1 Einleitung

1.1 Experimentelle und Theoretische Physik

Der Kurs Theoretische Physik beginnt an den meisten deutschen Universitäten im dritten Studiensemester. Zu diesem Zeitpunkt ist für die Studierenden die Theoretische Physik jedoch kein Neuland mehr. In den vorangehenden, vorwiegend experimentell orientierten Kursen werden häufig experimentelle Resultate quantitativ ausgewertet und mathematisch beschrieben. Auch im Grundpraktikum müssen sich die Studierenden um eine theoretische Beschreibung ihrer Versuche bemühen. Diese beiden Beispiele zeigen, dass die Theoretische Physik kein abstraktes, von der reinen Mathematik dominiertes Teilgebiet der Physik ist, welches isoliert von den anderen physikalischen und naturwissenschaftlichen Disziplinen existiert. Vielmehr wird man vielfältige Verbindungen zwischen der Theoretischen und der Experimentellen Physik finden.

Man kann sich daher die berechtigte Frage stellen, weshalb überhaupt eine mehrsemestrige Vorlesung Theoretische Physik angeboten wird, wenn Experimentelle und Theoretische Physik doch offensichtlich so eng verflochten sind. Tatsächlich gibt es Bemühungen – weitverbreitet in den USA, aber auch an einzelnen Universitäten in Deutschland –, Experimentelle und Theoretische Physik einheitlich in integrierten Kursen darzustellen. An den meisten Universitäten in Deutschland wird aber ein gesonderter Kurs Theoretische Physik angeboten. Neben verschiedenen historischen Gründen spielt hierbei ein didaktisches Prinzip die entscheidende Rolle: Es gelingt im Rahmen eines geschlossenen Kurses Theoretische Physik viel einfacher, grundlegende und übergreifende Konzepte zu vermitteln. Dadurch entsteht gewissermaßen ein roter Faden, der sich durch das gesamte Gebäude der Theoriekurse zieht.

Theoretische Physik I: Theoretische Mechanik mit Aufgaben in Maple. Peter Reineker, Michael Schulz, Beatrix M. Schulz

ISBN: 3-527-40635-2

1.2
Ziel der Theoretischen Physik

Ziel der Theoretischen Physik ist es, durch Verallgemeinerung experimenteller Erfahrungen oder durch grundsätzliche theoretische Überlegungen fundamentale Grundsätze, sogenannte Axiome, aufzustellen und deren Allgemeingültigkeit dadurch zu bestätigen, dass alle aus ihnen auf mathematischem Wege abgeleiteten speziellen Gesetzmäßigkeiten in keinem Widerspruch zu experimentell bekannten Resultaten stehen. Zum anderen ist es aber auch Aufgabe der Theoretischen Physik, aus den wenigen Axiomen auf deduktivem Wege neue Gesetze abzuleiten, die ihrerseits Anregungen für die experimentelle Forschung geben können.

1.3
Der Aufbau der Lehrbuchreihe Theoretische Physik

Man könnte nun daran denken, den Kurs in Theoretischer Physik mit möglichst fundamentalen Grundgleichungen, z. B. der Dirac-Gleichung der relativistischen Quantenmechanik, zu beginnen und dann die verschiedenen Grenzfälle der nichtrelativistischen Quantenmechanik, der relativistischen Mechanik und der klassischen Mechanik daraus abzuleiten. Ein solches Vorgehen scheint sicher logisch, aber dass es didaktisch geschickt wäre, ist eher unwahrscheinlich. Außerdem ist die Suche nach den Fundamentalprinzipien der Physik nicht abgeschlossen, sodass der Startpunkt eines solchen generischen Konzepts momentan gar nicht klar definiert werden kann.

Band I dieser Lehrbuchreihe zur Theoretischen Physik enthält die klassische Mechanik, die sich im wesentlichen mit der Bewegung von Systemen aus punktförmigen Objekten befasst. Daran anschließen wird sich das zweite große Gebiet der klassischen Physik, die Elektrodynamik. In diesem Band wird die mathematische Beschreibung von Feldern systematisch eingeführt und auch eine kurze Darstellung der Grundzüge der Relativitätstheorie gegeben. Die Bände III und IV enthalten die Grundlagen der Quantenmechnik, in der feldtheoretische und mechanische Ideen zu einem gemeinsamen Konzept zusammengefasst werden. Mit den Kenntnissen der theoretischen Quantenmechanik ist eine sehr erfolgreiche Beschreibung von Phänomenen auf atomaren und subatomaren Skalen verbunden, die im Rahmen der beiden großen klassischen Theorien nicht möglich ist. Der fünfte und letzte Band des Kurses Theoretische Physik enthält die Thermodynamik und Statistik. Hier werden Konzepte vermittelt, um Systeme mit einer großen Zahl mikroskopischer Partikel systematisch auf makroskopischen Skalen beschreiben zu können. Wir werden sehen, dass in diesem Band viele Begriffe und Ideen zusammenfließen, die in den vorhergehenden Bänden erarbeitet wurden.

1.4 Stellung der klassischen Mechanik innerhalb der Theoretischen Physik

Der Einstieg in die Theoretische Physik beginnt in der Regel mit dem Teilgebiet Theoretische Mechanik. Das hat vor allem historische und didaktische Gründe. Insbesondere glaubte man im 19. Jahrhundert, alle physikalischen Erscheinungen im Rahmen der Mechanik erklären zu können. Diese damals sehr populäre Auffassung wurde vor allem von der philosophischen Richtung des Mechanismus vertreten. Als typisches Beispiel soll hier die Äthertheorie erwähnt werden, die eine wesentliche Rolle bei der Interpretation des Elektromagnetismus spielte. Der Äther wurde als Trägermedium eingeführt, um die Ausbreitung elektromagnetischer Wellen auf mechanische Weise erklären zu können. Der Mangel dieses mechanisch-theoretischen Konzepts bestand von Anfang an darin, dass der Äther durch objektive Beobachtungen nicht verifizierbar war; schließlich konnte seine Existenz sogar experimentell widerlegt werden. Inzwischen hat man es längst aufgegeben, die physikalische Umwelt in ein mechanisches Bild zu pressen. Aber die ursprünglich primäre Stellung der Mechanik im Gebäude der Theoretischen Physik blieb bis heute erhalten. Das ist einer der Gründe, weshalb auch die vorliegende Lehrbuchreihe zur Theoretischen Physik mit der klassischen Mechanik beginnt.

Es gibt aber auch andere, didaktische und konzeptionelle Gründe, die klassische Mechanik als Startpunkt eines allgemeinen Theoriekurses zu wählen. Dazu zählt die Tatsache, dass innerhalb der Theoretischen Mechanik wesentliche physikalische Grundgrößen geprägt werden. In der Tat stammen so generelle Begriffe wie Masse, Kraft, Impuls, Arbeit oder Energie ursprünglich aus der Mechanik.

Desweiteren werden im Rahmen der klassischen Mechanik viele grundlegende Prinzipien zur Konstruktion von physikalischen Bewegungsgleichungen und Methoden zu deren Lösung systematisch dargestellt. Viele dieser Techniken lassen sich später zwanglos auch auf die anderen Gebiete der Physik übertragen.

Schließlich kommt die klassische Mechanik der intuitiven Anschauung und der alltäglichen Erfahrung oft entgegen. Insbesondere wird man für viele abstrakt erscheinende Resultate leicht eine adäquate und meist sehr einfache Erklärung auf einer rein qualitativen Stufe finden können. Der Umgang mit solchen Gedankenexperimenten und Bildern ist oft sehr hilfreich bei der Wahl geeigneter Lösungsmethoden und Darstellungen. Die Methode der vorbereitenden anschaulichen Diskussion eines Problems wird natürlich auch in den anderen Teilgebieten der Theoretischen Physik verwendet, aber die Struktur der klassischen Mechanik ist am besten geeignet, dies zu trainieren.

1.5 Gültigkeitsgrenzen der klassischen Mechanik

Im Laufe der Zeit hat es sich herausgestellt, dass die Gesetze der klassischen Mechanik ihre Gültigkeit verlieren, wenn Objekte beschrieben werden sollen, die sich mit nahezu Lichtgeschwindigkeit bewegen. Dann müssen die Gesetze der relativistischen Mechanik herangezogen werden.

Auf eine andere Gültigkeitsgrenze der Mechanik stößt man bei dem Versuch, sehr kleine Teilchen, z. B. Elektronen oder Atome zu beschreiben. Für solche Probleme wird erst durch die Quantenmechanik eine adäquate Beschreibung geliefert.

Es ist aber keineswegs so, dass durch diese allgemeineren Theorien die Mechanik vollständig außer Kraft gesetzt wird. Vielmehr wird man feststellen, dass der Gültigkeitsbereich der Mechanik beschränkt ist. Wenn man zu Geschwindigkeiten übergeht, die klein verglichen mit der Lichtgeschwindigkeit sind, gehen die Gesetze der relativistischen Mechanik wieder in die der klassischen Mechanik über. Analog verhält es sich, wenn makroskopische Körper im Rahmen der Quantenmechanik beschrieben werden sollen. Auch hier erhält man – ausgehend von einer quantenmechanischen Formulierung – die Gesetze der klassischen Mechanik.

1.6 Aufbau des Bands Theoretische Mechanik

Lässt man einen Körper, z. B. einen Stein, frei fallen, so hat er bekanntermaßen nach der Zeit t einen gewissen Weg

$$x = \frac{1}{2} g t^2 \tag{1.1}$$

zurückgelegt, wobei g die Erdbeschleunigung ist. Der Körper hat eine endliche Ausdehnung. Daher ist es eine durchaus berechtigte Fragestellung, welcher Punkt des Körpers denn nun die Strecke x zurückgelegt hat. Kandidaten gibt es hierfür beliebig viele. So könnten bei einer wenig sorgfältigen Betrachtung sowohl der Punkt P_1 als auch der Punkt P_2 in Abb. 1.1 in Frage kommen. Tatsächlich erweist sich aber der Schwerpunkt S des Körpers als die richtige Wahl. Wenn wir uns auf die Bewegung des Schwerpunkts konzentrieren, dann können wir von der räumlichen Ausdehnung des Körpers völlig absehen und so tun, als hätten wir einen punktförmigen Körper vorliegen, dessen Masse im Schwerpunkt vereinigt ist. Der Konjunktiv in diesem Satz bringt zum Ausdruck, dass wir den realen Körper durch ein Modell beschreiben. Dieses Modell nennt man in der Mechanik einen Massenpunkt.

Das klassische Beispiel für die Benutzung des Massenpunktmodells ist die Beschreibung der Planetenbewegung. Wir wissen natürlich, dass die Erde zu

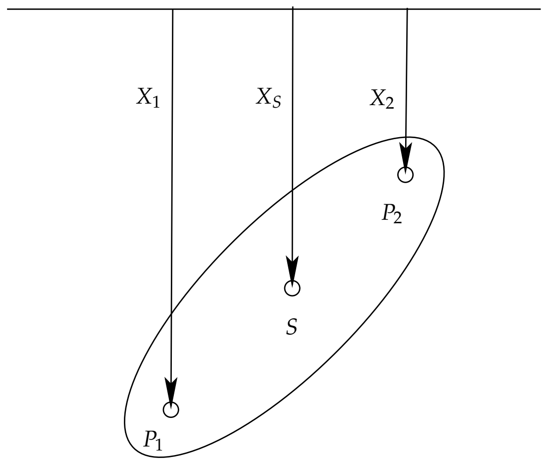

Abb. 1.1 Frei fallender Körper: Welcher Punkt des Körpers ist der richtige Bezugspunkt für (1.1)?

unserem Glück kein Massenpunkt ist, sondern einen Radius von rund 6000 km hat. Aber verglichen mit dem Radius der Umlaufbahn der Erde um die Sonne von rund 150 Millionen Kilometern ist dies weniger als 0,006 %. Somit erscheint es durchaus gerechtfertigt, die Erde bei dieser Bewegung wenigstens näherungweise als Massenpunkt zu betrachten.

Das Massenpunktmodell spielt nicht nur in der Mechanik eine grundlegende Rolle, sondern ist mit fundamentalen Problemen der Physik verbunden. Nach dem Prinzip des Welle-Teilchen-Dualismus, dem wir in der Quantenmechanik begegnen werden, lässt sich Materie entweder als Superposition von Wellen oder als System punktförmiger Teilchen beobachten. Ausgedehnte starre Objekte stehen dagegen im Widerspruch zur heutigen Erkenntnis. Partikel, die bei der Interpretation aller Messungen als punktförmig beschrieben werden können, z. B. Elektronen und Quarks, werden als Elementarteilchen betrachtet. Alle anderen Partikel, z. B. Protonen, Atome oder Moleküle, sind letztendlich aus solchen miteinander wechselwirkenden Elementarteilchen aufgebaut. Wir werden später sehen, dass ein Elementarteilchen Träger von nur wenigen Eigenschaften ist, zu denen auch elektrische Ladungen und seine Ruhemasse gehören.

Bei der Behandlung der Bewegung eines Massenpunkts gibt es zwei grundsätzliche Fragestellungen. Zum ersten kann man die Bahnkurve des Massenpunkts etwa durch eine hinreichend genaue Vermessung vorgeben und daraus Eigenschaften ableiten, die uns Informationen über die Ursache der Bewegung des Massenpunkts geben. Das ist die Aufgabe der *Kinematik*, die wir im nachfolgenden Kapitel behandeln werden.

Zum zweiten wird aber der viel häufiger auftretende, umgekehrte Fall zu besprechen sein: Hier kennen wir die Ursache der Bewegung und fragen, wie die Bahnkurve des betrachteten Massenpunkts aussehen wird. Eine solche Frage gehört zur Klasse der *Dynamik* und kann im Prinzip als Standardproblem der Theoretischen Mechanik bezeichnet werden. Wir werden uns im dritten und vierten Kapitel dieses Bandes eingehend mit der Dynamik einzelner Massenpunkte befassen.

Wenn wir uns nicht nur für die Bewegung der Erde um die Sonne, sondern die Bewegung aller Planeten im Sonnensystem interessieren, dann haben wir ein System von miteinander wechselwirkenden Massenpunkten vorliegen. Mit der geeigneten Verallgemeinerung der Theorie einzelner Massenpunkte auf Massenpunktsysteme werden wir uns im fünften Kapitel befassen. Natürlich kann man diese Theorie auch benutzen, um die mechanische Bewegung makroskopischer Körper, etwa des anfänglich diskutierten fallenden Steins, zu beschreiben. In diesem Falle würde man sich den Stein aus vielen in Wechselwirkung stehenden elementaren Partikeln, etwa Atomen oder Molekülen, zusammengesetzt denken, die alle den gleichen mechanischen Gesetzen unterworfen sind. Wir werden dann insbesondere feststellen, dass sich der Schwerpunkt dieses Systems so bewegt, als wäre die gesamte Masse aller Bestandteile des Steins im Schwerpunkt vereinigt.

Im sechsten und siebenten Kapitel werden wir uns mit fundamentalen Darstellungen der klassischen Theoretischen Mechanik befassen. Dabei wollen wir uns vor allem auf die Lagrange'sche und Hamilton'sche Formulierung der Mechanik konzentrieren. In den späteren Bänden dieser Lehrbuchreihe wird man erkennen, dass die hiermit verbundenen Prinzipien eine weit über die klassische Mechanik hinausgehende allgemeine Bedeutung haben.

In dynamischen Massenpunktsystemen können sich die einzelnen Massenpunkte nach wie vor relativ zueinander bewegen. Ein typisches Beispiel hierfür wären die Atome des fallenden Steins, die immer noch Schwingungsbewegungen relativ zueinander ausführen können. Tatsächlich sind aber diese Bewegungen im Vergleich zu den Abmessungen des Körpers oftmals von untergeordneter Bedeutung. In diesem Fall kann man das betreffende Objekt durch das Modell eines starren Körpers beschreiben. (Dieses Modell ist mit der endlichen Geschwindigkeit der Informationsausbreitung im Sinne der speziellen Relativitätstheorie nicht verträglich). In diesem Modell sind die Relativpositionen aller Massenpunkte zueinander unveränderlich. Damit kann das System nur noch globale Translations- und Rotationsbewegungen ausführen, während – sozusagen als äußeres Kennzeichen – die Form des betrachteten Objekts unverändert bleibt. Mit starren Körpern befassen wir uns im letzten Kapitel dieses Bandes.

Nehmen wir statt des Steins aber ein Stück Kunststoff (vgl. Abb. 1.2) und drücken wir mit einer Kraft $\vec{F}$ auf seine Oberfläche, so wird der Körper defor-

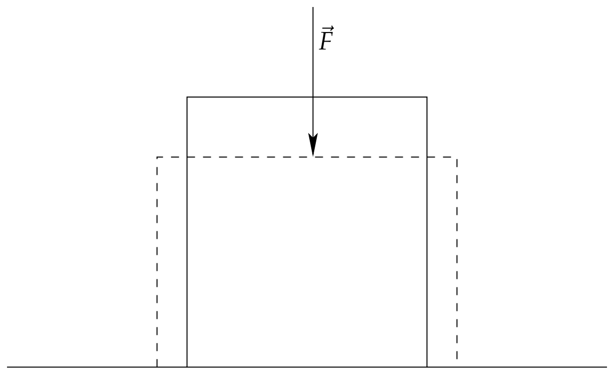

Abb. 1.2 Deformierbarer Körper: unter dem Einfluss einer äußeren Kraft wird die Form des Körpers verändert.

miert, und der gegenseitige Abstand der elementaren Massenpunkte dieses Körpers ändert sich. Wir werden in diesem Fall mit dem Modell des starren Körpers keine gute Beschreibung des geschilderten Problems erreichen. Solche deformierbaren Körper, bei denen die Verformung nach Entlastung wieder zurückgeht, also eine elastische Deformation vorliegt, werden ebenfalls im Rahmen der Mechanik untersucht. Hier führt man anstelle der vielen Atome oder Moleküle ein deformierbares Kontinuum ein, das im Rahmen der Elastizitätstheorie behandelt wird. Diese Theorie war früher ein wesentlicher Bestandteil der klassischen Mechanik, wird aber heute eher als ein Kontinuumsgrenzfall der Festkörperphysik betrachtet.

Eine ähnliche Situation betrifft die Diskussion der Eigenschaften von Flüssigkeiten und Gasen auf der Modellebene des kontinuierlichen Mediums. Diese als Hydro- und Aerodynamik bezeichneten Gebiete der klassischen Mechanik werden heute allgemein als kontinuierlicher Grenzfall der Physik der kondensierten Materie verstanden, zumal für eine konsistente Beschreibung von Flüssigkeiten und Gasen auch thermodynamische Relationen benötigt werden.

Die mechanische Theorie von deformierbaren Festkörpern sowie von Flüssigkeiten und Gasen wird in dem vorliegenden Band nicht mehr betrachtet. Wir verweisen hier auf die umfangreich vorhandene Spezialliteratur.

1.7 Modellebenen der Theoretischen Mechanik

Bei der obigen Vorstellung der einzelnen Kapitel dieses Bands haben wir bereits verschiedene modellhafte Darstellungen des gleichen Körpers erwähnt. So ist es sinnvoll, die Erde bei der Betrachtung der Umlaufbewegung um die Sonne als Massenpunkt zu betrachten, bei der Beschreibung ihrer Rotationsbewegung um die eigene Achse aber als einen ausgedehnten starren Körper anzusehen. Beide Modelle versagen dagegen bei der Untersuchung von Gezeiteneffekten oder der Bewegung der Materie im Erdinneren, wo man auf kontinuumsmechanische Konzepte zurückgreifen muss.

Ein ähnliches Beispiel für eine solche unterschiedliche Betrachtungsweise desselben Gegenstands ist der fallende Körper aus Kunststoff. Solange wir uns für den zurückgelegten Weg des Schwerpunkts beim freien Fall interessieren, können wir den Körper als Massenpunkt betrachten. Interessieren wir uns für die Drehbewegung des Körpers während des Falls, dann können wir den Kunststoffkörper sehr gut als ein starres Objekt interpretieren. Wenn wir schließlich das Szenario des Aufschlags auf den Boden am Ende des freien Falls beschreiben wollen, dann müssen wir unser Objekt als einen deformierbaren Körper behandeln.

Aus diesen zwei Beispielen können wir folgendes lernen: Je nach physikalischer Fragestellung wird man ein anderes, dem Problem möglichst adäquates Modell wählen. Welches Modell für die Behandlung eines Problems geeignet ist, wird in vielen Fällen keine triviale Entscheidung sein. Obwohl im Rahmen der theoretischen Mechanik die Modellebenen ziemlich gut klassifiziert sind, dürfen wir nicht vergessen, dass die verwendeten Modelle oft über einen langen historischen Zeitraum etabliert wurden und sehr viel empirische Erfahrung in sich vereinen. Die Entscheidung darüber, welches Modell für ein Problem am besten geeignet ist, lässt sich durch keinen Algorithmus beschreiben. Wir kennen zwar eine ganze Reihe von empirischen Regeln, welche die Auswahl eines sinnvollen Modells erleichtern, aber letztendlich entscheiden Intuition und Erfahrung über das verwendete Modell.

Hat man sich auf ein Modell festgelegt, dann kann dieses auf mathematische Gleichungen abgebildet werden, die systematisch gelöst werden müssen und zuletzt die entsprechende Antwort auf das mit dem Modell verbundene Problem liefern. Der Vergleich dieser auf theoretisch-mathematischem Weg gewonnenen Resultate mit der physikalischen Realität liefert uns dann weitere Kriterien über den Nutzen des verwendeten Modells.

1.8 Lösung von Gleichungen

Mit der quantitativen Beschreibung des Modells durch mathematische Gleichungen sind wir an einem weiteren wichtigen Punkt angekommen, der typisch für die theoretische Beschreibung physikalischer Vorgänge ist. Wir wollen die hier auftretenden Probleme an einem einfachen Beispiel erläutern. Der zurückgelegte Weg beim freien Fall kann durch die Gleichung (1.1) beschrieben werden.

Wie kommt man nun auf diesen Ausdruck? Gewöhnlich verwendet man das zweite Newton'sche Axiom

$$m\vec{a} = \vec{F} \tag{1.2}$$

um die Bewegung eines Massenpunkts unter dem Einfluss einer Kraft zu bestimmen. Dabei bezeichnet m die träge Masse des Körpers, $\vec{a}$ seine Beschleunigung und $\vec{F}$ die auf ihn wirkende Kraft. Die Kraft beim freien Fall ist die Schwerkraft

$$\vec{F} = m'\vec{g} \tag{1.3}$$

mit der Erdbeschleunigung $\vec{g}$, wobei die hier auftretende Masse m' die schwere Masse ist. Die bisherige experimentelle Erfahrung liefert uns die Gleichheit beider Massen, $m = m'$.

Bis zu diesem Punkt haben wir verschiedene, experimentell gesicherte Modellannahmen eingeführt: Wir haben die Masse des fallenden Körpers in einem Punkt vereinigt, das zweite Newton'sche Axiom als Grundlage der Bewegung herangezogen, die hierin auftretende Kraft durch den mathematischen Ausdruck für die Schwerkraft ersetzt und die Gleichheit von träger und schwerer Masse verwendet.

Die resultierende Gleichung kann jetzt einer geeigneten mathematischen Behandlung unterzogen werden. Dazu orientiert man zunächst die Ortskoordinate x in Fallrichtung. Die Wahl eines geeigneten Koordinatensystems oder allgemeiner einer geeigneten Darstellung des Problems ist eine rein mathematische Fragestellung. Sie dient dazu, möglichst einfache Gleichungen zu erhalten, ändert aber nicht den physikalischen Inhalt. Auch in einem anderen Koordinatensystem kann unser Problem gelöst werden, aber wahrscheinlich mit einem höheren mathematischen Aufwand.

Als Ergebnis der Festlegung des Koordinatensystems erhalten wir eine eindimensionale Bewegungsgleichung:

$$m\ddot{x}(t) = mg \tag{1.4}$$

aus der wir zunächst wegen der sinnvollen Forderung $m > 0$ die Masse eliminieren können

$$\ddot{x}(t) = g \tag{1.5}$$

Das Ergebnis ist eine gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung, die man auch in der Form

$$\frac{d}{dt}\dot{x}(t) = g \tag{1.6}$$

schreiben kann und die jetzt durch eine zweifache Integration gelöst wird. Wir erhalten nach der ersten Integration

$$\int_{\dot{x}_0}^{\dot{x}} d\dot{x}' \quad = \quad \int_{t_0}^{t} g\, dt' \tag{1.7}$$

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) - \dot{x}_0 &= g(t - t_0) \qquad (1.8) \\ \frac{d}{dt}x - \dot{x}_0 &= g(t - t_0) \qquad (1.9) \end{aligned}$$

wobei $\dot{x}_0$ eine noch offene Konstante und t_0 die Anfangszeit ist. Die zweite Integration führt uns dann auf das Resultat

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x} dx' - \dot{x}_0 \int_{t_0}^{t} dt' &= g \int_{t_0}^{t} (t' - t_0) dt' \qquad (1.10) \\ x(t) - x_0 - \dot{x}_0(t - t_0) &= \frac{g}{2}(t - t_0)^2 \qquad (1.11) \\ x(t) &= \frac{g}{2}(t - t_0)^2 + \dot{x}_0(t - t_0) + x_0 \qquad (1.12) \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck sieht offensichtlich ganz anders aus als (1.1). Es handelt sich um ein Polynom zweiter Ordnung in der Zeit, das neben der Schwerebeschleunigung g noch eine Anzahl weiterer Parameter enthält, die wir allein aus dem mathematischen Lösungsverfahren erhalten haben, aber mit mathematischen Methoden nicht weiter spezifizieren können. Die Ursache für das Auftreten dieser neuen Terme liegt in der unvollständigen mathematischen Formulierung des Problems. Genau genommen besteht unser physikalisches Problem nicht nur aus der Bewegungsgleichung (1.5), sondern erfordert zu seiner vollständigen Formulierung noch die Angabe von Anfangsbedingungen. Setzen wir in unsere allgemeine Lösung (1.12) die Anfangszeit $t = t_0$ ein, dann erhalten wir die Anfangsposition

$$x(t_0) = x_0 \qquad (1.13)$$

Wenn wir nun (1.12) nach der Zeit differenzieren bzw. (1.8) verwenden und anschließend wieder die Anfangszeit einsetzen, erhalten wir die Anfangsgeschwindigkeit

$$\dot{x}(t_0) = \dot{x}_0 \qquad (1.14)$$

Die zunächst freien Größen $\dot{x}_0$ und x_0 sind also Anfangsgeschwindigkeit und Anfangsort des Massenpunkts beim freien Fall. Wir erhalten unser ursprüngliches Ergebnis (1.1), wenn wir die Anfangszeit $t_0 = 0$ wählen, den Ursprung unseres Koordinatensystems auf den Startpunkt legen und schließlich den Anfangszustand als ruhend annehmen.

Aus diesem sehr einfachen Beispiel ergeben sich zwei wichtige Schlussfolgerungen: Einerseits liefert die mathematische Behandlung physikalischer Probleme ganze Klassen von Lösungen, die im Prinzip alle realisierbar sind. Damit wird der allgemeine Charakter vieler physikalischer Bewegungsgleichungen deutlich.

Auf der anderen Seite enthält dieses Beispiel auch eine Warnung, die den Umgang mit theoretischen Ergebnissen betrifft. Man sollte sich immer verdeutlichen, unter welchen Bedingungen ein Resultat entstanden ist. Offenbar ist (1.1) eine spezielle Lösung des Fallgesetzes, die z. B. auf den freien Fall mit einer von Null verschiedenen Anfangsbedingung nicht anwendbar ist.