f) \quad s.t. \quad p \cdot x + \bar{w} \cdot f = \bar{b}\Big\}
\end{aligned}
$$

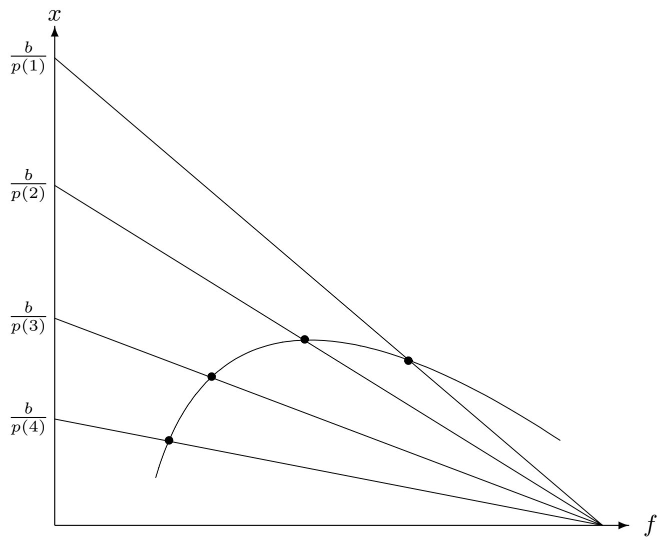


Abb. 2.30. Eine mögliche Preis-Konsum-Kurve für x.

Abbildung 2.30 stellt eine mögliche PKK graphisch dar. Die PKK verbindet alle optimalen Güterbündel, die bei einem Preis von p gewählt wurden. Sie stellt den Verlauf der Nachfrage nach x in Abhängigkeit vom Preis p auf dem x-f-Diagramm anstatt auf dem x-p-Diagramm dar. Bei gewißen Bereichen ist x kein Giffengut, bei anderen doch. x ist für alle Preise $p < p(2)$ ein Giffengut, da in diesem Bereich seine Nachfrage mit sinkendem Preis sinkt (abnehmender Kurvenzweig in Abbildung 2.30). Da w fix bleibt, können wir aus $\mathrm{PKK}(p \mid \bar{w}, \bar{b})$ die Reaktion von f auf den Preis des anderen Gutes ablesen: Diese Beziehung werden wird im nächsten Abschnitt durch die Begriffe *Komplemente* und *Substitute* vertiefen.

Slutsky-Zerlegung

Da also die Nutzenmaximierung alleine Giffengüter nicht ausschließt, benötigen wir Zusatzannahmen, die sichern, daß die Nachfrage fallend im Preis ist. Um diese zu finden, nimmt man gedanklich eine Einkommenskompensation vor: Wenn der Preis steigt, dann geben wir dem Konsumenten in unserem Gedankenmodell so viel Einkommen, daß er sich seine ursprüngliche Nachfrage wieder leisten kann.

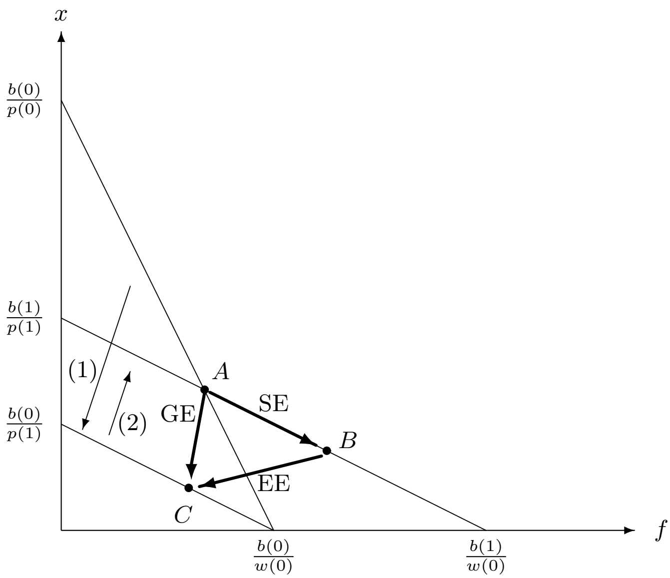


Abb. 2.31. Substitutions-, Einkommens- und Gesamteffekt bei einer Preisänderung.

Die *Slutsky-Kompensation* wird in Abbildung 2.31 dargestellt und wie folgt interpretiert:

1. Ändert sich z.B. die Situation von $(p(0), w(0), b(0))$ auf $(p(1), w(0), b(0))$ (hier durch die Preiserhöhung von x, d.h. $p(1) > p(0)$), ändert sich die

Steigung der Budgetgeraden. Diese Änderung entspricht der Drehung (1) in Abbildung 2.31.

2. Nun wird das Einkommen b so kompensiert, daß

$$b(1) = p(1) \cdot x(0) + w(0) \cdot f(0) \quad ,$$

d.h. die Budgetgerade wird parallel verschoben, bis sie wieder durch A geht. Das entspricht der Translation (2) in Abbildung 2.31.

3. Dadurch verschiebt sich die Nachfrage zunächst von A nach B (Substitutionseffekt – SE). Wird nun die Budgetkompensation wieder rückgängig gemacht – sie wurde ja nur in Gedanken durchgeführt, verschiebt sich die Nachfrage von B nach C (Einkommenseffekt – EE).

4. Der Gesamteffekt (GE) der Preissteigerung ist also die Veränderung von A nach C.

Man spricht auch von der Slutsky-Zerlegung des Gesamteffektes: der Gesamteffekt ist darstellbar als vektorielle Summe des Substitutions- und Einkommenseffekts.

$A \to B$	Slutsky-Substitutionseffekt
$B \to C$	Slutsky-Einkommenseffekt
$A \to C$	Gesamteffekt

Aufbauend auf der Slutsky-Zerlegung machen wir einen wichtigen Fortschritt in unserer Suche nach Kriterien, die die für die Stabilität von Gleichgewichten gefährlichen Giffengüter ausschließen.
Die Zerlegung ermöglicht uns nämlich den Sprung zwischen Gesamteffekt (der Änderung von x wegen p) und Einkommenseffekt (der Änderung von x wegen b), sodaß Giffengüter auf normale oder inferiore Güter bezogen werden können.

Satz 6 (Normale Güter und Giffengüter) *Falls das betrachtete Gut das AoP erfüllt und „normal“ ist, dann ist die Nachfrage fallend im Preis. Normale Güter sind keine Giffengüter!*

Beweis. Vgl. Abbildung 2.32, unten folgt ein algebraischer Beweis.

□

Der Substitutionseffekt SE_x nach Slutsky ist immer negativ. Auf diese Eigenschaft haben wir früher bereits zweimal hingewiesen. In Kapitel 1 (Abschnitt 1.4) stellten wir die Grundgedanken der im Preis abnehmenden Nachfrage vor.

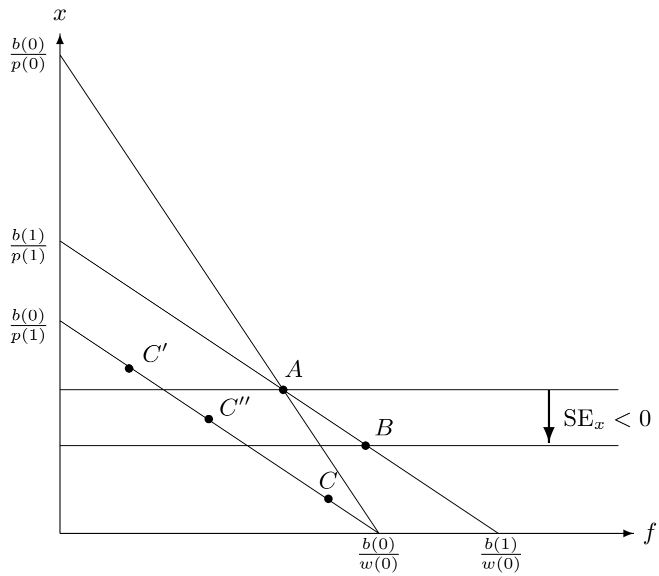


Abb. 2.32. Normale Güter sind keine Giffengüter.

Die logischen Argumente, die wir aufführten, entsprechen wörtlich der Logik des Axioms der offenbarten Präferenzen, unseres zweiten Argumentes. In Abbildung 2.31 sieht man in der Tat, daß B (auf der Budgetgeraden durch den Punkt $\left(\frac{b(1)}{w(0)}, \frac{b(1)}{p(1)}\right)$ liegend) nicht links von A liegen kann, da dies dem AoP widerspricht. Bitte beachten Sie hier die Bedeutung von „negativem Substitutionseffekt“ : „Negativ“ heißt hier „mit einem der Preisänderung entgegengesetzten Vorzeichen“. Wenn der Preis p zunimmt, dann ist die Änderung in x aus dem Substitutionseffekt $\mathrm{SE}_x < 0$; nimmt p ab, dann ist $\mathrm{SE}_x > 0$.

Wenn wir davon ausgehen, daß x hier ein normales Gut ist, dann ist die Marshall'sche Nachfrage steigend im Einkommen: Wenn das Einkommen von $b(1)$ auf $b(0)$ sinkt, fällt die Nachfrage nach x; der Einkommenseffekt ist also auch negativ. Da eine Preiszunahme eine Kaufkraftabnahme (reale Budgetabnahme) bedingt, muß bei normalen Gütern eine Preiszunahme einen negativen Einkommenseffekt erzeugen ($p \uparrow \Rightarrow b \downarrow \Rightarrow \mathrm{EE}_x \downarrow$), was einen negativen Gesamteffekt erzeugt – die Nachfrage fällt also bei normalen Gütern, wenn der Preis steigt! *Normale Güter ($\eta_{x,b} > 0$) sind immer auch gewöhnliche Güter ($\varepsilon_{x,p} < 0$).* Somit ist Satz 6 mindestens wörtlich bewiesen.

Damit x ein Giffengut ist, muß der Gesamteffekt positiv sein. Dafür muß $\mathrm{EE}_x \uparrow$, damit er SE_x nicht widerspricht, was heißt, daß x ein inferiores Gut ist! *Giffengüter ($\varepsilon_{x,b} > 0$) sind deshalb zwingend inferiore Güter ($\eta_{x,b} < 0$).*

Analytische Herleitung der Slutsky-Zerlegung

Definieren wir die *einkommenskompensierte Nachfrage* an einer beliebigen Stelle $(\overline{p}, \overline{w}, \overline{b})$ als

$$g(p,w) = \hat{x}(p,w,b) \quad \text{mit} \quad b = p \cdot \hat{x}(\overline{p}, \overline{w}, \overline{b}) + w \cdot \hat{f}(\overline{p}, \overline{w}, \overline{b}) \quad ,$$

die die Kaufkraft trotz Preisänderungen konstant hält: Das Einkommen wird immer so angepaßt, daß der alte Punkt trotz der Preiszunahme finanziell tragbar bleibt. Bewegungen entlang dieser Nachfragekurve entsprechen dem Substitutionseffekt, wie wir es durch die Ableitung von $g(p,w)$ nach p zeigen können. Leiten wir zuerst $g(p,w)$ ab

$$\mathrm{SE}_x = \partial_p\, g(p,w) = \partial_p\, \hat{x}(p,w,b) + \partial_b\, \hat{x}(p,w,b) \cdot \hat{x}(\overline{p}, \overline{w}, \overline{b}) \quad ,$$

dann formen wir die Terme um, damit wir den Gesamteffekt GE_x in Abhängigkeit vom Substitutionseffekt SE_x und vom Einkommenseffekt EE_x darstellen können

$$\begin{array}{ccccc} \partial_p\, \hat{x}(p,w,b) & = & \partial_p\, g(p,w) & - & \partial_b\, \hat{x}(p,w,b) \cdot \hat{x}(\overline{p}, \overline{w}, \overline{b}) \\ \mathrm{GE}_x & = & \underbrace{\mathrm{SE}_x}_{<0 \text{ nach AoP}} & + & \mathrm{EE}_x \end{array} \qquad \text{(Slutsky-Zerlegung)}$$

Ist $\mathrm{EE}_x < 0$, d.h. ist x ein normales Gut (die Kaufkraft oder Budget ist ja wegen der Preiszunahme gesunken), dann ist $\mathrm{GE}_x < 0$ und somit x kein Giffengut.

Zusammenfassend können wir an drei Fälle denken, die alle möglichen Kombinationen zwischen Einkommenseffekt und Gesamteffekt darstellen und dem Leser einen Gesamtüberblick ermöglichen sollten.
Wir gehen davon aus, daß p zunimmt, was implizit b reduziert. Die letzte Spalte der folgenden Tabelle bezieht sich auf die drei Punkte (C, C' und C''), die in Abbildung 2.32 gezeigt werden.

Bezeichnung	$\varepsilon_{x,p} \lesseqgtr 0$	GE_x	$= \mathrm{SE}_x$	$+ \mathrm{EE}_x$	Bezeichnung	$\eta_{x,b} \gtreqless 0$	
Giffengut	> 0	$+$	$-$	$+$	inferior	< 0	(C')
gewöhnlich	< 0	$-$	$-$	$+$	inferior	< 0	(C'')
gewöhnlich	< 0	$-$	$-$	$-$	normal	> 0	(C)

Ein „+" oder „−" bei den drei auftretenden Effekten (GE, SE und EE) zeigt die Zunahme oder Abnahme in x, gegeben eine Zunahme von seinem Preis p. Aus Fall (C') ist ersichtlich, daß Giffengüter ausschließlich inferiore Güter sein können. Inferiore Güter können aber auch gewöhnliche Güter sein, je nach dem, ob der Substitutionseffekt wie in (C'') den Einkommenseffekt dominiert.

Als letzter Punkt: Normale Güter führen unbedingt zu gewöhnlichen Gütern, wie (C) zeigt. Die Fallunterscheidung können wir auch nach dem Vorzeichen von $\varepsilon_{x,p}$ bzw. $\eta_{x,b}$ vornehmen. Sie ist auch in der Tabelle zusammengefaßt.

Der Vermögenseffekt

Bis anhin wurde $\partial_p\,\hat{x}(p,w,b)$ bzw. $\partial_w\,\hat{f}(p,w,b)$ betrachtet. Berücksichtigen wir nun wieder, daß das aus der Anfangsausstattung $(\frac{\pi}{p},\overline{f})$ stammende Budget $b = w\cdot\overline{f}+\pi(p,w)$ selbst von den Preisen p und w abhängt, ergibt sich ein zusätzlicher Effekt, genannt Vermögenseffekt (VE). Wir möchten ihn analytisch für Änderungen in p und in w untersuchen. Für die folgende Herleitung gehen wir somit von der Definition

$$\begin{aligned} x(p,w) &= \hat{x}(p,w,w\overline{f}+\pi(p,w)) \\ f(p,w) &= \hat{f}(p,w,w\overline{f}+\pi(p,w)) \end{aligned}$$

aus.

$$\begin{aligned} \partial_p\,x(p,w) &= \partial_p\,\hat{x}(p,w,\overbrace{w\cdot\overline{f}+\pi(p,w)}^{b(p,w)}) \\ &= \underbrace{\partial_p\,\hat{x}(p,w,b)}_{\mathrm{GE}_x} + \underbrace{\partial_b\,\hat{x}(p,w,b)\cdot y(p,w)}_{\mathrm{VE}_x} \qquad \text{(Hotelling Lemma)} \end{aligned}$$

und analog

$$\begin{aligned} \partial_w\,f(p,w) &= \partial_w\,\hat{f}(p,w,w\cdot\overline{f}+\pi(p,w)) \\ &= \underbrace{\partial_w\,\hat{f}(p,w,b)}_{\mathrm{GE}_f} + \underbrace{\partial_b\,\hat{f}(p,w,b)\cdot(\overline{f}-l^d(p,w))}_{\mathrm{VE}_f} \qquad \text{(Hotelling Lemma)} \end{aligned}$$

Mit „Hotelling Lemma“ sind die Beziehungen zwischen partiellen Ableitungen der Gewinnfunktion und jeweiliger Faktornachfrage gemeint, die wir auf Seite 30 schon behandelt haben.
Die Vermögenseffekte können nun bewirken, daß letztendlich x in p und f in w steigen. Wenn f in w steigt, dann sinkt aber $l^s = \overline{f}-f$ in w!

Anmerkung 2.20 (Backward bending labour supply curve).
Auch auf dem Arbeitsmarkt kann es vorkommen, daß das Arbeitsangebot der Arbeitnehmer mit steigendem Lohn sinkt: Wenn der Lohn (welcher die Opportunitätskosten – also den „Preis" – von Freizeit darstellt) steigt, dann sollte normalerweise das Angebot nach Arbeit steigen, also die Freizeitnachfrage sinken. Steigt der Lohn aber immer weiter, bietet man vielleicht irgendwann wieder weniger Arbeit an, um mehr Freizeit zu genießen. In diesem Fall wäre Freizeit dann scheinbar auch ein Giffengut. Daher beobachtet man manchmal die *backward bending labour supply curve.*

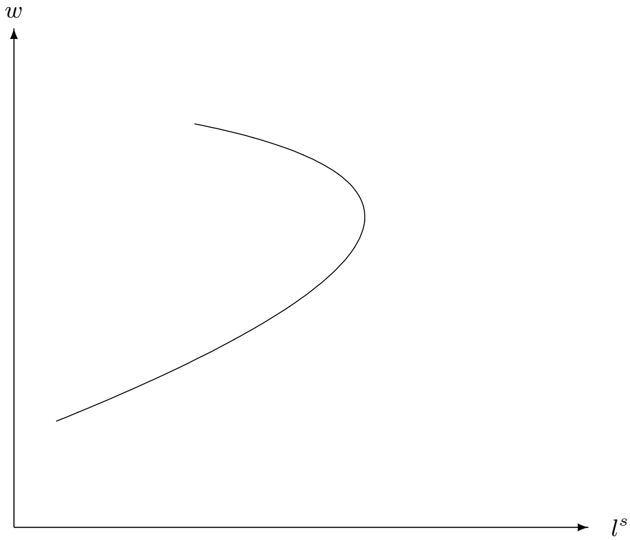


Abb. 2.33. Eine *backward bending labor supply curve.*

Dabei muß man aber zwischen dem Vermögenseffekt und Giffengütern unterscheiden, denn das Verhalten der letzten hängt ausschließlich vom direkten Preiseffekt, nicht vom Vermögenseffekt ab. Zwei Beispiele mögen dies illustrieren.

Wir beginnen mit einem Beispiel ohne Substitutionseffekt. Dieses Beispiel verdeutlicht den obigen Fall, wo eine *backward bending labour supply curve* aus dem Vermögenseffekt erzeugt wird. Bei linear-limitationalen Nutzenfunktionen ergibt sich typischerweise kein Substitutionseffekt, denn alle Güter sind Komplemente. Aus diesem Grund ist sie konstruktionsgemäß eine gute Kandidatin für unsere Illustration.

Beispiel 2.21 (Backward bending labour supply curve ohne Giffengut-Charakter). Man betrachte das Maximierungsproblem

$$\max_{x,f} \quad \min\{x, f\} \quad \text{s.t.} \quad px + wf = w\bar{f} \quad .$$

Wegen der L-förmigen Gestaltung der Indifferenzkurven werden wir immer am „Knick" optimieren, also dort, wo $x = f$ gilt. Die Nebenbedingung ist somit die einzige relevante Gleichung und läßt sich in

$$(p + w)f = w\bar{f}$$

vereinfachen, was zu

$$f = \frac{w\bar{f}}{p + w}$$

führt. Da wir uns für den Einfluß einer Lohnzunahme auf die Freizeitnachfrage interessieren, leiten wir alles nach w ab und bekommen

$$\partial_w f = \frac{\bar{f}(p + w) - w\bar{f}}{(p + w)^2} = \frac{\bar{f}p}{(p + w)^2} > 0$$

solange $\bar{f} > 0$: Höhere Lohnsätze erhöhen die Freizeitnachfrage und senken somit das Arbeitsangebot. Da in diesem Beispiel der Substitutionseffekt per Konstruktion auszuschließen ist, kann nur der Vermögenseffekt Ursache der *backward bending labour supply curve* sein.

Als weiteres Beispiel[9] möchten wir eine Nutzenfunktion vorstellen, durch welche Freizeit Giffengutcharakter besitzt. Dadurch ergibt sich auch eine *backward bending labour supply curve*, die nur scheinbar auf den Vermögenseffekt zurückzuführen ist.

[9] Vgl. Böhm [1984].

Beispiel 2.22 (Backward bending labour supply curve mit Giffengutcharakter). Betrachten wir folgendes Maximierungsproblem:

$$\max_{x,f} \quad U(x,f) = (f-1)(x-2)^{-2} \quad \text{s.t.} \quad px + wf = b,\, 2 > x \geqslant 0,\, f \geqslant 1 \quad .$$

Wir bilden die Lagrange-Funktion

$$L = U(x,f) + \lambda(b - px - wf) + \alpha(f-1) + \beta x \quad .$$

Die Nutzenfunktion ist quasikonkav, kann jedoch durch eine monotone Transformation in eine konkave Funktion überführt werden. Wir erhalten somit die notwendigen und hinreichenden Bedingungen

$$\begin{aligned} \partial_f L &= (x-2)^{-2} - \lambda w + \alpha = 0 \quad , \\ \partial_x L &= -2(f-1)(x-2)^{-3} - \lambda p + \beta = 0 \quad , \end{aligned}$$

und

$$\lambda(b - wf - px) = 0,\, \alpha(f-1) = 0,\, \beta x = 0 \quad .$$

Da $U(x,f)$ monoton ist, ist die Budgetbedingung bindend, d.h. $\lambda > 0$.

1. Sei $\alpha > 0$, $\beta > 0$, dann gilt $f = 1$, $x = 0$, $b = w$.
2. Sei $\alpha = 0$, $\beta > 0$, es folgt $x = 0$, $f = b/w$, $b \geqslant w$. Weiter folgt:

   $$\beta = \frac{p - w(f-1)}{4pw} \quad ,$$

   deshalb muß gelten

   $$f < \frac{w+p}{w} \quad .$$

3. Sei $\alpha = \beta = 0$, daraus folgt $f = \frac{p}{2w}(2-x) + 1$, $2 > x \geqslant 0$.
4. Sei $\alpha > 0$, $\beta = 0$, es folgt $f = 1$ und damit $\lambda = 0$. Dies ist ein Widerspruch.

Wir erhalten folgenden Expansionspfad:

$$\left\{ (x,f) \,\middle|\, \begin{array}{ll} x = 0, & 1 \leqslant f < 1 + \frac{w}{p} \\ 0 \leqslant x < 2, & f = \frac{p}{2w}(2-x) + 1 \end{array} \right\}$$

Durch Einsetzen in die Budgetbedingung erhalten wir die Nachfragefunktionen

$$f(p,w,b) = \begin{cases} 2 + \frac{1}{w}(2p-b) & \text{für } 2p+w > b \geqslant p+w \\ \frac{b}{w} & \text{für } p+w > b \end{cases}$$

$$x(p,w,b) = \begin{cases} \frac{2}{p}(b-w) - 2 & \text{für } 2p+w > b \geqslant p+w \\ 0 & \text{für } p+w > b \end{cases}$$

Freizeit ist ein Giffengut für (w,p,b) genau dann, wenn der direkte Preiseffekt positiv ist. Für den direkten Preiseffekt gilt:

$$\partial_w f = \begin{cases} \frac{1}{w^2}(b-2p) & \text{für } 2p+w > b \geqslant p+w \\ -\frac{b}{w^2} & \text{für } p+w > b \end{cases}$$

Also gilt:

$$\partial_w f > 0, \text{wenn } 2p+w > b \geqslant p+w \text{ und } b > 2p \text{ ist.}$$

In diesem zweiten Beispiel beobachten wir ein reines Giffengut, denn das Budget b ist per Annahme fix. Obwohl sich auch in diesem Fall eine *backward bending labour supply curve* ergibt, hat sie mit dem Vermögenseffekt nichts zu tun. Hier ist es so, daß die Nachfrage nach Freizeit im Preis, dem Lohn, steigt. Man beobachte, daß sich der Begriff „Giffengut" auf die Nachfrage bei festem Einkommen bezieht – also Vermögenseffekte unberücksichtigt bleiben.

Eine solche Anreizstruktur kann übrigens von einer progressiven Einkommenssteuer weiter verstärkt werden. Das knappe Gut „Freizeit" kann Giffengutcharakter haben, zudem wäre die Nettoeinkommenszunahme unter einer solchen Art Besteuerung noch kleiner als üblich, was eine Reduktion des Arbeitsangebotes zur Folge haben könnte.

2.5 Simultanes Gleichgewicht auf Güter- und Arbeitsmarkt

Nachdem wir dank der Abschnitte 2.3 und 2.4 das Verhalten von Firmen und Haushalten im reduzierten Fall von zwei Gütern modelliert haben, sind wir nun in der Lage, der in Abschnitt 2.2 gestellten Kritik zu Abschnitt 2.1 entgegenzuwirken. In 2.2 hatten wir nämlich festgestellt, daß eine separate Analyse von Güter- und Arbeitsmarkt die Interdependenz zwischen ihnen nicht erklären kann. Es war somit unmöglich, die Endeffekte der Einführung einer Mengensteuer auf das gesamte ökonomische System herzuleiten.

In diesem Abschnitt werden wir somit den in 2.3 und 2.4 vermittelten Stoff in ein einfaches volkswirtschaftliches Gesamtmodell integrieren. In den folgenden Kapiteln werden wir dieses Modell stufenweise erweitern.

2.5.1 Walras-Gleichgewicht

Definition 2.23 (Walras-Gleichgewicht).
Ein Walras-Gleichgewicht ist eine Allokation $(\overset{*}{x}, \overset{*}{y}, \overset{*}{l^s}, \overset{*}{l^d})$ *und ein Preissystem* $(\overset{*}{p}, \overset{*}{w})$, *sodaß gilt:*

1. *Gewinnmaximierung:* $(\overset{*}{y}, \overset{*}{l^d})$ *maximieren den Gewinn der Unternehmen* $\pi(\overset{*}{p}, \overset{*}{w}) = \overset{*}{p} \cdot y - \overset{*}{w} \cdot l^d \quad mit \quad y \geqslant 0, l^d \geqslant 0 \quad s.t. \quad y = T(l^d)$
2. *Nutzenmaximierung:* $(\overset{*}{x}, \overset{*}{l^s})$ *maximieren den Nutzen der Konsumenten* $U(x, \overline{f} - l^s) \quad mit \quad \underline{x} \leqslant x, 0 \leqslant l^s \leqslant \overline{f} \quad s.t. \quad \overset{*}{p} \cdot x = \overset{*}{w} \cdot l^s + \pi(\overset{*}{p}, \overset{*}{w})$
3. *Markträumung auf Gütermarkt:* $\overset{*}{x} = \overset{*}{y}$
4. *Markträumung auf Arbeitsmarkt:* $\overset{*}{l^s} = \overset{*}{l^d}$

Konsumenten und Produzenten versuchen also, ihre Zielfunktion zu maximieren (1. und 2.); und die beiden Märkte sind geräumt (3. und 4.).

Das Walras-Gleichgewicht löst somit das Problem der Interdependenz zwischen Güter- und Arbeitsmarkt. Wie können wir es graphisch darstellen?

Fangen wir mit der Nutzenmaximierung der Konsumenten an: Verschiebt man wie in Abbildung 2.34 Budgetgerade und Indifferenzkurve um $\overline{f}$ nach links, erhält man auf der waagerechten Achse das Arbeitsangebot l^s, da dieses gerade die Differenz von f und $\overline{f}$ ist. In $l^s = 0$ hat die verschobene Budgetgerade den x-Wert $\frac{\pi}{p}$, denn $p \cdot x = w \cdot 0 + \pi$, d.h. $x = \frac{\pi}{p}$.

Allgemein gilt:

$$x = \frac{\pi}{p} + \frac{w}{p} \cdot l^s \quad .$$

Analog können wir die Gewinnmaximierung des Produzenten graphisch wie in Abbildung 2.35 darstellen: Technologiefunktion und Isogewinnlinie (rechte Seite) werden einfach an der y-Achse gespiegelt.
Hier hat nun die Isogewinnlinie für $l^d = 0$ den y-Wert $\frac{\pi}{p}$, da $\pi = p \cdot y - w \cdot 0$. Daraus folgt, daß $y = \frac{\pi}{p}$. Allgemein gilt somit

$$y = \frac{\pi}{p} + \frac{w}{p} \cdot l^d \quad .$$

Mit diesen zwei Graphen können wir die Maximierungsprobleme zusammenfügen, was in Abbildung 2.36 auf Seite 67 dargestellt wird.

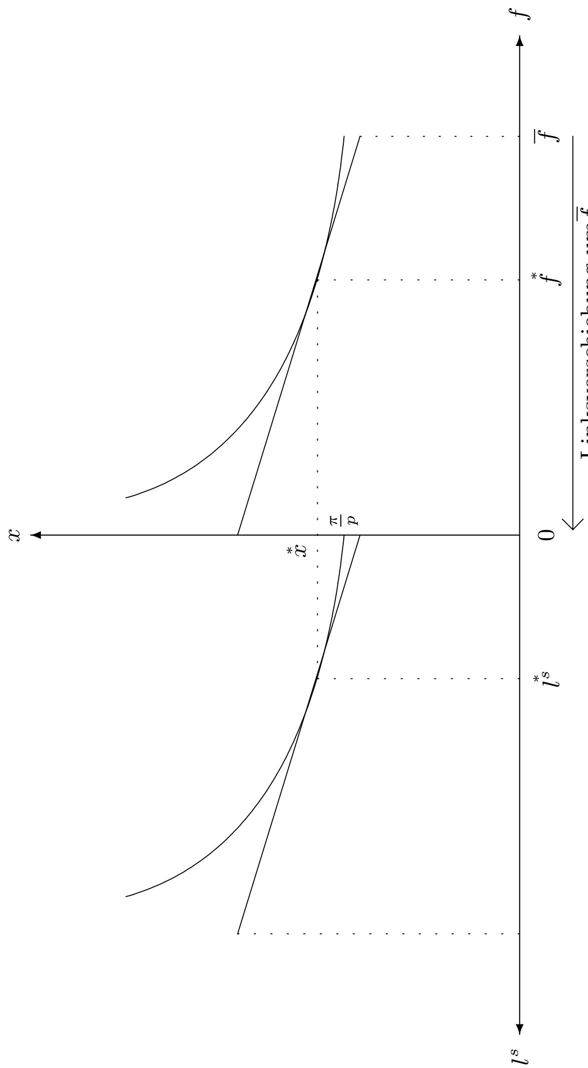
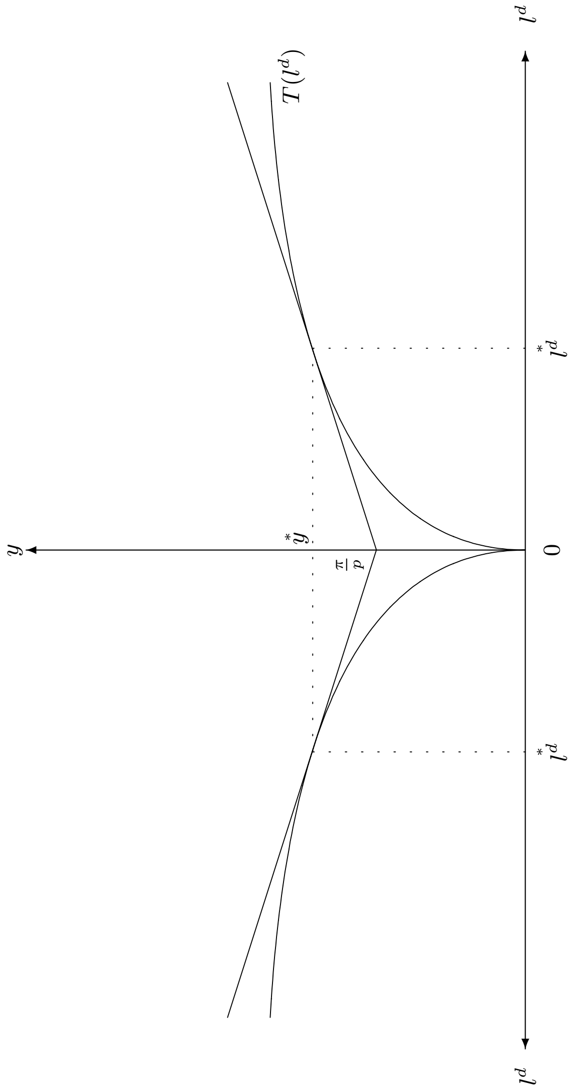


Abb. 2.34. Die Linksverschiebung der Budgetgerade und Indifferenzkurve.



Spiegelung an der y-Achse

Abb. 2.35. Die Spiegelung des Produktionsoptimums an der y-Achse.

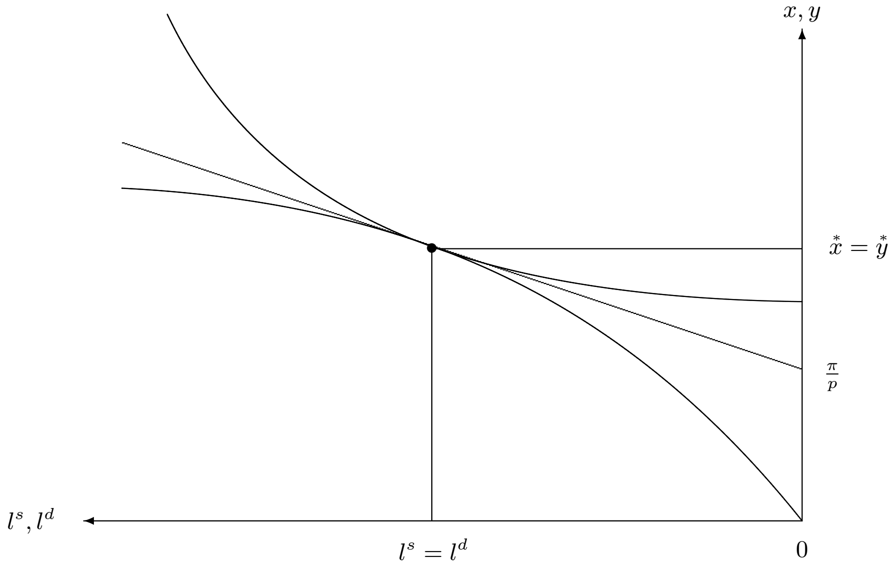


Abb. 2.36. Die graphische Darstellung des Walras-Gleichgewichts.

Da Budgetgerade und Isogewinnlinie die vertikale Achse bei $\frac{\pi}{p}$ schneiden, sind für $\overset{*}{x} = \overset{*}{y}$ die beiden Geraden deckungsgleich. Technologiefunktion und Indifferenzkurve berühren sich also gerade in einem Punkt, und dieser stellt das Walras-Gleichgewicht dar.

2.5.2 Walras-Gesetz und Homogenität

Das Walras-Gesetz

Nehmen wir an, die Nutzenfunktion $U(x, f)$ sei in mindestens einem Gut steigend. Dann wird das Budget von den Konsumenten voll ausgeschöpft, d.h. für alle p und w gilt

$$p \cdot x(p, w) = w \cdot l^s(p, w) + \pi(p, w) \quad ,$$

d.h. die Ausgaben sind gleich den Einnahmen.
Für den Gewinn der Produzenten gilt analog

$$\pi(p, w) = p \cdot y(p, w) - w \cdot l^d(p, w) \quad .$$

Insgesamt ergibt sich durch Einsetzen von π folgende volkswirtschaftliche Beziehung

$$p \cdot x(p, w) = w \cdot l^s(p, w) + p \cdot y(p, w) - w \cdot l^d(p, w) \quad ,$$

die zu der folgenden äquivalent ist

$$p \cdot (x(p,w) - y(p,w)) = w \cdot \left(l^s(p,w) - l^d(p,w)\right) \quad .$$

Dies bedeutet, daß das gesamte System geschlossen ist: Alles, was ausgegeben wird, wird woanders wieder eingenommen! Die Folgerung des Walras-Gesetzes ist direkt:

1. Falls ein Markt im Gleichgewicht ist, so ist es auch der andere: aus $x(p,w) = y(p,w)$ folgt $l^s(p,w) = l^d(p,w)$ und auch umgekehrt.
2. Falls ein Markt im Ungleichgewicht ist, kann wegen der obigen Beziehung auch der andere nicht im Gleichgewicht sein. Als Beispiel könnte man anführen, daß Arbeitslosigkeit auch bei einem Gütermarktgleichgewicht begründet sein kann.

Das Walras-Gesetz kann auch graphisch erklärt werden: Da $(\overset{*}{x}, \overset{*}{l^s})$ und $(\overset{*}{y}, \overset{*}{l^d})$ auf derselben Geraden liegen, muß aus $\overset{*}{x} = \overset{*}{y}$ auch $\overset{*}{l^s} = \overset{*}{l^d}$ folgen und umgekehrt.

Homogenität

Wir zeigen jetzt, daß Umskalierungen in den Größen, wie z.B. ein Maßstabwechsel von DEM zu CHF oder EUR, keine Auswirkung auf die Lage des Walras-Gleichgewichts hat. Statt (p,w) sei das Preissystem $(\lambda p, \lambda w)$ mit $\lambda > 0$ gegeben. Dann gilt:

1. *Das Gewinnmaximum der Produzenten ändert sich nicht.*
   Beim neuen Preissystem gilt nämlich
   $$\max_{y,l^d} \quad \lambda p \cdot y - \lambda w \cdot l^d = \lambda(p \cdot y - w \cdot l^d) \quad \text{s.t.} \quad y = T(l^d)$$
   während beim alten gilt
   $$\max_{y,l^d} \quad p \cdot y - w \cdot l^d \quad \text{s.t.} \quad y = T(l^d) \quad .$$
   Da λ konstant ist, ändert sich also die Optimallösung des Maximierungsproblem nicht! Es handelt sich weiterhin um das alte Optimierungsproblem. Das algebraische Äquivalent ist auch direkt dargelegt:
   $$\pi(\lambda p, \lambda w) = (\lambda p) \cdot y - (\lambda w) \cdot l^d = \lambda(p \cdot y - w \cdot l^d) = \lambda \pi(p,w) \quad .$$
   Damit schneidet die Isogewinnlinie die y-Achse wieder in $\frac{\lambda \pi(p,w)}{\lambda p}$ mit der Steigung $\frac{\lambda w}{\lambda p} = \frac{w}{p}$: sie bleibt also gleich. Die Technologiefunktion (und somit v.a. ihre Steigung) wird von der Preisänderung gar nicht beeinflußt, also bleibt auch das Gleichgewicht bei $(\overset{*}{y}, \overset{*}{l^d})$ liegen.

2. *Die Nutzenmaximierung der Konsumenten ändert sich ebenfalls nicht.* Bei der neuen Nutzenoptimierung
$$\max_{x,f} \quad U(x,f) \quad \text{s.t.} \quad (\lambda p)\cdot x = (\lambda w)\cdot l^s + \pi(\lambda p, \lambda w)$$
entspricht die Nebenbedingung der alten
$$p\cdot x = w\cdot l^s + \pi(p,w) \quad ,$$
da der Gewinn – wie schon bei den Produzenten gezeigt – eine *homogene* Funktion ist
$$\pi(\lambda p, \lambda w) = \lambda\pi(p,w) \quad .$$
Auch hier ändert sich das Maximierungsproblem nicht, was wir auch algebraisch zeigen können: Da die Nutzenfunktion gleich bleibt, verändern sich die Indifferenzkurven nicht. Für die Budgetgerade bleibt der Achsenabschnitt immer noch
$$\frac{\lambda\pi + \lambda w\cdot \overline{f}}{\lambda p} = \frac{\pi + w\cdot\overline{f}}{p}$$
und die Steigung $-\frac{\lambda w}{\lambda p} = -\frac{w}{p}$. Das Gleichgewicht $(\overset{*}{x}, \overset{*}{l^s})$ bleibt also auch hier gleich.

Wir können alles Vorgetragene wie folgt zusammenfassen:
$$\begin{aligned} x(\lambda p, \lambda w) &= x(p,w) \\ y(\lambda p, \lambda w) &= y(p,w) \\ l^d(\lambda p, \lambda w) &= l^d(p,w) \\ l^s(\lambda p, \lambda w) &= l^s(p,w) \end{aligned}$$

Somit sind im Walras-Gleichgewicht die Preise und Löhne nur bis auf Normierung festgelegt. Man darf beispielhaft $p \equiv 1$ oder $w \equiv 1$ setzen, ohne den relativen Preis und damit das Walras-Gleichgewicht zu ändern.

Anmerkung 2.24 (Folgerung aus der Homogenität des Walras-Gleichgewichts). Aufgrund des Walras-Gesetzes und seiner Homogenität kann ein simultanes Gleichgewicht auf zwei Märkten erschöpfend auf nur einem Markt analysiert werden.

Beispiel 2.25. Betrachte nur den Gütermarkt und setze $w \equiv 1$.

Abbildung 2.37 ähnelt Abbildung 2.1, hat aber eine total andere Aussagekraft: Erst seitdem wir die Theorie des allgemeinen Gleichgewichts kennen,

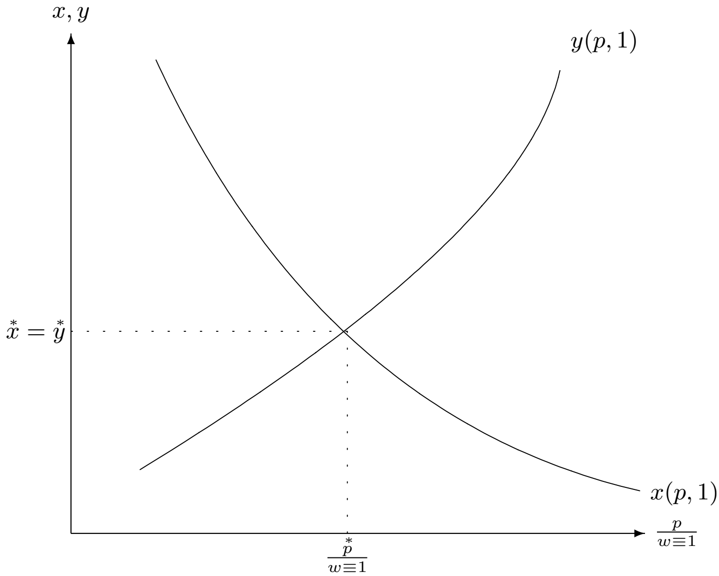


Abb. 2.37. Das volkswirtschaftliche Gleichgewicht, in einem einzigen Markt dargestellt.

die wir mit Hilfe der Produktions- und Haushaltstheorie hergeleitet haben, können wir vom volkswirtschatlichem Gleichgewicht sprechen. In 2.1 kannten wir die Bedingungen noch nicht, wofür das Gleichgewicht für den ganzen volkswirtschaftlichen Kreislauf gilt. Nach der Normierung $w \equiv 1$ und der Theorie des allgemeinen Gleichgewichts dürfen wir hingegen 2.37 als „Gesamtgleichgewicht“ betrachten. Das Hauptargument für diese Sichtweise liegt in den Details: In 2.37 sind Güterangebot und -nachfrage *auch vom Lohn abhängig*, welcher hier absichtlich auf 1 normiert wurde. In 2.1 sind beide x und y ausschließlich von p abhängig, was einer allgemeinen Betrachtung der Volkswirtschaft widerspricht.

2.5.3 Eindeutigkeit des Walras-Gleichgewichtes

Wie viele Walras-Gleichgewichte sind in einer Volkswirtschaft möglich? Unter gewißen Annahmen kann man zeigen, daß nur *ein* Walras-Gleichgewicht existiert.

Satz 7 (Eindeutigkeit des Walras-Gleichgewichtes)
Falls es nur einen Konsumenten gibt (Robinson-Ökonomie) und die Technologiefunktion konkav ist, dann ist das Walras-Gleichgewicht eindeutig.

Beweis. Durch Widerspruch. Angenommen, es gäbe zwei Gleichgewichte, dann hätte man einen Widerspruch zum AoP, denn jedes Gleichgewicht liegt unterhalb der Budgetgeraden, auf der das andere Gleichgewicht liegt - der Konsument hätte also seinen Nutzen nicht maximiert, wie Abbildung 2.38 zeigt.

□

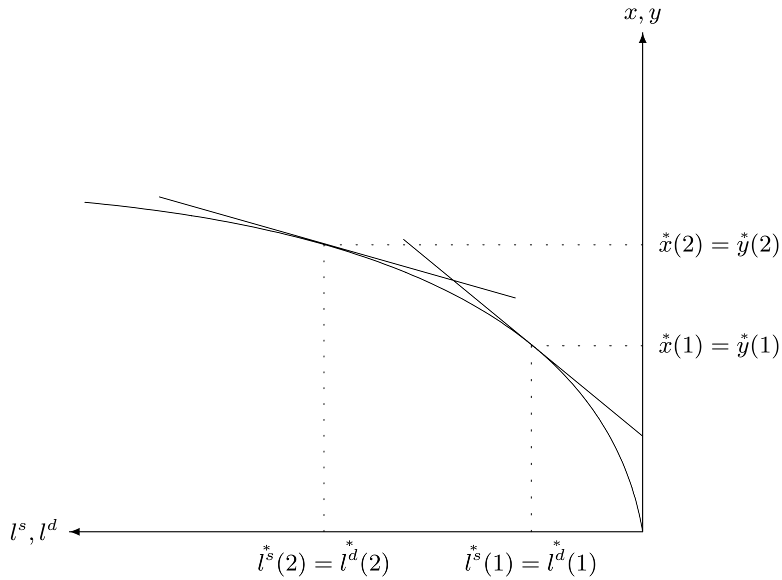
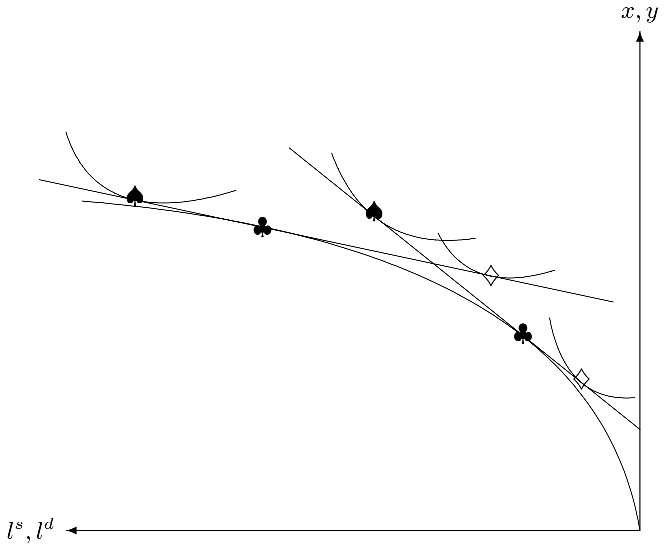


Abb. 2.38. Der Beweis durch Widerspruch für die Eindeutigkeit des Walras-Gleichgewichtes.

Eine interessante Frage betrifft die Eindeutigkeit im Falle mehrerer Konsumenten bzw. mehrerer Produzenten: Wann bleibt das Walras-Gleichgewicht eindeutig?

Anmerkung 2.26 (Eindeutigkeit bei mehreren Konsumenten).
Der Satz der Eindeutigkeit gilt nicht für mehrere Konsumenten – schon bei zwei Konsumenten kann es zwei Walras-Gleichgewichte geben.

Anmerkung 2.27 (Eindeutigkeit bei mehreren Produzenten).
Die Anzahl der Produzenten verändert die Anzahl der Gleichgewichte nicht!



♠ Nachfrage Robinson
◇ Nachfrage Freitag

Abb. 2.39. Die Eindeutigkeit des Walras-Gleichgewichtes ist bei mehreren Konsumenten nicht mehr gewährleistet.

Abbildung 2.39 zeigt die Nicht-Eindeutigkeit bei mehreren Konsumenten. Die Einzelnachfragen erfüllen das AoP, das Gesamtgleichgewicht ♣ nicht.

Anhand eines Beispiels möchten wir auch Anmerkung 2.27 beispielhaft darlegen.

Beispiel 2.28. Eindeutigkeit bei mehreren Produzenten.
Angenommen, es gibt zwei Firmen, die beide ihren Gewinn maximieren. Die Gewinnmaximierung der ersten Firma lautet

$$\max_{y_1,l_1^d} \quad p \cdot y_1 - w \cdot l_1^d \quad \text{s.t.} \quad y_1 = T_1(l_1^d) \quad ,$$

die Gewinnmaximierung der zweiten Firma lautet

$$\max_{y_2,l_2^d} \quad p \cdot y_2 - w \cdot l_2^d \quad \text{s.t.} \quad y_2 = T_2(l_2^d) \quad .$$

Durch Summation der beiden Teilprobleme erhält man wieder ein einziges Maximierungsproblem

$$\max_{y_1,y_2,l_1^d,l_2^d} \quad p \cdot y - w \cdot l^d \quad \text{s.t.} \quad y_1 = T_1(l_1^d),\, y_2 = T_2(l_2^d)$$

wobei

$$\begin{aligned} y &= y_1 + y_2 \\ l^d &= l_1^d + l_2^d \quad . \end{aligned}$$

Die Gewinnfunktion $\pi = p \cdot y - w \cdot l^d = \pi_1 + \pi_2$ wird genau dann maximiert, wenn beide Teilgewinnfunktionen π_1 und π_2 maximiert werden.
Damit ist das Resultat daßelbe, wie wenn es nur eine Firma mit Gesamttechnologie T_1 und T_2 gäbe. Solange T_1 nicht von y_2 oder l_2^d abhängt oder analog T_2 nicht von y_1 oder l_1^d, ist die Organisationsform des Firmensektors (mehrere oder nur eine Firma) also egal.

2.6 Besondere Fälle des Grundmodells

Nachdem wir nun über ein erstes einfaches volkswirtschaftliches Modell verfügen, wenden wir unsere Aufmerksamkeit besonderen Fällen zu, die das obige Modell näher spezifizieren.

2.6.1 Produzentenentscheidung

Wir beginnen mit einer näheren Charakterisierung der Produktionsfunktion. Die *Skalenerträge* spielen eine wesentliche Rolle in der Gestaltung von $T(\cdot)$.

Definition 2.29 (Skalenerträge).
Die Technologiefunktion hat für $\lambda > 1$:

- *konstante Skalenerträge, falls* $\lambda T(l^d) = T(\lambda l^d)$
- *abnehmende Skalenerträge, falls* $\lambda T(l^d) > T(\lambda l^d)$
- *zunehmende Skalenerträge, falls* $\lambda T(l^d) < T(\lambda l^d)$

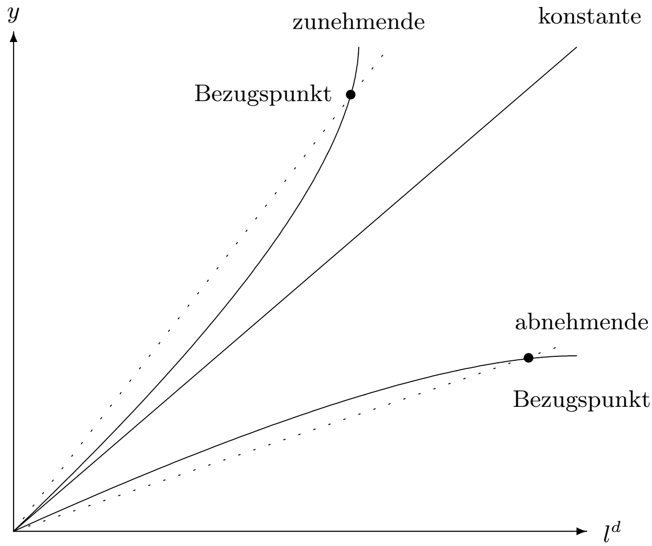


Abb. 2.40. Der Verlauf der Produktionsfunktion je nach Skalenerträgen.

Abbildung 2.40 illustriert den Verlauf von $T(l^d)$ in den drei Fällen. Es sei hier erwähnt, daß wir in diesem Abschnitt von allgemeineren Produktionsfunktionen Gebrauch machen, als die auf Seite 23 definierten. Die Forderung der strikten Konkavität wird also fallengelassen. Zudem bemerkt man auch, daß die Skalenerträgeeigenschaft lokaler Natur ist, wie es dann in Abbildung 2.44 aufgezeigt wird. Wir gehen nun alle Möglichkeiten an.

Gewinnmaximierung der Produzenten bei konstanten Skalenerträgen von $T(.)$

Bei konstanten Skalenerträgen ist $T(.)$ eine lineare Funktion, für die z.B. gilt

$$T(l^d) = t \cdot l^d \quad \text{mit} \quad t > 0 \quad .$$

Das Maximierungsproblem

$$\max_{y,l^d} \quad p \cdot y - w \cdot l^d \quad \text{s.t.} \quad y = t \cdot l^d$$

formt sich durch Einsetzen der Nebenbedingungen wie folgt um

$$\max_{l^d} \quad p \cdot t \cdot l^d - w \cdot l^d = \max_{l^d} \quad (p \cdot t - w) \cdot l^d \quad .$$

Für $p \cdot t > w$ ist $(p \cdot t - w) > 0$: Umso mehr Arbeit $l^d \geqslant 0$ man einsetzt, desto höher wird der Gewinn. Daraus folgt, daß $\overset{*}{l^d} \to +\infty$. Der Gewinn kann also nicht maximiert werden, und somit hat man kein Walras-Gleichgewicht, wie in Abbildung 2.41 gezeigt wird.

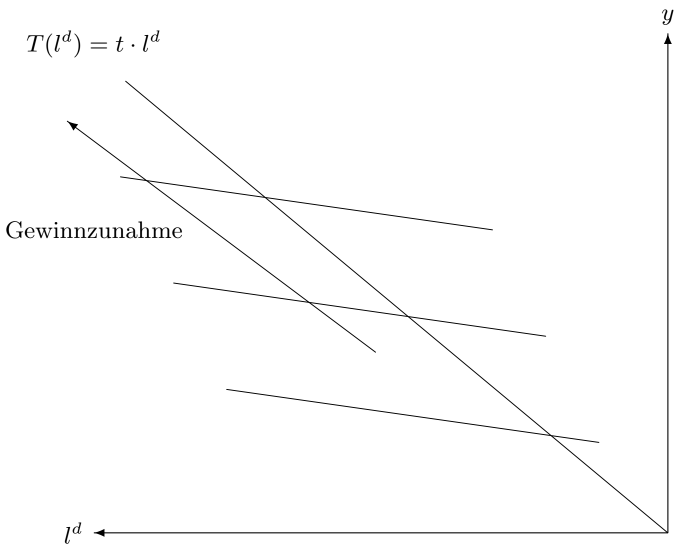


Abb. 2.41. Konstante Skalenerträge und $p \cdot t > w$.

Für $p \cdot t < w$ ist $(p \cdot t - w) < 0$: Bei nichtnegativen Arbeitseinsätzen $l^d \geqslant 0$ ist der Gewinn ≤ 0, und zwar ist er gerade 0 – und damit maximal, wenn man $l^d = 0$ einsetzt. Daraus folgt, daß $\overset{*}{l^d} = 0$ ist, sprich daß gar nicht produziert wird! Man vergleicht diesbezüglich Abbildung 2.42.

Für $p \cdot t = w$ bekommen wir $(p \cdot t - w) = 0$, und damit ist auch der Gewinn $\pi = (p \cdot t - w) \cdot l^d = 0$, egal, welches l^d man wählt. Wie in Abbildung 2.43 dargestellt, fallen Technologiefunktion und Isogewinnlinie zusammen – dadurch entstehen unendlich viele Schnittpunkte!

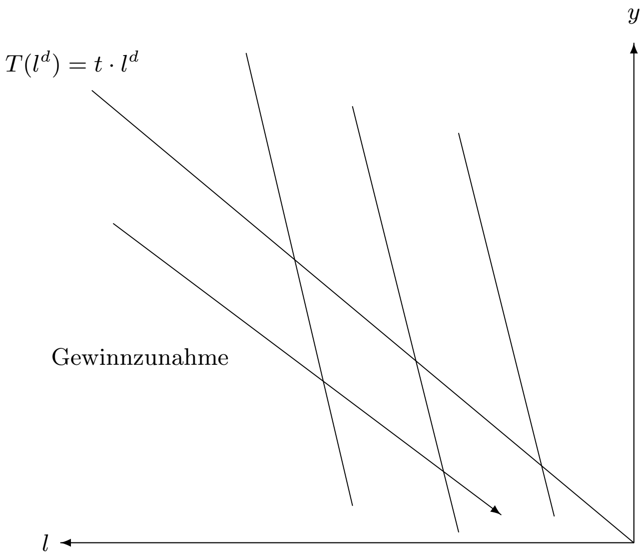


Abb. 2.42. Konstante Skalenerträge und $p \cdot t < w$.

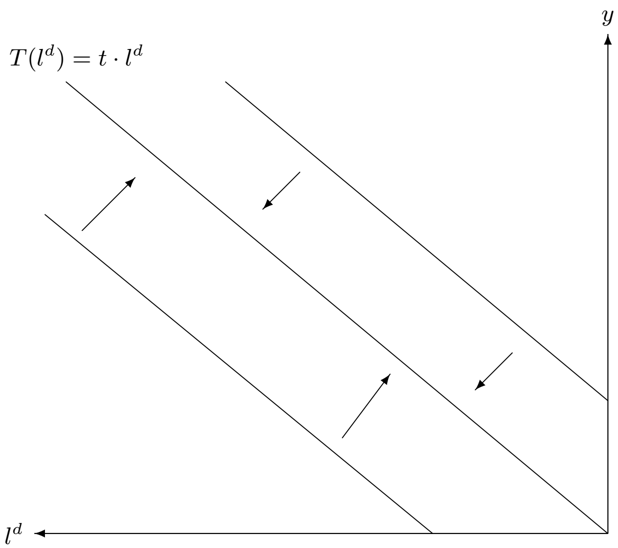


Abb. 2.43. Konstante Skalenerträge und $p \cdot t = w$.

Gewinnmaximierung der Produzenten bei abnehmenden Skalenerträgen

Abbildung 2.44 zeigt den „Normalfall“ mit einer konkaven Technologiefunktion. Diesen Fall haben wir schon in den vorherigen Abschnitten betrachtet.

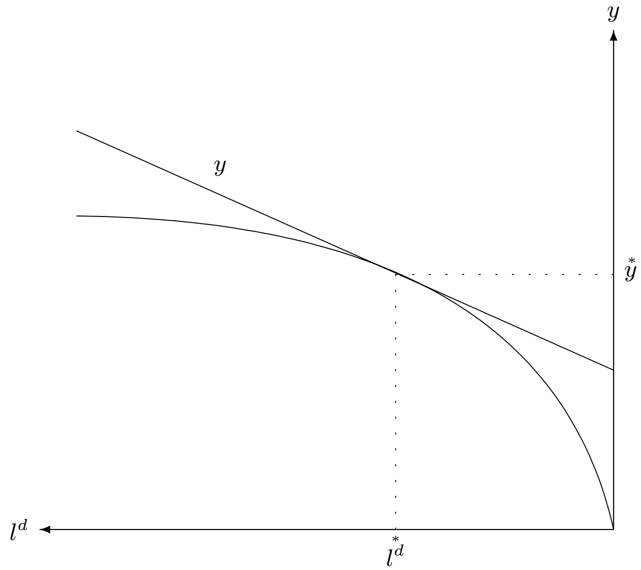


Abb. 2.44. Sinkende Skalenerträge: der „Normalfall“.

Eine Bemerkung zum „Normalfall“ mag an dieser Stelle interessant sein: Aus den getroffenen Annahmen folgt die Existenz der Optimallösung auch im Normalfall nicht. Die folgende Funktion ist z.B. strikt konkav, strikt monoton wachsend und zweimal stetig differenzierbar für $l^d \geqslant 0$, und es gilt $T(0) = 0$:

$$y = \sqrt{3(l^d+2)^2 - 3} - 3 \quad .$$

Die Technologiekurve ist eine Hyperbel mit der Asymptote $y = \sqrt{3}(l^d+2) - 3$. Das Produktionsoptimierungsproblem hat somit eine Optimallösung für $\frac{w}{p} > \sqrt{3}$ und hat keine Lösung für $\frac{w}{p} = \sqrt{3}$, während der $\pi \to \infty$ für $\frac{w}{p} < \sqrt{3}$.

Gewinnmaximierung der Produzenten bei zunehmenden Skalenerträgen

Daß die Produktionsfunktion zunehmende Skalenerträge aufweist, ist nicht verträglich mit dem Walras-Gleichgewicht, denn die Marginalbedingung, die zum Gewinnminimum führen sollte, führt in diesem Fall zu einem Gewinnminimum und impliziert einen negativen Gewinn! Als Vergleich diene Abbildung 2.45, wo gut ersichtlich ist, wie die durch das Minimum laufende Isogewinnlinie einen negativen Achsenabschnitt mit der y-Achse hat. Sei nicht vergessen, daß dieser Abschnitt $\frac{\pi(\overset{*}{p},\overset{*}{w})}{\overset{*}{p}}$ beträgt. Alle Punkte außerhalb dieser Lösung liefern höhere Gewinne.

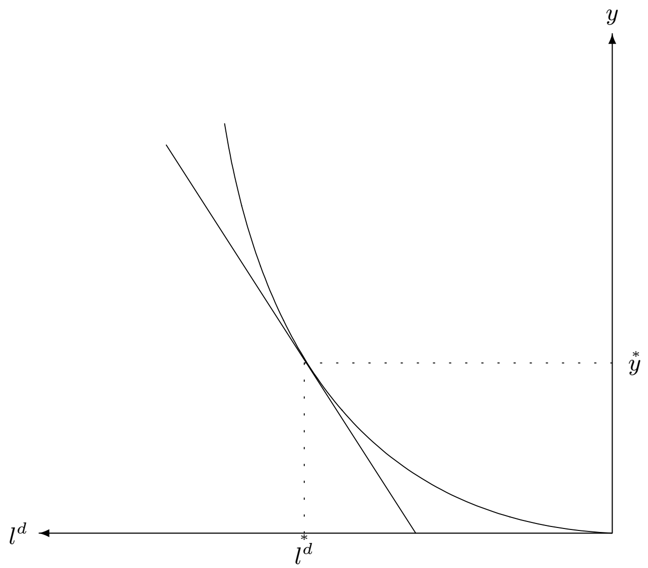


Abb. 2.45. Steigende Skalenerträge: Kein festes Gewinnmaximum.

Steigende Skalenerträge implizieren das stetige Fusionieren von Firmen, wodurch Kosten erspart und die Gewinne ständig erhöht werden. Solange die Skalenerträge zunehmend sind, gelangt man zu keiner festen Lösung, was die Inexistenz eines Gleichgewichtes impliziert.

Gewinnmaximierung bei teilweise zunehmenden, teilweise abnehmenden Skalenerträgen

Hat, wie in Abbildung 2.46 gezeigt, die Technologiefunktion z.B. erst zunehmende, dann abnehmende Skalenerträge, muß sich daraus nicht immer ein Walras-Gleichgewicht ergeben, denn die Arbeitsnachfrage ist nicht stetig. Bei einer solchen Produktionsfunktion optimiert der Produzent nie im konvexen Bereich: Für jede exogen gegebene Steigung $\frac{w}{p}$ gibt es immer einen Tangentialpunkt im konkaven Bereich, dessen Gewinn höher ist als jener, der mit dem Tangentialpunkt im konvexen Bereich verbunden ist. Beim in Abbildung 2.46 angegebenen Reallohn entspricht Punkt 1 dem Gewinnmaximum und Punkt 2 dem Gewinnminimum.

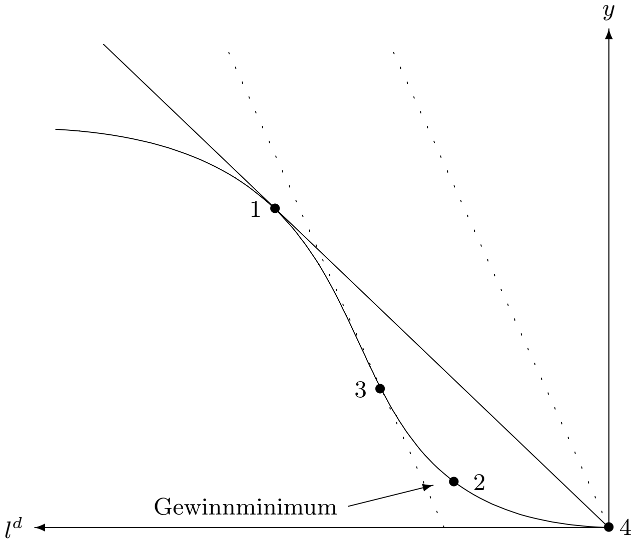


Abb. 2.46. Gewinnmaximierung bei teilweise zunehmenden, teilweise abnehmenden Skalenerträgen: die klassische Produktionsfunktion.

Aus dieser Besonderheit ergibt sich eine unstetige Arbeitsnachfrage, die beispielhaft in Abbildung 2.47 dargestellt wird. Hier kann es auch vorkommen, daß sich die Arbeitsnachfrage- und Arbeitsangebotskurve überhaupt nicht berühren, und zu keinem Gleichgewicht führen.

Bei anderen (höheren) Reallöhnen gäbe es noch einen dritten Punkt (Punkt 3 z.B. in Abbildung 2.46), wo die Marginalbedingungen zwar erfüllt sind, der jedoch keinem Gewinnmaximum entspricht. Dies läge nämlich bei Punkt 4.

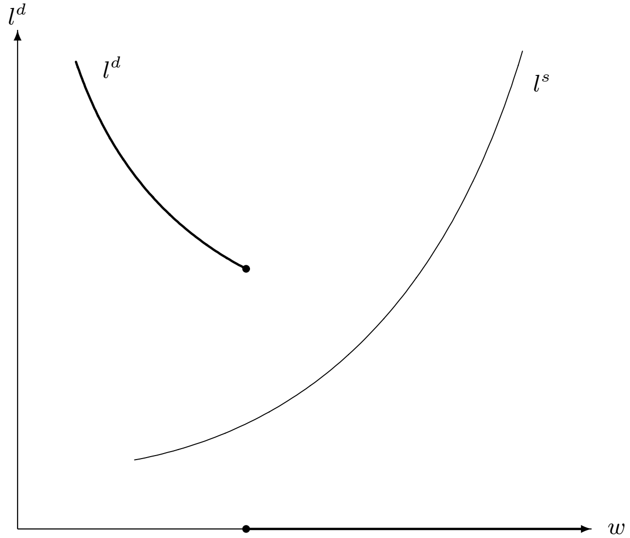


Abb. 2.47. Gewinnmaximierung bei teilweise zunehmenden, teilweise abnehmenden Skalenerträgen, woraus eine unstetige Arbeitsnachfrage resultiert.

2.6.2 Konsumentenentscheidung

Sind die Güter f und x nicht zu substituieren, geht die Grenzrate der Substitution gegen ∞, d.h. in $(\overset{*}{x}, \overset{*}{f})$ hat die Nutzenfunktion die analytische Form

$$U(x, f) = \min\{\alpha x, (1-\alpha)f\}$$

und die Indifferenzkurve ist somit nicht differenzierbar, wie Abbildung 2.48 zeigt. Die Nachfragen ergeben sich dann aus den beiden linearen Gleichungen $\alpha x = (1-\alpha)f$ und $px + wf = b$. Sind die Güter perfekte Substitute, hat die Nutzenfunktion die Form

$$U(x, f) = \alpha x + (1-\alpha)f \quad .$$

Die Indifferenzkurven sind Geraden mit der Steigung $-\frac{1-\alpha}{\alpha}$.

Ist nun $-\frac{1-\alpha}{\alpha} < -\frac{w}{p}$ (die Steigung der Budgetgeraden) – also $\frac{1-\alpha}{\alpha} > \frac{w}{p}$ – liegt $\overset{*}{f}$ bei $\overline{f}$. Geometrisch gesehen ist die Indifferenzkurve in diesem Fall steiler als die Budgetgerade. Für $\frac{1-\alpha}{\alpha} < \frac{w}{p}$ – also wenn die Indifferenzkurve weniger steil als die Budgetgerade ist – würde $\overset{*}{f}$ bei 0 liegen. Abbildung 2.49 zeigt beide Möglichkeiten auf.

Komplemente und Substitute können wir analytisch dank einer dritten Art Elastizität unterscheiden: die Kreuzpreiselastizität.

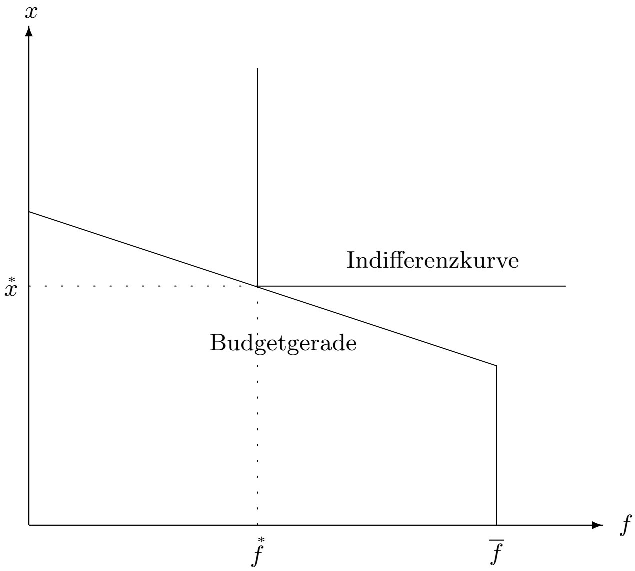


Abb. 2.48. Die Gestaltung von $U(x, f)$ bei Komplementen.

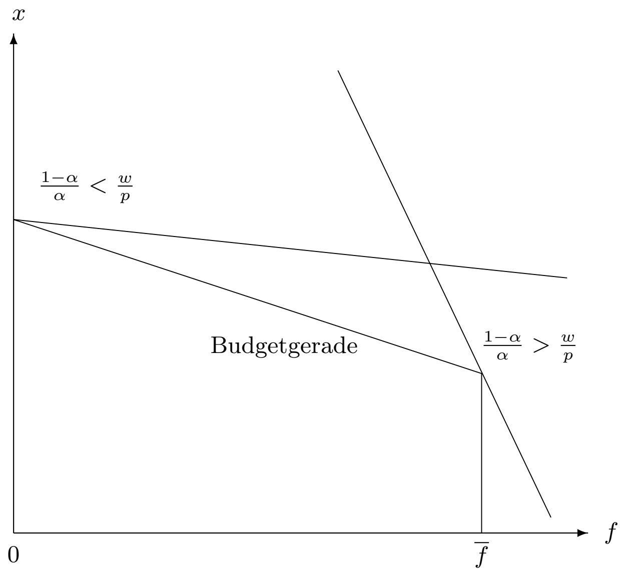


Abb. 2.49. Die Gestaltung von $U(x, f)$ bei perfekten Substituten.

Definition 2.30 (Kreuzpreiselastizität).
Die Elastizität der Nachfrage von Gut x nach dem Preis des anderen Gutes f berechnet sich aus

$$\varepsilon_{x,w} = \lim_{\Delta w \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta w} \cdot \frac{w}{x} = \frac{\partial x}{\partial w} \cdot \frac{w}{x} \quad .$$

Bei der Interpretation der Kreuzpreiselastizität trifft man implizit die Annahme, daß das „andere" Gut kein Giffengut sondern ein gewöhnliches Gut sei: Wenn w steigt, sinkt f und *vice versa.* Aus den vorherigen Abschnitten wissen wir ja, daß diese Annahme problematisch sein kann. Trotzdem bekommen wir folgende Beziehungen:
(i) Steigt w, dann sinkt f (es wird mehr gearbeitet) und wenn als Reaktion x steigt, dann sind f und x Substitute (wie der Name sagt, substituiert man f gegen x). Hier wäre $\varepsilon_{x,w} > 0$, da bei einer Zunahme von w auch x zunimmt.
(ii) Steigt w, dann sinkt f (es wird mehr gearbeitet). Sinkt auch x, dann sind f und x Komplemente (wie der Name sagt, f und x sind komplementär und werden zusammen konsumiert). Hier wäre $\varepsilon_{x,w} < 0$, da bei einer Zunahme von w x abnimmt.

Alle bisher dargestellten Spezialfälle im Konsumentenbereich kann man mit Hilfe der CES-Funktion erhalten. CES steht für das Englische *constant elasticity of substitution.* Hat die Nutzenfunktion die Form

$$U(x,f) = \left[\alpha^{\frac{1}{\sigma}} \cdot x^{\frac{(\sigma-1)}{\sigma}} + (1-\alpha)^{\frac{1}{\sigma}} \cdot f^{\frac{(\sigma-1)}{\sigma}}\right]^{\frac{\sigma}{(\sigma-1)}} \quad \text{mit} \quad 0 \leqslant \alpha \leqslant 1$$

dann sind die Marshall'schen Nachfragen wie folgt:

$$\hat{x}(p,w,b) = \frac{\alpha \cdot b}{p^{\sigma}[\alpha p^{1-\sigma} + (1-\alpha) \cdot w^{1-\sigma}]}$$
$$\hat{f}(p,w,b) = \frac{(1-\alpha) \cdot b}{w^{\sigma}[\alpha p^{1-\sigma} + (1-\alpha) \cdot w^{1-\sigma}]}$$

So erhält man auch Lösungen für die obigen Spezialfälle: Für $\sigma = 1$ erhalten wir die Cobb-Douglas-Funktion

$$U(x,f) = \alpha \ln(x) + (1-\alpha)\ln(f) \quad .$$

Für $\sigma \to \infty$ haben wir perfekte Substitute

$$U(x,f) = x + f \quad .$$

Zuletzt, für $\sigma = 0$ und $\alpha = \frac{1}{2}$ erhalten wir die Nutzenfunktion komplementärer Güter

$$U(x,f) = \min\{x,f\} \quad .$$

Auf Seite 416 steht der ausführliche Beweis zu diesen Herleitungen.

2.7 Erweiterungen und Schlußfolgerungen

Die in diesem Kapitel vorgestellten, ersten Denkschritte haben dem Leser/der Leserin die Vorteile einer ganzheitlichen Betrachtung der Volkswirtschaft aufgezeigt. Aus diesem Grund leitet das Beispiel über die Einführung einer Mengensteuer auf dem Gütermarkt das Kapitel ein. Um die Interdependenz von Märkten zu verstehen, wurden verschiedene Annahmen und Teilmodelle der Mikroökonomie vorausgesetzt (z.B. die Herleitung des Angebots- bzw. Nachfrageverlaufs sowohl auf dem Güter- als auch auf dem Arbeitsmarkt): Mit Partialgleichgewichtsmodellen – d.h. mit Modellen nur eines Marktes – kann man die Interdependenzen nicht genau erklären. Obwohl die Einführung einer Mengensteuer auf dem Gütermarkt die Anzahl geleisteter Arbeitsstunden nicht erhöht (da die Produktion eindeutig nicht zunimmt), bleiben die Effekte auf das Lohnniveau unerklärt. Einerseits gibt es eine aus der Güterbesteuerung induzierte tiefere Zahlungsbereitschaft der Firmen, andererseits höhere Lohnforderungen seitens der Arbeitnehmer aufgrund der Verteuerung der Güter.

Die Einführung eines Kreislaufmodells verspricht einen Ausweg aus dieser Ungewißheit. Bei der Modellierung von Firmen und Haushalten wurden, im Gegensatz zu anderen mikroökonomischen Lehrbüchern, die Nachfrage- und Angebotstheorie nicht besprochen. Schon im Kapitel 1 wird betont, daß Nachfrage und Angebot grundsätzlich denselben Handlungsprinzipien unterliegen müssen. Bei jeder Transaktion ist man gleichzeitig Nachfrager eines Gutes und Anbieter eines anderen.

Damit das Modell einfach und verständlich bleibt, haben wir radikale, vereinfachende Annahmen eingeführt, über deren Konsequenzen wir uns bewußt sein müssen.
Die erste wesentliche Vereinfachung betrifft die Anzahl der Güter. In unserem Beispiel sind es nur zwei: das Konsumgut und die Zeit, die der Arbeit gleichkommt. Darüber hinaus gehen wir davon aus, daß alle Individuen über dieselben Präferenzen und dieselbe Technologie verfügen. Normalerweise wird an dieser Stelle noch nicht von Individuen gesprochen, da wir nur eine Nutzenfunktion sowie eine Produktionsfunktion postuliert haben. Ein realistisches Beispiel dafür wäre die Modellierung einer Inselökonomie à la Robinson Crusoe, wobei der einzige Einwohner über seine Allokation des Tages entscheiden muß, unter Berücksichtigung der möglichen, für sein Überleben notwendigen, Güterproduktion. Verständlicherweise spielt Geld hierbei keine Rolle.
Daß in unserem Modell nur Güter betrachtet werden, ist schon allein deshalb unrealistisch, weil das Kapital nicht berücksichtigt wird. Arbeit ist untrennbar von Kapital, da die Güterproduktion Arbeit bedingt, was wiederum den Menschen bedingt, was seine physiche Existenz bedingt, der somit zur ersten trivialen Kapitalausstattung gehört. Aus diesen logischen Gründen kann Ar-

beit nicht ohne Kapital existieren und der Erweiterung um Kapital wird genau das nächste Kapitel gewidmet.

Die hier vorgestellte Mathematisierung bringt sowohl Vorteile – wie den klaren Gesamtüberlick und die Kontrolle der indirekten Nebenwirkungen – als auch Nachteile mit sich. Der größte Nachteil besteht in der Nutzendarstellung durch eine Nutzenfunktion. Die Konsequenzen dieses Ansatzes werden bis zum dritten Teil des Buches, Kapitel 13, nicht erläutert. Ohne die Motivation für unseren Modellaufbau zu schächen, möchten wir den Leser darauf aufmerksam machen, daß die Nutzendarstellung durch eine Nutzenfunktion gewißen Grenzen unterliegt, da der Nutzen ordinaler und nicht kardinaler Natur ist. Mit anderen Worten: Die Präferenzordnung ist nur eine *Reihe* von Güterbündeln, deren Nutzenintensität durch kein bestimmtes Maß ausgedrückt werden darf. Dies wird heute von den meisten Ökonomen und auch diesen Buchautoren sehr ernst genommen. Trotzdem benutzt man weiterhin eine kardinale Funktion für deren Darstellung. Wir machen somit von einer mathematischen Metapher Gebrauch (die Nutzenfunktion als Metapher zur Präferenzdarstellung) und unterliegen ihren ursprünglichen Eigenschaften. Solange wir nur von einzelnen Individuen sprechen, wird sich diese Methodologie als sehr vielversprechend erweisen. Jedoch werden wir deren Grenzen beim interpersonellen Nutzenvergleich spüren.

Der größte Vorteil unseres Ansatzes liegt im vernetzten Denken, das uns die Betrachtung mehrerer Interdependenzen ermöglicht. In den folgenden Kapiteln werden wir den volkswirtschaftlichen Kreislauf immer genauer spezifizieren, durch Erweiterungen um mehrere Güter und mehrere Wirtschaftsakteure. In diesem Kapitel wurde somit nur das Grundgerüst vorgestellt.