Kapitel I. Differentialrechnung im Komplexen

In diesem Kapitel geben wir zunächst eine Einführung in die *komplexen Zahlen* und ihre *Topologie*. Dabei nehmen wir an, dass der Leser hier nicht zum ersten Male den komplexen Zahlen begegnet. Die gleiche Annahme gilt für die topologischen Begriffe in $\mathbb{C}$ (*Konvergenz, Stetigkeit* etc.). Wir fassen uns deshalb hier ebenfalls kurz. In §4 führen wir den Begriff der *Ableitung im Komplexen* ein. Mit diesem Paragraphen kann man die Lektüre beginnen, wenn man mit den komplexen Zahlen und ihrer Topologie bereits hinreichend vertraut ist. In §5 wird der *Zusammenhang* der *reellen Differenzierbarkeit* mit der *komplexen Differenzierbarkeit* behandelt *(Cauchy-Riemann'sche Differentialgleichungen)*.

Die Geschichte der komplexen Zahlen von den ersten Anfängen im 16. Jahrhundert bis zu ihrer endgültigen Einbürgerung in der Mathematik im Laufe des 19. Jahrhunderts — wohl letztlich dank der wissenschaftlichen Autorität von C. F. Gauss — sowie die lange Unsicherheit und Unklarheit im Umgang mit ihnen, all das ist ein eindrucksvolles Beispiel zur Mathematikhistorie. Dem historisch interessierten Leser sei die Lektüre von [Re3] empfohlen. Für weitere historische Bemerkungen über die komplexen Zahlen vergleiche man auch [CE, Ge] oder [Pi].

1. Komplexe Zahlen

Bekanntlich besitzt nicht jedes Polynom mit reellen Koeffizienten auch eine reelle Nullstelle, z. B. das Polynom

$$P(x) = x^2 + 1.$$

Es gibt also keine reelle Zahl x mit $x^2 + 1 = 0$. Will man dennoch erreichen, dass diese Gleichung oder ähnliche Gleichungen Lösungen besitzen, so kann dies nur dadurch geschehen, dass man zu einem Oberbereich von $\mathbb{R}$ übergeht, in dem solche Lösungen existieren. Man erweitert den Körper $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen zum Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen. In diesem besitzt dann sogar *jede Polynomgleichung* (nicht nur die Gleichung $x^2 + 1 = 0$) Lösungen (im allgemeinen natürlich komplexe). Dies ist die Aussage des *„Fundamentalsatzes der Algebra“*.

1.1 Satz. *Es existiert ein Körper $\mathbb{C}$ mit folgenden Eigenschaften:*

1) *Der Körper $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen ist ein Unterkörper von $\mathbb{C}$, d. h. $\mathbb{R}$ ist eine Teilmenge von $\mathbb{C}$, und Addition und Multiplikation in $\mathbb{R}$ entstehen durch Einschränkung der Addition und Multiplikation in $\mathbb{C}$.*
2) *Die Gleichung*
$$X^2 + 1 = 0$$
hat in $\mathbb{C}$ genau zwei Lösungen.
3) *Sei* i *eine der beiden Lösungen (dann ist* $-\mathrm{i}$ *die andere). Die Abbildung*
$$\begin{aligned} \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{C}, \\ (x, y) &\longmapsto x + \mathrm{i}y, \end{aligned}$$
ist bijektiv.

Wir nennen $\mathbb{C}$ Körper der ***komplexen Zahlen****.*

Beweis. Der Existenzbeweis wird durch 3) nahegelegt. Man definiert auf der Menge $\mathbb{C} := \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ die folgenden *Verknüpfungen*,
$$\begin{aligned} (x, y) + (u, v) &:= (x + u, y + v), \\ (x, y) \cdot (u, v) &:= (xu - yv, xv + yu) \end{aligned}$$
und weist zunächst die Gültigkeit der *Körperaxiome* nach. Diese sind:

1) *Die Assoziativgesetze*
$$\begin{aligned} (z + z') + z'' &= z + (z' + z''), \\ (zz')z'' &= z(z'z''). \end{aligned}$$
2) *Die Kommutativgesetze*
$$\begin{aligned} z + z' &= z' + z, \\ zz' &= z'z. \end{aligned}$$
3) *Die Distributivgesetze*
$$\begin{aligned} z(z' + z'') &= zz' + zz'', \\ (z' + z'')z &= z'z + z''z. \end{aligned}$$
4) *Die Existenz der neutralen Elemente*
   a) Es existiert ein (eindeutig bestimmtes) Element $\underline{0} \in \mathbb{C}$ mit der Eigenschaft
   $$z + \underline{0} = z \quad \text{für alle} \quad z \in \mathbb{C}.$$
   b) Es existiert ein (eindeutig bestimmtes) Element $\underline{1} \in \mathbb{C}$ mit der Eigenschaft
   $$z \cdot \underline{1} = z \quad \text{für alle} \quad z \in \mathbb{C} \text{ und } \underline{1} \neq \underline{0}.$$

5) *Die Existenz der inversen Elemente*

a) Zu jedem $z \in \mathbb{C}$ existiert ein (eindeutig bestimmtes) Element $-z \in \mathbb{C}$ mit der Eigenschaft
$$z + (-z) = \underline{0}.$$

b) Zu jedem $z \in \mathbb{C}$, $z \neq \underline{0}$, existiert ein (eindeutig bestimmtes) Element $z^{-1} \in \mathbb{C}$ mit der Eigenschaft
$$z \cdot z^{-1} = \underline{1}.$$

Verifikation der Körperaxiome

Die Axiome 1) – 3) verifiziert man durch direkte Rechnung.

4) a) $\underline{0} := (0, 0)$.
   b) $\underline{1} := (1, 0)$.

5) a) $-(x, y) := (-x, -y)$.
   b) Sei $z = (x, y) \neq (0, 0)$. Dann ist $x^2 + y^2 \neq 0$. Eine direkte Rechnung zeigt, dass
$$z^{-1} := \left(\frac{x}{x^2 + y^2} \, , \; -\frac{y}{x^2 + y^2} \right)$$
   zu z invers ist.

Offensichtlich gilt
$$(a, 0)(x, y) = (ax, ay),$$
insbesondere also
$$(a, 0)(b, 0) = (ab, 0).$$
Außerdem gilt
$$(a, 0) + (b, 0) = (a + b, 0).$$
Also ist
$$\mathbb{C}_{\mathbb{R}} := \left\{ \, (a, 0); \quad a \in \mathbb{R} \, \right\}$$
ein Unterkörper von $\mathbb{C}$, in dem genau so gerechnet wird wie in $\mathbb{R}$ selbst.

Genauer: Die Abbildung
$$\begin{aligned} \iota : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{C}_{\mathbb{R}}, \\ a &\longmapsto (a, 0), \end{aligned}$$
ist ein Körperisomorphismus.

Damit haben wir uns einen Körper $\mathbb{C}$ konstruiert, der zwar nicht $\mathbb{R}$, aber einen zu $\mathbb{R}$ isomorphen Körper $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}$ enthält. Man könnte nun leicht durch mengentheoretische Manipulationen einen zu $\mathbb{C}$ isomorphen Körper $\widetilde{\mathbb{C}}$ konstruieren, welcher den vorgelegten Körper $\mathbb{R}$ als Unterkörper enthält. Wir verzichten auf diese Konstruktion und identifizieren einfach im Folgenden die reelle Zahl a mit der komplexen Zahl $(a, 0)$.

Zur weiteren Vereinfachung verwenden wir die

Bezeichnung $\mathrm{i} := (0,1)$ und nennen i die *imaginäre Einheit* (L. Euler, 1777).

Offensichtlich gilt dann

a) $\mathrm{i}^2 = \mathrm{i} \cdot \mathrm{i} = (0,1) \cdot (0,1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1, 0) = -(1,0)$,
b) $(x,y) = (x,0) + (0,y) = (x,0) \cdot (1,0) + (y,0) \cdot (0,1)$

oder in vereinfachter Schreibweise

a) $\mathrm{i}^2 = -1$,
b) $(x,y) = x + y\,\mathrm{i} = x + \mathrm{i}y$.

Jede komplexe Zahl lässt sich also *eindeutig* in der Form $z = x + \mathrm{i}y$ mit reellen Zahlen x und y schreiben. Damit ist Satz 1.1 bewiesen. □

Es lässt sich zeigen, dass ein Körper $\mathbb{C}$ durch die Eigenschaften 1)–3) aus Satz 1.1 „im wesentlichen" eindeutig bestimmt ist (s. Aufgabe 13 aus I.1).

In der eindeutigen Darstellung $z = x + \mathrm{i}y$ heißt

x der *Realteil* von z und
y der *Imaginärteil* von z.

Bezeichnung. $x = \mathrm{Re}(z)$, $y = \mathrm{Im}(z)$.
Ist $\mathrm{Re}(z) = 0$, dann heißt z *rein imaginär.*

Anmerkung. Auf einen wesentlichen Unterschied gegenüber dem Körper $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen sei hingewiesen: $\mathbb{R}$ ist ein *angeordneter Körper,* d. h. in $\mathbb{R}$ ist eine Teilmenge P der sogenannten „positiven Elemente" ausgezeichnet, so dass folgendes gilt:

1) Für jede reelle Zahl a trifft genau einer der folgenden Fälle zu:

$$\text{a) } a \in P \qquad \text{b) } a = 0 \quad \text{oder} \quad \text{c) } -a \in P.$$

2) Für beliebige $a, b \in P$ gilt

$$a + b \in P \quad \text{und} \quad ab \in P.$$

Es lässt sich jedoch leicht zeigen, dass sich $\mathbb{C}$ nicht anordnen lässt, d. h., dass es keine Teilmenge $P \subset \mathbb{C}$ gibt, für die die Axiome 1) und 2) für beliebige $a, b \in P$ gelten (wegen $\mathrm{i}^2 = -1$).

Von einigem Nutzen für das Rechnen mit komplexen Zahlen ist der Übergang zum *Konjugiert-Komplexen:*

Sei $z = x + \mathrm{i}y$, $x, y \in \mathbb{R}$. Wir setzen $\overline{z} = x - \mathrm{i}y$ und nennen $\overline{z}$ die zu z *konjugiert komplexe Zahl.* Man bestätigt leicht die folgenden Rechenregeln für die Abbildung

$$\overline{} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad z \longmapsto \overline{z}.$$

1.2 Bemerkung. *Für $z, w \in \mathbb{C}$ gilt:*

1) $\overline{\overline{z}} = z,$
2) $\overline{z \pm w} = \overline{z} \pm \overline{w}, \quad \overline{zw} = \overline{z} \cdot \overline{w},$
3) $\operatorname{Re} z = (z + \overline{z})/2, \quad \operatorname{Im} z = (z - \overline{z})/2\mathrm{i},$
4) $z \in \mathbb{R} \iff z = \overline{z}, \quad z \in \mathrm{i}\mathbb{R} \iff z = -\overline{z}.$

Die Abbildung $^- : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \overline{z}$, ist also ein involutorischer Körperautomorphismus mit dem Fixkörper $\mathbb{R}$.

Offensichtlich ist

$$z\overline{z} = x^2 + y^2$$

eine nicht negative reelle Zahl.

1.3 Definition. *Der **Betrag** einer komplexen Zahl z wird definiert durch*

$$|z| := \sqrt{z\overline{z}}.$$

Offenbar ist $|z|$ der euklidische Abstand von z zum Nullpunkt. Es gilt

$$|z| \geq 0$$

und

$$|z| = 0 \iff z = 0.$$

1.4 Bemerkung. *Für $z, w \in \mathbb{C}$ gilt:*

1) $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|\,,$
2) $|\operatorname{Re} z| \leq |z|\,, \quad |\operatorname{Im} z| \leq |z|\,,$
3) $|z + w| \leq |z| + |w|$ *(Dreiecksungleichung),*
4) $|z - w| \geq ||z| - |w||\,.$

Aus der Formel $z\overline{z} = |z|^2$ erhält man übrigens einen einfachen Ausdruck für das Inverse einer komplexen Zahl $z \neq 0$:

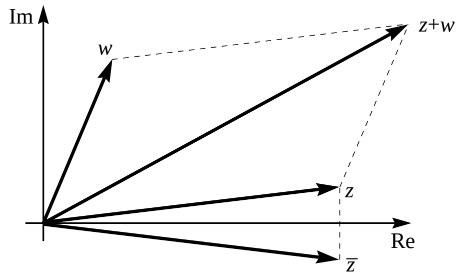
$$\boxed{z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}\,.}$$

Beispiel.

$$(1 + \mathrm{i})^{-1} = \frac{1 - \mathrm{i}}{2}\,.$$

Geometrische Veranschaulichung in der Gauß'schen Zahlenebene

1) Die Addition von komplexen Zahlen ist einfach die vektorielle Addition von Paaren reeller Zahlen:



2) $\overline{z} = x - \mathrm{i}y$ entsteht aus $z = x + \mathrm{i}y$ durch Spiegelung an der reellen Achse.

3) Eine geometrische Deutung der *Multiplikation* komplexer Zahlen erhält man mit Hilfe von *Polarkoordinaten.* Aus der reellen Analysis ist bekannt, dass sich jeder Punkt $(x, y) \neq (0, 0)$ in der Form

$$(x, y) = r(\cos\varphi, \sin\varphi), \quad r > 0,$$

schreiben lässt. Dabei ist r eindeutig bestimmt,

$$r = \sqrt{x^2 + y^2},$$

der Winkel φ (gemessen im Bogenmaß) ist jedoch nur bis auf Addition eines ganzzahligen Vielfachen von 2π eindeutig.*) Bezeichnet man mit

$$\mathbb{R}_+^\bullet := \{\, x \in \mathbb{R}; \quad x > 0 \,\}$$

die Menge der positiven reellen Zahlen und mit

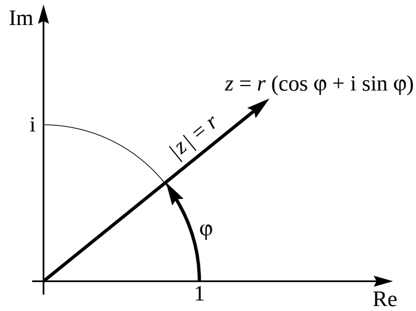
$$\mathbb{C}^\bullet := \mathbb{C} - \{0\}$$

die im Nullpunkt gelochte komplexe Ebene, so gilt also

1.5 Satz. *Die Abbildung*

$$\begin{aligned} \mathbb{R}_+^\bullet \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{C}^\bullet, \\ (r, \varphi) &\longmapsto r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi), \end{aligned}$$

ist surjektiv.



*) Man sagt auch: modulo 2π.

Zusatz. *Aus*

$$r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi) = r'(\cos\varphi' + \mathrm{i}\sin\varphi'), \quad r, r' > 0,$$

folgt

$$r = r' \quad \textit{und} \quad \varphi - \varphi' = 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Anmerkung. In der *Polarkoordinatendarstellung*

$$(*) \qquad z = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$$

von $z \in \mathbb{C}^\bullet$ ist also r durch z eindeutig bestimmt ($r = \sqrt{z\bar{z}}$), der Winkel φ jedoch nur bis auf ein additives ganzzahliges Vielfaches von 2π. Jedes $\varphi \in \mathbb{R}$, für das $(*)$ gilt, heißt *ein Argument* von z. Ist also φ_0 ein (festes) Argument von z, so hat jedes weitere Argument φ von z die Gestalt

$$\varphi = \varphi_0 + 2\pi k, \ k \in \mathbb{Z}.$$

Eindeutigkeit in der Polarkoordinatendarstellung erhält man, wenn man z. B. fordert, dass φ im Intervall $]-\pi, \pi]$ variiert, mit anderen Worten, die Abbildung

$$\mathbb{R}_+^\bullet \times \,]-\pi, \pi] \longrightarrow \mathbb{C}^\bullet, \qquad (r, \varphi) \longmapsto r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi),$$

ist bijektiv. Man nennt $\varphi \in \,]-\pi, \pi]$ den *Hauptwert* des Arguments und bezeichnet ihn gelegentlich mit $\mathrm{Arg}(z)$, beispielsweise ist $\mathrm{Arg}(1) = \mathrm{Arg}(2006) = 0$, $\mathrm{Arg}(\mathrm{i}) = \pi/2$, $\mathrm{Arg}(-\mathrm{i}) = -\pi/2$, $\mathrm{Arg}(-1) = \pi$.

1.6 Satz. *Es gilt*

$$(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)(\cos\varphi' + \mathrm{i}\sin\varphi') = \cos(\varphi + \varphi') + \mathrm{i}\sin(\varphi + \varphi')$$

oder

$$\boxed{\begin{gathered}\cos(\varphi + \varphi') = \cos\varphi \cdot \cos\varphi' - \sin\varphi \cdot \sin\varphi' \\ \sin(\varphi + \varphi') = \sin\varphi \cdot \cos\varphi' + \cos\varphi \cdot \sin\varphi' \\ \textit{(Additionstheoreme der Winkelfunktionen).}\end{gathered}}$$

Die Sätze 1.5 und 1.6 beinhalten eine geometrische Deutung der Multiplikation komplexer Zahlen. Ist nämlich

$$z = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi), \quad z' = r'(\cos\varphi' + \mathrm{i}\sin\varphi'),$$

dann ist

$$zz' = rr'\big(\cos(\varphi + \varphi') + \mathrm{i}\sin(\varphi + \varphi')\big).$$

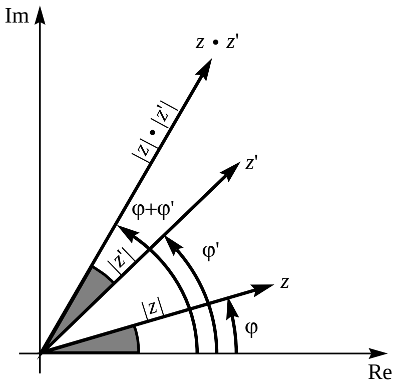
Also ist rr' der Betrag von zz' und $\varphi + \varphi'$ ein Argument von zz', was man kurz, aber nicht ganz präzise, so ausdrücken kann:

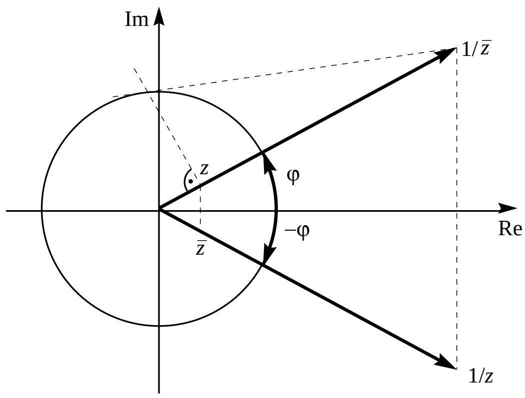
Komplexe Zahlen werden multipliziert, indem man die Beträge multipliziert und die Argumente addiert.

Ist $z = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi) \neq 0$, dann ist

$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{z\overline{z}} = \frac{1}{r}(\cos\varphi - \mathrm{i}\sin\varphi),$$

woraus man ebenfalls eine elementare geometrische Konstruktion von $1/z$ ablesen kann.





Sei $n \in \mathbb{Z}$ eine ganze Zahl. Wie üblich definiert man a^n für komplexe Zahlen a durch

$$\begin{aligned} a^n &= \overbrace{a \cdot \cdots \cdot a}^{n\text{-mal}}, \text{ falls } n > 0,\\ a^0 &= 1,\\ a^n &= (a^{-1})^{-n}, \text{ falls } n < 0,\ a \neq 0. \end{aligned}$$

Es gelten die Rechenregeln

$$\begin{aligned} a^n \cdot a^m &= a^{n+m},\\ (a^n)^m &= a^{nm},\\ a^n \cdot b^n &= (a \cdot b)^n. \end{aligned}$$

Mit der üblichen Definition der Binomialkoeffizienten gilt

$$(a+b)^n = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} a^\nu b^{n-\nu} \qquad \textit{(binomische Formel)}$$

für komplexe Zahlen $a, b \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}_0$.

Eine komplexe Zahl a heißt n-te **Einheitswurzel** ($n \in \mathbb{N}$), falls $a^n = 1$ gilt.

1.7 Satz. *Es gibt zu jedem $n \in \mathbb{N}$ genau n verschiedene n-te Einheitswurzeln, nämlich*

$$\zeta_\nu := \cos\frac{2\pi\nu}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{2\pi\nu}{n}, \quad 0 \le \nu < n.$$

Beweis. Man zeigt mit Hilfe von 1.6 leicht durch Induktion nach n, dass

$$(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + \mathrm{i}\sin n\varphi \qquad \text{(L. Euler, A. de Moivre)}$$

für beliebige natürliche Zahlen n gilt. Da Einheitswurzeln vom Betrag 1 sind, lassen sie sich in der Form

$$\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi$$

darstellen. Diese Zahl ist genau dann n-te Einheitswurzel, wenn $n\varphi$ ganzzahliges Vielfaches von 2π ist, d. h. $\varphi = 2\pi\nu/n$. Mit dem Zusatz von Satz 1.5 folgt, dass man für ν nur die Werte 0 bis $n-1$ zu nehmen braucht. Also liefern die n Zahlen

$$\zeta_\nu := \zeta_{\nu,n} := \cos\frac{2\pi\nu}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{2\pi\nu}{n}, \quad \nu = 0, \dots, n-1,$$

die n verschiedenen n-ten Einheitswurzeln. □

Anmerkung. Mit $\zeta_1 = \zeta_{1,n} = \cos\frac{2\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{n}$ gilt

$$\zeta_\nu = \zeta_1^\nu, \quad \nu = 0, 1, \dots, n-1.$$

Beispiele für n-te Einheitswurzeln:

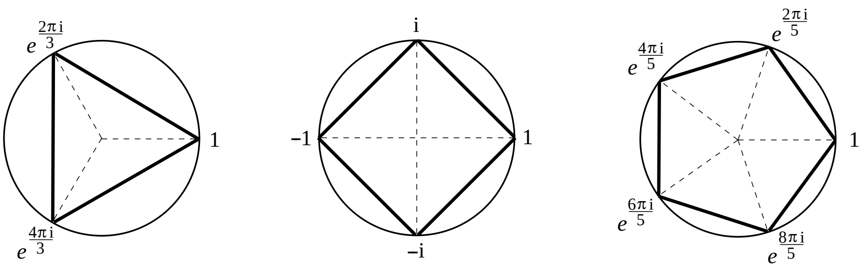
$n = 1$ $\quad \{1\}$.

$n = 2$ $\quad \{1, -1\} = \{\, (-1)^\nu; \quad \nu = 0, 1 \,\}$.

$n = 3$ $\quad \{\, 1, -\frac{1}{2} + \frac{\mathrm{i}}{2}\sqrt{3}, -\frac{1}{2} - \frac{\mathrm{i}}{2}\sqrt{3} \,\} = \{\, \left(-\frac{1}{2} + \frac{\mathrm{i}}{2}\sqrt{3}\right)^\nu; \quad 0 \le \nu \le 2 \,\} = \{\, \zeta_{1,3}^\nu; \quad 0 \le \nu \le 2 \,\}$.

$n = 4$ $\quad \{1, \mathrm{i}, -1, -\mathrm{i}\} = \{\, \mathrm{i}^\nu; \quad 0 \le \nu \le 3 \,\} = \{\, \zeta_{1,4}^\nu; \quad 0 \le \nu \le 3 \,\}$.

$n = 5$ $\quad \{\, \zeta_{1,5}^\nu; \quad 0 \le \nu \le 4 \,\}, \quad \zeta_{1,5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4} + \frac{\mathrm{i}}{4}\sqrt{2(5+\sqrt{5})}$.



Sämtliche n-ten Einheitswurzeln liegen auf dem Rand des Einheitskreises, der *Einheitskreislinie* $S^1 := \{\, z \in \mathbb{C};\quad |z| = 1\,\}$. Sie bilden die Eckpunkte eines gleichseitigen (= regulären) n-Ecks, das S^1 einbeschrieben ist (ein Eckpunkt ist stets $(1,0) = 1$). Aus diesem Grund nennt man die Gleichung

$$z^n = 1$$

auch *Kreisteilungsgleichung*. Es gilt, wie wir noch sehen werden,

$$z^n - 1 = (z - \zeta_0) \cdot (z - \zeta_1) \cdot \ldots \cdot (z - \zeta_{n-1})$$

mit

$$\zeta_\nu = \cos\frac{2\pi}{n}\nu + \mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{n}\nu, \quad 0 \le \nu \le n-1.$$

Die ζ_ν sind die Nullstellen des Polynoms

$$P(z) := z^n - 1.$$

Das Polynom P hat also n verschiedene Nullstellen. Dies ist ein Spezialfall des *Fundamentalsatzes der Algebra*. Er besagt:

Jedes nichtkonstante komplexe Polynom besitzt so viele Nullstellen, wie sein Grad angibt.

Dabei müssen allerdings die Nullstellen mit Vielfachheiten gerechnet werden. Wir werden mehrere Beweise dieses wichtigen Satzes kennenlernen.

Anmerkung. Das regelmäßige n-Eck ist genau dann mit Zirkel und Lineal konstruierbar, falls die n-ten Einheitswurzeln durch iteriertes Quadratwurzelziehen und Körperoperationen aus rationalen Zahlen gewonnen werden können. Nach einem Satz von C. F. Gauss ist dies genau dann der Fall, wenn n die Gestalt

$$n = 2^l F_{k_1} \ldots F_{k_r}$$

hat, wobei $l, k_j \in \mathbb{N}_0$ und die F_{k_j}, $j = 1, \ldots, r$, paarweise verschiedene sogenannte *Fermat'sche Primzahlen* sind. Letztere sind Primzahlen von der Form

$$F_k = 2^{2^k} + 1, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Man kennt bis heute nur deren fünf, nämlich

$$F_0 = 3, \quad F_1 = 5, \quad F_2 = 17, \quad F_3 = 257, \text{ und } F_4 = 65537.$$

Für die nächste dieser Zahlen zeigt sich

$$F_5 = 641 \cdot 6700417$$

das heißt, F_5 ist durch 641 teilbar — also keine Primzahl.

Übungsaufgaben zu I.1

1. Von den folgenden komplexen Zahlen bestimme man jeweils *Real-* und *Imaginärteil:*

$$\frac{\mathrm{i}-1}{\mathrm{i}+1}\,; \quad \frac{3+4\mathrm{i}}{1-2\mathrm{i}}\,; \quad \mathrm{i}^n,\ n\in\mathbb{Z}; \quad \left(\frac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\right)^n,\ n\in\mathbb{Z};$$

$$\left(\frac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\right)^n,\ n\in\mathbb{Z}; \quad \sum_{\nu=0}^{7}\left(\frac{1-\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\right)^\nu; \quad \frac{(1+\mathrm{i})^4}{(1-\mathrm{i})^3}+\frac{(1-\mathrm{i})^4}{(1+\mathrm{i})^3}\,.$$

2. Von den folgenden komplexen Zahlen berechne man jeweils *Betrag* und (ein) *Argument:*

$$-3+\mathrm{i}; \quad -13; \quad (1+\mathrm{i})^{17}-(1-\mathrm{i})^{17}; \quad \mathrm{i}^{4711}; \quad \frac{3+4\mathrm{i}}{1-2\mathrm{i}}\,;$$

$$\frac{1+\mathrm{i}a}{1-\mathrm{i}a},\ a\in\mathbb{R}; \quad \frac{1-\mathrm{i}\sqrt{3}}{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}\,; \quad (1-\mathrm{i})^n,\ n\in\mathbb{Z}.$$

3. Man beweise die „*Dreiecksungleichung*“

$$|z+w|\le|z|+|w|\,, \quad z,w\in\mathbb{C},$$

und diskutiere, wann das Gleichheitszeichen gilt; ferner beweise man die folgende Variante der Dreiecksungleichung:

$$\big||z|-|w|\big|\le|z-w|\,, \quad z,w\in\mathbb{C}.$$

4. Für $z=x+\mathrm{i}y$, $w=u+\mathrm{i}v$, $x,y,u,v\in\mathbb{R}$, wird durch

$$\langle z,w\rangle := \operatorname{Re}(z\overline{w}) = xu+yv$$

das Standardskalarprodukt im $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{C}=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ bezüglich der Basis $(1,\mathrm{i})$ definiert. Man verifiziere durch direktes Nachrechnen, dass für $z,w\in\mathbb{C}$

$$\langle z,w\rangle^2+\langle \mathrm{i}z,w\rangle^2=|z|^2\,|w|^2$$

gilt, und folgere hieraus die CAUCHY-SCHWARZ'sche Ungleichung im $\mathbb{R}^2$:

$$|\langle z,w\rangle|^2=|xu+yv|^2\le|z|^2\,|w|^2=(x^2+y^2)(u^2+v^2).$$

Ferner zeige man jeweils durch direktes Nachrechnen, dass für $z,w\in\mathbb{C}$ die folgenden Identitäten gelten:

$$|z+w|^2=|z|^2+2\langle z,w\rangle+|w|^2 \qquad \text{(Kosinussatz)},$$
$$|z-w|^2=|z|^2-2\langle z,w\rangle+|w|^2\,,$$
$$|z+w|^2+|z-w|^2=2(|z|^2+|w|^2) \qquad \text{(Parallelogrammidentität)}.$$

Man zeige weiter: Zu jedem Paar $(z,w)\in\mathbb{C}^\bullet\times\mathbb{C}^\bullet$ gibt es genau eine reelle Zahl $\omega:=\omega(z,w)\in\,]-\pi,\pi]$ mit

$$\cos\omega=\cos\omega(z,w)=\frac{\langle z,w\rangle}{|z|\,|w|}$$

und

$$\sin\omega=\sin\omega(z,w)=\frac{\langle \mathrm{i}z,w\rangle}{|z|\,|w|}\,.$$

$\omega=\omega(z,w)$ heißt der *orientierte Winkel* zwischen z und w und wird häufig mit $\measuredangle(z,w)$ bezeichnet.

Man zeige: $\measuredangle(1,\mathrm{i}) = \pi/2\,,\ \measuredangle(\mathrm{i},1) = -\pi/2 = -\measuredangle(1,\mathrm{i})$.

5. Seien $n \in \mathbb{N}$ und $z_\nu, w_\nu \in \mathbb{C}$ für $1 \le \nu \le n$. Man beweise

$$\left|\sum_{\nu=1}^{n} z_\nu w_\nu\right|^2 = \sum_{\nu=1}^{n} |z_\nu|^2 \cdot \sum_{\nu=1}^{n} |w_\nu|^2 - \sum_{1\le\nu<\mu\le n} \left|z_\nu \overline{w}_\mu - z_\mu \overline{w}_\nu\right|^2$$

(die LAGRANGE'sche Identität) und folgere hieraus die CAUCHY-SCHWARZ'sche Ungleichung im $\mathbb{C}^n$:

$$\left|\sum_{\nu=1}^{n} z_\nu w_\nu\right|^2 \le \sum_{\nu=1}^{n} |z_\nu|^2 \cdot \sum_{\nu=1}^{n} |w_\nu|^2 .$$

6. Die folgenden Teilmengen von $\mathbb{C}$ veranschauliche man sich in der komplexen Zahlenebene:

a) Seien $a, b \in \mathbb{C}$, $b \neq 0$, und

$$G_0 := \left\{ z \in \mathbb{C};\quad \operatorname{Im}\left(\frac{z-a}{b}\right) = 0 \right\},$$

$$G_+ := \left\{ z \in \mathbb{C};\quad \operatorname{Im}\left(\frac{z-a}{b}\right) > 0 \right\} \quad \text{und}$$

$$G_- := \left\{ z \in \mathbb{C};\quad \operatorname{Im}\left(\frac{z-a}{b}\right) < 0 \right\}.$$

b) Seien $a, c \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{C}$ mit $b\overline{b} - ac > 0$,

$$K := \{\, z \in \mathbb{C};\quad az\overline{z} + \overline{b}z + b\overline{z} + c = 0 \,\}.$$

c) $L := \left\{ z \in \mathbb{C};\quad \left|z - \frac{\sqrt{2}}{2}\right|^2 \cdot \left|z + \frac{\sqrt{2}}{2}\right|^2 = \frac{1}{4} \right\}.$

7. **Quadratwurzeln und Lösbarkeit quadratischer Gleichungen in $\mathbb{C}$**

Sei $c = a + \mathrm{i}b \neq 0$ eine vorgegebene komplexe Zahl. Durch Aufspaltung in Real- und Imaginärteil zeige man, dass es genau zwei verschiedene komplexe Zahlen z_1 und z_2 gibt mit

$$z_1^2 = z_2^2 = c. \ \text{Es ist}\ \ z_2 = -z_1.$$

(z_1 und z_2 heißen die *Quadratwurzeln* aus c.) Als Beispiel bestimme man jeweils die Quadratwurzeln aus

$$5 + 7\mathrm{i} \ \text{bzw.}\ \sqrt{2} + \mathrm{i}\sqrt{2}.$$

Man löse diese Aufgabe auch mit Polarkoordinaten. Ferner zeige man, dass eine quadratische Gleichung

$$z^2 + \alpha z + \beta = 0, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C} \ \text{beliebig},$$

stets (höchstens zwei) Lösungen $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ besitzt.

8. **Existenz von n-ten Wurzeln**

Sei $a \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}$. Eine komplexe Zahl z heißt (eine) n-te Wurzel aus a, wenn $z^n = a$ gilt.

Man zeige: Ist $a = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi) \neq 0$, dann besitzt a genau n (verschiedene) n-te Wurzeln, nämlich die komplexen Zahlen

$$\boxed{z_\nu = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi\nu}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{\varphi+2\pi\nu}{n}\right), \quad 0 \le \nu \le n-1.}$$

Im Spezialfall $a = 1$ (also $r = 1$, $\varphi = 0$) erhält man Satz 1.7.

9. Man bestimme alle $z \in \mathbb{C}$ mit
$$z^3 - \mathrm{i} = 0.$$

10. Sei P ein Polynom mit komplexen Koeffizienten:
$$P(z) := a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0 \;\text{ mit }\; n \in \mathbb{N}_0\,,\; a_\nu \in \mathbb{C}, \;\text{ für }\; 0 \le \nu \le n.$$
Eine reelle oder komplexe Zahl ζ heißt *Nullstelle* von P, falls $P(\zeta) = 0$ gilt.

Man zeige: Wenn alle Koeffizienten a_ν reell sind, dann gilt
$$P(\zeta) = 0 \implies P(\overline{\zeta}) = 0.$$
Mit anderen Worten: Hat das Polynom P nur *reelle Koeffizienten,* dann treten die nicht reellen Nullstellen von P in Paaren konjugiert komplexer Nullstellen auf.

11. a) Sei $\mathbb{H} := \{\, z \in \mathbb{C}; \quad \operatorname{Im} z > 0 \,\}$ die *obere Halbebene.*
Man zeige: $z \in \mathbb{H} \iff -1/z \in \mathbb{H}$.

b) Seien $z, a \in \mathbb{C}$.
Man zeige:
$$|1 - z\bar{a}|^2 - |z-a|^2 = (1-|z|^2)(1-|a|^2).$$
Man folgere: Ist $|a| < 1$, dann gilt
$$|z| < 1 \iff \left|\frac{z-a}{\bar{a}z-1}\right| < 1 \;\text{ und }\; |z| = 1 \iff \left|\frac{z-a}{\bar{a}z-1}\right| = 1.$$

12. Man verifiziere für $z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}$ die Ungleichungen
$$\frac{|x|+|y|}{\sqrt{2}} \le |z| = \sqrt{x^2+y^2} \le |x| + |y|$$
und
$$\max\{\,|x|\,, |y|\,\} \le |z| \le \sqrt{2}\max\{\,|x|\,, |y|\,\}.$$

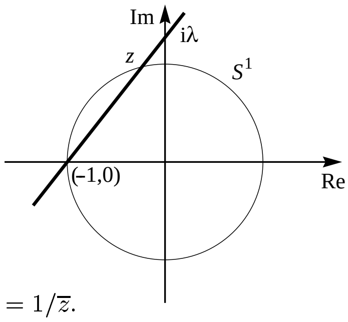
13. Sei $\widetilde{\mathbb{C}}$ ein weiterer Körper komplexer Zahlen. Man bestimme alle Abbildungen $\varphi : \mathbb{C} \to \widetilde{\mathbb{C}}$ mit folgenden Eigenschaften:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{a)} & \varphi(z+w) = \varphi(z) + \varphi(w) \\ \text{b)} & \varphi(zw) = \varphi(z)\varphi(w) \end{array}\right\} \text{ für alle } z, w \in \mathbb{C},$$
c) $\varphi(x) = x$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Anmerkung. Es ergibt sich, dass solche Abbildungen existieren und *automatisch bijektiv* sind, sie stellen also Isomorphismen $\mathbb{C} \to \widetilde{\mathbb{C}}$ dar, die $\mathbb{R}$ elementweise festlassen. *Der Körper der komplexen Zahlen ist also im wesentlichen eindeutig bestimmt.* Im Spezialfall $\mathbb{C} = \widetilde{\mathbb{C}}$ erhält man die Automorphismen von $\mathbb{C}$ mit Fixkörper $\mathbb{R}$.

Übrigens: Welche Automorphismen (d. h. Isomorphismen auf sich selbst) besitzt der Körper $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen?
Tipp. Ein solcher Automorphismus von $\mathbb{R}$ muss die Anordnung von $\mathbb{R}$ erhalten!

14. Jedes $z \in S^1 - \{-1\}$,
$S^1 := \{\, z \in \mathbb{C};\quad |z| = 1\,\}$,
lässt sich eindeutig in der Form
$$z = \frac{1+\mathrm{i}\lambda}{1-\mathrm{i}\lambda} = \frac{1-\lambda^2}{1+\lambda^2} + \frac{2\lambda}{1+\lambda^2}\,\mathrm{i}$$
mit $\lambda \in \mathbb{R}$ darstellen.



15. a) Man betrachte die Abbildung
$$f : \mathbb{C}^\bullet \longrightarrow \mathbb{C} \ \text{ mit } \ f(z) = 1/\overline{z}.$$
Man gebe eine geometrische Konstruktion (Zirkel und Lineal) für den Bildpunkt $f(z)$ und begründe, warum diese Abbildung „*Transformation durch reziproke Radien*“ oder „*Spiegelung an der Einheitskreislinie*“ genannt wird. Man bestimme jeweils das Bild unter f von

α) $D_1 := \{\, z \in \mathbb{C};\quad 0 < |z| < 1\,\}$,
β) $D_2 := \{\, z \in \mathbb{C};\quad |z| > 1\,\}$,
γ) $D_3 := \{\, z \in \mathbb{C};\quad |z| = 1\,\}$.

b) Jetzt betrachte man die Abbildung
$$g : \mathbb{C}^\bullet \longrightarrow \mathbb{C} \ \text{ mit } \ g(z) = 1/z \ (= \overline{f(z)})$$
und gebe ebenfalls eine geometrische Konstruktion für den Bildpunkt $g(z)$ von z. Warum heißt diese Abbildung „*Inversion an der Einheitskreislinie*“? Welche Fixpunkte hat g, d.h. für welche $z \in \mathbb{C}^\bullet$ gilt $g(z) = z$?

16. Sei $n \in \mathbb{N}$ und $W(n) = \{z \in \mathbb{C};\ z^n = 1\}$ die Menge der n-ten Einheitswurzeln.

Man zeige:

a) $W(n)$ ist eine Untergruppe von $\mathbb{C}^\bullet$ (und damit selbst eine Gruppe).
b) $W(n)$ ist eine zyklische Gruppe der Ordnung n, d.h. es gibt ein $\zeta \in W(n)$ mit
$$W(n) = \{\zeta^\nu;\quad 0 \le \nu < n\}.$$
Eine solche Einheitswurzel ζ heißt *primitiv.*

Man folgere: $W(n) \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Für welche $d \in \mathbb{N}$ mit $1 \le d \le n$ ist die Potenz ζ^d wieder eine primitive n-te Einheitswurzel? Wieviele primitive n-te Einheitswurzeln gibt es also?

Andere Einführungen der komplexen Zahlen

In §1 wurden die komplexen Zahlen als reelle Zahlenpaare eingeführt (nach Gauss, Wessel, Argand, Hamilton). Von der Geometrie des $\mathbb{R}^2$ (Drehstreckungen!) wird folgende Einführung der komplexen Zahlen nahegelegt:

17. Sei
$$\mathcal{C} := \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix};\quad a, b \in \mathbb{R} \right\} \subset M(2\times 2;\mathbb{R})$$

mit der gewöhnlichen Addition und Multiplikation von (reellen) 2×2-Matrizen.

Man zeige: $\mathcal{C}$ ist ein Körper, der zum Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen isomorph ist.

18. Wie bei der Einführung der komplexen Zahlen bemerkt, besitzt das Polynom $P = X^2 + 1 \in \mathbb{R}[X]$ in $\mathbb{R}$ keine Nullstelle, insbesondere zerfällt es nicht in Polynome kleineren Grades, P ist *irreduzibel* in $\mathbb{R}[X]$. In der Algebra (vergleiche etwa [Ku] oder [Lo2]) wird nun gezeigt, wie man zu einem beliebigen irreduziblen Polynom P aus dem Polynomring $K[X]$ (K Körper) einen (minimalen) Erweiterungskörper E konstruieren kann, in dem das vorgegebene Polynom eine Nullstelle hat. Auf den hier vorliegenden Spezialfall ($K = \mathbb{R}$, $P = X^2 + 1$) angewandt, bedeutet dies, dass man von $\mathbb{R}[X]$ den Restklassenring nach dem Ideal $(X^2 + 1)$ bildet. Dieser ist isomorph zu $\mathbb{C}$.

19. **Hamilton'sche Quaternionen** (W. R. HAMILTON, 1843)

Wir betrachten folgende Abbildung

$$H : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \longrightarrow M(2 \times 2;\, \mathbb{C}),$$
$$(z, w) \longmapsto H(z, w) := \begin{pmatrix} z & -w \\ \overline{w} & \overline{z} \end{pmatrix}$$

und bezeichnen ihr Bild mit

$$\mathcal{H} := \{\, H(z, w); \quad (z, w) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C} \,\} \subset M(2 \times 2;\, \mathbb{C}).$$

Man zeige, dass $\mathcal{H}$ ein *Schiefkörper* ist, d. h. in $\mathcal{H}$ gelten alle Körperaxiome mit Ausnahme des Kommutativgesetzes der Multiplikation.

Anmerkung. Die Bezeichnung $\mathcal{H}$ soll an Sir William Rowan HAMILTON (1805-1865) erinnern. Man nennt $\mathcal{H}$ die HAMILTON'schen Quaternionen.

20. **Cayley-Zahlen** (A. CAYLEY, 1845)

Es sei

$$\mathcal{C} := \mathcal{H} \times \mathcal{H}.$$

Wir betrachten folgende Verknüpfung

$$\mathcal{C} \times \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C},$$
$$((H_1, H_2), (K_1, K_2)) \longmapsto (H_1 K_1 - \bar{K}_2' H_2,\, H_2 \bar{K}_1' + K_2 H_1).$$

Dabei bedeute $\bar{H}'$ die konjugiert-transponierte Matrix zu $H \in \mathcal{H} \subset M(2 \times 2;\, \mathbb{C})$.

Man zeige, dass hierdurch auf $\mathcal{C}$ eine $\mathbb{R}$-bilineare Abbildung definiert wird, welche nullteilerfrei ist, d. h. das Produkt zweier Elemente aus $\mathcal{C}$ ist nur dann Null, wenn einer der beiden Faktoren verschwindet. Die „CAYLEY-Multiplikation" ist i. a. jedoch weder kommutativ noch assoziativ.

Ein tiefliegender Satz (M. A. KERVAIRE (1958), J. MILNOR (1958), J. BOTT (1958)) besagt, dass auf einem n-dimensionalen ($n < \infty$) reellen Vektorraum V nur dann eine nullteilerfreie Bilinearform existiert, wenn $n = 1, 2, 4$ oder 8 gilt. Beispiele für solche Stukturen sind die „reellen Zahlen", die „komplexen Zahlen", die „HAMILTON'schen Quaternionen" und die „CAYLEY-Zahlen". Man vergleiche hierzu etwa den Artikel von F. HIRZEBRUCH in [Eb].

2. Konvergente Folgen und Reihen

Wir nehmen an, dass aus der Analysis mehrerer reeller Veränderlicher die Topologie des $\mathbb{R}^p$ bekannt ist. Die grundlegenden Definitionen und Eigenschaften stellen wir in dem uns interessierenden Fall $\mathbb{C}$ kurz zusammen.*)

2.1 Definition. *Eine Folge $(z_n)_{n\geq 0}$ komplexer Zahlen heißt **Nullfolge**, falls zu jedem $\varepsilon > 0$ eine natürliche Zahl N existiert, so dass*

$$|z_n| < \varepsilon \quad \textit{für alle} \quad n \geq N$$

gilt.

2.2 Definition. *Eine Folge*

$$z_0,\ z_1,\ z_2, \dots$$

komplexer Zahlen konvergiert gegen die komplexe Zahl z, falls die Differenzenfolge $z_0 - z, z_1 - z, \dots$ eine Nullfolge ist.

Bekanntlich ist der Grenzwert z eindeutig bestimmt, und man schreibt

$$z = \lim_{n\to\infty} z_n \quad \text{oder} \quad z_n \to z \ \text{ für } \ n \to \infty.$$

Aus der Äquivalenz der euklidischen Metrik und der Maximummetrik des $\mathbb{R}^p$ oder einfach aus

$$|\operatorname{Re} z|\,, |\operatorname{Im} z| \leq |z| \leq |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|$$

folgt dann

2.3 Bemerkung. *Sei (z_n) eine Folge komplexer Zahlen und z eine weitere komplexe Zahl. Folgende Aussagen sind äquivalent:*

1) $$z_n \to z \ \textit{ für } \ n \to \infty.$$
2) $$\operatorname{Re} z_n \to \operatorname{Re} z \ \textit{ und } \ \operatorname{Im} z_n \to \operatorname{Im} z \quad \textit{für} \quad n \to \infty.$$

2.4 Bemerkung. *Aus $z_n \to z$ und $w_n \to w$ für $n \to \infty$ folgt:*

---

*) Im Zusammenhang mit topologischen Begriffen werde $\mathbb{C}$ immer mit $\mathbb{R}^2$ identifiziert:

$$\mathbb{C} \ni z \longleftrightarrow (\operatorname{Re} z,\ \operatorname{Im} z) \in \mathbb{R}^2.$$

1) $z_n \pm w_n \to z \pm w,$

2) $z_n \cdot w_n \to z \cdot w,$

3) $|z_n| \to |z|,$

4) $\overline{z_n} \to \overline{z},$

5) $z_n^{-1} \to z^{-1}$ *falls* $z_n \neq 0$ *für alle* n *und* $z \neq 0.$

Man kann dies entweder durch Zerlegen in Real- und Imaginärteil beweisen oder die aus der reellen Analysis bekannten Beweise übertragen.

Beispiel.

$$\lim_{n\to\infty} z^n = 0 \quad \text{für} \quad |z| < 1.$$

Die Behauptung folgt aus dem entsprechenden Satz für reelle z mit Hilfe von

$$|z^n| = |z|^n .$$

Unendliche Reihen im Komplexen

Sei $z_0, z_1, z_2, \dots$ eine Folge komplexer Zahlen. Man kann ihr dann eine neue Folge, die *Folge der Partialsummen* $S_0, S_1, S_2, \dots$ mit

$$S_n := z_0 + z_1 + \cdots + z_n$$

zuordnen. Die Folge (S_n) heißt auch die der Folge (z_n) *zugeordnete Reihe.* Man bezeichnet sie symbolisch mit

$$\sum_{n=0}^{\infty} z_n = z_0 + z_1 + z_2 + \cdots .$$

Wenn die Folge (S_n) konvergiert, so nennt man

$$S := \lim_{n\to\infty} S_n$$

den *Wert* oder die *Summe* der Reihe. Man schreibt dann auch

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} z_n = z_0 + z_1 + z_2 + \cdots .$$

Wir folgen hier einer weitverbreiteten aber nicht ganz präzisen Tradition in der Bezeichnungsweise: Das Symbol $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ wird in *zwei* Bedeutungen verwendet:

1. *Einmal* als Synonym für die Folge (S_n) der Partialsummen der Folge (z_n).
2. *Zum anderen* (im Fall der Konvergenz von (S_n)) für deren Summe, d. h. den Grenzwert $S = \lim_{n\to\infty} S_n$. Hier ist S also eine Zahl.

Welche der beiden Bedeutungen gemeint ist, ergibt sich meist aus dem Zusammenhang. Vergleiche auch Aufgabe 9 zu I.2.

Beispiel. Die *geometrische Reihe* konvergiert für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$:

$$\boxed{\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \cdots \quad \textit{für} \quad |z| < 1.}$$

Der Beweis folgt aus der (z. B. durch Induktion nach n zu beweisenden) Formel

$$\frac{1-z^{n+1}}{1-z} = 1 + z + \cdots + z^n \quad \text{für} \quad z \neq 1.$$

Eine Reihe

$$z_0 + z_1 + z_2 + \cdots$$

heißt *absolut konvergent,* falls die Reihe der Beträge

$$|z_0| + |z_1| + |z_2| + \cdots$$

konvergiert.

2.5 Satz. *Eine absolut konvergente Reihe konvergiert.*

Beweis. Wir setzen voraus, dass der entsprechende Satz im Reellen bekannt ist. Die Behauptung folgt dann aus 2.3. □

Mit Hilfe von Satz 2.5 kann man viele elementare Funktionen ins Komplexe fortsetzen.

2.6 Bemerkung. *Die Reihen*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} \quad \textit{und} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}$$

konvergieren absolut für alle $z \in \mathbb{C}$.

Man definiert für beliebige komplexe Zahlen z

$$\boxed{\begin{aligned}
\exp(z) &:= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} && \textit{(komplexe Exponentialfunktion),}\\
\sin(z) &:= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} && \textit{(komplexer Sinus),}\\
\cos(z) &:= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} && \textit{(komplexer Kosinus).}
\end{aligned}}$$

2.7 Hilfssatz (Cauchy'scher Multiplikationssatz). *Es seien*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \quad \textit{und} \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n$$

absolut konvergente Reihen. Dann gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu b_{n-\nu}\right) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\cdot\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right),$$

wobei die auf der linken Seite stehende Reihe ebenfalls absolut konvergiert.

Der Beweis erfolgt wörtlich wie im Reellen. Aus dem Multiplikationssatz 2.7 folgt

$$\exp(z)\exp(w) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{n}\frac{z^\nu w^{n-\nu}}{\nu!(n-\nu)!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+w)^n}{n!} = \exp(z+w).$$

2.8 Satz. *Es gilt für beliebige komplexe Zahlen z und w*

$$\boxed{\begin{array}{c}\exp(z+w) = \exp(z)\cdot\exp(w)\\ \textit{(Additionstheorem oder Funktionalgleichung).}\end{array}}$$

2.8$_1$ Folgerung. *Wegen* $\exp(z)\exp(-z) = 1$ *ist* $\exp(z) \neq 0$ *und es gilt*

$$\exp(z)^n = \exp(nz) \quad \textit{für} \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Die Funktion $\exp(z)$ stimmt für reelle z mit der reellen e-Funktion überein. Für komplexe z *definiert* man

$$e^z := \exp(z).$$

Damit wird die Funktionalgleichung in 2.8 zu einer *Potenzregel:*

$$e^{z+w} = e^z e^w.$$

Beachte jedoch hierzu die Anmerkung am Ende des Paragraphen. Wir verwenden im Folgenden beide Schreibweisen, e^z und $\exp(z)$.

2.9 Bemerkung. *Es gilt für $z \in \mathbb{C}$*

$$\begin{aligned}\exp(\mathrm{i}z) &= \cos z + \mathrm{i}\sin z,\\ \cos(z) &= \frac{\exp(\mathrm{i}z)+\exp(-\mathrm{i}z)}{2},\\ \sin(z) &= \frac{\exp(\mathrm{i}z)-\exp(-\mathrm{i}z)}{2\mathrm{i}}.\end{aligned}$$

2.9_1 Folgerung. *Sei $z = x + \mathrm{i}y$. Dann gilt*

$$e^z = e^x(\cos y + \mathrm{i}\sin y),$$

also

$$\begin{aligned}\operatorname{Re} e^z &= e^x \cos y,\\ \operatorname{Im} e^z &= e^x \sin y,\\ |e^z| &= e^x.\end{aligned}$$

2.9_2 Folgerung. *Für beliebige komplexe Zahlen $z, w \in \mathbb{C}$ gelten die*

$$\boxed{\begin{array}{c}\textit{Additionstheoreme}\\ \cos(z+w) = \cos z\cos w - \sin z\sin w,\\ \sin(z+w) = \sin z\cos w + \cos z\sin w.\end{array}}$$

Die komplexe Exponentialfunktion ist *nicht injektiv.* Es gilt ja

$$e^{2\pi\mathrm{i}k} = 1 \quad \text{für alle} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Aus dem Zusatz zu Satz 1.5 folgt genauer

2.10 Bemerkung. *Es gilt für $z, w \in \mathbb{C}$*

$$\exp(z) = \exp(w) \iff z - w \in 2\pi\mathrm{i}\mathbb{Z},$$

insbesondere

$$\boxed{\operatorname{Kern}\exp := \left\{\, z \in \mathbb{C}; \quad \exp(z) = 1 \,\right\} = 2\pi\mathrm{i}\mathbb{Z}.}$$

Ist $w \in \mathbb{C}$, so gilt wegen der Funktionalgleichung

$$\exp(z+w) = \exp(z)\exp(w)$$

der Exponentialfunktion die Gleichung

$$\exp(z+w) = \exp(z) \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}$$

genau dann, wenn

$$\exp(w) = 1 \iff w \in \operatorname{Kern}\exp = 2\pi\mathrm{i}\mathbb{Z}.$$

Die Gleichung

$$\operatorname{Kern}\exp = 2\pi\mathrm{i}\mathbb{Z}$$

lässt sich daher als *Periodizitätseigenschaft* von exp interpretieren:

Die komplexe Exponentialfunktion ist periodisch und besitzt die Zahlen

$$2\pi \mathrm{i} k, \quad k \in \mathbb{Z},$$

(und nur diese) als Perioden.

2.10_1 Folgerung. *Für $z \in \mathbb{C}$ und $k \in \mathbb{Z}$ gilt*

$$\begin{aligned} \sin z = 0 &\iff z = k\pi, \\ \cos z = 0 &\iff z = \Big(k + \frac{1}{2}\Big)\pi. \end{aligned}$$

Denn beispielsweise bedeutet $\sin z = (\exp(\mathrm{i}z) - \exp(-\mathrm{i}z))/2\mathrm{i} = 0$ nichts anderes als $\exp(2\mathrm{i}z) = 1$, d. h. $z = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Der komplexe Sinus und Kosinus haben also nur die schon aus dem Reellen bekannten Nullstellen.

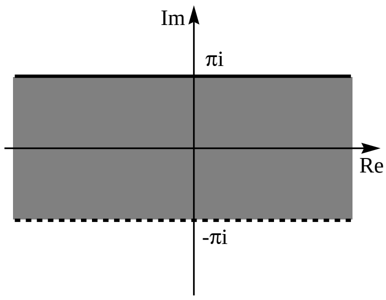
Wegen der Periodizität erhält man Schwierigkeiten, die komplexe Exponentialfunktion umzukehren, also einen komplexen Logarithmus zu definieren. Um diese Schwierigkeiten in den Griff zu bekommen, schränken wir den Definitionsbereich von exp geeignet ein.

Hauptzweig des Logarithmus

Wir bezeichnen mit S den Parallelstreifen

$$S = \{\, w \in \mathbb{C}; \quad -\pi < \operatorname{Im} w \le \pi \,\}.$$

Die Einschränkung von exp auf S ist wegen 2.10 injektiv. Jeder Wert, den exp annimmt, wird schon in S angenommen. Der Wertevorrat von exp ist wegen 1.5 die in 0 gelochte Ebene $\mathbb{C}^\bullet$.



Die komplexe Exponentialfunktion vermittelt deshalb eine *bijektive Abbildung*

$$\begin{aligned} S &\xrightarrow{\ \exp\ } \mathbb{C}^\bullet, \\ w &\longmapsto \mathrm{e}^w. \end{aligned}$$

Zu jedem Punkt z aus $\mathbb{C}^\bullet$ existiert also eine eindeutig bestimmte Zahl $w \in S$ mit der Eigenschaft $e^w = z$. Wir nennen diese Zahl w den *Hauptwert* des Logarithmus von z und bezeichnen *) diesen mit

$$w = \operatorname{Log} z.$$

*) Die Bezeichnungen $w = \log z$ oder $w = \ln z$ sind in der Literatur auch üblich.

Wir haben also bewiesen:

2.11 Satz. *Es existiert eine Funktion — der sogenannte* ***Hauptzweig des Logarithmus*** *—*

$$\mathrm{Log} : \mathbb{C}^\bullet \longrightarrow \mathbb{C},$$

welche durch die beiden folgenden Eigenschaften eindeutig bestimmt ist:

a) $$\exp(\mathrm{Log}\, z) = z,$$

b) $$-\pi < \mathrm{Im}\,\mathrm{Log}\, z \leq \pi \quad \textit{für alle} \quad z \neq 0.$$

Zusatz. *Aus der Gleichung*

$$\exp(w) = z$$

folgt

$$w = \mathrm{Log}\, z + 2\pi \mathrm{i} k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Nur wenn w in S enthalten ist, kann man sogar schließen:

$$w = \mathrm{Log}\, z.$$

Insbesondere stimmt $\mathrm{Log}\, z$ für positive reelle z mit dem gewöhnlichen reellen (natürlichen) Logarithmus überein:

$$\mathrm{Log}\, z = \log z.$$

2.12 Bemerkung. *Zu jeder komplexen Zahl $z \neq 0$ existiert eine reelle Zahl φ, welche durch die beiden folgenden Bedingungen eindeutig bestimmt ist:*

a) $$-\pi < \varphi \leq \pi,$$

b) $$\frac{z}{|z|} = \cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi \quad (= e^{\mathrm{i}\varphi}).$$

Dies ist eine unmittelbare Folgerung aus 1.5 und Spezialfall von 2.11.

Die Konstruktion des komplexen Logarithmus beinhaltet also eine Verallgemeinerung der Darstellung einer komplexen Zahl in Polarkoordinaten.

Man nennt die in 2.12 auftretende Zahl φ den *Hauptwert des Arguments* von z und schreibt (vgl. die Anmerkung vor 1.6)

$$\varphi = \mathrm{Arg}\, z.$$

2.13 Satz. *Es gilt für $z \in \mathbb{C}^\bullet$*

$$\mathrm{Log}\, z = \log|z| + \mathrm{i}\,\mathrm{Arg}\, z.$$

Dabei sei $\log|z|$ der gewöhnliche reelle natürliche Logarithmus der positiven Zahl $|z|$.

Beweis. Wegen Satz 2.11 genügt es zu zeigen:

$$\exp\bigl(\log|z| + \mathrm{i}\,\mathrm{Arg}\,z\bigr) = z;$$

dies folgt aber unmittelbar aus 2.9_1 und 2.12. □

Wir beschließen diesen Paragraphen mit einer *Warnung* hinsichtlich des *Rechnens mit komplexen Potenzen.*

Ist $a \in \mathbb{C}^\bullet$, $b \in \mathbb{C}$, dann kann man $a^b := \exp(b\,\mathrm{Log}\,a)$ definieren. Diese Definition ist jedoch willkürlich, denn wenn b nicht in $\mathbb{Z}$ liegt, gilt:

$$\exp(b\,\mathrm{Log}\,a) \neq \exp\bigl(b(\mathrm{Log}\,a + 2\pi\mathrm{i}k)\bigr), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Jede Zahl aus der Menge

$$\bigl\{\exp\bigl(b(\log|a| + \mathrm{i}\,\mathrm{Arg}\,a)\bigr)\exp(2\pi\mathrm{i}bk); \quad k \in \mathbb{Z}\bigr\}$$

hätte eigentlich gleiches Recht, a^b zu sein.*) Mit dem Hauptwert des Logarithmus gilt etwa

$$\begin{aligned} \mathrm{i}^{\mathrm{i}} &= \exp(\mathrm{i}\,\mathrm{Log}\,\mathrm{i}) = \exp\bigl(\mathrm{i}(\log|\mathrm{i}| + \mathrm{i}\,\mathrm{Arg}\,\mathrm{i})\bigr) \\ &= \exp\left(\mathrm{i}\left(0 + \mathrm{i}\frac{\pi}{2}\right)\right) = \exp\left(-\frac{\pi}{2}\right) \approx 0.20787957635076190854. \end{aligned}$$

Alle möglichen Werte von i^{i} liegen wegen

$$\exp\bigl(\mathrm{i}(\log|\mathrm{i}| + \mathrm{i}\,\mathrm{Arg}\,\mathrm{i})\bigr)\exp(2\pi\mathrm{i}\mathrm{i}k) = \exp\bigl(-(4k+1)\pi/2\bigr)$$

in der folgenden Menge positiver reeller Zahlen

$$\left\{\exp\left(-(4k+1)\frac{\pi}{2}\right); \quad k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Die n-ten Einheitswurzeln, d. h. die Lösungen der Gleichung $z^n = 1$, sind nun gerade die $1/n$-ten Potenzen von 1. Allgemein sind die n-ten Wurzeln aus einer Zahl $a \in \mathbb{C}^\bullet$ gerade die $1/n$-ten Potenzen von a.

Anmerkung. Es ist $e^z := \exp(z)$ *eine* der z-ten Potenzen von e.

Besondere Vorsicht ist beim Rechnen nach — aus dem Reellen gewohnten — Potenzregeln geboten. Beispielsweise gilt i. a. nicht die Regel

$$(a_1 a_2)^b = a_1^b a_2^b.$$

Beispielsweise gilt unter Benutzung des Hauptwerts

$$-1 = \mathrm{i}\cdot\mathrm{i} = (-1)^{1/2}\cdot(-1)^{1/2} \neq \bigl((-1)\cdot(-1)\bigr)^{1/2} = 1^{1/2} = 1.$$

Welche der aus dem Reellen gewohnten Rechenregeln gelten, muss man im Einzelfall nachprüfen. Keine Schwierigkeit entsteht, wenn man $a^b = \exp(b\log a)$ für reelle und positive a definiert, da man sich dabei auf den gewöhnlichen reellen Logarithmus stützen kann. Es gilt dann die Rechenregel

$$(a_1 a_2)^b = a_1^b a_2^b \quad (a_1 > 0,\ a_2 > 0)$$

auch für komplexe b.

---

*) Jede dieser Zahlen kann *eine* b-te Potenz von a genannt werden.

Übungsaufgaben zu I.2

1. Sei $z_0 = x_0 + \mathrm{i}y_0 \neq 0$ eine vorgegebene komplexe Zahl. Die Folge $(z_n)_{n\geq 0}$ werde rekursiv definiert durch
$$z_{n+1} = \frac{1}{2}\Big(z_n + \frac{1}{z_n}\Big), \quad n \geq 0.$$
Man zeige:
Ist $x_0 > 0$, dann ist $\lim_{n\to\infty} z_n = 1$.
Ist $x_0 < 0$, dann ist $\lim_{n\to\infty} z_n = -1$.
Ist $x_0 = 0$, $y_0 \neq 0$, dann ist $(z_n)_{n\geq 0}$ nicht definiert oder divergent.
Tipp. Man betrachte $w_{n+1} = \dfrac{z_{n+1} - 1}{z_{n+1} + 1}$.

2. Sei $a \in \mathbb{C}^\bullet$ eine vorgegebene Zahl. Für welche $z_0 \in \mathbb{C}$ ist die Folge
$$z_{n+1} = \frac{1}{2}\Big(z_n + \frac{a}{z_n}\Big) \quad (n \geq 0)$$
sinnvoll definiert? Was ist gegebenenfalls ihr Grenzwert?

3. Eine Folge $(z_n)_{n\geq 0}$ komplexer Zahlen heißt *Cauchyfolge,* wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ einen Index $n_0 \in \mathbb{N}_0$ gibt, so dass für alle $n, m \in \mathbb{N}_0$ mit $n, m \geq n_0$ gilt
$$|z_n - z_m| < \varepsilon.$$
Man zeige: Eine Folge $(z_n)_{n\geq 0}$, $z_n \in \mathbb{C}$, ist genau dann konvergent, wenn sie eine Cauchyfolge ist.

4. Man beweise die folgenden Ungleichungen.
 a) Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt
$$|\exp(z) - 1| \leq \exp(|z|) - 1 \leq |z| \exp(|z|).$$
 b) Für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \leq 1$ gilt
$$|\exp(z) - 1| \leq 2\,|z|\,.$$

5. Bestimme jeweils alle $z \in \mathbb{C}$ mit
$$\begin{array}{lll} \exp(z) = -2, & \exp(z) = \mathrm{i}, & \exp(z) = -\mathrm{i}, \\ \sin z = 100, & \sin z = 7\mathrm{i}, & \sin z = 1 - \mathrm{i}, \\ \cos z = 3\mathrm{i}, & \cos z = 3 + 4\mathrm{i}, & \cos z = 13. \end{array}$$

6. Die (komplexen) hyperbolischen Funktionen cosh und sinh werden in Analogie zum Reellen definiert. Für $z \in \mathbb{C}$ sei
$$\cosh z := \frac{\exp(z) + \exp(-z)}{2} \quad \text{und} \quad \sinh z := \frac{\exp(z) - \exp(-z)}{2}$$
Man zeige:
 a) $\sinh z = -\mathrm{i}\sin(\mathrm{i}z)$, $\cosh z = \cos(\mathrm{i}z) \quad (z \in \mathbb{C})$.
 b) $$\begin{aligned} \sinh(z + w) &= \sinh z \cosh w + \cosh z \sinh w, \\ \cosh(z + w) &= \cosh z \cosh w + \sinh z \sinh w. \end{aligned} \qquad \text{(Additionstheoreme)}$$
 c) $\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1 \quad (z \in \mathbb{C})$.
 d) sinh und cosh haben die *Periode* $2\pi\mathrm{i}$, d. h.

$$\left.\begin{aligned} \sinh(z+2\pi\mathrm{i}) &= \sinh z \\ \cosh(z+2\pi\mathrm{i}) &= \cosh z \end{aligned}\right\} \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}.$$

e) Für alle $z \in \mathbb{C}$ konvergieren die Reihen $\sum \frac{z^{2n}}{(2n)!}$ und $\sum \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$ absolut, und es gilt

$$\cosh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} \quad \text{und} \quad \sinh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}\,.$$

7. Für alle $z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}$ gilt:

a) $\overline{\exp(z)} = \exp(\overline{z}),\ \overline{\sin(z)} = \sin(\overline{z}),\ \overline{\cos(z)} = \cos(\overline{z}),$

b)
$$\begin{aligned} \cos z &= \cos(x+\mathrm{i}y) = \cos x \cosh y - \mathrm{i} \sin x \sinh y, \\ \sin z &= \sin(x+\mathrm{i}y) = \sin x \cosh y + \mathrm{i} \cos x \sinh y. \end{aligned}$$

Speziell für $x = 0\,,\ y \in \mathbb{R}:$

$$\cos(\mathrm{i}y) = \frac{1}{2}(e^y + e^{-y}) = \cosh y \text{ und } \sin(\mathrm{i}y) = \frac{\mathrm{i}}{2}(e^y - e^{-y}) = \mathrm{i} \sinh y.$$

Man bestimme alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|\sin z| \le 1$ und finde ein $n \in \mathbb{N}$ mit

$$|\sin(\mathrm{i}n)| > 10\,000.$$

8. **Definition von Tangens und Kotangens**

Für $z \in \mathbb{C} - \{\,(k+1/2)\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$ sei

$$\tan z := \frac{\sin z}{\cos z}\,,$$

und für $z \in \mathbb{C} - \{\,k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$ sei

$$\cot z := \frac{\cos z}{\sin z}\,.$$

Man zeige:

$$\tan z = \frac{1}{\mathrm{i}}\,\frac{\exp(2\mathrm{i}z) - 1}{\exp(2\mathrm{i}z) + 1}\,, \quad \cot z = \mathrm{i}\,\frac{\exp(2\mathrm{i}z) + 1}{\exp(2\mathrm{i}z) - 1}\,,$$

$$\tan(z + \pi/2) = -\cot z, \quad \tan(-z) = -\tan z, \quad \tan z = \tan(z+\pi),$$

$$\tan z = \cot z - 2\cot(2z), \quad \cot(z+\pi) = \cot z.$$

9. Sei $\mathrm{Abb}(\mathbb{N}_0, \mathbb{C})$ die Menge aller Abbildungen von $\mathbb{N}_0$ in $\mathbb{C}$ (= Menge aller komplexen Zahlenfolgen).

Man zeige: Die Abbildung

$$\begin{aligned} \textstyle\sum : \mathrm{Abb}(\mathbb{N}_0, \mathbb{C}) &\longrightarrow \mathrm{Abb}(\mathbb{N}_0, \mathbb{C}), \\ (a_n)_{n\ge 0} &\longmapsto (S_n)_{n \ge 0} \ \text{ mit } \ S_n := a_0 + a_1 + \cdots + a_n\,, \end{aligned}$$

ist bijektiv (Teleskoptrick). Die Theorien der Folgen und unendlichen Reihen sind also im Prinzip gleichwertig.

10. Seien $(a_n)_{n\ge 0}$ und $(b_n)_{n \ge 0}$ zwei Folgen komplexer Zahlen mit $a_n = b_n - b_{n+1}\,,$ $n \ge 0.$

Man zeige: Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ ist genau dann konvergent, wenn die Folge (b_n) konvergiert, und es gilt dann

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = b_0 - \lim_{n\to\infty} b_{n+1}.$$

Beispiel: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)} = 1.$

11. **Binomialreihe**

Für $\alpha \in \mathbb{C}$ und $\nu \in \mathbb{N}$ sei

$$\binom{\alpha}{0} := 1 \quad \text{und} \quad \binom{\alpha}{\nu} := \prod_{j=1}^{\nu} \frac{\alpha - j + 1}{j}.$$

Man zeige: $\sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{\alpha}{\nu} z^\nu$ konvergiert absolut für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$.

Sei $b_\alpha(z) := \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{\alpha}{\nu} z^\nu$.

Man zeige: Für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$ und beliebige $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ gilt

$$\boxed{b_{\alpha+\beta}(z) = b_\alpha(z) b_\beta(z).}$$

Anmerkung. Wir werden später sehen, dass für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$ gilt:

$$b_\alpha(z) = (1+z)^\alpha := \exp\bigl(\alpha \operatorname{Log}(1+z)\bigr).$$

Für $\alpha = n \in \mathbb{N}_0$ erhält man die binomische Formel:

$$(1+z)^n = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} z^\nu.$$

12. Für $k \in \mathbb{N}_0$ und $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$ gilt

$$\frac{1}{(1-z)^{k+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{n} z^n.$$

13. Seien $(a_n)_{n\geq 0}$ und $(b_n)_{n\geq 0}$ zwei Folgen komplexer Zahlen und

$$A_n := a_0 + a_1 + \cdots + a_n\,, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Man zeige: Für jedes $m \geq 0$ und jedes $n \geq m$ gilt

$$\sum_{\nu=m}^{n} a_\nu b_\nu = \sum_{\nu=m}^{n} A_\nu (b_\nu - b_{\nu+1}) - A_{m-1} b_m + A_n b_{n+1}$$

(Abel'sche partielle Summation, N. H. Abel, 1826) ,

wobei im Fall $m = 0$ per def. der Koeffizient $A_{-1} = 0$ gesetzt werde (leere Summe).

14. *Man zeige:* Unter den Bedingungen von 13) ist eine Reihe der Gestalt $\sum a_n b_n$ immer dann konvergent, wenn

   a) die Reihe $\sum A_n (b_n - b_{n+1})$ und
   b) die Folge $(A_n b_{n+1})$ konvergent sind (N. H. Abel, 1826).

15. Ist $\sum a_n$ konvergent und ist $(b_n)_{n\geq 0}$ eine Folge reeller Zahlen, die monoton und beschränkt ist, dann ist die Reihe $\sum a_n b_n$ konvergent (P. G. L. Dirichlet, 1863).

16. Die Reihe $\sum a_n$ sei absolut konvergent, und es sei $A := \sum_{n=0}^\infty a_n$. Die Reihe $\sum b_n$ sei konvergent, und es sei $B := \sum_{n=0}^\infty b_n$.

    Man zeige: Ist $c_n := \sum_{\nu=0}^n a_\nu b_{n-\nu}$, dann ist die Reihe $\sum c_n$ konvergent, und es gilt für $C := \sum_{n=0}^\infty c_n$

    $C = AB$ (Satz von MERTENS, F. MERTENS, 1875).

17. Sei $(a_n)_{n\geq 0}$ eine Folge komplexer Zahlen, $(S_n) = (\sum_{\nu=0}^n a_\nu)$ die zugehörige Folge der Partialsummen (Reihe). Sei
$$\sigma_n := \frac{S_0 + S_1 + \cdots + S_n}{n+1}, \quad n \geq 0.$$
    Man zeige: Ist (S_n) konvergent und ist $S := \lim_{n\to\infty} S_n$, dann ist auch (σ_n) konvergent, und es gilt
$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = S.$$
    Man zeige an einem Gegenbeispiel, dass man aus der Konvergenz von (σ_n) im allgemeinen nicht auf die Konvergenz von (S_n) schließen kann.

18. Für $\varphi \in \mathbb{R} - 2\pi\mathbb{Z}$ und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt
$$\frac{1}{2} + \sum_{\nu=1}^n \cos\nu\varphi = \frac{\sin\big((n+1/2)\varphi\big)}{2\sin(\varphi/2)}$$
    und
$$\sum_{\nu=1}^n \sin\nu\varphi = \frac{\sin(n\varphi/2)\sin\big((n+1)\varphi/2\big)}{\sin(\varphi/2)}.$$

19. Für $n \in \mathbb{N}$ gilt
$$\boxed{\prod_{\nu=1}^{n-1} \sin\frac{\nu\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}.}$$
    Tipp. $z^n - 1 = \prod_{\nu=1}^n (z - \zeta^\nu), \quad \zeta := \cos\frac{2\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{n}.$

20. a) Von den folgenden komplexen Zahlen berechne man jeweils den Hauptwert des Logarithmus:
$$\mathrm{i}; \quad -\mathrm{i}; \quad -1; \quad x \in \mathbb{R},\ x > 0; \quad 1+\mathrm{i}.$$
    b) Man berechne den Hauptwert von
$$\big(\mathrm{i}(\mathrm{i}-1)\big)^{\mathrm{i}} \ \text{ und } \ \mathrm{i}^{\mathrm{i}} \cdot (\mathrm{i}-1)^{\mathrm{i}}$$
    und vergleiche.

    c) Man berechne
$$\{a^b\} := \{\exp(b\log|a| + \mathrm{i}b\operatorname{Arg} a)\exp(2\pi\mathrm{i}bk);\ k \in \mathbb{Z}\}$$
    für
$$(a,b) \in \{(-1,\mathrm{i}),\ (1,\sqrt{2}),\ (-2,\sqrt{2})\}$$
    und den jeweiligen Hauptwert.

21. **Zusammenhang von *Arg* mit *arccos***

Es sei an die Definition des *reellen* arccos erinnert: arccos ist die Umkehrfunktion von $\cos|[0,\pi]$, also

$$\arccos t = \varphi \iff 0 \le \varphi \le \pi \quad \text{und} \quad \cos\varphi = t.$$

Man zeige: Für $z = x + \mathrm{i}y \ne 0$ gilt

$$\operatorname{Arg} z = \begin{cases} \pi, & \text{falls } y = 0 \text{ und } x < 0, \\ \operatorname{sgn}(y) \arccos \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{sonst.} \end{cases}$$

22. Für $z, w \in \mathbb{C}^\bullet$ gilt

$$\operatorname{Log}(zw) = \operatorname{Log}(z) + \operatorname{Log}(w) + 2\pi\mathrm{i}k(z,w)$$

mit

$$k(z,w) = \begin{cases} 0, & \text{falls } -\pi < \operatorname{Arg} z + \operatorname{Arg} w \le \pi, \\ +1, & \text{falls } -2\pi < \operatorname{Arg} z + \operatorname{Arg} w \le -\pi, \\ -1, & \text{falls } \quad \pi < \operatorname{Arg} z + \operatorname{Arg} w \le 2\pi. \end{cases}$$

23. Im Journal für reine und angewandte Mathematik (CRELLE-Journal), Band 2 (1827), Seite 286-287, findet sich eine von Th. CLAUSEN gestellte Aufgabe:

„Wenn e die Basis der hyperbolischen (= natürlichen) Logarithmen, π den halben Kreisumfang und n eine positive oder negative Zahl bedeuten, so ist bekanntlich

$$e^{2n\pi\sqrt{-1}} = 1,$$

$$e^{1+2n\pi\sqrt{-1}} = e,$$

folglich auch

$$e^{(1+2n\pi\sqrt{-1})^2} = e = e^{1+4n\pi\sqrt{-1}-4n^2\pi^2}.$$

Da aber $e^{1+4n\pi\sqrt{-1}} = e$ ist, so würde daraus folgen: $e^{-4n^2\pi^2} = 1$, welches absurd ist. Nachzuweisen, wo in der Herleitung dieses Resultats gefehlt ist.“

3. Stetigkeit

3.1 Definition. *Eine Funktion*

$$f : D \longrightarrow \mathbb{R}^q, \quad D \subset \mathbb{R}^p,$$

*heißt **stetig** in einem Punkt $a \in D$, falls zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert mit der Eigenschaft*

$$|f(z) - f(a)| < \varepsilon \;\; \textit{falls} \;\; |z - a| < \delta, \quad z \in D. \quad ^{*)}$$

(ε-δ-Definition der Stetigkeit)

Hiermit äquivalent ist: Für jede gegen a konvergente Folge (a_n), $a_n \in D$, gilt

*) Mit $|\cdot|$ wird die euklidische Norm (in $\mathbb{R}^p$ und $\mathbb{R}^q$) bezeichnet.

$$f(a_n) \to f(a) \quad \textit{für} \quad n \to \infty \qquad \textit{(Folgenkriterium).}$$

Die Funktion f heißt *stetig,* falls sie in jedem Punkt von D stetig ist.
In dieser Vorlesung interessiert uns vorwiegend der Fall $p = q = 2$, d. h.

$$f : D \longrightarrow \mathbb{C}, \quad D \subset \mathbb{C}.$$

Aus 2.4 folgt

3.2 Bemerkung. *Summe, Differenz und Produkt zweier stetiger Funktionen sind stetig.*

3.3 Bemerkung. *Die Funktion*

$$\mathbb{C}^\bullet \longrightarrow \mathbb{C}, \quad z \longmapsto \frac{1}{z},$$

ist stetig.

Seien

$$f : D \longrightarrow \mathbb{C} \text{ und } g : D' \longrightarrow \mathbb{C}$$

zwei Funktionen. Wenn der Wertevorrat von f im Definitionsbereich von g enthalten ist ($f(D) \subset D'$), so kann man die zusammengesetzte Funktion

$$\begin{aligned} g \circ f : D &\longrightarrow \mathbb{C}, \\ z &\longmapsto g\big(f(z)\big), \end{aligned}$$

definieren.

3.4 Bemerkung. *Die Zusammensetzung von stetigen Funktionen ist stetig.*

Ist $f : D \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion ohne Nullstelle, so ist auf Grund von 3.3 und 3.4 auch die folgende Funktion stetig:

$$\frac{1}{f} : D \longrightarrow \mathbb{C}.$$

3.5 Bemerkung. *Eine Funktion $f : D \to \mathbb{C}$, $D \subset \mathbb{C}$, ist genau dann stetig, wenn Real- und Imaginärteil von f stetige Funktionen sind.*

$$\begin{aligned} (\operatorname{Re} f)(z) &:= \operatorname{Re} f(z), \\ (\operatorname{Im} f)(z) &:= \operatorname{Im} f(z). \end{aligned}$$

Insbesondere ist der Betrag einer stetigen Funktion stetig:

$$|f| = \sqrt{(\operatorname{Re} f)^2 + (\operatorname{Im} f)^2}.$$

Beispiele.

1) Jedes Polynom

$$P(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad a_\nu \in \mathbb{C},\ 0 \le \nu \le n,$$

ist stetig auf $\mathbb{C}$.

2) Die Funktionen

$$\exp, \sin \text{ und } \cos\ : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$

sind stetig (da Real- und Imaginärteil stetig sind).

Es sei

$$f : D \longrightarrow \mathbb{C}, \quad D \subset \mathbb{C},$$

eine injektive Funktion. Dann ist die *Umkehrfunktion*

$$f^{-1} : f(D) \longrightarrow \mathbb{C}$$

wohldefiniert. Sie ist charakterisiert durch die Eigenschaften

$$\begin{aligned} f\big(f^{-1}(w)\big) &= w \ \text{ für } \ w \in f(D), \\ f^{-1}\big(f(z)\big) &= z \ \text{ für } \ z \in D. \end{aligned}$$

3.6 Bemerkung. *Die Umkehrfunktion einer stetigen Funktion braucht nicht stetig zu sein.*

Beispiel. Wir betrachten den Hauptzweig des Arguments, eingeschränkt auf die Kreislinie

$$S^1 := \{\, z \in \mathbb{C}; \quad |z| = 1 \,\}.$$

Diese Funktion ist definitionsgemäß die Umkehrfunktion der stetigen Funktion

$$]-\pi, \pi] \longrightarrow S^1, \quad x \longmapsto \cos x + \mathrm{i} \sin x,$$

ist aber selbst nicht stetig, denn es gilt

3.7 Bemerkung. *Die Funktion*

$$\begin{aligned} S^1 &\longrightarrow \mathbb{C}, \\ z &\longmapsto \operatorname{Arg} z, \end{aligned}$$

ist unstetig in dem Punkt $z = -1$.

3.7$_1$ Folgerung. *Der Hauptzweig des Logarithmus ist unstetig auf der negativen reellen Achse.*

Beweis der Bemerkung. Es sei

$$a_n = e^{(\pi - 1/n)\mathrm{i}} \quad \text{und} \quad b_n = e^{(-\pi + 1/n)\mathrm{i}}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Einerseits gilt

$$\operatorname{Arg} a_n = \pi - \frac{1}{n} \quad \text{und} \quad \operatorname{Arg} b_n = -\pi + \frac{1}{n},$$

$$\Longrightarrow \qquad \lim_{n\to\infty} \operatorname{Arg} a_n = \pi \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} \operatorname{Arg} b_n = -\pi,$$

aber andererseits auch $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = -1 = e^{\pi \mathrm{i}} = e^{-\pi \mathrm{i}}$. Daher ist Arg an der Stelle $z = -1$ nicht stetig. □

Dass die Einschränkung von Arg auf S^1 unstetig ist, kann man auch folgendermaßen einsehen: Die Menge S^1 ist kompakt (s. 3.10). Wäre Arg stetig, so müsste auch $]-\pi, \pi] = \operatorname{Arg}(S^1)$ kompakt sein. Das ist jedoch nicht der Fall.

Wir erinnern kurz an die üblichen topologischen Begriffe im $\mathbb{R}^p$ (wobei für uns der Spezialfall $p = 2$ von Interesse ist).

3.8 Definition. *Eine Teilmenge $D \subset \mathbb{R}^p$ heißt **offen**, falls zu jedem $a \in D$ eine Zahl $\varepsilon > 0$ existiert, so dass die ε-Umgebung (im Falle $p = 2$ eine Kreisscheibe)*

$$U_\varepsilon(a) := \{\, z \in \mathbb{R}^p; \quad |z - a| < \varepsilon \,\}$$

noch ganz in D enthalten ist.

3.9 Definition. *Eine Menge $A \subset \mathbb{R}^p$ heißt **abgeschlossen**, wenn eine der beiden folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt ist.*

a) *Das Komplement*

$$\mathbb{R}^p - A = \{\, z \in \mathbb{R}^p; \quad z \notin A \,\}$$

ist offen.

b) *Der Grenzwert einer beliebigen konvergenten Punktfolge aus A liegt ebenfalls in A (d.h. A ist folgenabgeschlossen).*

3.10 Definition. *Eine Menge $A \subset \mathbb{R}^p$ heißt **kompakt**, wenn es zu jeder Überdeckung*

$$A \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \quad (\Lambda \text{ beliebige Indexmenge})$$

durch eine Schar $(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ von offenen Mengen $U_\lambda \subset \mathbb{R}^p$ eine endliche Teilüberdeckung gibt, d. h. eine endliche Teilmenge $\Lambda_0 \subset \Lambda$ mit der Eigenschaft

$$A \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda_0} U_\lambda .$$

Aus der reellen Analysis sind die folgenden Sätze bekannt:

3.11 Satz (HEINE-BOREL). *Eine Menge $A \subset \mathbb{R}^p$ ist genau dann kompakt, wenn sie beschränkt und abgeschlossen ist.*

3.12 Satz. *Das Bild einer kompakten Menge $A \subset \mathbb{R}^p$ unter einer stetigen Abbildung $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ ist wieder kompakt. Insbesondere ist eine stetige reellwertige Funktion (d. h. $q = 1$) auf A beschränkt und nimmt Maximum und Minimum an.*

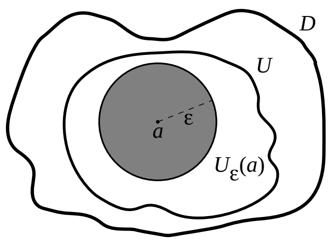
3.13 Satz. *Die Umkehrfunktion einer stetigen injektiven Funktion $f : A \to \mathbb{C}$ mit kompaktem Definitionsbereich $A \subset \mathbb{C}$ ist wieder stetig.*

Übungsaufgaben zu I.3

1. Man beweise die Äquivalenz der ε-δ-Stetigkeit und der Folgenstetigkeit in 3.1.

2. Mit Hilfe von Aufgabe 21 aus I.2 zeige man, dass $\operatorname{Arg} : \mathbb{C}_- \to \mathbb{R}$ stetig ist. Dabei ist $\mathbb{C}_-$ die längs der negativen reellen Achse geschlitzte Ebene:
$$\mathbb{C}_- := \mathbb{C} - \{\, t \in \mathbb{R};\ t \le 0 \,\}.$$
Man folgere, dass der Hauptzweig des Logarithmus in $\mathbb{C}_-$ ebenfalls stetig ist.

3. Sei $D \subset \mathbb{R}^p$. Ein Punkt $a \in D$ heißt *innerer Punkt* (von D), wenn mit a noch eine ε-Kugel $U_\varepsilon(a) := \{\, x \in \mathbb{R}^p;\quad |x - a| < \varepsilon \,\}$ in D enthalten ist.



Man zeige: D ist offen $\iff$ jeder Punkt von D ist innerer Punkt.

Eine Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^p$ heißt *Umgebung von* $a \in \mathbb{R}^p$, wenn U eine ε-Kugel $U_\varepsilon(a)$ enthält.

Man zeige: D offen $\iff$ D ist Umgebung jedes Punktes $a \in D$.

Sei $\mathring{D} := \{x \in D;\quad D \text{ Umgebung von } x\}$

Man zeige: D offen $\iff$ $D = \mathring{D}$.
$\mathring{D}$ ist stets offen, und für jede offene Menge $U \subset \mathbb{R}^p$ mit $U \subset D$ gilt $U \subset \mathring{D}$.

4. Sei $M \subset \mathbb{R}^p$. Ein Punkt $a \in \mathbb{R}^p$ heißt *Häufungspunkt* von M, wenn für jede ε-Kugel $U_\varepsilon(a)$ gilt
$$U_\varepsilon(a) \cap (M - \{a\}) \ne \emptyset.$$
In jeder ε-Kugel von a liegt also ein von a verschiedener Punkt von M.

Bezeichnung. $M' := \{\, x \in \mathbb{R}^p;\quad x \text{ ist Häufungspunkt von } M \,\}$.

Man zeige: Für eine Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^p$ sind äquivalent:

a) A ist abgeschlossen, d. h. $\mathbb{R}^p - A$ ist offen.
b) Für jede konvergente Folge (a_n), $a_n \in A$, gilt $\lim_{n\to\infty} a_n \in A$.

c) $A \supset A'$.

Man zeige ferner:

$$\bar{A} := A \cup A'$$

ist stets abgeschlossen, und für jede abgeschlossene Menge $B \subset \mathbb{R}^p$ mit $B \supset A$ gilt $B \supset \bar{A}$.

$\bar{A}$ heißt *abgeschlossene Hülle* (oder *Abschluss*) von A.

5. Sei $(x_n)_{n \geq 0}$ eine Folge im $\mathbb{R}^p$. $a \in \mathbb{R}^p$ heißt *Häufungswert* der Folge (x_n), wenn es zu jeder ε-Kugel $U_\varepsilon(a)$ unendlich viele Indizes n gibt, so dass $x_n \in U_\varepsilon(a)$.

   Man zeige (Satz von BOLZANO-WEIERSTRASS):
   Jede beschränkte Folge (x_n), $x_n \in \mathbb{R}^p$, besitzt einen Häufungswert.

   Eine Teilmenge $K \subset \mathbb{R}^p$ heißt *folgenkompakt,* wenn jede Folge $(x_n)_{n \geq 0}$ mit $x_n \in K$ (mindestens) einen Häufungswert in K besitzt.

   Man zeige: Für eine Teilmenge $K \subset \mathbb{R}^p$ sind äquivalent:

   a) K ist kompakt,
   b) K ist folgenkompakt.

   Anmerkung. Diese Äquivalenz gilt für jeden metrischen Raum.

6. Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt
$$\lim_{n \to \infty} (1 + z/n)^n = \exp(z).$$
   Allgemeiner: Für jede Folge (z_n), $z_n \in \mathbb{C}$, mit $\lim\limits_{n \to \infty} z_n = z$ gilt
$$\lim_{n \to \infty} (1 + z_n/n)^n = \exp(z).$$

7. Man beweise den Satz von HEINE (E. HEINE, 1872):

   Ist $K \subset \mathbb{C}$ kompakt und $f : K \to \mathbb{C}$ stetig, dann ist f *gleichmäßig stetig* auf K, d. h. zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so dass für alle $z, z' \in K$ mit $|z - z'| < \delta$
$$\left| f(z) - f(z') \right| < \varepsilon$$
   gilt.

8. Für Teilmengen $A, B \subset \mathbb{C}$ heißt
$$d(A, B) := \inf\{\, |z - w| ; \quad z \in A,\ w \in B \,\}$$
   Abstand zwischen A und B. Ist $B = \{w\}$, dann schreibt man einfach $d(A, w)$ statt $d(A, \{w\})$.
   Man zeige:
   a) Sind $A \subset \mathbb{C}$ eine abgeschlossene Teilmenge und $b \in \mathbb{C}$ beliebig, dann gibt es ein $a \in A$ mit
$$d(A, b) = |a - b| .$$
   b) Sind $A \subset \mathbb{C}$ eine abgeschlossene Teilmenge und $B \subset \mathbb{C}$ kompakt, dann gibt es Elemente $a \in A$ und $b \in B$ mit
$$d(A, B) = |a - b| .$$

9. Es gibt keine Funktion $f : \mathbb{C}^\bullet \to \mathbb{C}^\bullet$ mit den beiden Eigenschaften

   a) $\quad f(zw) = f(z)f(w)$ für alle $z, w \in \mathbb{C}^\bullet$ und

   b) $\quad \big(f(z)\big)^2 = z$ für alle $z \in \mathbb{C}^\bullet$.

10. *Man zeige:*

a) Es gibt keine stetige Funktion $f : \mathbb{C}^\bullet \to \mathbb{C}^\bullet$ mit
$$\big(f(z)\big)^2 = z \quad \text{für alle} \quad z \in \mathbb{C}^\bullet.$$
b) Es gibt keine stetige Funktion $q : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit
$$\big(q(z)\big)^2 = z \quad \text{für alle} \quad z \in \mathbb{C}.$$

11. Es gibt keine stetige Funktion $\varphi : \mathbb{C}^\bullet \to \mathbb{R}$ mit
$$z = |z| \exp\big(\mathrm{i}\varphi(z)\big) \quad \text{für alle} \quad z \in \mathbb{C}^\bullet.$$

12. Es gibt keine stetige Funktion $l : \mathbb{C}^\bullet \to \mathbb{C}$ mit
$$\exp\big(l(z)\big) = z \quad \text{für alle} \quad z \in \mathbb{C}^\bullet.$$

13. Sei $n \geq 2$ eine natürliche Zahl. Es gibt keine Funktion $f : \mathbb{C}^\bullet \to \mathbb{C}^\bullet$ mit den beiden Eigenschaften

a) $$f(zw) = f(z)f(w) \quad \text{für alle} \quad z, w \in \mathbb{C}^\bullet \quad \text{und}$$
b) $$\big(f(z)\big)^n = z \quad \text{für alle} \quad z \in \mathbb{C}^\bullet \quad (n \in \mathbb{N},\ n \geq 2).$$

14. Sei $n \geq 2$ eine natürliche Zahl. Es gibt keine stetige Funktion $q_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit
$$\big(q_n(z)\big)^n = z \quad \text{für alle} \quad z \in \mathbb{C}.$$

4. Komplexe Ableitung

Sei $D \subset \mathbb{C}$ eine Menge komplexer Zahlen. Ein Punkt $a \in \mathbb{C}$ heißt *Häufungspunkt* von D, falls zu jedem $\varepsilon > 0$ ein Punkt
$$z \in D \quad \text{mit} \quad 0 < |z - a| < \varepsilon$$
existiert.

Sei $f : D \to \mathbb{C}$ eine Funktion und $l \in \mathbb{C}$ eine komplexe Zahl. Die Aussage
$$f(z) \to l \quad \text{für} \quad z \to a$$
bedeutet definitionsgemäß:

a) a ist Häufungspunkt von D.
b) Die Funktion
$$\begin{aligned} \tilde{f} : D \cup \{a\} &\longrightarrow \mathbb{C}, \\ z &\longmapsto \tilde{f}(z) = \begin{cases} f(z) & \text{für } z \neq a,\ z \in D, \\ l & \text{für } z = a, \end{cases} \end{aligned}$$
ist in a stetig, also:

Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$ mit der Eigenschaft

$$|f(z) - l| < \varepsilon, \quad \text{falls} \quad z \in D, \ z \neq a \quad \text{und} \quad |z - a| < \delta.$$

Es ist leicht zu sehen, dass der Grenzwert l eindeutig bestimmt ist.

Man sagt: l ist der Grenzwert von f bei (Annäherung an) a. Die Schreibweise

$$l = \lim_{\substack{z \to a \\ z \neq a}} f(z) \quad \text{oder} \quad l = \lim_{z \to a} f(z)$$

ist also gerechtfertigt. Man beachte, dass in der Literatur unterschiedliche Grenzwertbegriffe verwendet werden, die sich dadurch unterscheiden, ob der Punkt a zur Konkurrenz zugelassen wird oder nicht.

4.1 Definition. *Eine Funktion*

$$f : D \longrightarrow \mathbb{C}, \quad D \subset \mathbb{C},$$

heißt ***komplex ableitbar*** *(oder* ***komplex differenzierbar****) im Punkt $a \in D$, falls der Grenzwert*

$$\lim_{z \to a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a}$$

existiert.

Man bezeichnet diesen Grenzwert im Falle der Existenz mit $f'(a)$. (Die Funktion $z \mapsto \frac{f(z)-f(a)}{z-a}$ ist in $D - \{a\}$ definiert. Nach Voraussetzung ist a Häufungspunkt von $D - \{a\}$ und damit auch von D.)

Wenn f in *jedem* Punkt von D ableitbar ist, so kann man die komplexe Ableitung

$$\begin{aligned} f' : D &\longrightarrow \mathbb{C}, \\ z &\longmapsto f'(z), \end{aligned}$$

wieder als Funktion auf D auffassen.

Spezialfall. D sei ein Intervall der reellen Geraden, etwa

$$D = [a, b], \quad a < b.$$

Wir zerlegen f in Real- und Imaginärteil

$$f(x) = u(x) + \mathrm{i}v(x).$$

Dabei sind u und v gewöhnliche reelle Funktionen einer reellen Veränderlichen.

Offenbar ist f genau dann komplex ableitbar, wenn die Funktionen u und v differenzierbar sind, und es gilt

$$f'(x) = u'(x) + \mathrm{i}v'(x).$$

Die komplexe Ableitbarkeit stellt also eine Verallgemeinerung der reellen Ableitbarkeit dar. Wir werden jedoch sehen, dass die Situation für *offene* Definitionsbereiche $D \subset \mathbb{C}$ völlig anders ist.

Manchmal ist eine etwas andere Formulierung der Ableitbarkeit nützlich:

4.2 Bemerkung. *Sei $D \subset \mathbb{C}$, $a \in D$ ein Häufungspunkt von D, $f : D \to \mathbb{C}$ eine Funktion, sowie $l \in \mathbb{C}$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

a) *f ist in a komplex ableitbar und hat dort die Ableitung l.*

b) *Es gibt eine in a stetige Funktion $\varphi : D \to \mathbb{C}$ mit*

$$f(z) = f(a) + \varphi(z)\,(z-a) \quad \text{und} \quad \varphi(a) = l.$$

c) *Es gibt eine in a stetige Funktion $\rho : D \to \mathbb{C}$ mit*

$$f(z) = f(a) + l\,(z-a) + \rho(z)\,(z-a) \quad \text{und} \quad \rho(a) = 0.$$

d) *Definiert man $r : D \to \mathbb{C}$ durch die Gleichung*

$$f(z) = f(a) + l\,(z-a) + r(z),$$

so gilt

$$\lim_{z \to a} \frac{r(z)}{z-a} = 0.$$

Es gilt dabei jeweils $l = f'(a)$.

Die Äquivalenz der Aussagen ist aufgrund der Definitionen offensichtlich.

4.2$_1$ Folgerung. *Eine in a ableitbare Funktion ist stetig in a.*

Wie im Reellen zeigt man die folgenden *Permanenzeigenschaften:*

4.3 Satz. *Die Funktionen $f, g : D \to \mathbb{C}$, $D \subset \mathbb{C}$, seien in $a \in D$ komplex ableitbar. Dann sind auch die Funktionen*

$$f+g; \quad \lambda f,\ \lambda \in \mathbb{C}; \quad f \cdot g \ \text{ und } \ \frac{1}{f}, \text{ falls } f(a) \neq 0 \text{ ist,}$$

in a komplex ableitbar, und es gilt:

$$(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a), \qquad (\lambda f)'(a) = \lambda f'(a),$$
$$(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a), \qquad \left(\frac{1}{f}\right)'(a) = -\frac{f'}{f^2}(a).$$

Anwendung. Die Funktion

$$f(z) = z^n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

(Definitionsbereich $\mathbb{C}$ im Fall $n \geq 0$, sonst $\mathbb{C}^\bullet$)

ist komplex differenzierbar, und es gilt

$$f'(z) = nz^{n-1}.$$

Die Umformulierung der Ableitbarkeit aus Bemerkung 4.2 ist von Nutzen beim Beweis der Kettenregel.

4.4 Satz (Kettenregel). *Die Funktionen*

$$f : D \longrightarrow \mathbb{C} \quad \textit{und} \quad g : D' \longrightarrow \mathbb{C}$$

seien zusammensetzbar, d. h. $f(D) \subset D'$. *Außerdem seien*

$$f \quad \textit{in} \quad a \in D \quad \textit{und} \quad g \quad \textit{in} \quad f(a) \in D'$$

komplex ableitbar. Dann ist die Zusammensetzung

$$\begin{aligned} g \circ f : D &\longrightarrow \mathbb{C}, \\ z &\longmapsto g\bigl(f(z)\bigr), \end{aligned}$$

in $z = a$ *ableitbar, und es gilt*

$$(g \circ f)'(a) = g'\bigl(f(a)\bigr) \cdot f'(a).$$

Beweis. Nach Voraussetzung gilt

$$\begin{aligned} f(z) - f(a) &= \varphi(z)\,(z-a), \quad &&\varphi \text{ stetig in } a \text{ und } \varphi(a) = f'(a), \\ g(w) - g(b) &= \psi(w)\,(w-b), \quad &&\psi \text{ stetig in } b = f(a) \text{ und } \psi(b) = g'(b). \end{aligned}$$

Daher ist (für $z \neq a$)

$$\frac{g\bigl(f(z)\bigr) - g\bigl(f(a)\bigr)}{z-a} = \psi\bigl(f(z)\bigr) \cdot \frac{f(z) - f(a)}{z-a}\,.$$

Durch Grenzübergang folgt dann

$$(g \circ f)'(a) = \psi\bigl(f(a)\bigr) f'(a) = g'\bigl(f(a)\bigr) f'(a). \qquad \square$$

Beispiele.

1) Durch wiederholte Anwendung der Regeln aus 4.3 erhält man, dass jedes Polynom

$$P(z) = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu z^\nu \qquad a_\nu \in \mathbb{C} \ \text{ für } \ 0 \le \nu \le n,$$

für alle $z \in \mathbb{C}$ komplex differenzierbar ist und dass gilt:

$$P'(z) = \sum_{\nu=1}^{n} \nu a_\nu z^{\nu-1}$$

2) Sind $P, Q : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ Polynome und ist $N(Q) = \{\, z \in \mathbb{C}; \quad Q(z) = 0 \,\}$ die Nullstellenmenge von Q, dann ist die (rationale) Funktion

$$\begin{aligned} f : \mathbb{C} - N(Q) &\longrightarrow \mathbb{C}, \\ z &\longmapsto f(z) := \frac{P(z)}{Q(z)}, \end{aligned}$$

komplex differenzierbar. Das ergibt sich unmittelbar aus Beispiel 1) und den Regeln aus 4.3.

3) Wir benutzen im Vorgriff auf den nächsten Paragraphen, dass die komplexe Exponentialfunktion komplex differenzierbar ist und sich selbst als Ableitung hat (vgl. auch Beispiel 4)):

$$\exp' = \exp,$$

und dass der Hauptzweig des Logarithmus Log in der geschlitzten Ebene

$$\mathbb{C}_- := \mathbb{C} - \{\, t \in \mathbb{R};\ t \leq 0 \,\}$$

komplex differenzierbar ist mit (vgl. I.4, Aufgabe 6)

$$\operatorname{Log}'(z) = \frac{1}{z}.$$

Mittels der Kettenregel 4.4 erhalten wir dann, dass für $s \in \mathbb{C}$ die Funktion

$$\begin{aligned} f : \mathbb{C}_- &\longrightarrow \mathbb{C}, \\ z &\longmapsto z^s := \exp(s \operatorname{Log} z), \end{aligned}$$

komplex differenzierbar ist und dass

$$f'(z) = \exp(s \operatorname{Log} z) s \frac{1}{z} = s z^{s-1}$$

gilt.

4) Seien $a \in \mathbb{C}$ und (c_ν) eine Folge komplexer Zahlen. Eine Reihe vom Typ

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu (z-a)^\nu$$

heißt *Potenzreihe mit Entwicklungspunkt* a und Koeffizienten c_ν.

Wir nehmen an, dass die Potenzreihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu (z-a)^\nu$$

in der Kreisscheibe

$$U_R(a) = \{\, z \in \mathbb{C}; \quad |z-a| < R \,\} \qquad (R > 0)$$

konvergiert, und für $z \in U_R(a)$ definieren wir

$$f(z) := \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu (z-a)^\nu .$$

Die Funktion f ist für alle $z \in U_R(a)$ komplex differenzierbar und es gilt

$$f'(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu c_\nu (z-a)^{\nu-1} \quad \text{(gliedweises Ableiten von Potenzreihen)} .$$

Dies könnte man hier leicht direkt zeigen. Wir verzichten hierauf, da wir es später (s. III.2) aus allgemeinen Sätzen folgern werden.

Hieraus ergibt sich beispielsweise die angegebene Formel $\exp' = \exp$, außerdem auch $\sin' = \cos$ und $\cos' = -\sin$.

Im nächsten Paragraphen werden wir eine andere Methode kennenlernen, wie man die komplexe Differenzierbarkeit nachprüfen kann.

Übungsaufgaben zu I.4

1. Man beweise die Ableitungsregeln aus Satz 4.3 mit Hilfe der Eigenschaft b) aus 4.2.

2. Man untersuche auf Stetigkeit und komplexe Differenzierbarkeit und bestimme gegebenenfalls die Ableitung in den Punkten, in denen f komplex differenzierbar ist:

   a) $f(z) = z \operatorname{Re}(z)$, $\quad f(z) = \overline{z}$,
   $f(z) = z\overline{z}$, $\quad f(z) = z/|z|\,,\ z \neq 0.$

   b) Die Exponentialfunkton exp ist differenzierbar, und es gilt $\exp' = \exp$.

3. Ist die Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ für alle $z \in \mathbb{C}$ komplex differenzierbar und nimmt sie nur reelle oder rein imaginäre Werte an, dann ist f konstant.

4. Sei $f : D \to \mathbb{C}$ in $a \in D$ komplex differenzierbar und $D^* := \{z;\ \bar{z} \in D\}$. Dann ist auch die durch
   $$g(z) = \overline{f(\bar{z})}$$
   definierte Funktion $g : D^* \to \mathbb{C}$ in $\bar{a}$ komplex differenzierbar, und es gilt
   $$g'(\overline{a}) = \overline{f'(a)}.$$

5. Man beweise die folgende *Variante der Kettenregel*: Seien D und $D' \subset \mathbb{C}$ offen und $f : D \to \mathbb{C}$ und $g : D' \to \mathbb{C}$ stetige Funktionen mit $f(D) \subset D'$ und $g\big(f(z)\big) = z$ für alle $z \in D$.

   Man zeige: Ist g in $b = f(a)$ komplex ableitbar und ist $g'(b) \neq 0$, dann ist f in a komplex ableitbar, und es gilt $f'(a) = 1/g'(b)$.

6. Nach Aufgabe 2 aus I.3 ist der Hauptzweig des Logarithmus in der geschlitzten Ebene $\mathbb{C}_-$ stetig. Man zeige unter Verwendung von Aufgabe 5, dass er sogar in $\mathbb{C}_-$ komplex differenzierbar ist und dass dort $\operatorname{Log}'(z) = 1/z$ gilt.

5. Die Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen

Ausgangspunkt unserer Überlegungen ist die formale Ähnlichkeit von Bemerkung 4.2 zum Begriff der totalen Ableitbarkeit in der reellen Analysis:

Eine Abbildung

$$f : D \longrightarrow \mathbb{R}^q, \quad D \subset \mathbb{R}^p \ \textit{offen},$$

*heißt **total ableitbar** oder **total differenzierbar** in einem Punkt $a \in D$, falls eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung*

$$A : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^q$$

existiert, so dass für den durch die Gleichung

$$f(x) - f(a) = A(x - a) + r(x)$$

definierten „Rest" $r(x)$

$$\lim_{x \to a} \frac{r(x)}{|x - a|} = 0$$

gilt. Dabei bezeichne $|x - a|$ den euklidischen Abstand zwischen x und a.

Die Abbildung A ist eindeutig bestimmt und heißt *Jacobi-Abbildung* von f im Punkt a (auch totales Differential von f im Punkt a oder Tangentialabbildung von f im Punkt a).

Bezeichnung. $A = J(f; a)$.

Ein Vergleich mit 4.2 zeigt, dass jede in einem Punkt komplex differenzierbare Funktion in diesem Punkt auch total differenzierbar im Sinne der reellen Analysis ist. Man kann genauer sagen:

5.1 Bemerkung. *Für eine Funktion*

$$f : D \longrightarrow \mathbb{C}, \quad D \subset \mathbb{C} \ \textit{offen}, \quad a \in D,$$

sind die beiden folgenden Aussagen gleichbedeutend:

a) *f ist in a komplex ableitbar.*

b) *f ist in a total ableitbar (im Sinne der reellen Analysis, $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$), und die Jacobi-Abbildung*

$$J(f; a) : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$

ist von der Form

$$J(f; a)z = lz$$

mit einer komplexen Zahl l. Die Zahl l ist natürlich die Ableitung $f'(a)$.

Damit drängt sich folgende Frage auf:

Wie muss eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ beschaffen sein, damit eine komplexe Zahl $l \in \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ existiert, so dass

$$Az = lz$$

gilt?

Mit anderen Worten: Wann ist eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ auch $\mathbb{C}$-linear?

5.2 Bemerkung. *Für eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung*

$$A : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$

sind die folgenden vier Aussagen äquivalent:

1) *Es existiert eine komplexe Zahl l mit $Az = lz$.*
2) *A ist $\mathbb{C}$-linear.*
3) $A(\mathrm{i}) = \mathrm{i}A(1)$.
4) *Die ihr bezüglich der kanonischen Basis* 1 $(= (1,0))$ *und* i $(= (0,1))$ *zugeordnete Matrix hat die spezielle Gestalt*

$$\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \qquad (\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}).$$

Beweis. Die Aussagen 1), 2) und 3) sind trivialerweise äquivalent. Es genügt also, die Äquivalenz von 1) und 4) zu zeigen.

Wir erinnern zunächst daran, wie die einer linearen Abbildung

$$A : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

zugeordnete Matrix definiert ist. Da A $\mathbb{R}$-linear ist, gilt

$$A(x,y) = (ax + by, cx + dy)$$

mit gewissen reellen Zahlen a, b, c, d. Die zugeordnete Matrix ist

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Setzt man $A(x,y) =: (u,v)$, so lässt sich diese Gleichung auch in der einfachen Form der Matrizenmultiplikation

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

schreiben.

Wir identifizieren dabei $\mathbb{C}$ mit $\mathbb{R}^2$ über den Isomorphismus

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{C} & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{R}^2, \\ x + \mathrm{i}y & \longmapsto & \binom{x}{y}. \end{array}$$

Es sei nun speziell

$$Az = lz, \quad l = \alpha + \mathrm{i}\beta,$$

also

$$A(x,y) = (\alpha x - \beta y, \beta x + \alpha y), \quad \big(z = (x,y)\big).$$

Damit ist 1) $\Rightarrow$ 4) gezeigt. Die Umkehrung ergibt sich ebenfalls aus dieser Formel. □

Jede von Null verschiedene komplexe Zahl l lässt sich in der Form $l = re^{\mathrm{i}\varphi}$, $r > 0$, schreiben (Satz 1.5). Multiplikation mit r bewirkt eine *Streckung* um den Faktor r, die Multiplikation mit $e^{\mathrm{i}\varphi}$ eine *Drehung* um den Winkel φ.

Die Selbstabbildungen der komplexen Ebene $\mathbb{C}$, welche sich als Multiplikation mit einer von 0 verschiedene komplexen Zahl schreiben lassen, sind genau die ***Drehstreckungen****.*

Drehstreckungen sind offensichtlich **winkeltreu** und **orientierungstreu**, hiervon gilt auch eine Umkehrung, vgl. Bemerkung 5.14.

Aus der reellen Analysis weiß man, wie die JACOBI-Matrix — d. h. die der JACOBI-Abbildung entsprechende Matrix — einer total differenzierbaren Funktion berechnet werden kann. Dazu zerlegen wir f in Real- und Imaginärteil: $f(z) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y)$, $z = x + \mathrm{i}y$.

Die Abbildung

$$f : D \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad D \subset \mathbb{R}^2 \textit{ offen},$$

sei in $a \in D$ total ableitbar. Dann existieren die partiellen Ableitungen von u und v in a, und es gilt

$$J(f;a) \leftrightarrow \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x}(a) & \dfrac{\partial u}{\partial y}(a) \\ \dfrac{\partial v}{\partial x}(a) & \dfrac{\partial v}{\partial y}(a) \end{pmatrix} \quad (= \textit{Funktionalmatrix von } f \textit{ in } a).$$

Die Bemerkungen 5.1 und 5.2 kann man nun folgendermaßen zusammenfassen:

5.3 Satz (A.-L. CAUCHY, 1825; B. RIEMANN, 1851)**.** *Für eine Funktion*

$$f : D \longrightarrow \mathbb{C}, \quad D \subset \mathbb{C} \textit{ offen}, \quad a \in D,$$

sind die beiden folgenden Aussagen gleichbedeutend:

a) *f ist in a komplex ableitbar.*

b) *f ist in a total ableitbar im Sinne der reellen Analysis* ($\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$), *und für $u = \operatorname{Re} f$ und $v = \operatorname{Im} f$ gelten die*

Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x}(a) = \frac{\partial v}{\partial y}(a), \quad \frac{\partial u}{\partial y}(a) = -\frac{\partial v}{\partial x}(a).}$$

Es gilt dann

$$f'(a) = \frac{\partial u}{\partial x}(a) + \mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}(a) = \frac{\partial v}{\partial y}(a) - \mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial y}(a).$$

Anmerkung zur Notation. Statt

$$\frac{\partial u}{\partial x}(a) \text{ bzw. } \frac{\partial u}{\partial y}(a)$$

schreibt man häufig auch

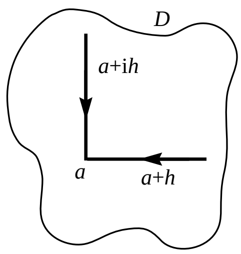
$$u_x(a) \text{ oder } \partial_1 u(a) \text{ bzw. } u_y(a) \text{ oder } \partial_2 u(a),$$

entsprechend bei v. Für die Funktionaldeterminante einer komplex differenzierbaren Funktion $f = u + \mathrm{i}v$ erhält man

$$\det J(f; a) = u_x(a)^2 + v_x(a)^2 = u_y(a)^2 + v_y(a)^2 = |f'(a)|^2,$$

sie ist also nicht negativ und sogar positiv, falls $f'(a)$ von 0 verschieden ist.

Es sollte erwähnt werden, dass man die Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen auch einfach folgendermaßen herleiten kann:



Wenn die Funktion

$$f : D \longrightarrow \mathbb{C}, \quad D \subset \mathbb{C} \text{ offen},$$

in $a \in D$ komplex ableitbar ist, so gilt insbesondere

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+\mathrm{i}h) - f(a)}{\mathrm{i}h},$$

wobei h nur über reelle Zahlen variiert. Zerlegt man f in Real- und Imaginärteil,

$$f = u + \mathrm{i}v,$$

so folgt

$$f'(a) = \partial_1 u(a) + \mathrm{i}\partial_1 v(a) = \frac{1}{\mathrm{i}}\left[\partial_2 u(a) + \mathrm{i}\partial_2 v(a)\right]$$

Hieraus folgen unmittelbar die Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen. Allerdings liefert dieser Beweis nicht so ohne weiteres die Umkehrung, d. h. dass aus den Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen (unter der Voraussetzung der totalen Ableitbarkeit) die Ableitbarkeit von f folgt.

Bekanntlich folgt aus der bloßen Existenz der partiellen Ableitungen noch nicht, dass f total ableitbar ist. Aber aus der reellen Analysis ist das folgende *hinreichende Kriterium* für die totale Ableitbarkeit bekannt:

Wenn die partiellen Ableitungen einer Abbildung

$$f : D \longrightarrow \mathbb{R}^q, \quad D \subset \mathbb{R}^p \ \textit{offen},$$

in jedem Punkt existieren und stetig sind, so ist f total ableitbar.

Beispiele.

1) Wir wissen schon, dass die Funktion f mit

$$f(z) = z^2 \text{ (allgemeiner } = z^n \text{ , } n \in \mathbb{N})$$

komplex differenzierbar ist. Es müssen also die CAUCHY-RIEMANN'schen Differentialgleichungen gelten. Aus

$$f(z) = (x + \mathrm{i}y)^2 = x^2 - y^2 + 2\mathrm{i}xy$$

d. h.

$$u(x, y) = x^2 - y^2, \qquad v(x, y) = 2xy,$$

folgt

$$\begin{aligned} \partial_1 u(x, y) &= 2x, & \partial_2 u(x, y) &= -2y, \\ \partial_1 v(x, y) &= 2y, & \partial_2 v(x, y) &= 2x. \end{aligned}$$

Die CAUCHY-RIEMANN'schen Differentialgleichungen sind also erfüllt.

2) Die Funktion $f(z) = \overline{z}$ ist zwar stetig aber in keinem Punkt komplex differenzierbar, denn es gilt

$$u(x, y) = x, \qquad v(x, y) = -y,$$

also

$$1 = \partial_1 u \neq \partial_2 v = -1.$$

5.4 Satz. *Die Funktionen* exp, sin *und* cos *sind in ganz* $\mathbb{C}$ *komplex differenzierbar, und es gilt*

$$\exp' = \exp, \quad \sin' = \cos, \quad \cos' = -\sin .$$

Beweis. Es gilt z. B.

$$\exp(z) = e^x(\cos y + \mathrm{i} \sin y),$$

d. h.

$$u(x, y) = e^x \cos y \ , \quad v(x, y) = e^x \sin y.$$

Die CAUCHY-RIEMANN'schen Differentialgleichungen sind leicht nachzuprüfen, ebenso die Formeln für die Ableitungen, diese sind stetig. □

5.5 Bemerkung (Charakterisierung lokal konstanter Funktionen). *Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen, $f : D \to \mathbb{C}$ eine Funktion. Dann sind äquivalent:*

a) *f ist in D lokal konstant.*
b) *f ist für alle $z \in D$ komplex differenzierbar, und es gilt*

$$f'(z) = 0 \quad \textit{für alle} \quad z \in D.$$

Zusatz. *Insbesondere ist eine in D komplex differenzierbare Funktion, die nur reelle (oder nur rein imaginäre) Werte annimmt, lokal konstant in D.*

Dabei heißt eine Funktion f *lokal konstant,* wenn es zu jedem Punkt eine Umgebung gibt, in der f konstant ist. (Eine Menge $U \subset \mathbb{C}$ heißt *Umgebung von a*, falls U eine volle Kreisscheibe um a enthält.)

Beweis. Es ist nur *b)* $\Rightarrow$ *a)* zu zeigen:
Ist $f = u + \mathrm{i}v$, dann ist $f' = u_x + \mathrm{i}v_x$; $u_x = v_y$ und $u_y = -v_x$. Daher gilt

$$u_x(a) = u_y(a) = 0 \ \text{ sowie } \ v_x(a) = v_y(a) = 0$$

für alle $a \in D$. Aus der reellen Analysis ist wohlbekannt, dass dann u und v lokal konstant in D sind. Somit ist auch $f = u + \mathrm{i}v$ lokal konstant in D.

Sei f eine komplex differenzierbare Funktion, welche nur reelle Werte annimmt. Aus den CAUCHY-RIEMANN'schen Differentialgleichungen folgt, dass die Ableitung von f verschwindet, die Funktion f ist somit lokal konstant. □

Beispielsweise können also die Funktionen $f(z) = |\sin z|$ und $g(z) = \operatorname{Re} z$ in $\mathbb{C}$ nicht komplex differenzierbar sein.

Wir sehen damit, dass die Bedingung „komplex differenzierbar“ eine sehr starke Einschränkung bedeutet.

Sprechweise. *Eine Funktion*

$$f : D \longrightarrow \mathbb{C}, \quad D \subset \mathbb{C} \ \textit{ offen},$$

welche in jedem Punkt von D komplex differenzierbar ist, heißt auch (komplex) analytisch oder holomorph oder regulär in D.

f heißt analytisch im Punkt $a \in D$, wenn es eine offene Umgebung $U \subset D$ von a gibt, so dass f in U analytisch ist.

Beispiel. Die Funktion $f(z) = z\overline{z}$ ist zwar in $a = 0$ komplex differenzierbar, aber in 0 nicht analytisch.

Wir bevorzugen im Folgenden die Bezeichnung „analytisch“ anstelle von „komplex differenzierbar“ bzw. „holomorph“ in D.

5.6 Definition. *Eine Menge $D \subset \mathbb{C}$ heißt **zusammenhängend**, falls jede lokal konstante Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ konstant ist.*

Damit kann man den Zusatz zu 5.5 auch folgendermaßen aussprechen:

Der Realteil einer in einer zusammenhängenden offenen Menge $D \subset \mathbb{C}$ analytischen Funktion ist durch den Imaginärteil bis auf eine additive Konstante eindeutig bestimmt.

Sind nämlich f und g zwei analytische Funktionen mit demselben Imaginärteil, so nimmt $f - g$ nur reelle Werte an.

Wir haben die CAUCHY-RIEMANN'schen Differentialgleichungen als Anwendung der im Grunde trivialen Bemerkung 5.1 erhalten. Als weitere Anwendung beweisen wir den komplexen *Satz für implizite Funktionen* mit Hilfe des entsprechenden reellen Satzes.

5.7 Satz (für implizite Funktionen). *Gegeben sei eine analytische Funktion*

$$f : D \longrightarrow \mathbb{C}, \quad D \subset \mathbb{C} \ \textit{ offen,}$$

mit stetiger Ableitung.

1. Teil. *In einem Punkt $a \in D$ gelte $f'(a) \neq 0$. Dann existiert eine offene Menge*

$$D_0, \quad D_0 \subset D, \quad a \in D_0,$$

so dass die Einschränkung $f|D_0$ injektiv ist.

2. Teil. *Die Funktion f sei injektiv, und es gelte $f'(z) \neq 0$ für alle $z \in D$. Dann ist der Wertevorrat $f(D)$ offen. Die Umkehrfunktion*

$$f^{-1} : f(D) \longrightarrow \mathbb{C}$$

ist analytisch, und ihre Ableitung ist

$$f^{-1\prime}\bigl(f(z)\bigr) = \frac{1}{f'(z)}\,.$$

Wir werden später sehen, dass die Ableitungen analytischer Funktionen immer stetig (sogar analytisch) sind, s. II.3.4.

Beweis von 5.7. Wir benutzen den analogen Satz aus der reellen Analysis.

1. Teil. Man muss wissen, dass die JACOBI-Abbildung

$$J(f;a) : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

ein Isomorphismus, also bijektiv ist. Dies folgt aus 5.1:

$$J(f;a)z = f'(a)z, \quad f'(a) \neq 0.$$

2. Teil. Der reelle Satz für implizite Funktionen besagt weiterhin: Der Wertevorrat einer stetig partiell (und damit total) differenzierbaren Abbildung ist offen, wenn die JACOBI-Abbildung für alle $a \in D$ ein Isomorphismus ist. Wenn f überdies injektiv ist, so ist die Umkehrabbildung ebenfalls total ableitbar, und die JACOBI-Abbildung von f^{-1} in $f(a)$ ist gerade die zu $J(f;a)$ inverse Abbildung

$$J(f;a)^{-1} = J\big(f^{-1}; f(a)\big).$$

Beachtet man, dass die Umkehrabbildung von

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad z \longmapsto lz \quad (l \in \mathbb{C}^\bullet),$$

durch $z \mapsto l^{-1}z$ gegeben wird, so ist Satz 5.7 bewiesen. □

Anmerkung. Unbefriedigend ist, dass beim Beweis der Umkehrsatz der reellen Analysis voll verwendet werden musste. Dieser gehört zu den vergleichsweise „schweren Geschützen" der reellen Analysis. Ein einfacher funktionentheoretischer Beweis wäre daher erstrebenswert. Wir kommen auf einen solchen später zurück (vgl. auch III.7.6 und Übungsaufgabe 5 aus I.4).

Beispiel. Die Exponentialfunktion exp ist komplex differenzierbar, und ihre Ableitung ist überall von Null verschieden. Die Einschränkung von exp auf den Bereich

$$-\pi < \operatorname{Im} z \le \pi$$

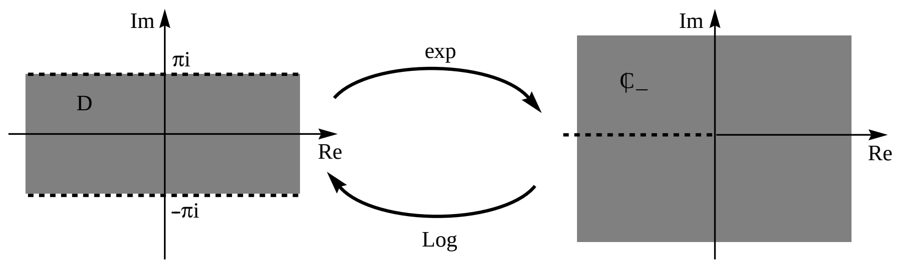
ist injektiv. Doch dieser Bereich ist nicht offen. Wir schränken daher exp auf den etwas kleineren aber offenen Bereich

$$D := \{\, z \in \mathbb{C}; \quad -\pi < \operatorname{Im} z < \pi \,\}$$

ein. Offenbar gilt

$$\exp(D) = \mathbb{C}_- := \mathbb{C} - \{\, x \in \mathbb{R};\ x \le 0 \,\}$$

(längs der negativen reellen Achse geschlitzte komplexe Ebene).



Aus dem Satz für implizite Funktionen folgt nun:

5.8 Satz. *Der Hauptzweig des Logarithmus ist in der längs der negativen reellen Achse geschlitzten Ebene $\mathbb{C}_-$ analytisch, und dort gilt*

$$\operatorname{Log}'(z) = \frac{1}{z}\,.$$

Wir haben bereits gezeigt, dass der Hauptzweig in den Punkten der negativen reellen Achse nicht einmal stetig ist. Genauer gilt:

5.9 Bemerkung. *Ist $a < 0$ eine negative reelle Zahl, so gilt*

$$\lim_{\substack{z \to a \\ \operatorname{Im} z > 0}} \operatorname{Log} z = \log|a| + \pi\mathrm{i} \qquad (= \operatorname{Log} a),$$

$$\lim_{\substack{z \to a \\ \operatorname{Im} z < 0}} \operatorname{Log} z = \log|a| - \pi\mathrm{i}.$$

Der Hauptzweig des Logarithmus macht also beim Überqueren der negativen reellen Achse einen „Sprung um $2\pi\mathrm{i}$“.

Im Zusammenhang mit den CAUCHY-RIEMANN'schen Differentialgleichungen drängt sich folgende Frage auf. Gegeben sei eine „genügend glatte“ — sagen wir zweimal stetig partiell ableitbare — Funktion

$$u : D \longrightarrow \mathbb{R}, \quad D \subset \mathbb{R}^2 \text{ offen.}$$

Kann man eine analytische Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ mit Realteil u finden?
Wenn es eine solche Funktion f gibt, so folgt aus den CAUCHY-RIEMANN'schen Differentialgleichungen

$$\partial_1^2 u = \partial_1(\partial_2 v); \;\; \partial_2^2 u = -\partial_2(\partial_1 v).$$

Da es auf die Reihenfolge der Ableitungen nach einem bekannten Satz von H. A. SCHWARZ nicht ankommt, erhalten wir die *Laplace'sche Differentialgleichung*

$$\Delta u := \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) u = 0.$$

Funktionen, die dieser Differentialgleichung genügen, nennt man *Potentialfunktionen* oder *harmonische Funktionen* und $\Delta = \partial_1^2 + \partial_2^2$ den *Laplace-Operator.*

5.10 Satz. *Sei*

$$f : D \longrightarrow \mathbb{C}, \quad D \subset \mathbb{C} \;\; \textit{offen,}$$

eine analytische Funktion, deren Real- und Imaginärteil mindestens zweimal stetig partiell ableitbar sind. Dann ist der Realteil (und analog der Imaginärteil) eine Potentialfunktion.

Wir werden später sehen (s. II.3.4), dass jede analytische Funktion sogar unendlich oft komplex ableitbar ist. Real- und Imaginärteil sind insbesondere unendlich oft stetig partiell ableitbar.

Beispiele für harmonische Funktionen erhält man also in den Real- und Imaginärteilen analytischer Funktionen:

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \quad x^3 - 3xy^2 &&= \mathrm{Re}(z^3), \\ v(x,y) &= \quad 3x^2y - y^3 &&= \mathrm{Im}(z^3), \\ u(x,y) &= \quad \cos x \cosh y &&= \mathrm{Re}(\cos z), \\ v(x,y) &= -\sin x \sinh y &&= \mathrm{Im}(\cos z). \end{aligned}$$

Ist wenigstens jede Potentialfunktion Realteil einer analytischen Funktion? Für gewisse Definitionsbereiche ist dies der Fall.

5.11 Satz. *Sei $D \subset \mathbb{C}$ ein offenes achsenparalleles Rechteck und $u : D \to \mathbb{R}$ eine Potentialfunktion. Dann existiert eine analytische Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ mit Realteil u.*

f ist bis auf eine rein imaginäre Konstante eindeutig bestimmt. Eine harmonische Funktion $v : D \to \mathbb{R}$ mit $f = u + \mathrm{i}v$ heißt eine zu u *konjugiert harmonische Funktion*. Sie ist bis auf eine additive reelle Konstante eindeutig bestimmt. (Der Satz gilt allgemeiner für „einfach zusammenhängende“ Gebiete $D \subset \mathbb{C}$, s. auch die Bemerkung am Ende von II.2, sowie Anhang C zu Kapitel IV.)

Beweis von 5.11. Sei

$$D = \,]a,b[\, \times \,]c,d[\quad \text{mit} \quad a < b \quad \text{und} \quad c < d.$$

Wir wählen zwei Stützstellen

$$x_0 \in \,]a,b[\quad \text{und} \quad y_0 \in \,]c,d[\,.$$

Aus der Gleichung $\partial_1 u = \partial_2 v$ folgt für jedes $x \in \,]a,b[$:

$$v(x,y) = \int_{y_0}^{y} \partial_1 u(x,t)\,dt + h(x).$$

Nach der LEIBNIZ'schen Regel ist das Integral als Funktion von x differenzierbar, und es gilt

$$\begin{aligned} \partial_1 v(x,y) &= \int_{y_0}^{y} \partial_1^2 u(x,t)\,dt + h'(x) = -\int_{y_0}^{y} \partial_2^2 u(x,t)\,dt + h'(x) \\ &= \partial_2 u(x,y_0) - \partial_2 u(x,y) + h'(x), \end{aligned}$$

also

$$h'(x) = -\partial_2 u(x, y_0).$$

Damit wird folgender Ansatz nahegelegt:

$$v(x,y) := \int_{y_0}^{y} \partial_1 u(x,t)\,dt - \int_{x_0}^{x} \partial_2 u(t, y_0)\,dt.$$

Man muss jetzt die CAUCHY-RIEMANN'schen Differentialgleichungen (mit Hilfe des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung und mit Hilfe der LEIBNIZ'schen Regel) verifizieren. (Die LEIBNIZ'sche Regel wird in II.3 formuliert und bewiesen.) Von Satz 5.11 wird im Folgenden kein Gebrauch mehr gemacht. □

Bemerkenswerterweise ist die Funktion

$$u(x,y) := \log\sqrt{x^2+y^2}$$

eine Potentialfunktion in ganz $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} = \mathbb{C}^\bullet$. Es gibt aber keine analytische Funktion $f : \mathbb{C}^\bullet \to \mathbb{C}$ mit

$$\operatorname{Re} f(z) = \log\sqrt{x^2+y^2} = \log|z|\,,$$

denn f müsste auf der (längs der negativen reellen Achse) geschlitzten Ebene mit $\operatorname{Log} z$ bis auf eine additive Konstante übereinstimmen. Damit kann f nicht stetig in den Punkten der negativen reellen Achse sein. Satz 5.11 ist also nicht für beliebige Gebiete $D \subset \mathbb{C}$ richtig. In der längs der negativen reellen Achse geschlitzten Ebene jedoch ist der Hauptzweig Log des Logarithmus eine analytische Funktion mit $\operatorname{Re}\operatorname{Log} = u$.

Anmerkung.

1) Die Konstruktion der zu u konjugiert harmonischen Funktion v beruhte auf einem Integrationsprozess. Auf einen solchen wird man auch durch folgende Überlegung geführt.

Ist u die gegebene harmonische Funktion in D und definiert man

$$g : D \longrightarrow \mathbb{C} \quad \text{durch} \quad g = \partial_1 u - \mathrm{i}\partial_2 u,$$

so ist g analytisch (man prüfe das mittels der CAUCHY-RIEMANN'schen Differentialgleichungen nach). Wenn D ein offenes Rechteck (allgemeiner ein sogenanntes Elementargebiet) ist, so gibt es eine analytische Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ mit $f' = g$, wie wir im nächsten Kapitel zeigen werden. Ist $f = U + \mathrm{i}V$, so ist also

$$f' = \partial_1 U + \mathrm{i}\partial_1 V = \partial_1 U - \mathrm{i}\partial_2 U = g = \partial_1 u - \mathrm{i}\partial_2 u$$

und daher $U = u + \text{const}$. Der Realteil U der analytischen Funktion f stimmt bis auf eine additive Konstante mit der gegebenen harmonischen Funktion u überein, und für v kann man V wählen. Die Frage, ob es zu einer gegebenen harmonischen Funktion $u : D \to \mathbb{R}$ eine analytische Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re} f = u$ gibt, läuft also im wesentlichen auf die *Bestimmung einer Stammfunktion* hinaus. Mit der Frage der Existenz von Stammfunktionen beschäftigen wir uns im nächsten Kapitel.

2) Im übrigen ist die LAPLACE'sche Differentialgleichung

$$\partial_1^2 u + \partial_2^2 u = 0$$

gerade die *„Exaktheitsbedingung"* für das System der partiellen Differentialgleichungen

$$\boxed{\partial_1 u = \partial_2 v,\ \partial_2 u = -\partial_1 v}$$

mit gegebener Funktion u und gesuchter Funktion v, bzw. die *„Integrabilitätsbedingung"* für das Vektorfeld

$$\begin{aligned} D &\longrightarrow \mathbb{R}^2, \\ (x,y) &\longmapsto \big(-\partial_2 u(x,y), \partial_1 u(x,y)\big). \end{aligned}$$

Beispiel. Wir bestimmen $a \in \mathbb{R}$ so, dass die durch

$$\begin{aligned} u_a : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}, \\ (x,y) &\longmapsto x^3 + axy^2, \end{aligned}$$

definierten Funktionen harmonisch sind, und bestimmen auch alle zu u_a konjugiert harmonischen Funktionen, d. h. alle analytischen Funktionen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re} f = u_a$. Aus

$$0 = \Delta u_a(x,y) = 6x + 2ax \text{ für alle } x, y \in \mathbb{R}^2$$

folgt notwendig $a = -3$, und $u := u_{-3}$ ist harmonisch. Wir bestimmen f bzw. v nach den beiden obigen und einer weiteren Methode.

1. Methode. Konstruktion mit der im (ersten) Beweis von Satz 5.11 verwendeten Methode. Wir wählen $(x_0, y_0) = (0,0)$ und erhalten

$$u(x,y) = x^3 - 3xy^2 \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \partial_1 u(x,y) = 3x^2 - 3y^2, \\ \partial_2 u(x,y) = -6xy. \end{cases}$$

Also gilt $\partial_2 u(x,0) = 0$ und damit

$$v(x,y) = \int_0^y (3x^2 - 3t^2)\, dt = 3x^2 y - y^3.$$

Also ist v eine konjugiert harmonische Funktion zu u und

$$f(z) = x^3 - 3xy^2 + \mathrm{i}(3x^2 y - y^3) = z^3$$

eine analytische Funktion mit $\operatorname{Re} f = u$. Alle weiteren analytischen Funktionen mit dieser Eigenschaft erhält man nach Satz 5.11 durch Addition rein imaginärer Konstanten zu f.

2. Methode. Man definiere g durch

$$g(z) = 3x^2 - 3y^2 + \mathrm{i}6xy = 3(x + \mathrm{i}y)^2 = 3z^2.$$

Offensichtlich ist g analytisch, und eine analytische Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $f' = g$ ist durch $f(z) = z^3$ gegeben:

$$\operatorname{Im}(z^3) = \operatorname{Im}\big((x + \mathrm{i}y)^3\big) = 3x^2 y - y^3 =: v(x,y).$$

3. Methode. Man bildet

$$f(z) := 2u\left(\frac{z}{2}, \frac{z}{2\mathrm{i}}\right) - u(0,0)$$

und findet $f(z) = z^3$ (vergleiche Übungsaufgabe 19 zu I.5).

Elementares über konforme Abbildungen

5.12 Definition. *Eine bijektive $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ heißt*

a) ***orientierungstreu,*** *wenn* $\det T > 0$ *ist,*
b) ***winkeltreu,*** *wenn für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt*

$$|Tx|\,|Ty|\,\langle x, y\rangle = |x|\,|y|\,\langle Tx, Ty\rangle.$$

Dabei ist $\langle , \rangle$ das Standardskalarprodukt.

Anmerkung. Im Falle $n = 2$ besagen die Bedingungen a) und b) gerade, dass der *orientierte Winkel* zwischen z und w erhalten bleibt (vergleiche Aufgabe 4 zu I.1).

Man beachte: Die $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \overline{z}$, ist zwar winkeltreu, aber nicht orientierungstreu!

5.13 Definition. *Eine total ableitbare Abbildung*

$$f : D \longrightarrow D', \quad D, D' \subset \mathbb{R}^n \quad \textit{offen},$$

heißt (im Kleinen) ***konform,*** *falls die Jacobi-Abbildung $J(f; a)$ in jedem Punkt $a \in D$ winkel- und orientierungstreu ist.*

Ist außerdem f bijektiv, so heißt f im Großen konform.

Im Falle $n = 2$ gilt (s. Aufgabe 18 zu I.5)

5.14 Bemerkung. *Eine bijektive $\mathbb{R}$-lineare Abbildung der komplexen Ebene in sich ist genau dann eine Drehstreckung, falls sie winkel- und orientierungstreu ist.*

Wir erhalten also

5.15 Satz. *Eine Abbildung*

$$f : D \longrightarrow D', \quad D, D' \subset \mathbb{C} \quad \textit{offen},$$

ist genau dann (im Kleinen) konform, falls sie analytisch ist und falls ihre Ableitung in keinem Punkt verschwindet.

Geometrisch bedeutet Konformität folgendes:

Der orientierte Winkel zwischen zwei regulären Kurven in D in einem Schnittpunkt $a \in D$ ist gleich dem orientierten Winkel der Bildkurven im Schnittpunkt $f(a)$.

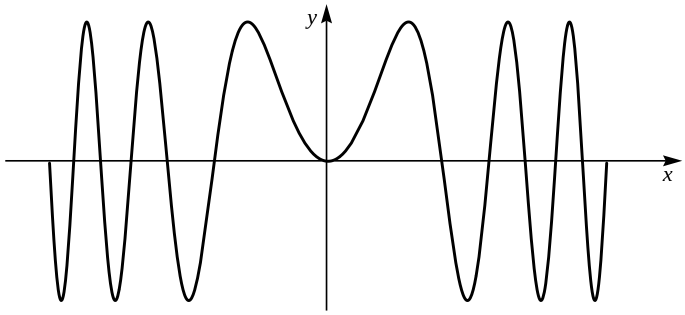
(Der Begriff „regulär“ wird in Aufgabe 11 aus II.1 präzisiert.)

Beispiel. Die Exponentialfunktion exp vermittelt eine (im Großen) konforme Abbildung des Streifens $-\pi < \operatorname{Im} z < \pi$ auf die geschlitzte Ebene $\mathbb{C}_-$.

In Punkten, in denen die Ableitung einer analytischen Funktion verschwindet, liegt keine Winkeltreue vor, wie man am Beispiel der Funktion $f(z) = z^n$, $n \geq 2$, sieht. Die Winkel im Nullpunkt werden offensichtlich ver-n-facht.

Geometrische Veranschaulichung komplexer Funktionen

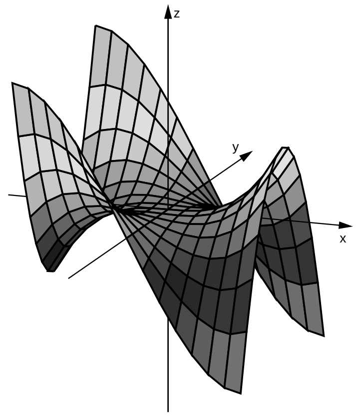
In der Infinitesimalrechnung macht man sich gerne ein Bild von Funktionen $f : D \to \mathbb{R}$ $(D \subset \mathbb{R})$ durch ihren Graphen: $G(f) := \{\, (x, y) \in D \times \mathbb{R}; \quad y = f(x) \,\}$.



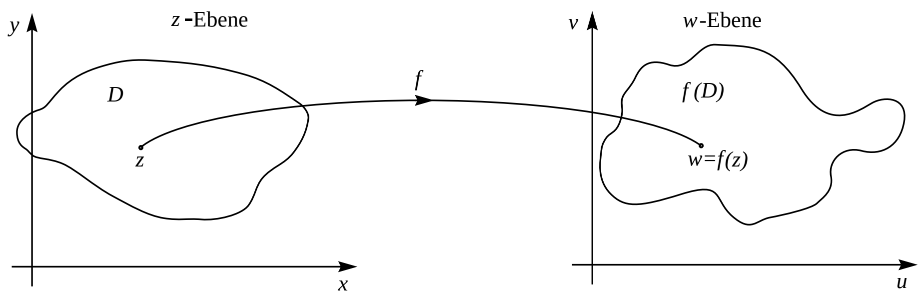
Ist $D \subset \mathbb{R}^2$ und $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion, so kann man sie sich ebenfalls durch ihren Graphen

$$G(f) = \{\, (x, y, z) \in D \times \mathbb{R}; \quad z = f(x, y) \,\} \subset \mathbb{R}^3$$

als „Fläche" im $\mathbb{R}^3$ veranschaulichen (hier $f(x, y) = x^3 - 3xy^2$):



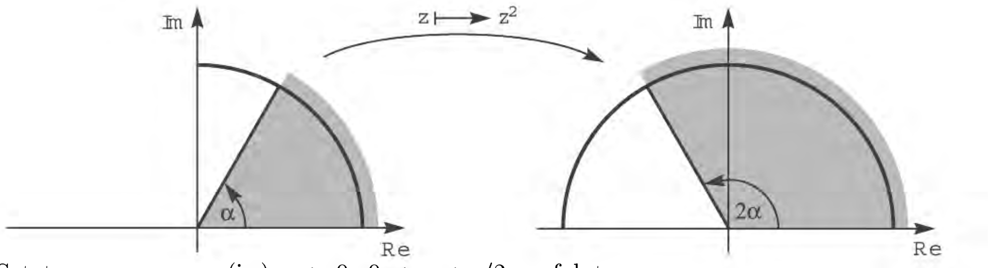
Bei einer Abbildung $f : D \to \mathbb{C}$ $(D \subset \mathbb{C})$ müsste man sich in den $\mathbb{R}^4$ begeben, um diese in ähnlicher Weise bildlich darzustellen. Es gibt aber auch hier adäquate Mittel, sich eine Vorstellung von derartigen Abbildungen zu machen. Dabei ist folgende Auffassung nützlich: Man stellt sich zwei Exemplare der komplexen Zahlenebene vor, eine z- oder x-y-Ebene und eine w- oder u-v-Ebene:



Um eine Abbildung $f : D \to \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re} f = u$ und $\operatorname{Im} f = v$ anschaulich darzustellen, kann man verschiedene Wege beschreiten.

1. Methode. Auf welche Punkte der w-Ebene werden die Punkte $z \in D$ von f abgebildet? Einen ersten Eindruck erhält man, wenn man mit D auch $f(D)$ explizit angeben kann.

Zum Beispiel sei $D := \{ z \in \mathbb{C}; \quad \operatorname{Re} z > 0 \text{ und } \operatorname{Im} z > 0 \}$ der sogenannte „1. Quadrant" und $f : D \to \mathbb{C}$ definiert durch $z \mapsto z^2$.



Setzt man $z := r \exp(\mathrm{i}\varphi)$, $r > 0$, $0 < \varphi < \pi/2$, so folgt

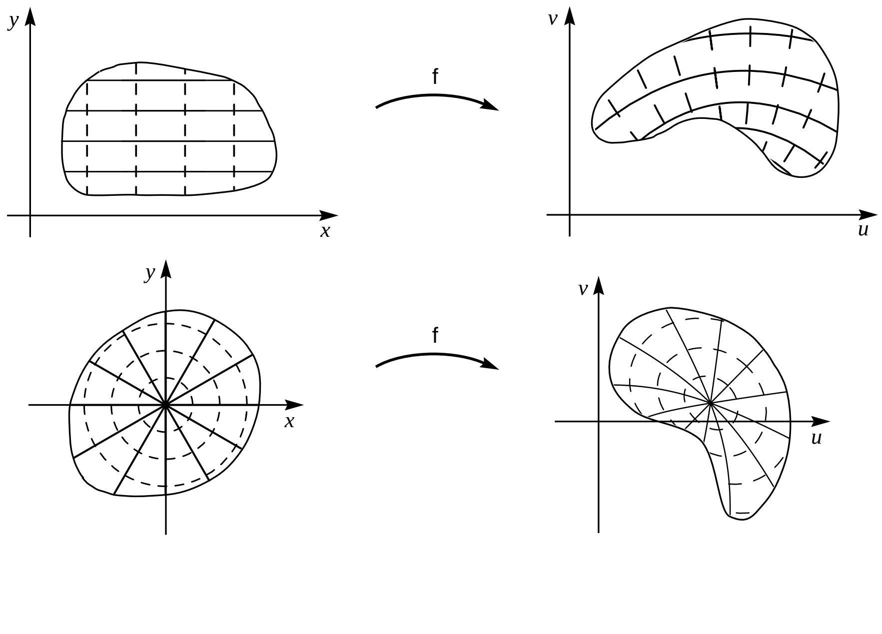
$$z^2 = R \exp(\mathrm{i}\psi) = r^2 \exp(\mathrm{i}2\varphi),$$

also

$$R = r^2 \quad \text{und} \quad \psi \equiv 2\varphi (\operatorname{mod} 2\pi).$$

Offensichtlich wird der 1. Quadrant „aufgebogen" und auf die sogenannte „obere Halbebene" $\mathbb{H} := \{ z \in \mathbb{C}; \quad \operatorname{Im} z > 0 \}$ abgebildet.

Einen genaueren Eindruck erhält man, wenn man D mit irgendeinem markierenden Netz überzieht, z. B. mit Parallelen zu den Achsen oder mit einem Polarkoordinatennetz (wie wir es eben getan haben) und dann das Bild des Netzes unter der Abbildung f in der w-Ebene betrachtet. Dabei ist der Eindruck der durch $f : D \to \mathbb{C}$ vermittelten Abbildung umso besser, je enger man die Maschen des Netzes zieht.



Wir bleiben bei dem Beispiel $f(z) = z^2$, nehmen aber als Definitionsbereich diesmal ganz $\mathbb{C}$. Aus $z = x + \mathrm{i}y$, $w = u + \mathrm{i}v$ und $z^2 = w$ folgt

$$u(x,y) = x^2 - y^2, \quad v(x,y) = 2xy.$$

Das Bild einer zur x-Achse parallelen Geraden $-\infty < x < \infty$, $y = y_0$, ist daher durch die Gleichungen

$$(*) \qquad \left.\begin{aligned} u(x,y) &= x^2 - y_0^2, \\ v(x,y) &= 2xy_0, \end{aligned}\right\} \quad -\infty < x < \infty,$$

gegeben. Für $y_0 = 0$ (x-Achse) gilt speziell

$$u(x,y) = x^2 \quad \text{und} \quad v(x,y) = 0,$$

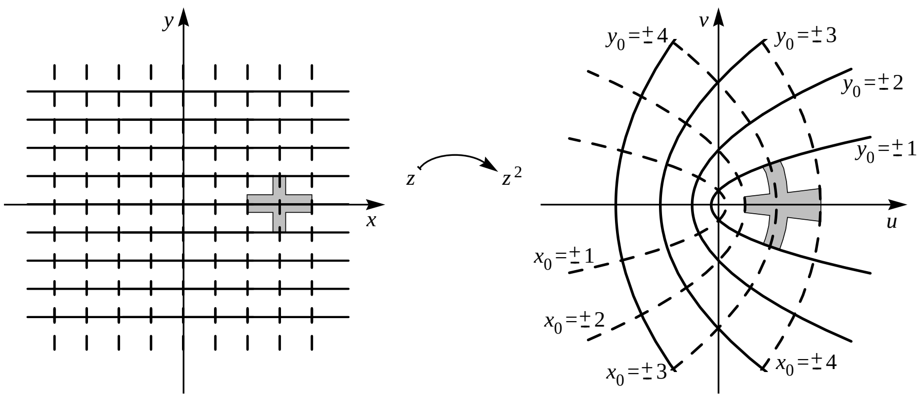
die x-Achse wird also auf die nicht-negative u-Achse abgebildet (,die zweimal durchlaufen wird, wenn x von $-\infty$ bis $+\infty$ variiert). Ist $y_0 \neq 0$, so können wir im Gleichungssystem $(*)$ x eliminieren: $x = v/2y_0$. Einsetzen in die erste Gleichung liefert

$$u = \frac{v^2}{4y_0^2} - y_0^2.$$

Das ist die Gleichung einer nach rechts geöffneten Parabel mit der u-Achse als Symmetrieachse und dem Nullpunkt als Brennpunkt. Die Achsenschnittpunkte sind

$$\begin{aligned} u &= -y_0^2 && \text{(Schnittpunkt mit der } u\text{-Achse) und} \\ v &= \pm 2y_0^2 && \text{(Schnittpunkte mit der } v\text{-Achse).} \end{aligned}$$

Zur x-Achse parallele Geraden werden also auf konfokale nach rechts geöffnete Parabeln abgebildet. Wegen $f(z) = f(-z)$ haben offensichtlich die beiden Geraden $-\infty < x < \infty$, $y = y_0$, und $-\infty < x < \infty$, $y = -y_0$, das gleiche Bild. Die Bilder der zur y-Achse parallelen Geraden $x = x_0$, $-\infty < y < \infty$, ermittelt man nach dem gleichen Verfahren und erhält hier eine Schar konfokaler nach links geöffneter Parabeln, falls $x_0 \neq 0$ ist. Im Falle $x_0 = 0$ (imaginäre Achse) erhält man als Bild die negative reelle Achse (zweimal durchlaufen).

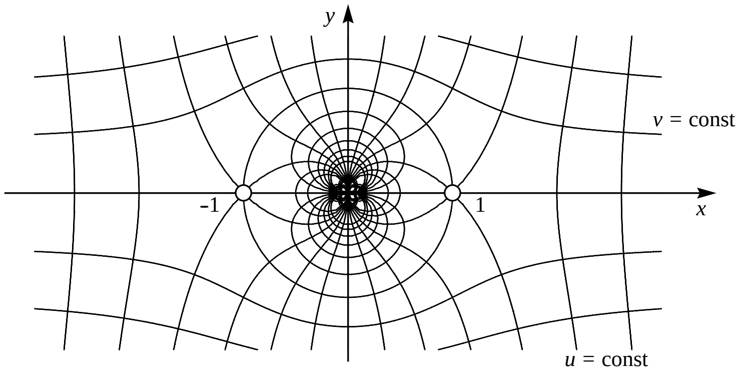


Man beachte, dass mit Ausnahme des Punktes $f(0) = 0$ im Bildnetz als Schnittwinkel nur rechte Winkel auftreten. Dies liegt daran, dass die Abbildung f au erhalb des Nullpunktes konform ist. Im Nullpunkt werden die Schnittwinkel verdoppelt.

Diese Methode ist eng verwandt mit der

2. Methode (sogenannte *„Höhenlinien-Methode“*).
Für feste $c \in \mathbb{R}$ betrachtet man die Niveaulinien

$$N_u^c = \{\, (x,y) \in D; \quad u(x,y) = c \,\} \text{ bzw. } N_v^c = \{\, (x,y) \in D; \quad v(x,y) = c \,\}$$



Beispiel: $u = \operatorname{Re} w$, $v = \operatorname{Im} w$ für $w = 1/2(z + 1/z)$

Man kann dabei die „Höhenkarten“ von u und v einzeln anlegen oder die beiden Kurvenscharen übereinander zeichnen. Man erhält damit ein Netz auf D, an dem man $f(z) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y)$ ablesen kann. Wenn f eine Umkehrabbildung g besitzt:

$$g : f(D) \longrightarrow D,$$

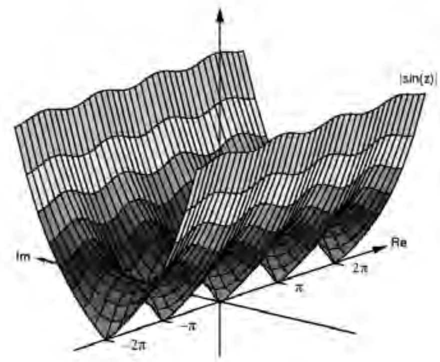
dann sind die Bildlinien des x-y-Netzes gerade die Höhenlinien von Real- und Imaginärteil der Umkehrabbildung g von f

$$g : f(D) \longrightarrow D, \quad (u,v) \longmapsto (x,y).$$

3. Methode: Die „analytische Landschaft“ (oder das *„analytische Gebirge“*)
Betrachtet man

$$\{\, (z,w) \in D \times \mathbb{R}; \quad w = |f(z)| \,\} \subset \mathbb{R}^3,$$

so kann man sich diese Teilmenge des $\mathbb{R}^3$ als „Funktions-Gebirge“ über D vorstellen. Zeichnet man noch weitere markierende Linien ein, z. B. Linien, auf denen der Realteil konstant ist, so erhält man ein sogenanntes „Relief“ der Funktion f.



Wir werden sehen (III.3.5), dass die Betragsfläche keine Maxima besitzt und Minima nur in den Nullstellen von f haben kann. In dieser „analytischen Landschaft" gibt es also keine Gipfel, und die Talkessel reichen, falls f Nullstellen hat, bis zur komplexen Ebene herunter (arme Bergsteiger!). Man stelle sich einmal vor, dass es in dieser analytischen Landschaft regnet; wo würde sich dann das Wasser sammeln?

Übungsaufgaben zu I.5

1. Man untersuche die Beispiele aus Aufgabe 2 von I.4 erneut auf komplexe Differenzierbarkeit, jetzt mit Hilfe der CAUCHY-RIEMANN'schen Differentialgleichungen.

2. $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ sei definiert durch $f(z) = x^3y^2 + \mathrm{i}x^2y^3$.
   Man zeige: f ist genau auf den Koordinatenachsen komplex differenzierbar, und es gibt keine offene Teilmenge $D \subset \mathbb{C}$, so dass $f|D$ analytisch ist.

3. Die folgenden Funktionen schreibe man in der Form $f = u + \mathrm{i}v$ und gebe explizite Formeln für u und v an.

a) $f(z) = \sin z$,	b) $f(z) = \cos z$,	
c) $f(z) = \sinh(z)$,	d) $f(z) = \cosh(z)$,	$(z \in \mathbb{C})$
e) $f(z) = \exp(z^2)$,	f) $f(z) = z^3 + z$.	

   Man zeige, dass in allen Fällen die CAUCHY-RIEMANN'schen Differentialgleichungen erfüllt sind (für alle $z \in \mathbb{C}$), und folgere, dass diese Funktionen in $\mathbb{C}$ analytisch sind.

4. Die Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$,
   $$f(z) = \begin{cases} \exp(-1/z^4) & \text{für } z \neq 0, \\ 0 & \text{für } z = 0, \end{cases}$$
   erfüllt für alle $z \in \mathbb{C}$ die CAUCHY-RIEMANN'schen Differentialgleichungen und ist für alle $z \in \mathbb{C}^\bullet$ komplex differenzierbar, im Nullpunkt jedoch nicht.

5. Man bestimme die größte offene Teilmenge $D \subset \mathbb{C}$, in der die Funktion $f(z) = \mathrm{Log}(z^5 + 1)$ analytisch ist und berechne f'.

6. Ist $f : D \to \mathbb{C}$ analytisch, $D \subset \mathbb{C}$ offen, und gilt eine der folgenden Bedingungen:
   a) $\mathrm{Re}\, f = \text{constant}$,
   b) $\mathrm{Im}\, f = \text{constant}$,
   c) $|f| = \text{constant}$,
   so folgt: f ist lokal konstant.

7. Zu den folgenden gegebenen harmonischen Funktionen konstruiere man jeweils eine analytische Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ mit dem gegebenen Realteil u:
   a) $D = \mathbb{C}$ und $u : D \to \mathbb{R}$ mit $u(x,y) = x^3 - 3xy^2 + 1$.
   b) $D = \mathbb{C}^\bullet$ und $u : D \to \mathbb{R}$ mit $u(x,y) = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$.

c) $D = \mathbb{C}$ und $u : D \to \mathbb{R}$ mit $u(x, y) = e^x(x \cos y - y \sin y)$.

d) $D = \mathbb{C}_-$ und $u : D \to \mathbb{R}$ mit $u(x, y) = \sqrt{\dfrac{x + \sqrt{x^2 + y^2}}{2}}$.

8. **Laplace-Operator in Polarkoordinaten**

Sei $\mathbb{R}_+^\bullet \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ die durch $(r, \varphi) \mapsto (x, y) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$ definierte Abbildung. Weiter sei $D \subset \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ eine offene Teilmenge und $u : D \to \mathbb{R}$ eine zweimal stetig partiell differenzierbare Funktion. Sei $\Omega := \{(r, \varphi);\ (x, y) \in D\}$ und

$$U : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}, \quad U(r, \varphi) = u(x, y).$$

Man zeige:

$$(\Delta u)(x, y) = \left(U_{rr} + \frac{1}{r} U_r + \frac{1}{r^2} U_{\varphi\varphi}\right)(r, \varphi).$$

9. Man bestimme alle harmonischen Funktionen

$$u : \mathbb{C}^\bullet = \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\} \longrightarrow \mathbb{R},$$

die nur von $r := \sqrt{x^2 + y^2}$ abhängen.

10. Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen, $D' \subset \mathbb{C}$ eine weitere offene Teilmenge. $\varphi : D \to D'$ sei analytisch und sogar zweimal stetig differenzierbar und $\eta : D' \to \mathbb{R}$ zweimal stetig partiell differenzierbar.

Man zeige:

$$\Delta(\eta \circ \varphi) = ((\Delta \eta) \circ \varphi) \left|\varphi'\right|^2.$$

Man folgere: Ist φ konform, dann ist η genau dann harmonisch, wenn $\eta \circ \varphi$ harmonisch ist.

11. **Charakterisierung der Exponentialfunktion durch eine Differentialgleichung**

Sei $D = \mathbb{R}$ oder $D = \mathbb{C}$. Sei $C \in \mathbb{C}$ eine Konstante und $f : D \to \mathbb{C}$ differenzierbar mit

$$f'(z) = C f(z) \ \text{ für alle } z \in D.$$

Ist $A = f(0)$, so gilt

$$f(z) = A \exp(Cz) \ \text{ für alle } z \in D.$$

12. Man bestimme alle stetigen Abbildungen

$$\chi : \mathbb{R} \longrightarrow S^1 = \{\, z \in \mathbb{C}; \quad |z| = 1 \,\}$$

mit

$$\chi(x + t) = \chi(x)\chi(t) \ \text{ für alle } x, t \in \mathbb{R}.$$

Tipp. Ein solches χ ist sogar differenzierbar. Man verwende dann Aufgabe 11.

Ergebnis. Jedes solche χ (d. h. jeder sogenannte *stetige Charakter* von $(\mathbb{R}, +)$) hat die Gestalt

$$\chi(x) = \chi_y(x) = e^{\mathrm{i}xy} \qquad (y \in \mathbb{R}).$$

13. Für die Abbildung $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto z^3$ skizziere man die Niveaulinien

$\{z \in \mathbb{C};\ \operatorname{Re} f(z) = c\}$ bzw. $\{z \in \mathbb{C};\ \operatorname{Im} f(z) = c\}$ bzw. $\{z \in \mathbb{C};\ |f(z)| = c\}$

für $c \in \mathbb{Z}$ mit $|c| \leq 5$.

Ferner bestimme man die Bilder dieser Niveaulinien und die Bilder der zur reellen Achse bzw. imaginären Achse parallelen Geraden unter f.

14. Sei $D = \{ z \in \mathbb{C}; \quad -\pi < \operatorname{Im} z < \pi,\ 0 < \operatorname{Re} z < b \}$ und $f = \exp |D$.

    Man zeige: f bildet D konform auf eine Menge D' ab, $D' = f(D)$ ist zu bestimmen.

15. Die *Joukowski-Funktion* — nach dem russischen Aerodynamiker N. J. JOUKOWSKI (1847-1921) benannt —

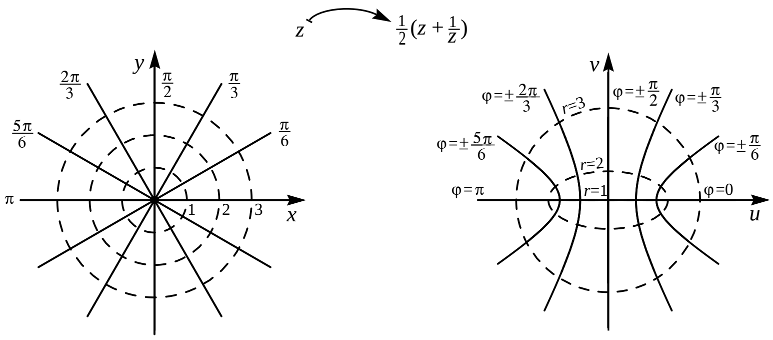
$$f : \mathbb{C}^\bullet \longrightarrow \mathbb{C}, \quad z \longmapsto \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right),$$

ist analytisch, wegen $f(z) = f(1/z)$ nicht injektiv, aber wegen $f'(z) = \frac{1}{2}(1 - 1/z^2)$ in $\mathbb{C}^\bullet - \{1, -1\}$ (im Kleinen) konform.

Man zeige (durch Einführung von Polarkoordinaten):

a) Das Bild einer Kreislinie $C_r := \{ z \in \mathbb{C}; \quad |z| = r \}$, $r > 0$, unter f ist
   i) im Falle $r \neq 1$ eine Ellipse mit den Brennpunkten ± 1 und Halbachsen $\frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)$ bzw. $\frac{1}{2}\left|r - \frac{1}{r}\right|$,
   ii) $f(C_1) = [-1, 1]$.

b) Das Bild einer Halbgeraden $r \mapsto re^{\mathrm{i}\varphi}$, $r > 0$ $\quad (\varphi \notin \{0, \pm\pi/2, \pi\}$, φ fest) ist ein Ast einer Hyperbel mit den Brennpunkten ± 1.



Man zeige ferner: Ist

$$D_1 := \{ z \in \mathbb{C}; \quad |z| > 1 \}$$

und

$$D_2 := \{ z \in \mathbb{C}; \quad 0 < |z| < 1 \},$$

dann bildet die Einschränkung von f auf D_1 bzw. D_2 diese offenen Mengen jeweils konform auf die längs der reellen Achse von -1 bis 1 geschlitzte Ebene ab: $\mathbb{C} - \{ t \in \mathbb{R}; \quad -1 \leq t \leq 1 \}$.

Man beachte dabei: Für $z = x + \mathrm{i}y \in D_1$ gilt $|z|^2 = x^2 + y^2 > 1$.

Die JOUKOWSKI-Funktion spielt in der Aerodynamik (etwa bei der Umströmung von Tragflächen — JOUKOWSKI-KUTTA-Profile) eine wichtige Rolle.

16. Sei
$$D = \left\{ z \in \mathbb{C}; \quad -\frac{\pi}{2} < \operatorname{Re} z < \frac{\pi}{2} \right\}.$$
Man zeige:
a) Für $f(z) = \sin z$ ist $f(D) = \mathbb{C} - \{t \in \mathbb{R}; \quad |t| \geq 1\}$.
b) Für $f(z) = \tan z$ ist $f(D) = \mathbb{C} - \{t\,\mathrm{i}; \quad t \in \mathbb{R},\ t \geq 1 \text{ oder } t \leq -1\}$. Die Abbildung $\tan : D \to f(D)$ ist konform, und die Umkehrabbildung ist
$$g(z) = \frac{1}{2\mathrm{i}} \operatorname{Log} \frac{1 + \mathrm{i}z}{1 - \mathrm{i}z}.$$

17. Sei $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C}; \quad \operatorname{Im} z > 0\}$ die obere Halbebene und $\mathbb{E} = \{q \in \mathbb{C}; \quad |q| < 1\}$ der Einheitskreis.

Man zeige: Durch
$$f(z) := \frac{z - \mathrm{i}}{z + \mathrm{i}}$$
wird eine (im Großen) konforme Abbildung von $\mathbb{H}$ auf $\mathbb{E}$ vermittelt. Wie lautet die Umkehrabbildung?

Man nennt f auch *Cayleyabbildung* (A. CAYLEY, 1846).

18. Für eine bijektive $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ sind folgende Eigenschaften äquivalent:
a) T ist eine Drehstreckung,
b) T ist orientierungs- und winkeltreu.

19. Ist $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ein harmonisches Polynom (zweier reeller Veränderlicher), so ist
$$f(z) = 2u\left(\frac{z}{2}, \frac{z}{2\mathrm{i}}\right) - u(0,0)$$
eine analytische Funktion mit Realteil u.

20. Sei $f = u + \mathrm{i}v$ eine (im Sinne der reellen Analysis) total differenzierbare Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ auf einem offenen Teil $D \subset \mathbb{C}$. Man definiert die Operatoren
$$\frac{\partial f}{\partial z} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - \mathrm{i}\frac{\partial f}{\partial y}\right),$$
$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$
Man zeige: f ist genau dann analytisch, wenn $\dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ ist, und in diesem Falle gilt $f' = \dfrac{\partial f}{\partial z}$.

Bemerkung. Für die ursprünglich von H. POINCARÉ (1899) eingeführten Differentialoperatoren $\partial := \dfrac{\partial}{\partial z}$ und $\bar{\partial} := \dfrac{\partial}{\partial \bar{z}}$ wurde von W. WIRTINGER (1927) ein systematischer Kalkül — der sogenannte *Wirtingerkalkül* — entwickelt. Er spielt jedoch in der klassischen Funktionentheorie einer Veränderlichen eine untergeordnete Rolle; seine volle Tragweite entfaltet er erst in der Funktionentheorie mehrerer Veränderlicher, für die er von WIRTINGER ursprünglich entwickelt wurde.

21. In welchen Punkten $z \in \mathbb{C}^\bullet$ erfüllt die Funktion $f(z) = z\bar{z} + z/\bar{z}$ die CAUCHY-RIEMANN'schen Differentialgleichungen?