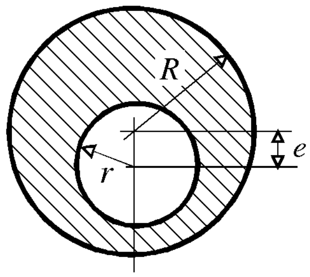
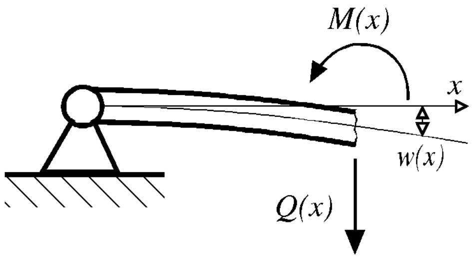
Aufgabe 2

Ein exzentrischer Kreisring hat die Halbmesser R = 20 cm, r = 10 cm und die Exzentrizität e = 5 cm. Man suche die Hauptträgheitsmomente in Bezug auf seinen Schwerpunkt.



2.4.2 Ebene Biegung

Grundformeln: Ebene Biegung



E	Elastizitätsmodul
I_y	Flächenträgheitsmoment
$w(x)$	Durchsenkung an der Stelle x

Normalspannung σ_x im Balken:

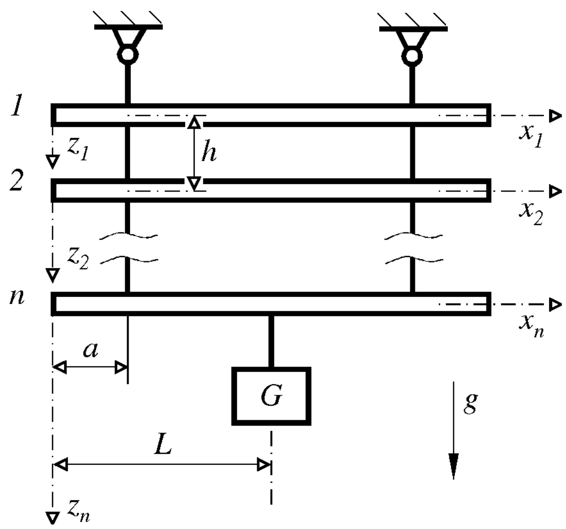
$$\sigma_x(z) = \frac{M(x) \cdot z}{I_y(x)}$$

Biegegleichung:

$$\begin{aligned} EI_y w''(x) &= -M(x) \\ EI_y w'''(x) &= -Q(x) \\ EI_y w^{IV}(x) &= q(x) \end{aligned}$$

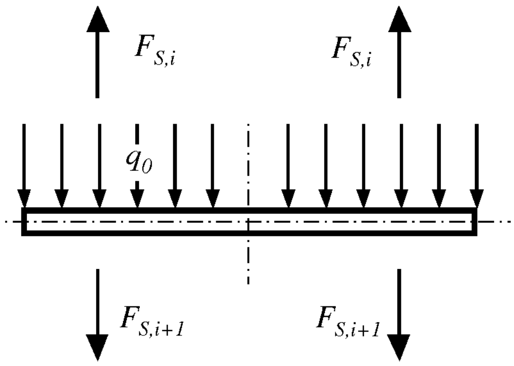
Musteraufgabe 2

Eine Jalousie besteht aus n identischen Balken (Länge jeweils $2L$, Biegesteifigkeit EI, Gewicht pro Länge q_0), die über gleichlange, symmetrisch angebrachte und nicht dehnbare masselose Seile der Länge h waagrecht aufgehängt sind. Am untersten Balken n hängt zusätzlich ein Gewicht $G = 2q_0L$ in Balkenmitte. Die x-Achsen der Koordinatensysteme liegen jeweils auf den Symmetrieachsen der Balken in der unverformten Lage.



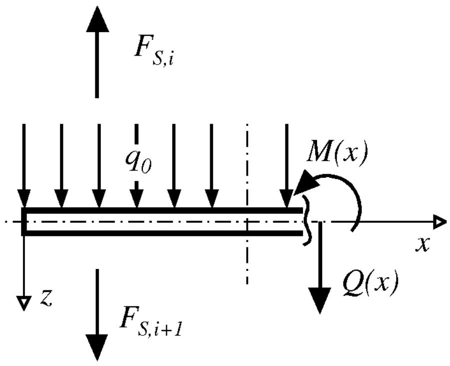
a) Wie groß ist die Seilkraft $F_{S,i}$ in einem Seil zwischen einem mittleren Balken i und dem nächsthöheren Balken $i-1$?
b) Berechnen Sie den Querkraftverlauf $Q_i(x_i)$ für einen allgemeinen Balken i und stellen Sie diesen graphisch dar!
c) Wie lautet das Schnittmoment $M_i(x_i)$ in dem Balken i?
d) Wie lautet die Biegelinie $w_i(x_i)$ für den Balken i?

Lösung: Schneiden wir die beiden Seile über einem Balken i auf, so müssen die resultierenden Schnittkräfte $F_{S,i}$ im statischen Gleichgewicht dem Gewicht von G plus $n-i+1$ Balken entsprechen. Aufgrund der Symmetrie sind zudem die Schnittkräfte links und rechts identisch:



$$
\begin{aligned}
2F_{S,i} &= (n-i+1)2q_0L + 2q_0L \\
\rightarrow \quad F_{S,i} &= q_0L(n-i+2)
\end{aligned}
$$

Den Querkraftverlauf für einen allgemeinen Balken bestimmen wir durch Freischneiden. Für jedes $i < n$ gilt obendrein:



$$
\begin{aligned}
-F_{S,i} + F_{S,i+1} &= -q_0L(n-i+2) \\
&\quad +q_0L[n-(i+1)+2] \\
&= -q_0L
\end{aligned}
$$

Wir erhalten für die Schnittreaktionen:

$$\sum F_x = 0 \quad \rightarrow \quad N(x) = 0$$

$$\sum F_z = 0 \quad \rightarrow \quad q_0x - q_0L\{x-a\}^0 + Q(x) - q_0L\{x-(2L-a)\}^0 = 0$$

$$
\begin{aligned}
Q(x) &= -q_0x + q_0L\{x-a\}^0 + q_0L\{x-(2L-a)\}^0 \\
M(x) &= -\frac{q_0x^2}{2} + q_0L\{x-a\}^1 + q_0L\{x-(2L-a)\}^1
\end{aligned}
$$

Über die Biegeliniengleichung $E \cdot I_y \cdot w''(x) = -M(x)$ folgt dann

$$w''(x) = \frac{1}{EI}\left[\frac{q_0x^2}{2} - q_0L\{x-a\}^1 - q_0L\{x-(2L-a)\}^1\right]$$

$$
\begin{aligned}
w'(x) &= \frac{1}{EI}\left[\frac{q_0 x^3}{6} - \frac{q_0 L}{2}\{x-a\}^2 - \frac{q_0 L}{2}\{x-(2L-a)\}^2 + C_1\right] \\
w(x) &= \frac{1}{EI}\left[\frac{q_0 x^4}{24} - \frac{q_0 L}{6}\{x-a\}^3 - \frac{q_0 L}{6}\{x-(2L-a)\}^3 + C_1 x + C_0\right]
\end{aligned}
$$

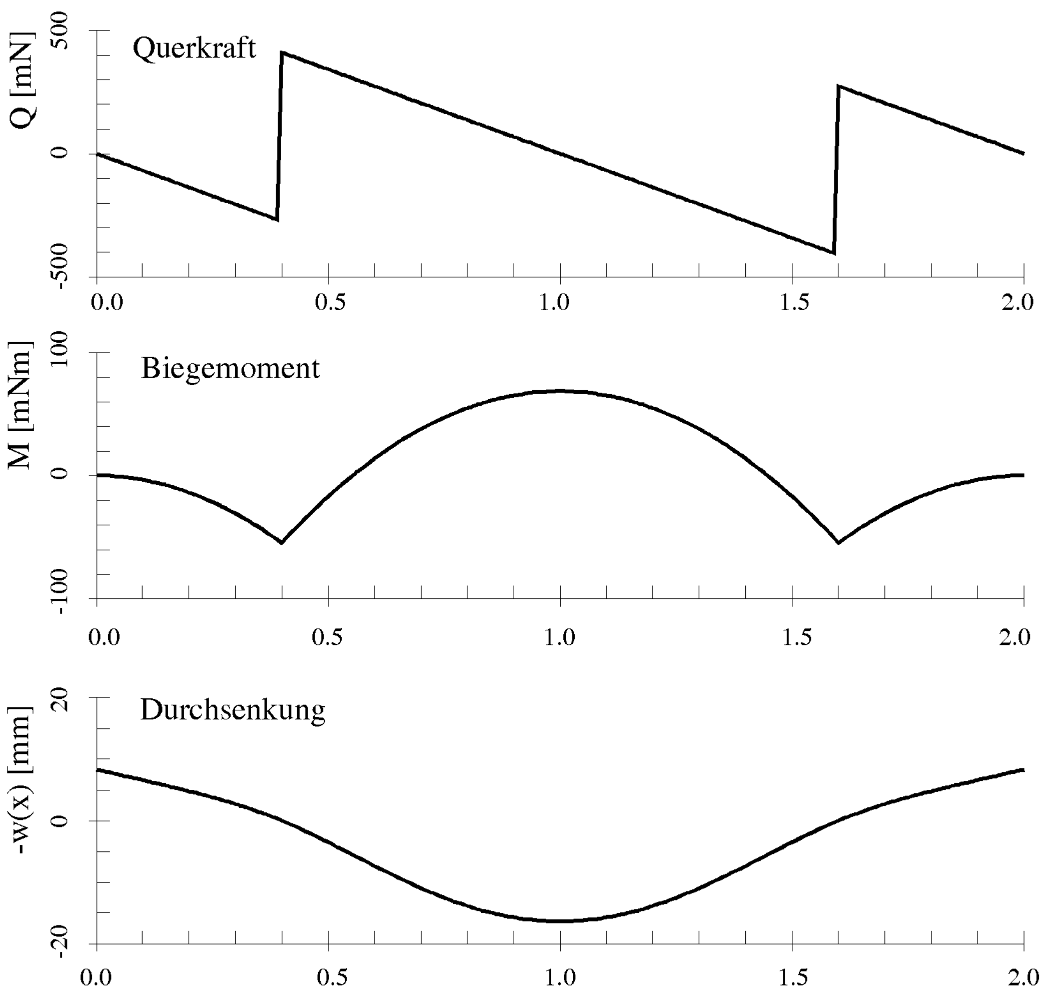
Zur Bestimmung der noch unbekannten Konstanten stehen uns die Randbedingungen $w(x=a)=0$ und $w(x=2L-a)=0$ zur Verfügung. Weiterhin muß gelten: $w'(x=L)=0$, die Tangente in Balkenmitte ist aufgrund der symmetrischen Anordnung der Aufhängung immer waagrecht. Zur Berechnung der beiden Konstanten C_1 und C_0 sind die Bedingungen $w(x=a)=0$ und $w(x=2L-a)=0$ ausreichend, $w'(x=L)=0$ muß sich bei korrekter Rechnung automatisch ergeben. Wir bezeichnen die Aufhängepunkte $x=a$ mit ξ_1 und $x=2L-a$ mit ξ_2:

$$
\begin{aligned}
w(x=\xi_1)=0 \quad &\rightarrow \quad \frac{q_0\xi_1^4}{24} + C_1\xi_1 + C_0 = 0 \quad (1) \\
w(x=\xi_2)=0 \quad &\rightarrow \quad \frac{q_0\xi_2^4}{24} - \frac{q_0 L(\xi_2-a)^3}{6} + C_1\xi_2 + C_0 = 0 \quad (2)
\end{aligned}
$$

Aus zwei Gleichungen können wir C_0 und C_1 standardmäßig isolieren:

$$
\begin{aligned}
(1) \quad \rightarrow \quad C_0 &= -C_1\xi_1 - \frac{q_0\xi_1^4}{24} \\
(3) \rightarrow (2) \quad \rightarrow \quad C_1 &= \frac{\frac{q_0}{24}(\xi_1^4-\xi_2^4) + \frac{q_0 L}{6}(\xi_2-a)^3}{(\xi_2-\xi_1)}
\end{aligned}
$$

Die Grafik zeigt $Q(x)$, $M(x)$ und $w(x)$ für ein Zahlenbeispiel: $L=2m$, $a=0,4m$, Breite des Bleches $3cm$ und Höhe $0,5mm$, ferner die Materialkonstanten $\rho = 7800\frac{kg}{m^3}$ und $E = 2,1\cdot 10^{11}\frac{N}{m^2}$ für Stahl.



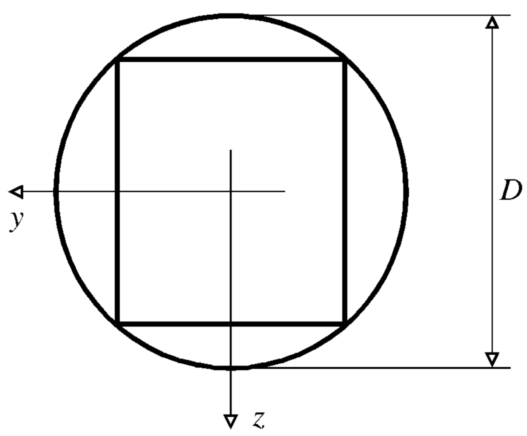
Aufgabe 3

Aus einem gegebenen Rundmaterial mit dem Durchmesser D wird ein Rechteckprofil herausgeschnitten, das ein möglichst großes Biegemoment M_y übertragen soll.

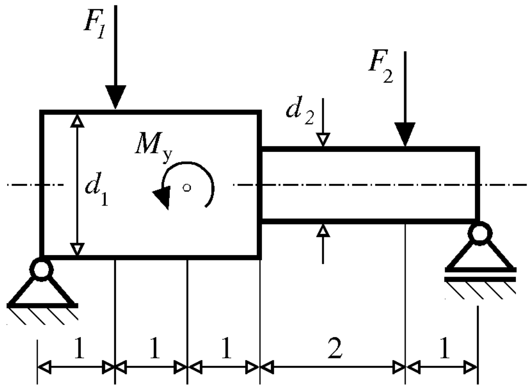
a) Wie groß sind Breite und Höhe des Rechteckprofils?

b) Um wieviel Prozent hat sich das übertragbare Biegemoment gegenüber dem Kreisquerschnitt verändert?

c) Man berechne M_{max} für das Rechteckprofil, wenn $D = 100mm$ ist und die zulässige Normalspannung $\sigma_{zul} = 200N/mm^2$ beträgt.

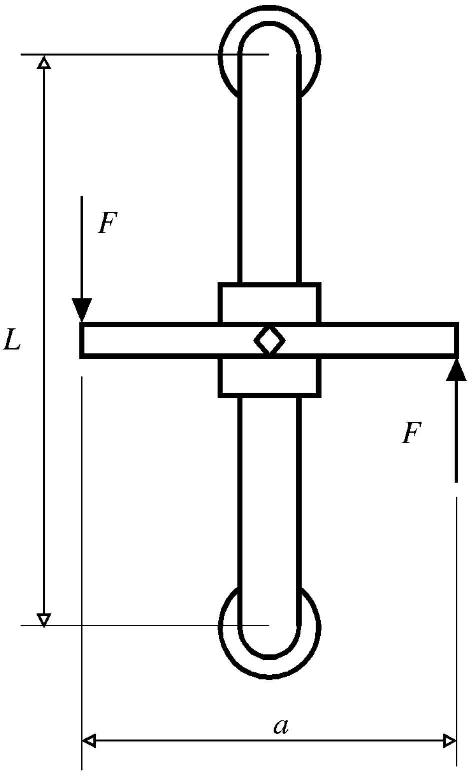


Aufgabe 4



Ein Balken mit kreisrundem Querschnitt ist in der Mitte abgesetzt. Er wird durch die Kräfte $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$ und das Moment $\mathbf{M}_y$ belastet. Man bestimme die Auflagerkräfte, den Schnittmomentenverlauf und die Durchmesser d_1 und d_2 so, daß in beiden Abschnitten die Maximalspannung den gleichen Wert σ_0 hat.
Alle Längen in m.
$\sigma_0 = 150N/mm^2$, $F_1 = F_2 = 50kN$
$M_y = 60kNm$.

Aufgabe 5



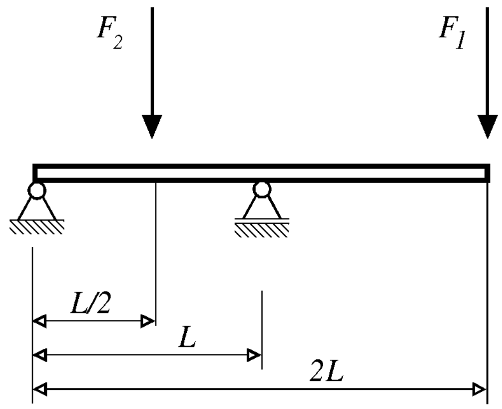
An dem skizzierten Gasleitungsrohr klemmt der in der Mitte befindliche Hahn. Er soll mit einem großen Schlüssel geöffnet werden, an dessen Enden mit der Kraft $\mathbf{F}$ gedrückt wird. Die Enden des Rohres sollen wie Gelenklager behandelt werden.

a) Man berechne Ort und Größe der maximalen Durchbiegung des Rohres.

b) Man gebe den Zahlenwert für die Durchbiegung an, wenn $L = 3m$, $a = 50cm$, $F = 200N$, $E = 2 \cdot 10^5 N/mm^2$ sind. Das Rohr hat einen Außendurchmesser von $D = 32mm$, eine Wandstärke von $\delta = 5mm$ und damit ein axiales Trägheitsmoment von $I = 4{,}0cm^4$.

Aufgabe 6

Eine Hohlwelle (Länge $2L$, Außendurchmesser d, Wandstärke δ) ist an einem Ende und in der Mitte statisch bestimmt gelagert. Sie wird durch die Kräfte $\mathbf{F}_1$ und $\mathbf{F}_2$ belastet. Das Eigengewicht der Welle kann vernachlässigt werden.



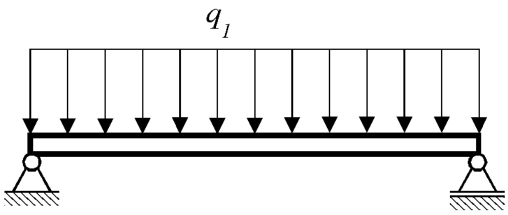
a) Man berechne Ort und Größe der stärksten Beanspruchung.

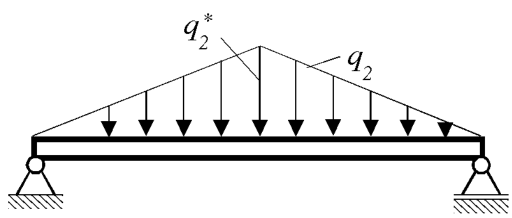
b) Wie groß ist die Durchbiegung am freien Ende?

$2L = 0,8m$, $d = 2,4cm$, $\delta = 2mm$, $F_1 = 300N$, $F_2 = 200N$, $E = 2 \cdot 10^5 N/mm^2$.

Aufgabe 7

Zwei gleiche, beiderseits frei aufliegende, homogene Träger von konstantem Querschnitt sind durch die kontinuierlichen Belastungen q_1 und q_2 beansprucht. In welchem Verhältnis stehen in diesen zwei Belastungsfällen die Durchbiegungen in der Balkenmitte zueinander?



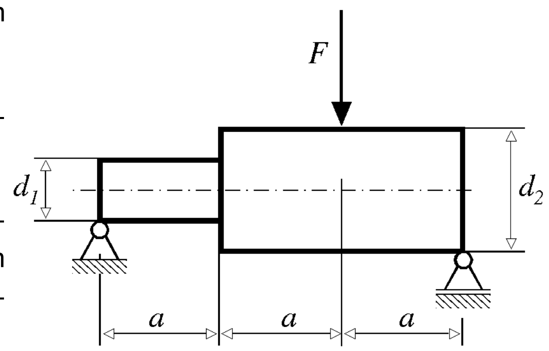


Aufgabe 8

Eine abgesetzte Stahlwelle mit kreisrundem Querschnitt wird durch eine Kraft $\mathbf{F}$ belastet.

a) Man bestimme die maximale Durchbiegung der Welle.

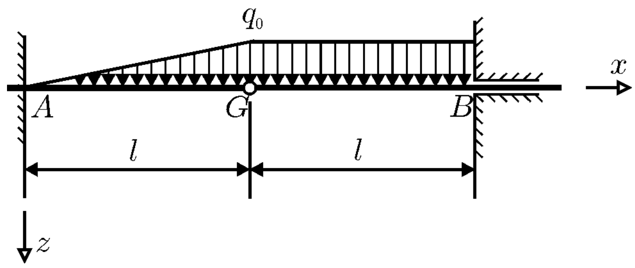
b) Um wieviel Prozent ändert sich die maximale Durchbiegung der Welle, wenn sie mit konstantem Durchmesser d_2 ausgeführt wird?



$d_1 = 80mm$, $d_2 = 95mm$, $a = 0,3m$,
$F = 60kN$, $E = 2 \cdot 10^5 N/mm^2$

Aufgabe 9

Das skizzierte, masselose System besteht aus den beiden Biegebalken (jeweils Länge l) $\overline{AG}$ und $\overline{GB}$, die im Punkt G durch ein Gelenk miteinander verbunden sind. Im Punkt A ist der Balken $\overline{AG}$ fest eingespannt, in Punkt B ist der Balken $\overline{GB}$ horizontal geführt. Ohne äußere Lasten sei das System spannungsfrei.



Die Biegesteifigkeit EI der Balken ist in beiden Bereichen gleich und konstant. Auf den Balken $\overline{AG}$ wirkt eine lineare Streckenlast $q(x)$, die ihren Maximalwert q_0 im Punkt G hat, und auf den Balken $\overline{GB}$ eine konstante Streckenlast mit dem Wert q_0.

a) Berechnen Sie die Lagerreaktionen im Punkt A in Abhängigkeit der gegebenen Größen und des Lagermomentes M_B im Punkt B.

b) Geben Sie mit Hilfe der Föpplsymbole den Querkraftverlauf $Q(x)$ für das gesamte System $\overline{AB}$ in Abhängigkeit der unbekannten Lagerreaktion M_B an.

c) Geben Sie mit Hilfe der Föpplsymbole den Momentenverlauf $M(x)$ für das gesamte System $\overline{AB}$ in Abhängigkeit von M_B an.

d) Skizzieren Sie die Verläufe von $Q(x)$ und $M(x)$ des gesamten Systems $\overline{AB}$ qualitativ und geben Sie die Ordnung der Kurven an.

Für eine andere Belastung des Systems ergibt sich der folgende Momentenverlauf $M(x)$ in Abhängigkeit des Lagermomentes M_B der rechten Einspannung:

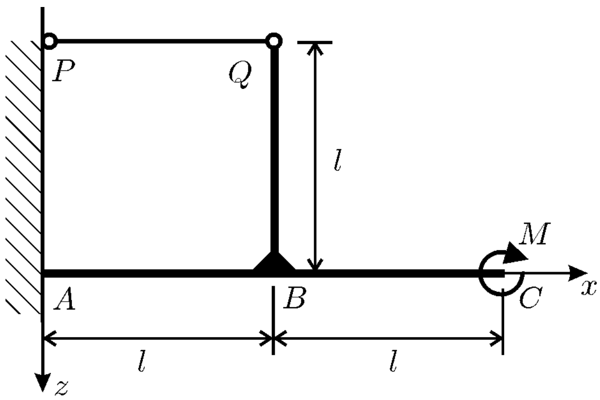
$$M(x) \quad = \quad M_B\left(\frac{x}{l}-1\right) \;+\; q_0\, l^2\left(-1+\frac{3\,x}{2\,l}-\frac{x^2}{2\,l^2}\right)$$

e) Bestimmen Sie die Biegeline $w(x)$ in Abhängigkeit von M_B und möglicher Integrationskonstanten.

f) Berechnen Sie den Winkel $\Delta\varphi$, um den sich das Gelenk in G verdreht, sowie die Lagerreaktion M_B.

Aufgabe 10

Der dargestellte Träger besteht aus einem elastischen Balken (E-Modul E, Länge $2l$, Querschnittsfläche A, Flächenträgheitsmoment I) und einem starren Hebel (Länge l). Der Balken ist an einer Wand fest eingespannt (Punkt A). Der Hebel ist im Punkt B rechtwinklig mit dem Balken verschweißt und in Q mit einem elastischen Stab (Länge l, E-Modul E, Querschnittfläche A, Wärmeausdehnungskoeffizient α_T) gelenkig verbunden.



Der Stab ist im Punkt P an der Wand drehbar gelagert. Im Punkt C wirkt ein Moment M auf den Balken. Ohne äußere Belastung ($M = 0$) ist das System vollkommen spannungsfrei. Der Einfluß der Schwerkraft sei vernachlässigbar.

$M,\ E,\ l,\ A,\ I,\ \alpha_T$

a) Geben Sie den Verlauf der Biegelinie $w(x)$ für den Bereich $\overline{AC}$ in Abhängigkeit der gegebenen Größen und der Stabkraft an.

Der Stab wird nun gleichmäßig gekühlt, so dass sich der Balken im Punkt C ($x = 2l$) nicht durchsenkt.

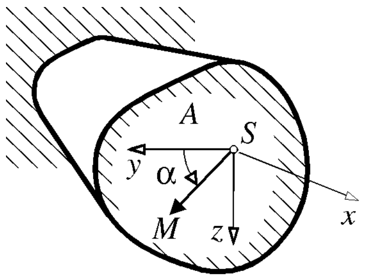
b) Berechnen Sie die Stabkraft.

c) Geben Sie die hierfür nötige Temperaturdifferenz $\Delta T < 0$ an. (**Hinweis**: Verwenden Sie die Näherungen $\sin(\alpha) \approx \alpha$ und $\cos(\alpha) \approx 1$ für kleine Winkel α.)

d) Zeichnen Sie qualitativ die Biegelinie $w(x)$.

2.4.3 Schiefe Biegung

Grundformeln: Schiefe Biegung



Achtung: I_y, I_z müssen ein Hauptachsensystem darstellen ($I_{yz} = 0$)!

E	Elastizitätsmodul
I_y	Flächenträgheitsmoment um die y-Achse
I_z	Flächenträgheitsmoment um die z-Achse
$w(x)$	Durchsenkung an der Stelle x in z-Richtung
$v(x)$	Durchsenkung an der Stelle x in y-Richtung

$$\sigma_x(y,z) = -\frac{M_z}{I_z}y + \frac{M_y}{I_y}z$$

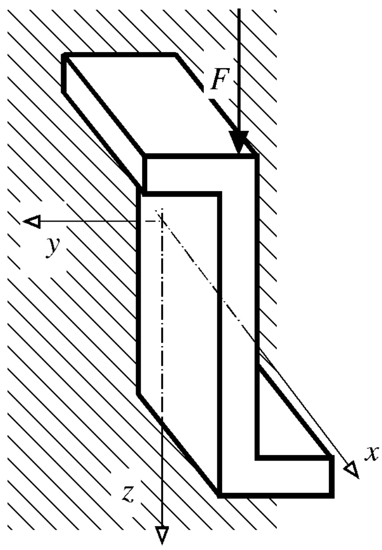
$$M_z = M \sin\alpha$$

$$M_y = M \cos\alpha$$

$$EI_y w''(x) = -M_y(x) = -M(x)\cos\alpha$$

$$EI_z v''(x) = M_z(x) = M(x)\sin\alpha$$

Musteraufgabe



Ein einseitig fest eingespannter Träger mit dem Querschnitt aus Aufgabe 1 und der Länge L wird an seinem Ende durch die Einzelkraft F belastet. Man berechne die Durchbiegung am Ende des Trägers! Ferner bestimme man die Lage der neutralen Linie und den Betrag der größten Zugspannung im Träger.
$F = 1000N$; $L = 2m$; $E = 2 \cdot 10^5 \frac{N}{mm^2}$

Lösung: Das $y-, z-$System aus der Aufgabenstellung ist kein Hauptachsensystem, die Achsensymmetrie ist in diesem System nicht gegeben (nur Punktsymmetrie,
Punktsymmetrie deutet immer auf ein hohes Deviationsmoment hin; das Deviationsmoment ist gewissermaßen ein Maß für die Achsensymmetrie eines Querschnittes).

Wir müssen also zunächst das Hauptachsensystem dieses Querschnittes bestimmen. Dies geschieht standardmäßig nach Kap. 2.4.1.; unser Querschnitt ist identisch mit dem Querschnitt aus Aufgabe 1, wir übernehmen die Werte

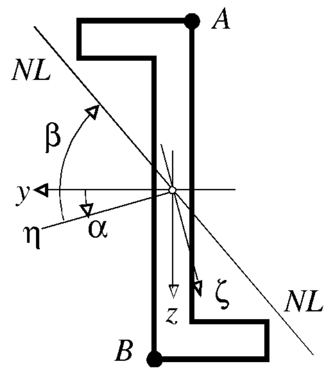
$$I_y = 1472\,cm^4; \qquad I_z = 176\,cm^4; \qquad I_{yz} = -336\,cm^4$$

Mit diesen Werten lassen sich die Lagen und Größen der Hauptträgheitsmomente mit Hilfe der Standardformel aus Kap. 2.4.1 angeben:

$$I_1 = I_\eta = 1554\,cm^4; \qquad I_2 = I_\zeta = 94\,cm^4; \qquad \alpha = \alpha_1 = 13,7^o$$

Die entsprechenden Achsen nennen wir η- und ζ- Achse. (Der Winkel α dreht im 'Trägheitskreis' und im Lagekreis linksherum, von der Bezugslinie auf dem kürzesten Weg zur I- Achse zum Wert I_η.) Als nächstes teilen wir die wirkende Kraft F auf in ihre Komponenten im $\eta-,\zeta-$System auf und berechnen das Schnittmoment $M(x)$ ebenfalls in diesem System:

$$F_\eta = F\cdot\sin\alpha; \qquad M_\zeta(x) = F_\eta\cdot(L-x)$$
$$F_\zeta = F\cdot\cos\alpha; \qquad M_\eta(x) = F_\zeta\cdot(x-L)$$



Man beachte die Vorzeichen und die Tatsache, daß F_η auf M_ζ wirkt und umgekehrt. Im Hauptachsensystem dürfen wir die Belastung durch F aus den ebenen Fällen F_η und F_ζ superponieren (einzeln berechnen und überlagern). Für den ebenen Fall kann man sofort die Biegelinie berechnen oder aus Tabellenbüchern herauslesen:

$$w_\eta(x) = \frac{F_\eta x^2}{2EI_2}(L-\frac{x}{3}); \qquad w_\eta(x=L) = \frac{F_\eta L^3}{3EI_\zeta}$$

$$w_\zeta(x) = \frac{F_\zeta x^2}{2EI_\eta}(L-\frac{x}{3}); \qquad w_\zeta(x=L) = \frac{F_\zeta L^3}{3EI_\eta}$$

Die Koordinaten der Gesamtdurchbiegung f liegen somit im $1-,2-$System fest, der Betrag berechnet sich durch vektorielle Addition:

$$f = \sqrt{w_\eta^2(x=L) + w_\zeta^2(x=L)} = 0,346cm$$

Die neutrale Linie ist die Linie im Querschnitt, auf der alle Punkte liegen die mit der Normalspannung $\sigma_x = 0$ beansprucht werden, d.h. die unbelasteten Stellen im Querschnitt. Die Bedingung $\sigma_x = 0$ ist zugleich ihre Bestimmungsgleichung, im $1-,2-$Hauptachsensystem (und nur dort) gilt:

$$\sigma_x = -\frac{M_\zeta}{I_\zeta}\eta + \frac{M_\eta}{I_\eta}\zeta$$

Mit der Bedingung $\sigma_x = 0$ und den o.a. Schnittmomenten folgt sofort

$$\frac{(\sin\alpha)\cdot\eta}{I_\zeta} = -\frac{(\cos\alpha)\cdot\zeta}{I_\eta}$$