

# Theoretische Grundlagen der Laserdiagnostik

## 1.1 Strahlungseigenschaften, Definitionen

Die schnell wachsende Zahl von Anwendungen der Laser, auch in der Messtechnik, ist auf die besonderen Strahlungseigenschaften zurückzuführen. Dazu gehören die Quasimonochromasie sowie der hohe Grad an räumlicher und zeitlicher Kohärenz, d. h. auf die im Folgenden näher zu definierende Fähigkeit einer Strahlungsquelle, Interferenzerscheinungen hervorzurufen, was definierte räumliche und zeitliche Phasenzuordnungen der wechselwirkenden Wellenfelder voraussetzt [1, 2, 3]. In einfachen Fällen lassen sich mathematisch diese Zusammenhänge durch Korrelationsfunktionen beschreiben. Unter anderem resultieren daraus die um Größenordnungen höheren spektralen Strahldichten der Laser gegenüber den mit thermischen Strahlungsquellen erreichbaren Werten, was ein entscheidender Grund für die Überlegenheit der Laser auch für eine Vielzahl wissenschaftlicher oder technischer Aufgabenstellungen der Lasermesstechnik ist.

### 1.1.1 Vergleichende Bewertung von Lasern und thermischen Strahlungsquellen

Im Hinblick auf eine vergleichende Bewertung dieser beiden Gruppen von Strahlungsquellen ist eine übersichtliche tabellarische Darstellung mit einer Beschränkung auf nur wenige, jedoch charakteristische und repräsentative Beispiele zweckmäßig. Die Tabelle 1 zeigt daher unter diesem Gesichtspunkt eine Gegenüberstellung einiger ausgewählter kohärenter und inkohärenter Strahlungsquellen.

Wichtige Bewertungsgrößen sind neben den bei vorgegebenen Wellenlängen erreichbaren absoluten Energien oder Leistungen die Strahldivergenzwinkel, die spektralen Bandbreiten und somit die erreichbaren Strahldichten bzw. die spektralen Strahldichten, die in dieser tabellarischen Zusammenstellung unter anderem angegeben sind. Wie Tabelle 1 zeigt, ergeben sich bei diesen beiden Gruppen von Strahlungsquellen signifikante

**Tabelle 1.1.** Typische Daten verschiedener Strahlungsquellen

Strahl- quelle	Leistung, Energie P / E [W] / [Ws]	typische Divergenz $\alpha$ [rad]	Wellen- länge $\lambda$ [ $\mu\text{m}$ ]	Band- breite $\delta\lambda$ [ $\text{\AA}$ ]	Strahl- dichte L [ $\frac{\text{W}}{\text{cm}^2\text{sr}}$ ]	spektrale Strahl- dichte $L_\lambda$ [ $\frac{\text{W}}{\text{cm}^2\text{sr}\text{\AA}}$ ]
<b>Ausgewählte Laserlichtquellen</b>						
kontinuierliche emittierende Laser						
HeNe-	$> 10^{-2}$ W	$< 2 * 10^{-3}$	0,6328	$< 0,01$	$> 10^5$	$> 10^7$
Ar <sup>+</sup> -	$> 15$ W	$< 2 * 10^{-3}$	0,488	$< 0,1$	$> 10^7$	$> 10^9$
			0,515			
Nd-YAG-	$> 10^3$ W	$< 5 * 10^{-3}$	1,06	$< 10$	$> 10^7$	$> 10^6$
Ti-Saphir-	$> 1$ W	$< 2 * 10^{-3}$	0,6	$< 0,1$	$> 10^5$	$> 10^6$
			bis 1,1			
CO <sub>2</sub> -	$> 10^4$ W	$< 5 * 10^{-3}$	10,6	$< 0,3$	$> 10^5$	$> 3 * 10^5$
gepulste Laser						
Rb- <i>multimode</i>	$> 10$ J	$< 5 * 10^{-3}$	0,6943	$< 1$	$> 10^{13}$	$> 10^{13}$
Rb- <i>monomode</i>	$> 1$ J	$< 1 * 10^{-3}$	0,6943	$< 0,01$	$> 10^{14}$	$> 10^{16}$
Nd-YAG-	$> 100$ J	$< 10 * 10^{-3}$	1,06	$< 10$		
Nd-Glas-	$> 10$ kJ	$< 5 * 10^{-3}$	1,06	$< 100$	$> 10^{16}$	$> 10^{14}$
Ti-Saphir-	$> 0,5$ J	$< 2 * 10^{-3}$	0,6 bis 1,1	$< 1$	$> 10^{14}$	$> 10^{14}$
CO <sub>2</sub> -	$> 100$ kJ	$< 5 * 10^{-3}$	10,6	$< 20$	$> 10^{14}$	$> 10^{13}$
<b>Ausgewählte thermische Strahlungsquellen</b>						
kontinuierliche bzw. quasikontinuierliche Strahler						
z. B. Xenon- Bogenlampe	$> \text{kW}$	$2\pi$	UV bis IR	$> 10000$	$> 10^2$	$> 10^{-2}$
kurzzeitig gepulste Quellen						
z. B. elektr. Funken	$> 10$ J	$2\pi$	VUV bis IR	$> 10000$	$> 10^6$	$> 10^3$

Unterschiede sowohl bezüglich der erreichbaren Leistungen als auch bezüglich der Divergenzwinkel und der Bandbreiten, siehe auch [4], worauf im Folgenden zumindest kurz eingegangen werden soll.

**Laser:** Als ausgewählte Beispiele wurden einige Laser mit Emission im Sichtbaren sowie im IR, die unter anderem besonders auch für messtechnische Aufgaben eine Bedeutung erlangt haben, aufgeführt. Dazu gehören sowohl kontinuierlich emittierende als auch gepulste Gaslaser und Festkörperlaser.

Am Beispiel des Rubinlasers wird in der Tabelle 1 gezeigt, dass gegenüber dem normalen Multimoden-Betrieb durch frequenzselektive Maßnahmen einmodige Emission erzielt werden kann. Dies hat eine deutliche Verringerung der Bandbreite der Emission zur Folge und führt zu einer Verbesserung der Kohärenzeigenschaften, somit auch zu einer weiteren Erhöhung der spektralen Strahldichte. Durch entsprechende Maßnahmen lassen sich diese Größen natürlich auch bei den anderen Lasern verbessern.

Die bisher wichtige Gruppe der Farbstofflaser mit ihren breiten Abstimmereichen der Wellenlänge werden in Zukunft wohl hauptsächlich durch die neueren Entwicklungen von Festkörperlasern verdrängt werden, sie wurden daher nicht speziell aufgeführt. Das inzwischen bekannteste Beispiel neben dem Alexandritlaser für einen in einem breiten Band abstimmbaren Festkörperlaser ist der Ti-Saphir Laser.

**Thermische Strahlungsquellen:** Als Beispiele hierfür wurden nur zwei typische Strahlungsquellen aufgelistet. Die mit Xe-Hochdruckbogenlampen (ohne direkten Bezug auf einen speziellen Lampentyp) im kontinuierlichen Betrieb angegebenen Daten (z. B. der Leistungen), die sich je nach Baugröße von kleinen Werten im W-Bereich bis in den multi-kW-Bereich erstrecken können, geben somit nur einen oberen Größenordnungsbereich an.

Ähnliche Einschränkungen gelten auch für die als Vertreter der Kurzzeitlichtquellen erwähnten niederinduktiven elektrischen Funken, und zwar sowohl bezüglich der erreichbaren Impulsenergien als auch der Spitzenleistungen. Diese hängen stark von der Auslegung der elektrischen Schaltkreise ab, die somit auch die jeweiligen Impulshalbwertsbreiten wesentlich bestimmen. Vor der Entwicklung der Laser waren diese Funkenlichtquellen übrigens die am häufigsten eingesetzten Lichtquellen für zeitlich hochauflösende optische Messverfahren der Kurzzeitphysik.

Charakteristisch für sämtliche thermische Strahler sind ihre großen Bandbreiten, vom UV über den gesamten sichtbaren Bereich bis weit ins IR sowie der Gesamtstrahlungswinkel von  $4\pi$ , über den die Abstrahlung erfolgt. Ihre Spektren sind je nach verwendeter Quelle üblicherweise durch ausgeprägte Kontinua mit entsprechend überlagerten Linien charakterisiert.

Als gravierendsten Unterschied der Laser gegenüber den thermischen Strahlern erkennt man nach dieser Gegenüberstellung die erreichbaren spektralen Strahldichten. Mit Lasern lassen sich danach um 14 bis 16 Zehnerpotenzen höhere Werte der spektralen Leistungsdichten erzielen. Dies ist eine einzigartige Steigerungsrate, die die Überlegenheit von Laserquellen eindeutig dokumentiert.

### 1.1.2 Strahldichte bzw. spektrale Strahldichte

Aufgrund der stimulierten Emission kann bei Lasern die Leistung bzw. Energie bei entsprechender Auslegung der Resonatoren nahezu beugungsbegrenzt emittiert werden. Geht man vereinfachend von einer Fläche mit dem Durchmesser  $D$  aus, einem Raumwinkel  $\Omega$ , der mit dem Divergenzwinkel  $\alpha$  durch

die Beziehung  $\Omega = \pi\alpha^2$  verknüpft ist, so erhält man bei einer angenommenen gleichförmigen räumlichen Intensitätsverteilung oder Leistung  $P$  (dies stellt gegenüber einer realen experimentellen Situation zwar eine Vereinfachung dar), die Strahldichte  $L$  sowie die auf die Wellenlängen- oder Frequenzintervalle bezogenen spektralen Strahldichten  $L_\lambda$  bzw.  $L_\nu$  aus

$$L = \frac{P}{\pi\alpha^2 D^2 \pi/4} \quad \text{sowie} \\ L_\lambda = \frac{P}{\pi\alpha^2 \Delta\lambda D^2 \pi/4} \quad \text{bzw.} \quad L_\nu = \frac{P}{\pi\alpha^2 \Delta\nu D^2 \pi/4}. \quad (1.1)$$

Die entsprechenden Werte sind für die ausgewählten Beispiele in Tabelle 1 enthalten. Aus dieser Überlegenheit der Laser resultieren die vielseitigen Einsatzmöglichkeiten sowohl in der Messtechnik als auch bei den Hochleistungsanwendungen, z. B. bei der Lasermaterialbearbeitung im technisch industriellen Bereich oder bei den „Fusions-orientierten“ Anwendungen in der wissenschaftlichen Grundlagenforschung der Plasmaphysik.

Für die Messtechnik entscheidend sind vielfach weniger die hohen Absolutwerte der Leistungen selbst als die erzielbaren schmalen Bandbreiten und die sich daraus ergebenden, interessierenden spektralen Strahldichten  $L_\nu$ . Dazu kommt die Vielseitigkeit der verfügbaren Wellenlängen der einzelnen Laser sowie die Möglichkeit zur Erzeugung kurzer bzw. ultrakurzer Impulse, was den Einsatz von Diagnostikverfahren mit extrem hohen zeitlichen Auflösungen gestattet. Durch den hohen Kohärenzgrad ermöglichen Laser somit eine beträchtliche Erweiterung des bisher nach oben begrenzten Bereiches (GHz bis multi-GHz) der elektromagnetischen Wellen der Hoch- bzw. Höchstfrequenztechnik, weit über das Infrarot und das Sichtbare hinaus, bis in das Vakuum-UV bzw. (angestrebt) bis in das Röntgengebiet. Nach dem neuesten Entwicklungsstand konnte Verstärkung durch stimulierte Emission, wenn auch nur mit extrem großem Aufwand, bereits bis in den Bereich der weichen Röntgenstrahlung von einigen 10 nm nachgewiesen werden. Damit stehen zwar noch keine operationellen Röntgenlaser zur Verfügung, diese Ergebnisse können jedoch durchaus als erste richtungsweisende Schritte gewertet werden.

### 1.1.3 Strahlungsgesetze

Es ist übrigens interessant, dass in Analogie zu den Gesetzmäßigkeiten bei thermischen Strahlungsquellen wichtige Eigenschaften der Laserstrahlung, selbst unter Einbeziehung der stimulierten Emission, durch die klassischen Strahlungsgesetze beschrieben werden können [5, 6]. Im Hinblick auf die spätere Diskussion experimenteller Messverfahren soll daher bei den folgenden Ausführungen der klassischen Betrachtungsweise gegenüber einer streng quantenmechanischen Formulierung [7, 8] der Vorrang gegeben werden.

Geht man vereinfachend von einem Medium aus, das durch ein Zwei-Niveau-Modell mit den beiden Energietermen  $E_1$  und  $E_2$  sowie den Beset-

zungszahlen  $N_1$  und  $N_2$  beschrieben werden kann (deren statistische Gewichte sollen vereinfachend zu je 1 angenommen werden), so errechnet sich die Strahldichte unter Berücksichtigung der spontanen Emission, der Absorption sowie der stimulierten Emission aus einer einfachen Bilanzgleichung [9]. Bezeichnet  $A_{21}$  den Einstein-Koeffizienten für die spontane Emission,  $B_{21}$  und  $B_{12}$  die Einstein-Koeffizienten für die stimulierte Emission von den Niveaus 2 nach 1 bzw. für die Absorption von 1 nach 2, so ergibt sich, da beide Koeffizienten  $B_{21}$  und  $B_{12}$  proportional zur bereits vorhandenen Energiedichte  $\rho_\nu$  sind, eine einfache, aus drei Termen bestehende Differentialgleichung. Für die infinitesimale Änderung der Strahldichte  $L_{21}$  längs der Ausbreitungsrichtung  $z$  um  $dz$  gilt somit

$$\frac{dL_{21}}{dz} = \underbrace{A_{21}N_2h\nu\frac{1}{4\pi}}_{\text{spontane Emission}} + \underbrace{B_{21}N_2h\nu\frac{\rho_\nu}{4\pi}}_{\text{stimulierte Emission}} - \underbrace{B_{12}N_1h\nu\frac{\rho_\nu}{4\pi}}_{\text{Absorption}}. \quad (1.2)$$

Dabei ist  $h\nu=E_2-E_1$ . Die spektrale Energiedichte  $\rho_\nu$  wird in den gesamten Raumwinkel  $4\pi$  abgestrahlt, sie ist daher mit der spektralen Strahldichte über die Beziehung

$$\frac{L_\nu}{c} = \frac{\rho_\nu}{4\pi} \quad (1.3)$$

verknüpft. Durch den Index  $\nu$  wird angedeutet, dass eine Frequenzabhängigkeit des Überganges 2 nach 1 existiert. Diese kann formell durch eine Funktion  $g(\nu)$  berücksichtigt werden. Die Energieterme weisen je nach Lasertyp und Verbreiterungsmechanismus eine endliche Frequenzbandbreite auf, so dass

$$L_\nu = L_{21}g(\nu) \quad (1.4)$$

gilt, wobei  $g(\nu)$  im allgemeinen so normiert wird, dass das Integral  $\int_{-\infty}^{+\infty} g(\nu)d\nu$  den Wert 1 ergibt. Berücksichtigt man weiter, dass  $B_{12}=B_{21}$ , so erhält man die differentielle Änderung der spektralen Strahldichte:

$$\frac{dL_\nu}{dz} = \underbrace{A_{21}\frac{h\nu}{4\pi}g(\nu)N_2}_{\epsilon_\nu} + B_{21}N_2\frac{h\nu}{c}g(\nu)L_\nu - \underbrace{B_{21}N_1\frac{h\nu}{c}g(\nu)}_{\kappa_\nu}L_\nu. \quad (1.5)$$

Der erste Term stellt die spontane Emission, der letzte Term die Absorption (Brutto-Absorption) dar. Es erweist sich als sinnvoll, die beiden letzten Terme der erzwungenen Übergänge als „Netto“-Absorption zusammenzufassen:

$$\kappa'_\nu = B_{21}\frac{h\nu}{c}g(\nu)(N_1 - N_2) = B_{21}\frac{h\nu}{c}g(\nu)N_1 \left(1 - \frac{N_2}{N_1}\right). \quad (1.6)$$

Mit dem Bruttoabsorptionskoeffizient  $\kappa_\nu$  erhält man den Nettoabsorptionskoeffizient über den einfachen Zusammenhang:

$$\kappa'_\nu = \kappa_\nu \left(1 - \frac{N_2}{N_1}\right). \quad (1.7)$$

Der spontane Emissionsterm ergibt den bekannten klassischen spektralen Emissionskoeffizienten  $\epsilon_\nu$ . Im Strahlungsgleichgewicht wird  $(dL_\nu/dz) = 0$ . Dies entspricht dann der Strahlung des schwarzen Körpers (Zusatzindex SK), die durch das folgende Gesetz beschrieben wird:

$$L_{\nu,SK} = \frac{\epsilon_\nu}{\kappa'_\nu}. \quad (1.8)$$

Dies ist das Plancksche Strahlungsgesetz.

Gegenüber der bekannten Form tritt an die Stelle des Absorptionskoeffizienten  $\kappa_\nu$  der Nettoabsorptionskoeffizient  $\kappa'_\nu$ . Damit kann die obige Bilanzgleichung wie folgt vereinfacht werden:

$$\frac{dL_\nu}{dz} = \epsilon_\nu - \kappa'_\nu L_\nu = \kappa'_\nu (L_{\nu,SK} - L_\nu). \quad (1.9)$$

Betrachtet man ein derartiges vereinfachtes „Zwei-Niveau-Modell“-Medium in einem Verstärker der Gesamtlänge  $d$  (von  $z=0$  bis  $z=d$ ) in Ausbreitungsrichtung, und zwar ausgehend von einer Anfangsstrahllichte  $L_\nu(0)$ , so erhält man:

$$L_\nu(d) = L_{\nu,SK} + (L_\nu(0) - L_{\nu,SK})e^{-\kappa'_\nu d}. \quad (1.10)$$

Berücksichtigt man das Besetzungsverhältnis  $(N_2/N_1)$  entsprechend einer Boltzmann-Verteilung,

$$\frac{N_2}{N_1} = e^{-\frac{h\nu}{k_B T}} \quad (1.11)$$

mit der Boltzmann-Konstanten  $k_B$  und der Temperatur  $T$ , so erhält man die bekannte spektrale Strahllichte eines schwarzen Körpers:

$$L_{\nu,SK} = \frac{A_{21}}{B_{21}} \frac{c}{4\pi} \frac{1}{\left(\frac{N_1}{N_2} - 1\right)} = \frac{A_{21}}{B_{21}} \frac{c}{4\pi} \frac{1}{\left(e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1\right)}. \quad (1.12)$$

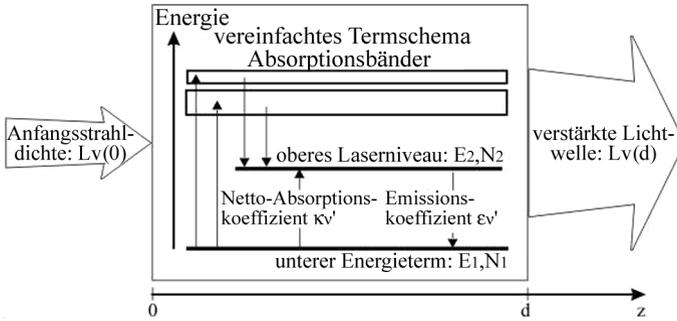
Die in dieser Form durchgeführten Ableitungen zeigen, dass ein eindeutiger Zusammenhang besteht zwischen den bekannten klassischen Strahlungsgesetzen einerseits, bei denen Temperaturgleichgewicht vorausgesetzt wird und bei denen die stimulierte Emission weitgehend vernachlässigt wird, und den Beziehungen andererseits, die die dem Laserprinzip zugrunde liegenden physikalischen Prozesse beschreiben.

Eine Verstärkung in einem solchen Medium erhält man, wenn der Nettoabsorptionskoeffizient negativ wird, d. h. wenn  $(N_2/N_1) > 1$  wird. Damit gilt

$$\alpha_\nu = -\kappa'_\nu = B_{21} \frac{h\nu}{c} g(\nu)(N_2 - N_1). \quad (1.13)$$

Im Fall vernachlässigbarer Eigenemission ( $L_{\nu,SK} = 0$ ) ergibt sich für die Verstärkung nach Durchlaufen der Strecke  $d$  die dem Lambert-Beerschen Gesetz entsprechende Lösung der Differentialgleichung

$$L_\nu(d) = L_\nu(0)e^{-\kappa'_\nu d} = L_\nu(0)e^{+\alpha_\nu d}, \quad (1.14)$$



**Abb. 1.1.** Verstärkung, vereinfachte Zwei-Niveau-Darstellung

siehe Abb. 1.1. Diese Beziehung beschreibt das exponentielle Anwachsen der spektralen Strahldichte in einem verstärkenden Lasermedium, dessen Gesamtverstärkung sich danach aus

$$G = L_\nu(d)/L_\nu(0)$$

berechnen lässt. Es ist allerdings zu beachten, dass bei dieser vereinfachten Betrachtungsweise zunächst keine Sättigungseffekte berücksichtigt wurden, wie sie in der Realität als Begrenzungsmechanismen tatsächlich auftreten.

## 1.2 Kohärenzeigenschaften von Laserlichtquellen

Ähnlich wie im Fall der stimulierten Emission, deren Prinzip wie im vorigen Abschnitt gezeigt durch den klassischen Formalismus der Strahlungsgesetze beschrieben werden kann, ist es auch möglich, die Kohärenzeigenschaften des Laserlichtes durch klassische Korrelationseffekte zu beschreiben und durch entsprechende Experimente messtechnisch zu erfassen und zu interpretieren [10, 11]. Bezüglich einer strengeren quantenmechanischen Formulierung sei beispielsweise auf die Arbeiten [12, 13] verwiesen. Zur Beschreibung geht man vielfach statt von den Intensitäten von den Feldgrößen aus, z. B. von den elektrischen Feldstärken, die sich durch reelle Skalarfunktionen beschreiben lassen. In Anlehnung an die in der Literatur verwendete Nomenklatur ist dies der Realteil des komplexen analytischen Signals  $V(\vec{r}, t)$ . Diese Funktion  $V^{RT}(\vec{r}, t)$  wäre, im rein monochromatischen Fall an einem beliebigen durch den Vektor  $\vec{r}$  gekennzeichneten Raumpunkt, eine streng periodische Funktion der Zeit. Dieser Idealfall tritt im allgemeinen auch beim Laser nicht auf.  $V^{RT}(\vec{r}, t)$  wird bestimmten systembedingten Schwankungen unterworfen sein, die je nach Lichtquelle verschieden sind. Bei den thermischen Strahlern entstehen Schwankungen durch die Überlagerung von vielen Elementarfeldern, die von spontanen Übergängen herrühren. Beim Laser ist ein spontaner Anteil ebenfalls enthalten, er existiert jedoch nur als schwacher Untergrund, als Rauschen. Weitere Schwankungen bei Lasern entstehen infolge zusätzlicher

thermischer oder mechanischer Effekte, was ebenfalls zu einer zeitlich oder räumlich statistisch variierenden Laseremission beitragen kann.

In vielen Fällen ist es möglich und sinnvoll, den zeitlichen Emissionsverlauf an einem vorgegebenen Ort  $\vec{r}$  durch sein zugehöriges Spektrum zu beschreiben. Im Fall nicht periodischer Signale geschieht dies durch die bekannten Gesetze der Fourier-Transformation. Aus dem Spektrum  $v(\nu)$  erhält man danach den zeitlichen Verlauf  $V(t)$  durch die Beziehung

$$V(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} v(\nu) e^{i2\pi\nu t} d\nu = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} v(\omega) e^{i\omega t} d\omega. \quad (1.15)$$

Umgekehrt erhält man die spektrale Verteilung aus der Zeitfunktion durch die folgende Transformationsgleichung:

$$v(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} V(t) e^{-i\omega t} dt. \quad (1.16)$$

$V(t)$  ist dabei also eine die Feldstärke charakterisierende komplexe Größe, d. h.

$$V(t) = V^{RT} + iV^{IT}. \quad (1.17)$$

Es ist vielleicht darauf hinzuweisen, dass bezüglich der Schreibweise der Fouriertransformation bzw. der Rücktransformation in der Literatur unterschiedliche Definitionen bezüglich des Vorzeichens im Exponenten zu finden sind [14, 15].

Die Lichtintensitäten am Ort  $\vec{r}$  erhält man demnach durch Multiplikation mit den dazu konjugiert komplexen Größen (Betragsquadrat)

$$I \propto \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} |V(t)|^2 dt \approx \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{+\infty} |V(t)|^2 dt. \quad (1.18)$$

Nach dem Parsevalschen Theorem gilt dabei

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |V(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |v(\nu)|^2 d\nu. \quad (1.19)$$

Im streng monochromatischen Fall wäre das Laserfeld darstellbar wie ein klassisches elektromagnetisches Feld. Für eine einfache ebene Welle gilt

$$V(r, t) = \hat{V}_0 e^{i(\omega_0 t - \vec{k}\vec{r})}, \quad (1.20)$$

mit dem Wellenzahlvektor  $\vec{k}$  und der Mitten-Kreisfrequenz  $\omega_0$ . Dieser idealisierte Grenzfall kann in der Praxis auch mit Lasern nicht erreicht werden. Die

Emission ist nicht streng monochromatisch, sie weist eine für jeden Laser charakteristische Frequenzbandbreite auf. Man spricht von Quasimonochromasie, wenn die Bedingung

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} \ll 1 \quad \text{bzw.} \quad \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} \ll 1 \quad (1.21)$$

gilt. In diesem Fall lassen sich die Feldamplituden (an einem festen Raumpunkt) durch die folgende Zeitfunktion beschreiben:

$$V(t) = \hat{V}_0(t)e^{i(\omega_0 t - \phi(t))}. \quad (1.22)$$

Dabei sind  $\hat{V}_0$  und  $\phi$  reell und ändern sich im Zeitintervall der durch die Kreisfrequenz bestimmten Periodendauer nur sehr wenig. Aus den oben angegebenen Gleichungen erhält man:

$$\hat{V}_0(t)e^{-i\phi(t)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} v(\omega)e^{i(\omega - \omega_0)t} d\omega. \quad (1.23)$$

Es handelt sich, wie man sieht, um eine Superposition harmonischer Komponenten, aufgrund der Quasimonochromasie allerdings sehr niedriger Frequenzen bzw. Kreisfrequenzen. Als **Kohärenzzeit**  $\Delta t_K$  bezeichnet man die Zeitdauer, während der diese zeitlichen Änderungen oder Fluktuationen der Amplituden  $\hat{V}_0(t)$  bzw. der Phasen  $\phi(t)$  praktisch vernachlässigbar sind. Der grundlegende Zusammenhang zwischen Kohärenzzeit und spektraler Bandbreite der Strahlung kann anschaulich am besten anhand vereinfachender Beispiele gezeigt werden, die analytisch berechenbar sind, demzufolge in der Literatur [16] gelegentlich aufgeführt werden (siehe die drei folgenden Sonderfälle).

**Monochromatischer Wellenzug endlicher Dauer  $\Delta t$ :** Hier geht man vereinfachend von einer zeitunabhängigen konstanten Amplitude  $V_0$  aus

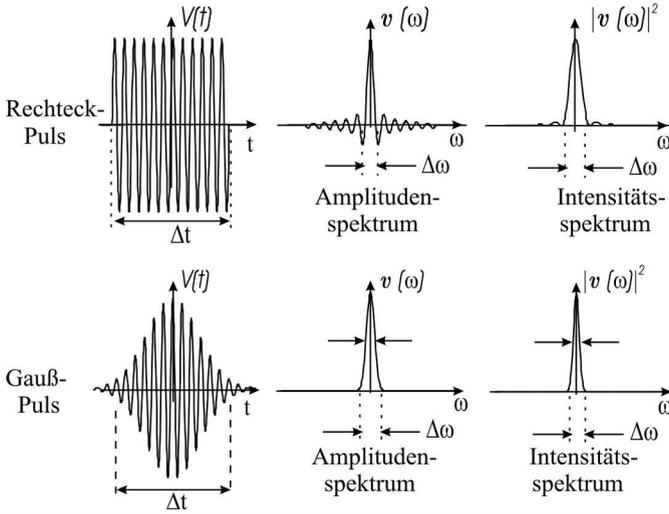
$$V(t) = \begin{cases} V_0 e^{i\omega_0 t} & \text{für } |t| \leq \Delta t/2 \\ 0 & \text{für } |t| \geq \Delta t/2. \end{cases} \quad (1.24)$$

Mit Hilfe der Fourier-Transformation erhält man daraus das zugehörige Frequenzspektrum, siehe obere Bildhälfte der Abb. 1.2.

$$v(\omega) = \int_{-\Delta t/2}^{+\Delta t/2} V_0 e^{i\omega_0 t} e^{-i\omega t} dt = V_0 \int_{-\Delta t/2}^{+\Delta t/2} e^{-i(\omega - \omega_0)t} dt$$

mit  $\omega = 2\pi\nu$  und  $\omega_0 = 2\pi\nu_0$

$$v(\omega) = V_0 \frac{\sin\{\pi(\nu - \nu_0)\Delta t\}}{\{\pi(\nu - \nu_0)\Delta t\}} \Delta t = V_0 \frac{\sin x}{x} \Delta t. \quad (1.25)$$



**Abb. 1.2.** Zeitverlauf des komplexen analytischen Signals (vereinfacht angenommener rechteckiger bzw. Gauß-förmiger Verlauf der Einhüllenden der Feldamplitude) und zugehörige Amplituden- bzw. Intensitätsspektren

mit  $x = \pi(\nu - \nu_0)\Delta t$ . Die Intensität ergibt sich danach aus dem Betragsquadrat als proportional zu:

$$I \propto \left( \frac{\sin x}{x} \right)^2, \tag{1.26}$$

wobei  $\Delta t$  die Länge des angenommenen Wellenzuges ist und somit nach den bisherigen Ausführungen der Kohärenzzeit  $\Delta t_K$  entspricht. Die effektive Frequenzbandbreite (Halbwertsbreite) lässt sich daraus bestimmen. Sie ist umgekehrt proportional zur Dauer  $\Delta t$  des Wellenzuges. Der resultierende spektrale Intensitätsverlauf ist schematisch in Abb. 1.2 gezeigt. Normalerweise bezieht sich die Halbwertsbreite auf den Abfall der Intensität von auf  $I_{max}$  auf  $I_{max}/2$ . Wählt man der Einfachheit halber im vorliegenden Beispiel den Wert  $x=\pi/2$ , für  $(\sin x/x)^2$  demzufolge  $4/\pi^2$ , der nur geringfügig kleiner als  $1/2$  ist, so erhält man die Frequenzbandbreite des dem Amplitudenquadrat proportionalen Intensitätsspektrums aus

$$\Delta\nu = \frac{1}{\Delta t} \quad \text{bzw.} \quad \Delta\omega = \frac{2\pi}{\Delta t}. \tag{1.27}$$

In diesem vereinfachten Fall entspricht die Kohärenzzeit  $\Delta t_K$  direkt der Dauer  $\Delta t$  des Wellenzuges (mit konstanter Amplitude), während der – entsprechend der Annahme – eine definierte Phasenlage vorliegt.

**Exponentiell abklingender Wellenzug:** Ein weiterer einfacher Sonderfall, der gelegentlich als Beispiel aufgeführt wird, benutzt eine Funktion, die

durch einen durch  $\Delta t$  gekennzeichneten exponentiellen Abfall der Amplitudeneinhüllenden gekennzeichnet ist. Der Zeitverlauf der komplexen analytischen Signalamplitude lässt sich demzufolge durch die folgende Beziehung beschreiben:

$$V(t) = V_0 e^{-\frac{t}{\Delta t}} e^{i\omega_0 t}. \quad (1.28)$$

Das dazugehörige – mit Hilfe der Fourier-Transformation bestimmte Amplitudenspektrum – ergibt sich daraus zu

$$v(\omega) = V_0 \frac{\Delta t}{1 + 4\pi^2(\nu - \nu_0)^2 \Delta t^2}. \quad (1.29)$$

Dies entspricht einer Lorentz Funktion. Das Intensitätsspektrum würde danach die folgende spektrale Breite (Halbwertsbreite) aufweisen.

$$\Delta\nu \approx \frac{1}{\pi \Delta t}. \quad (1.30)$$

**Wellenzug mit Gaußscher Einhüllender:** Noch realistischer, vor allem in Bezug auf die experimentelle Situation bei zahlreichen Impulslasern, ist eine Beschreibung des zeitlichen Verlaufes des komplexen analytischen Signals der Feldamplitude durch eine Gauß-Funktion

$$V(t) = V_0 e^{-\left(\frac{t}{\Delta t}\right)^2} e^{i\omega_0 t}, \quad (1.31)$$

dessen zugehöriges Frequenzspektrum durch die folgende Gleichungen analytisch beschrieben wird:

$$v(\omega) = V_0 \sqrt{\pi} \Delta t e^{-\pi^2(\nu - \nu_0)^2 \Delta t^2}. \quad (1.32)$$

Daraus erhält man die Breite des Intensitätsspektrums (welches proportional  $|v(\omega)|^2$  ist) aus

$$\Delta\nu = \frac{\sqrt{2 \ln 2}}{\pi \Delta t}. \quad (1.33)$$

Dieser Sonderfall ist in der unteren Bildhälfte der Abb. 1.2 dargestellt.

Es ist selbstverständlich, dass die tatsächliche experimentelle Situation mit keinem der drei skizzierten Sonderfälle, bei denen die Fourier-Transformationen analytisch bestimmt werden konnten, ausreichend genau zu beschreiben ist. Die Beispiele lassen jedoch erkennen, dass zwischen den wie auch immer definierten zeitlichen Impulsbreiten  $\Delta t$  (Dauer der Emission) und den Breiten der zugehörigen Spektren  $\Delta\nu$  der folgende wesentliche Zusammenhang gilt:

$$\Delta t \Delta\nu \geq \text{Konst.} \quad (1.34)$$

Da diese unterschiedlich definierten Zeiten die Intervallbreiten beschreiben, während der definierte Phasen vorliegen, entsprechen diese gerade auch den Kohärenzzeiten  $\Delta t_K$ . Die Größe der Konstanten (*Konst*) hängt dabei von

den oben erwähnten Definitionen ab. Man findet dementsprechend durchaus unterschiedliche Angaben in der Literatur. In vielen Fällen wird für *Konst* der Wert  $1/(4\pi)$  verwendet. Damit ergäbe sich:

$$\Delta t_K \geq \frac{1}{4\pi\Delta\nu}. \quad (1.35)$$

Diese Beziehungen werden häufig zur Abschätzung der Kohärenzlängen von Lasern herangezogen. Aus einer experimentell (z. B. mit einem Fabry-Perot-Interferometer, siehe Kapitel Interferometrie) bestimmten Frequenz-Halbwertsbreite  $\Delta\nu$  erhält man (somit unter der zusätzlichen Annahme für diese Konstante  $Konst=1/(4\pi)$ ) die Kohärenzlänge  $\Delta l_K$  durch Multiplikation mit der Lichtgeschwindigkeit aus  $\Delta l_K = c\Delta t_K$  aus

$$\Delta l_K = c \frac{Konst}{\Delta\nu} = \frac{c}{4\pi\Delta\nu}. \quad (1.36)$$

Für monochromatisches Licht thermischer Strahler (aufwändig spektral gefiltert mit Spektrographen oder Monochromatoren) sind Kohärenzzeiten größenordnungsmäßig bis  $10^{-8}$ s erreichbar. Dem würden, zwar bei extrem schwachen Intensitäten, immerhin Kohärenzlängen von nahezu 3 m entsprechen. Mit kontinuierlichen Lasern sind demgegenüber (über eine begrenzte zeitliche Dauer) mit entsprechendem Aufwand Kohärenzzeiten größer  $10^{-3}$ s und somit Kohärenzlängen bis zu mehreren hundert km erreichbar. Bei Impulslasern ist die Kohärenzzeit natürlich durch die jeweilige endliche Impulsbreite (im Subpicosekunden-, Nanosekunden-, Mikrosekunden- oder Millisekunden-Bereich) nach oben begrenzt.

Bei der Abschätzung der Kohärenzzeiten bzw. Kohärenzlängen der einzelnen Laser darf man bezüglich  $\Delta\nu$  natürlich nicht von den in Tabelle 1 angegebenen, durch  $\delta\lambda$  charakterisierten, spektralen Bandbreiten der Laserübergänge ausgehen. Diese Werte definieren zwar die durch die jeweiligen Verbreiterungsmechanismen zu erwartenden, materialspezifischen Verstärkungsprofile. Diese hängen jedoch auch von der durch die Pumpraten erreichten Inversion und somit von den erzielten Verstärkungen der einzelnen Lasermedien ab. Zusätzlich ergeben sich, da sich die verstärkenden Medien im Normalfall als Oszillatoren in optischen Resonatoren befinden, innerhalb dieser Verstärkungsbandbreiten noch komplexere Strukturen der spektralen Verteilung der Laseremission, typischerweise mit einer Vielzahl longitudinaler, gegebenenfalls auch transversaler Moden, auf die in einem getrennten Kapitel eingegangen wird. Es sollte an dieser Stelle lediglich hervorgehoben werden, dass die effektiven Bandbreiten nicht nur von den Lasermedien selbst, sondern weitgehend auch von den speziell verwendeten Resonatoren bestimmt werden. Sie können daher auch in weiten Grenzen den experimentellen Anforderungen der Messtechnik angepasst werden. Dabei sind zwei Sonderfälle besonders zu beachten:

**Modenselektion:** Durch modenselektive Maßnahmen ist es beispielsweise in vielen Fällen möglich, die Bandbreite drastisch (um einen Faktor  $10^2$

oder darüber) einzuengen. Im Grenzfall kann die gesamte Emission in der transversalen Grundmode auf einer einzigen longitudinalen Mode erzwungen werden. Dies entspricht dem „single-mode“-Betrieb, der üblicherweise jedoch mit einem beträchtlichen Energieverlust erkauft werden muss, mit dem aber die größte Kohärenzlänge erreicht wird. Dies ist beispielsweise für die holographische Messtechnik von entscheidender Bedeutung.

**Modenkoppelung:** Durch eine starre Koppelung der Phasenlage einer möglichst großen Zahl longitudinaler Moden ist es möglich, ultrakurze Impulse mit Halbwertsbreiten im ps- bzw. subps-Bereich bis in den fs-Bereich zu erzeugen. Dies bedeutet, dass bei dieser Betriebsweise keine Bandbreitenbegrenzungen, sondern im Gegenteil sogar möglichst große Frequenzbandbreiten erwünscht sind. Je größer die Verstärkungsbandbreite, um so mehr Eigenschwingungen lassen sich koppeln. Dies führt allerdings automatisch zu einer Reduzierung der Kohärenzzeit, somit auch der Kohärenzlänge, so dass in Einzelfällen Kompromisse zu schließen sind.

Detaillierter werden diese Zusammenhänge in dem Kapitel „Spezielle Kohärenzprobleme“ sowie im Zusammenhang mit der „Holographie“ behandelt. Dies betrifft auch die Resonatortheorie, auf die allerdings ebenfalls nur eingegangen werden kann, soweit es für das Verständnis der lasermesstechnischen Anwendungen erforderlich ist.

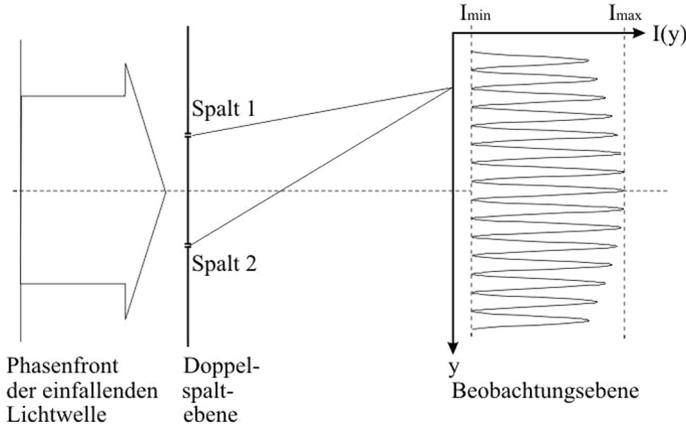
### 1.3 Mathematische Formulierung der Kohärenzfunktion

Für viele Fälle lassen sich die Kohärenzeigenschaften zweckmäßigerweise, speziell wenn es sich um zwei Wellenfelder  $V_1$  und  $V_2$  handelt, durch eine wechselseitige Korrelationsfunktion  $I_{12}$ , d. h. durch den komplexen Kohärenzgrad beschreiben. Dies soll anhand eines einfachen Aufbaues mit dem in der Optik bekannten Doppelspaltexperiment, siehe Abb. 1.3, erläutert werden. Bei der Korrelation der Wellenfelder sind dann auch bei dieser Anordnung sowohl räumliche als auch zeitliche Aspekte zu berücksichtigen.

Geht man von einer homogenen gleichförmigen Beleuchtung in der Doppelspaltebene aus (ebene Phasenfronten  $\Sigma$ ) und nimmt man ein homogenes isotropes Medium (mit konstanter Brechungsindexverteilung) zwischen der Spalt- und der Beobachtungsebene an, so ergibt sich das komplexe analytische Signal (die komplexe Feldamplitude)  $V(\vec{r}, t)$  in einem beliebigen Punkt P zu

$$V(\vec{r}, t) = V(\vec{r}_1, t - t_1) + V(\vec{r}_2, t - t_2) = V_1(t - t_1) + V_2(t - t_2). \quad (1.37)$$

Da selbst die breitbandigsten, verfügbaren Detektoren wegen der hohen Frequenzen im optischen Bereich ( $> 10^{14}$  Hz) in der Beobachtungsebene nur Intensitäten registrieren können, gilt hierfür im Beobachtungszeitraum T der folgende Zusammenhang mit den Feldgrößen:



**Abb. 1.3.** Youngsches Doppelspaltexperiment

$$I_T(\vec{r}, t) = \frac{C}{T} \int_{t-T/2}^{t+T/2} V(\vec{r}, t') V^*(\vec{r}, t') dt', \quad (1.38)$$

wobei die Konstante  $C$  den Wellenwiderstand oder dessen Reziprokwert darstellt, je nachdem ob  $V(\vec{r}, t')$  eine elektrische oder eine magnetische Feldamplitude bezeichnet. Da üblicherweise bei Lasern die Beobachtungszeiten wesentlich größer sind als die durch  $\omega$  bestimmte Periodendauer, gilt, wenn man zusätzlich stationäre Felder annimmt:

$$I(P) = \lim_{T \rightarrow \infty} I_T(\vec{r}, t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{C}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} V(\vec{r}, t') V^*(\vec{r}, t') dt'. \quad (1.39)$$

Zur Vereinfachung wird für diese umständliche Integralschreibweise ein Klammersausdruck eingeführt. Es ist allerdings zu beachten, dass diese Klammer nichts mit der „Diracschen Bracket Notierung“ der Quantenmechanik [17] zu tun hat.

$$I(P) = \langle V(P, t) V^*(P, t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{C}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} V(\vec{r}, t') V^*(\vec{r}, t') dt'. \quad (1.40)$$

Durch die Überlagerung der komplexen analytischen Signale der beiden Spaltanteile erhält man somit:

$$I(P) = \langle V_1(t-t_1) V_1^*(t-t_1) \rangle + \langle V_2(t-t_2) V_2^*(t-t_2) \rangle + \langle V_1(t-t_1) V_2^*(t-t_2) \rangle + \langle V_1^*(t-t_1) V_2(t-t_2) \rangle. \quad (1.41)$$

Dabei sind dritter und vierter Term konjugiert komplex zueinander, so dass sich durch die Addition der doppelte Realteil ergibt. Aufgrund der Invarianz gegenüber dem Zeitnullpunkt sowie der Stationarität der Felder vereinfachen sich diese Beziehungen. Außerdem ist

$$\langle V_1(t - t_1)V_1^*(t - t_1) \rangle = \langle V_1(t)V_1^*(t) \rangle = I_1. \quad (1.42)$$

Für  $I_2$  gilt die gleiche Überlegung. Mit der folgenden Definition der komplexen Funktion  $\Gamma_{12}(t_2 - t_1)$ ,

$$\Gamma_{12}(t_2 - t_1) = \langle V_1(t + \tau)V_2^*(t) \rangle \quad (1.43)$$

$$\text{mit } \tau = t_2 - t_1,$$

errechnet sich die Intensität am Ort P der Beobachtungsebene zu

$$I(P) = I_1 + I_2 + 2\Gamma_{12}^{RT}(\tau). \quad (1.44)$$

$\Gamma_{12}^{RT}(\tau)$  stellt somit den Realteil der wechselseitigen komplexen Kohärenzfunktion dar. In ausführlicher Schreibweise (anstelle der Klammernotierung) gilt demnach:

$$\Gamma_{12}(\tau) = \Gamma(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} V(\vec{r}_1, t + \tau)V^*(\vec{r}_2, t)dt. \quad (1.45)$$

Für Aufgaben der Praxis ist es sinnvoll, diese wechselseitige Kohärenzfunktion  $\Gamma_{12}(\tau)$ , die einer Kreuzkorrelationsfunktion entspricht, geeignet zu normieren. Dies geschieht durch Division durch das geometrische Mittel der beiden Autokorrelationsfunktionen  $\Gamma_{ii}(\tau = 0)$  ( $i=1,2$ ), zum Zeitpunkt  $\tau = 0$ .

$$\begin{aligned} \gamma_{12}(\tau) &= \frac{\Gamma_{12}(\tau)}{\sqrt{\Gamma_{11}(\tau = 0)\Gamma_{22}(\tau = 0)}} \\ &= |\gamma_{12}(\tau)|e^{i(\alpha_{12}(\tau) - 2\pi\nu_0\tau)}. \end{aligned} \quad (1.46)$$

$\gamma_{12}(\tau)$  ist ebenfalls eine komplexe Funktion, die sich durch Betrag und Phase darstellen lässt. Damit ergibt sich für die Intensität  $I(P)$  in dem in Abb. 1.3 skizzierten Doppelspaltexperiment

$$\begin{aligned} I(P) &= I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \gamma_{12}^{RT}(\tau) \\ I(P) &= I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} |\gamma_{12}(\tau)| \cos[\alpha_{12}(\tau) - 2\pi\nu_0\tau]. \end{aligned} \quad (1.47)$$

Da der  $\cos$ -Term maximal +1 bzw. minimal -1 werden kann, erhält man für die maximalen bzw. minimalen Intensitäten in der Beobachtungsebene

$$\begin{aligned}
 I(P)_{max} &= I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} |\gamma_{12}(\tau)| \\
 I(P)_{min} &= I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2} |\gamma_{12}(\tau)|.
 \end{aligned}
 \tag{1.48}$$

Diese Gleichungen liefern bereits ein Messverfahren für die experimentelle Bestimmung, zumindest des Realteiles dieser normierten wechselseitigen Kohärenzfunktion  $\gamma_{12}(\tau)$ . Sie lässt sich durch einfache Intensitätsmessungen bestimmen, und zwar durch Messung der Gesamtintensität  $I$  sowie der Einzelintensitäten  $I_1$  und  $I_2$ , bei jeweiliger Abdeckung einer der beiden Spaltöffnungen.

$$\gamma_{12}^{RT}(\tau) = \frac{(I - I_1 - I_2)}{2\sqrt{I_1 I_2}}.
 \tag{1.49}$$

Mit dieser normierten wechselseitigen Kohärenzfunktion ist übrigens auch der Interferenzstreifenkontrast (Sichtbarkeit, im englischen Sprachgebrauch „visibility“, daher als  $\mathcal{V}$  bezeichnet) verknüpft. Dieser ist wie folgt definiert:

$$\mathcal{V} = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}} = \frac{2\sqrt{I_1 I_2}}{I_1 + I_2} |\gamma_{12}(\tau)|.
 \tag{1.50}$$

Dabei ist die Laufzeitdifferenz durch  $\tau = (s_2 - s_1)/c$  und der zugehörige Phasenwinkel durch  $\delta = 2\pi\nu_0\tau$  definiert. Sind beide Intensitäten gleich, d. h.  $I_1 = I_2$ , so vereinfacht die die obige Beziehung des Kontrastes  $\mathcal{V}$  zu

$$\mathcal{V} = |\gamma_{12}(\tau)|,
 \tag{1.51}$$

woraus sich eine einfache Messvorschrift zur experimentellen Bestimmung dieser zunächst abstrakt erscheinenden Größe des Betrages der komplexen Kohärenzfunktion ergibt.

**Räumliche Kohärenz:** Im Fall der räumlichen Kohärenz betrachtet man die wechselseitige Korrelation, im einfachsten Fall zweier räumlich getrennter Anteile eines Laser-Strahlungsfeldes zum gleichen Zeitpunkt. Hierfür kann beispielsweise, wie in Abb. 1.3 gezeigt, ein Doppelspaltexperiment durchgeführt werden, wobei der Abstand  $d$  der beiden Blendenöffnungen variiert wird. Falls eine eindeutige Phasenordnung (zu jedem beliebigen Zeitpunkt) zwischen den beiden Wellenanteilen der Ortsvektoren ( $\vec{r}_1, \vec{r}_2$ ) der beiden Spaltöffnungen existiert, ergibt sich in der Beobachtungsebene ein Interferenzstreifenmuster, dessen Intensitätsmaxima und Minima  $I_{max}$  und  $I_{min}$  den Betrag  $|\gamma(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \tau = 0)|$  eindeutig bestimmen. Mit einem derartigen Verfahren kann beispielsweise die räumliche Kohärenz innerhalb eines Laserstrahlenbündels vermessen werden.

**Zeitliche Kohärenz:** Hierbei betrachtet man an einem festen Raumpunkt die zeitliche Korrelation verschiedener Wellenanteile. Experimentell eignen sich hierfür Zweistrahlinterferometer, wie beispielsweise das Michelson-Interferometer (siehe Kapitel Interferometrie). Durch Variation der Länge

des einen der beiden Interferometerarme durch Verschieben des einen Spiegels, wird das zeitliche Eintreffen der beiden Strahlungsanteile am Ort eines Detektors variiert ( $\tau = (t_2 - t_1)$ ). Zur Detektion können dabei fotoelektrische Detektoren (wie Fotodioden und Fotomultiplier) oder auch andere Registrierverfahren eingesetzt werden, wie direkte fotografische Aufnahmen auf Film oder Aufzeichnungen mit CCD-Kameras. Der Betrag der normierten wechselseitigen Kohärenzfunktion  $\gamma_{12}(\tau)$  für beliebige räumlich feste Positionen  $\vec{r}$ , wird auch hierbei wieder aus den Maximal- und Minimalintensitäten bestimmt. Bei einer fotografischen Messung sind die Streifenkontraste durch Ausphotometrieren ebenfalls recht einfach quantitativ zu bestimmen.

## 1.4 Spektrale Emission von Lasern

Nach den Gleichungen 1.46 bis 1.51 gibt die normierte Kohärenzfunktion eine eindeutige Aussage über die Korrelationsfähigkeit, zumindest zweier zeitlich und räumlich unterschiedlicher optischer Wellenfelder, wobei natürlich im Einzelfall zwischen räumlicher und zeitlicher Kohärenz zu unterscheiden ist.

Aufgrund des durch die Fourier-Transformation definierten Zusammenhangs zwischen der Zeitfunktion des komplexen analytischen Signals und des zugehörigen Spektrums erhält man eine Beziehung, aus der hervorgeht, dass die Zeitdauer der Wellenzüge  $\Delta\tau$ , dies entspricht der Kohärenzzeit, der spektralen Bandbreite  $\Delta\nu$  umgekehrt proportional ist

$$\Delta\tau \propto \frac{1}{\Delta\nu}. \quad (1.52)$$

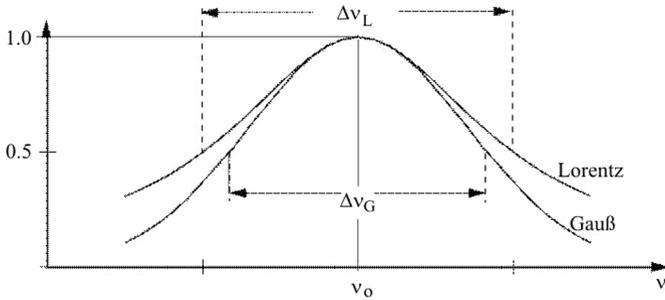
Der Zahlenwert der Proportionalitätskonstanten hängt natürlich von der genaueren Definition ab. In der Literatur werden hierfür zum Teil unterschiedliche Werte zugrundegelegt, bei denen die Streifen sichtbarkeit und somit auch der entsprechende Betrag der normierten wechselseitigen Kohärenzfunktion, z. B. auf  $1/2$ , auf  $1/e$  oder auf  $1/e^2$  abgefallen ist. All diesen Definitionen gemeinsam und wesentlich ist jedoch, dass die Kohärenzzeit jeweils umgekehrt proportional zur spektralen Bandbreite ist, dies ist von zentraler Bedeutung.

Es ist daher unumgänglich, die charakteristischen spektralen Emissionseigenschaften von Lasern, zunächst unabhängig von einem speziellen Lasertyp, zur klareren Darstellung der wesentlichen Zusammenhänge in vereinfachter Form nochmals zu diskutieren, z. B. [18, 19, 20, 21]. Die Emission wird dabei sowohl von dem betreffenden Übergang des aktiven Lasermediums als auch vom verwendeten Laserresonator bestimmt. Zur mathematischen Beschreibung dieser Zusammenhänge geht man von einem zunächst beliebigen aktiven Medium aus, dessen frequenzabhängige Verstärkung (Linienprofil) sich durch eine Gauß- oder durch eine Lorentz-Funktion approximieren lässt. Dies ist schematisch in Abb. 1.4 angedeutet, wobei die frequenzabhängigen Linienformen  $g(\nu)$  durch die folgenden Beziehungen definiert sind:

$$g_G(\nu) = \frac{2\sqrt{\ln 2}}{\sqrt{\pi}\Delta\nu_G} e^{-\ln 2 \left(\frac{2(\nu-\nu_0)}{\Delta\nu_G}\right)^2} \quad (\text{Gau\ss} - \text{Funktion}), \quad (1.53)$$

$$g_L(\nu) = \frac{2}{\pi\Delta\nu_L} \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{2(\nu-\nu_0)}{\Delta\nu_L}\right)^2\right]} \quad (\text{Lorentz} - \text{Funktion}). \quad (1.54)$$

Diese Funktionen sind jeweils so genormt, dass das Integral über das gesamte Spektrum zu 1 wird, d. h.  $\int_0^\infty g(\nu)d\nu = 1$ . Die durch  $\Delta\nu_G$  oder  $\Delta\nu_L$  zu approximierenden tatsächlichen Halbwertsbreiten der Linien werden von den jeweiligen Linienverbreiterungsmechanismen der betrachteten Laser bestimmt. Dies kann z. B. bei Niederdruck-Gaslasern eine Dopplerverbreiterung, bei höheren Gasdrücken eine Druck-Verbreiterung oder bei Festkörperlasern eine Starkeffekt-Verbreiterung sein. Je nachdem ob der gesamte Frequenzbereich für die Verstärkung einer Laserlinie genutzt werden kann oder nur ein Teil davon, spricht man von einer homogen oder von einer inhomogen verbreiterten Linie.



**Abb. 1.4.** Frequenzabhängige Linienformen, Gauß-, bzw. Lorentz-Profile

Die Linienbreiten der erzielbaren Verstärkungsprofile selbst erweisen sich als abhängig von der durch den jeweiligen Pumpprozess erreichbaren Verstärkung  $G_0$  in Linienmitte. Dies kann am besten am einfachen Beispiel eines Wanderwellenverstärkers veranschaulicht werden. Geht man vereinfachend zur analytischen Beschreibung von einem Lorentz- oder von einem Gauß-Profil aus, so werden zunächst breitbandig einfallende Signalamplituden in Linienmitte maximal, nach größeren Frequenzabständen hin weniger verstärkt. Ist  $\Delta N = [N_2 - (g_2/g_1)N_1]$  die erzielte Inversion zwischen den Niveaus 2 und 1 mit den statistischen Gewichten  $g_2$  bzw.  $g_1$ ,  $A$  der Einstein-Koeffizient für spontane Emission,  $\lambda_0$  die Vakuumwellenlänge,  $\mu_B$  der Brechungsindex und  $L$  die Länge des aktiven Mediums, so lässt sich die frequenzabhängige Verstärkung aus der folgenden Beziehung ermitteln:

$$G(\nu) = \frac{V(\nu, L)V^*(\nu, L)}{V(\nu, 0)V^*(\nu, 0)} = e^{[N_2 - (g_2/g_1)N_1]g(\nu)Ac^2L/(8\pi\nu^2)}. \quad (1.55)$$

Dabei ist die Linienform, entsprechend einer der beiden zugrundegelegten Gleichungen 1.53 oder 1.54 einzusetzen. Die Bandbreite  $\delta\nu$ , bei der  $G$  auf die Hälfte der Mittenverstärkung abgefallen ist, d. h.  $G(\nu_0 + \delta\nu/2) = G(\nu_0)/2$ , ergibt sich danach, z. B. für eine Lorentz-förmige Linie in erster Näherung aus

$$\delta\nu_{Lorentz} = \Delta\nu \sqrt{\frac{\ln G_0}{\ln G_0 - \ln 2} - 1}. \quad (1.56)$$

Gleichung 1.56 eignet sich allerdings nur für Wanderwellenverstärker mit großen Werten der Verstärkung in Linienmitte  $G_0$  (für  $G_0 = 2$  würde die Beziehung beispielsweise divergieren). Für kleine  $G_0$  erhält man demgegenüber mit der Näherung ( $e^z \approx (1 + z + \dots)$ )

$$\frac{G - 1}{G_0 - 1} \approx \frac{g(\nu)}{g(\nu_0)}. \quad (1.57)$$

In diesem Fall wird die Linienbreite der Verstärkung in guter Näherung proportional der Breite von  $g(\nu)$ .

### 1.4.1 Longitudinale Moden

Die tatsächlichen Frequenzspektren realer Laser sind weit komplexer, siehe u. a. [22, 23]. Schließt man einfache Wanderwellenverstärker oder Superstrahler (ASE amplified spontaneous emission) zunächst aus, so befinden sich die aktiven Medien im Oszillatorfall zur optischen Rückkoppelung in Resonatoren, die im einfachsten Fall aus zwei ebenen Fabry-Perot Spiegeln bestehen können, (Abb. 1.5).

Mit der Verstärkung  $G$ , der Gesamtrefektivität  $R$  als geometrisches Mittel der Reflexionskoeffizienten  $R_1$  und  $R_2$ , d. h. mit  $R = \sqrt{R_1 \cdot R_2}$  bzw. bei verlustlosen Spiegeln mit der Transmission  $T = \sqrt{T_1 \cdot T_2} = 1 - R$ , erhält man die Durchgangsverstärkung  $G_T$

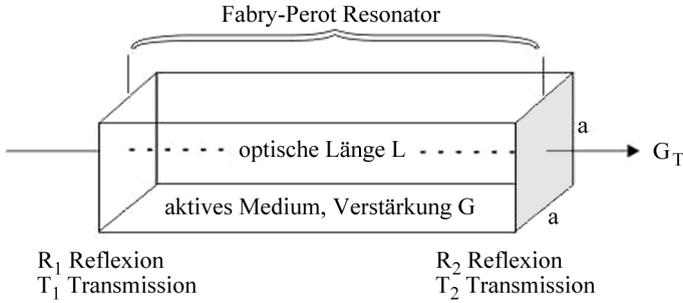
$$G_T = \frac{T_1 T_2 G}{[(1 - GR)^2 + 4GR \sin^2(\delta/2)]}, \quad \text{mit} \quad (1.58)$$

$$\delta/2 = \frac{2\pi}{\lambda} kL \quad (k = 0, 1, 2, \dots). \quad (1.59)$$

Parallel zur Achse (Einfallswinkel 0), entspricht  $L$  dem optischen Spiegelabstand,  $L = L_{optisch} = L_{geometrisch} \cdot \mu_B$ , wobei zur Vereinfachung von einem einheitlichen Brechungsindex  $\mu_B$  des verstärkenden Mediums im gesamten Bereich zwischen den beiden Spiegeln ausgegangen wurde.

$\delta$  ist der Phasenunterschied pro Hin- und Rücklauf. Maxima dieser Funktion erhält man für  $\delta/2 = 0, \pi, 2\pi \dots$ . Es wird dann

$$G_{Tmax} = \frac{T_1 T_2 G}{(1 - GR)^2}. \quad (1.60)$$



**Abb. 1.5.** Aktiver Fabry-Perot Resonator, Sonderfall: quadratische Spiegel, (Kantenlänge  $a$ )

Diesen Maxima  $G_{Tmax}$  entsprechen die longitudinalen Moden, deren Frequenzabstand durch  $\Delta\nu$  bestimmt ist. Die Halbwertsbreite dieser Transmissionsmaxima  $d\nu$  hängt über  $G$  natürlich von der angenommenen Linienform  $g_G(\nu)$  oder  $g_L(\nu)$  ab. In der Näherung  $\sin^2(\delta/2) \approx (\delta/2)^2$  erhält man

$$\Delta\nu = \frac{c}{2L} \quad d\nu = \frac{c}{2L\pi} \frac{(1 - GR)}{\sqrt{GR}}. \quad (1.61)$$

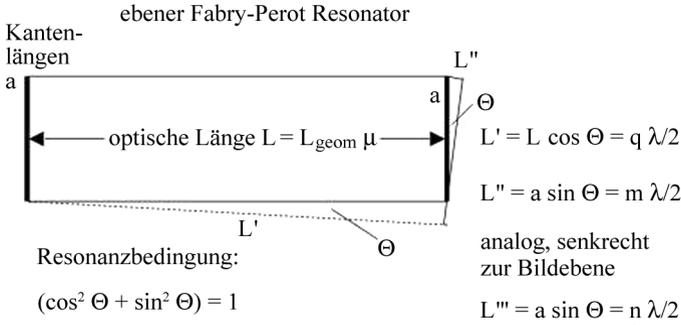
$c$  ist dabei die Ausbreitungsgeschwindigkeit in dem betrachteten verstärkenden Medium mit dem Brechungsindex  $\mu_B$ . Für  $G=1$  entsprechen diese Beziehungen den aus den bekannten Airyschen Formeln ableitbaren Gleichungen eines passiven Fabry-Perot Interferometers (siehe Kapitel Interferometrie).

### 1.4.2 Transversale Moden

Neben den longitudinalen Moden treten für kleine Winkelabweichungen  $\theta$  auch transversale Moden auf (siehe Abb.1.6), deren Transmissionsmaxima gegenüber denen der zugehörigen longitudinalen Eigenschwingung frequenzverschoben sind.

Die grundlegenden Zusammenhänge sind dabei zunächst an einem vereinfachten Modell analysiert, bei dem man ähnlich wie bei Mikrowellenresonatoren zunächst von einem geschlossenen Resonator ausgeht. Dies dient nur der besseren Anschaulichkeit, da bei Laserresonatoren generell, somit auch bei dem betrachteten Sonderfall der Fabry-Perot Resonatoren keine seitlichen Begrenzungen vorliegen. In dieser schematischen Vereinfachung ergeben sich zunächst für den ebenen Fall in der  $x$ - $y$ -Ebene die in Abb. 1.6 angegebenen Beziehungen. Überträgt man diese Überlegungen in den dreidimensionalen  $x$ - $y$ - $z$ -Raum, so erhält man für einen plan-plan Resonator mit quadratischen Spiegeln der Kantenlängen  $a$  die folgende Resonanzbedingung:

$$\left(\frac{q}{L}\right)^2 + \left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{a}\right)^2 = \left(\frac{2}{\lambda_{m,n,q}}\right)^2 = \left(\frac{2\nu_{m,n,q}}{c}\right)^2. \quad (1.62)$$



**Abb. 1.6.** Transversale Moden eines Fabry-Perot Resonators mit ebenen, rechteckigen Spiegeln der Kantenlänge  $a$

$q$  ist die Ordnungszahl der longitudinalen Moden (parallel zur optischen Achse), die Werte  $m$  und  $n$  stehen für die transversalen Winkelmoden, die schließlich auf Grund der Wanderungsverluste seitlich aus dem Resonatorbereich herausgelangen. Nach Gleichung 1.62 würde man mit der Näherung

$$\sqrt{1+z} = (1 + z/2 + \dots) \approx (1 + z/2)$$

die folgenden diskrete Frequenzabstände erwarten:

$$dv_{(\Delta q, \Delta m, \Delta n)} \approx \frac{c}{2L} \left[ \Delta q + \frac{L^2}{8a^2 q} (2m \Delta m + (\Delta m)^2 + 2n \Delta n + (\Delta n)^2) \right]. \quad (1.63)$$

Damit ist das Frequenzspektrum der einzelnen Eigenschwingungen (allerdings nur für diesen mehr anschaulichen Sonderfall) bestimmt.

Ähnliche Überlegungen gelten für realistische Fabry-Perot Resonatoren, z. B. mit kreisrunden oder mit quadratischen Spiegeln. Die  $m$  und  $n$  würden dann im einen Fall die azimuthalen bzw. radialen, im anderen Fall die horizontalen und vertikalen Modenzahlen kennzeichnen. Die genauen Berechnungen der Modenverteilungen vorgegebener Resonatoren mit Hilfe der skalaren Feldtheorie erfordern im allgemeinen einen hohen, nur numerisch lösbaren Rechenaufwand. Analytische Näherungslösungen sind jedoch in der Literatur zu finden. Einige spezielle Sonderfälle sollen kurz angedeutet werden, [24].

**Für Fabry-Perot Resonatoren** mit kreisrunden Spiegeln mit dem Radius  $a$  wird von Vainshtein [25] für die Resonanzfrequenzen folgende Näherungslösung angegeben:

$$2L/\lambda_{m,n,q} = q + \left( \frac{u_{m,n+1}}{2\pi\sqrt{F}} \right)^2 \cdot \frac{(1 + 2K/\sqrt{8\pi F})}{[(1 + K/\sqrt{8\pi F})^2 + K^2/(8\pi F)]^2}. \quad (1.64)$$

Dabei bedeuten:

$$\begin{aligned}
F &= a^2/(L\lambda) && \text{Fresnelzahl,} \\
K &= -\zeta/\sqrt{\pi}, \\
\zeta(u) &= \text{Riemannsche Zetafunktion,} \\
u_{m,n+1} &= (n+1) - te \text{ Nullstelle der} \\
&&& \text{Besselfunktion } m\text{-ter Ordnung.} \quad (1.65)
\end{aligned}$$

Für große Fresnel-Zahlen  $F = a^2/(L\lambda) \gg 1$  (wie dies für große Spiegelradien  $a$  zu erwarten ist), vereinfacht sich dies zu

$$2L/\lambda_{m,n,q} = (2L/c)\nu_{m,n,q} \approx q + \frac{1}{F} \cdot \left(\frac{u_{m,n+1}}{2\pi}\right)^2. \quad (1.66)$$

Der Frequenzabstand von der transversalen Grundmode ( $m=0, n=0$ ) zur nächst höheren Ordnung, z. B. ( $m=1, n=0$ ), berechnet sich danach für sehr große  $F$  aus

$$(\nu_{1,0,q} - \nu_{0,0,q}) \approx \frac{0,25}{F} (\nu_{0,0,q+1} - \nu_{0,0,q}). \quad (1.67)$$

Der Frequenzabstand wird somit mit zunehmender Fresnel-Zahl kleiner. Analoge Beziehungen wurden, z. B. von Vainshtein, auch für Fabry-Perot Resonatoren mit rechteckigförmigen Spiegeln berechnet.

**Für konfokale Resonatoren mit kreisförmigen Spiegeln** können beispielsweise die bereits 1962 berechneten Feldverteilungen von Boyd und Kogelnik zugrundegelegt werden, die entsprechend Laguerre Polynome voraussetzen. Die Phasen dieser Feldverteilungen ergeben sich dann aus

$$2L/\lambda_{m,n,q} = (2L/c)\nu_{m,n,q} \approx q + \Delta\Phi_{m,n}/\pi \approx q + \frac{1}{2}(m+2n+1), \quad (1.68)$$

woraus resultiert, dass eine Modenentartung vorliegt, wenn  $m+2n+1 = m^* + 2n^* + 1$ . Die Resonanzfrequenzen für diese Ordnungen des Spektrums stimmen dann überein.

**Für konfokale Resonatoren mit rechteckigen Spiegeln** liegen ebenfalls Berechnungen von Boyd und Kogelnik vor, aus deren Feldverteilungen sich die Frequenzabstände nach

$$2L/\lambda_{m,n,q} = (2L/c)\nu_{m,n,q} \approx q + \Phi_{m,n}/\pi \approx q + \frac{1}{2}(m+n+1) \quad (1.69)$$

bestimmen lassen, woraus ebenfalls folgt, dass unter den Bedingungen  $(m+n+1) = (m^*+n^*+1)$  Modenentartungen existieren.

**Für stabile Resonatoren mit sphärisch gekrümmten Spiegeln** gibt es im Rahmen der skalaren Theorie keine exakten Lösungen. Da sich jedoch die Phasenflächen konfokaler Resonatoren angenähert durch Kugelflächen beschreiben lassen, können stabile Resonatoren mit unterschiedlichen Krümmungsradien in die Phasenflächen zugehöriger konfokaler Resonatoren eingepasst werden. Die entsprechenden Abstände, beispielsweise der Spiegelpositionen vorgegebener Radien von der Strahltille lassen sich danach berechnen (siehe z. B. F.K. Kneubühl, M.W. Sigrist, [24]).

- Die Resonanzbedingungen im Fall kreisförmiger Spiegelflächen lauten dann

$$2L/\lambda_{m,n,q} = (2L/c)\nu_{m,n,q} \approx q + \frac{m + 2n + 1}{\pi} \arccos[\sqrt{g_1 g_2}], \quad (1.70)$$

wobei die g-Werte für stabile Resonatoren durch die optischen Spiegelabstände L und die Krümmungsradien wie folgt definiert sind:

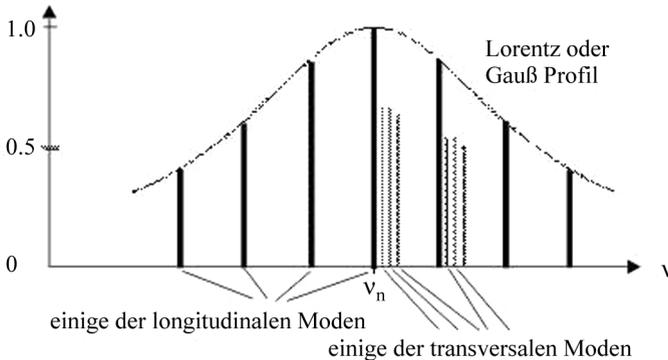
$$g_1 = 1 - L/R_1 \quad g_2 = 1 - L/R_2. \quad (1.71)$$

- Die Resonanzbedingungen im Fall quadratischer Spiegel sind durch

$$2L/\lambda_{m,n,q} = (2L/c)\nu_{m,n,q} \approx q + \frac{m + n + 1}{\pi} \arccos[\sqrt{g_1 g_2}] \quad (1.72)$$

gegeben. In diesem Fall bedeuten die m und n (im Gegensatz zu den azimutalen und radialen Ordnungszahlen bei der Kreissymmetrie) die vertikalen und horizontalen Ordnungszahlen der minimalen Intensität.

Betrachtet man ganz allgemein die möglichen Spektren, so zeigt sich aus den kurz zusammengefasst dargestellten obigen Beziehungen, dass beispielsweise die TEM<sub>m,n,q</sub>-Moden der konfokalen Resonatoren (für die R=L gilt), entartet sind, wobei die Resonanzfrequenzen der höheren Moden zum Teil mit denen der Grundmoden zusammenfallen. Dies ist demgegenüber bei den allgemeinen Resonatoren mit sphärischen Spiegeln, wie obige Beziehungen zeigen, normalerweise nicht der Fall. Die transversalen Moden höherer Ordnung überlagern sich dabei den longitudinalen Grundmoden als Satellitenlinien, wie dies (vereinfacht für nur zwei der longitudinalen Moden) schematisch in Abb. 1.7 dargestellt ist.



**Abb. 1.7.** Schematisch vereinfachtes, typisches Modenspektrum (die transversalen Moden sind schematisch nur für zwei der longitudinalen Moden angedeutet)

Für Gaslaser, z. B. He-Ne Laser, sind die durch die Gauß- oder Lorentz-Funktion zu approximierenden Spektralbreiten durch die Dopplerbreiten bestimmt. Diese liegen typisch bei einigen hundert MHz, so dass im Allgemeinen,

je nach Resonatorlängen, nur einige wenige longitudinale Moden anschwingen können. Bei Festkörperlasern ergeben sich demgegenüber durch den Stark-Effekt wesentlich breitere Spektren, bei denen sich üblicherweise mehrere hundert, bei Nd-Glas Lasern z. B. bis zu mehreren tausend longitudinale Moden aufbauen können. Es ist verständlich, dass je nach der gewünschten messtechnischen Anwendung bei den einzelnen Lasern Eingriffe erforderlich sind, um deren Emissionsspektren in der gewünschten Form zu beeinflussen.

## 1.5 Bestimmung der Modenstruktur

### 1.5.1 Messung des longitudinalen Modenspektrums

Die Frequenzabstände der longitudinalen Moden einer Vielzahl von Lasern liegen in einem Bereich, der mit einem Analysier-Fabry-Perot Interferometer ausgemessen werden kann. Eine typische Versuchsanordnung ist in Abb. 1.8 dargestellt. Die Transmission eines derartigen „passiven“ Mehrstrahl-Interferometers wird (wie im Kapitel „Interferometrie“ ausgeführt) durch die Airyschen Beziehungen beschrieben:

$$T_{FP} = \frac{1}{1 + F \cdot (\sin \delta/2)^2} \quad \text{mit} \quad F = \frac{4R}{(1 - R)^2} \quad \delta = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot 2h\mu_{B,2} \cos(\alpha_2). \quad (1.73)$$

Der Wert F ist dabei wie gezeigt durch den Gesamtreflexionskoeffizient R der beiden parallelen Spiegelflächen bestimmt ( $\sqrt{R_1 R_2}$ ). Mit der Feinheit  $\mathcal{F}$  (finesse), d. h. mit dem Verhältnis des Abstandes zweier benachbarter Resonanzen zu deren Frequenzhalbwertsbreiten besteht der bekannte Zusammenhang

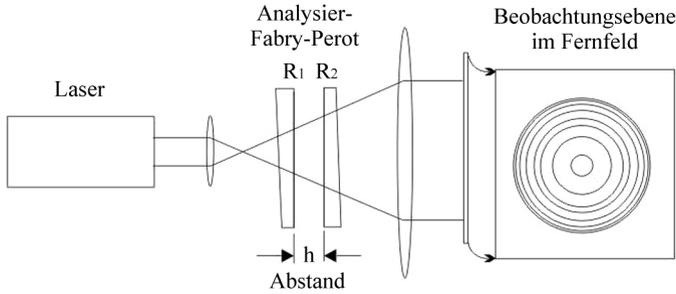
$$\mathcal{F} = \frac{\pi\sqrt{F}}{2}. \quad (1.74)$$

Der in der Gleichung 1.59 bzw. 1.73 auftretende Phasenwinkel  $\delta$  entspricht der Phasenänderung pro Hin- und Rücklauf, bei dem allerdings wegen der Strahlaufweitungslinse  $L_1$  im Versuchsaufbau die Vielzahl der möglichen Einfallswinkel  $\theta$  zu berücksichtigen sind. Bei einem angenommenen Spiegelabstand  $h$  ist somit lediglich die optische Länge  $L$  in Gleichung 1.59 durch  $\mu_B h \cdot (\cos \theta)$  sowie die Verstärkung  $G=1$  zu ersetzen. Die maximale Transmission  $T_{FP} = 1$  (jeweils für  $(\sin \delta/2)^2 = 0$ ) sowie die Halbwertsbreiten dieser Transmissionsmaxima lassen sich aus den folgenden Beziehungen ermitteln:

$$\nu_k = k \frac{c \cdot \cos \theta}{2\mu_B h}, \quad (1.75)$$

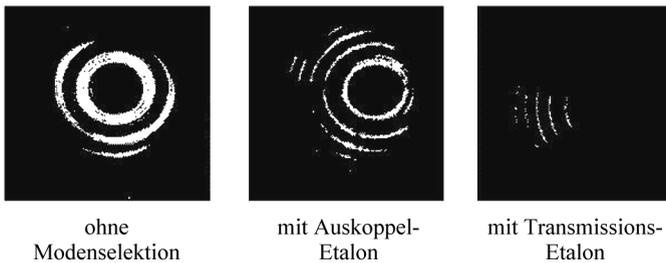
$$d\nu_k = \frac{(1 - R)}{2\pi\sqrt{R}} \frac{c \cdot \cos \theta}{\mu_B h}, \quad (1.76)$$

Bei der Ableitung der Halbwertsbreiten, d. h.  $T_{FP} = T_{FPmax}/2$  wurde dabei in Gleichung 1.73 die Näherung  $F(\sin \delta/2)^2 \approx F(\delta/2)^2$  verwendet.



**Abb. 1.8.** Messverfahren zur Bestimmung des longitudinalen Modenspektrums mit Fabry-Perot Interferometer

Fabry-Perot Interferogramme der Emission  
eines Festkörperlaser im Riesenimpulsbetrieb  
Abstand der Winkelordnungen: 60 Ghz



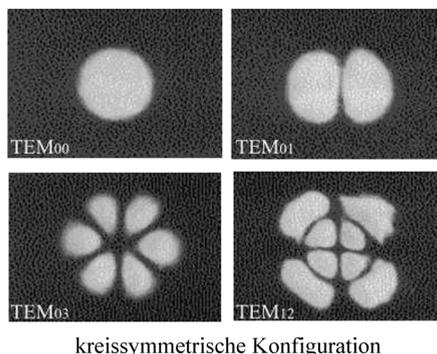
**Abb. 1.9.** Fabry-Perot Spektren, *links*: mehrmodige Emission, in der *Mitte*: durch selektive Maßnahmen bereits reduziertes Spektrum sowie *rechts*: einmodige Emission

Das divergierende Lichtbündel durchläuft somit mit wachsendem  $\theta$  viele Transmissionsmaxima bzw. Minima was zur Aufspaltung in die so genannten Winkelordnungen führt, die im Fernfeld als konzentrisches Ringsystem mit nach außen abnehmendem Abstand zu erkennen sind. Das Fernfeld erhält man nach der Beugungstheorie, da die Fabry-Perot Teilstrahlen im Unendlichen interferieren, im einfachsten Fall in der Brennebene einer langbrennweitigen Abbildungslinse. Da der Phasenterm  $\delta$  im Nenner der Gleichung 1.73 nicht nur vom Winkel  $\theta$  sondern zusätzlich ebenso von der Frequenz  $\nu$  abhängt, ist beim Anschwingen des Lasers auf mehreren longitudinalen Moden der Frequenzen  $\nu_k$  innerhalb jeder Winkelmode ein Aufspalten in viele Frequenzmoden zu erkennen.

Abbildung 1.9 zeigt einige typische Aufnahmen von Fabry-Perot Spektren eines Riesenimpuls-Rubinelasers [26]. In der linken Bildhälfte ist die Frequenzauflösung innerhalb der Winkelordnungen zu sehen, in der Mitte ist die Zahl der Moden bereits reduziert, während es sich im Bild rechts handelt es sich um Laseremission im Einmoden-Betrieb handelt, bei dem die Winkelordnungen nur noch mit je einer Frequenz  $\nu$  erkennbar sind.

### 1.5.2 Messung der transversalen Modenverteilungen

Die Frequenzabstände der transversalen Moden von den jeweils zugehörigen longitudinalen Eigenschwingungen, wie sie nach Gleichung 1.63 berechnet werden können, liegen im Bereich einiger MHz und darunter, sie liegen somit unterhalb der Ansprechempfindlichkeit der Analysier-Fabry-Perot Interferometer. Visuell können sie jedoch direkt im Fernfeld beobachtet werden. Wegen der Winkelabhängigkeiten der Phasenlagen, siehe Abb. 1.10, kommt es in den Ebenen senkrecht zur Laserstrahlausbreitungsrichtung zu Intensitätsknoten und Bäuchen. Bezüglich der Abhängigkeiten der Modenkonfigurationen von der Spiegelgeometrie (rechteckige oder kreisförmige Spiegel) sei auf die Literatur verwiesen [27, 28].



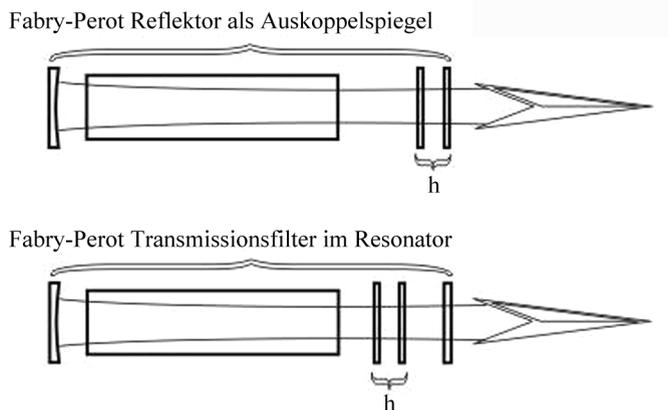
**Abb. 1.10.** Einige ausgewählte Beispiele transversaler Modenverteilungen

Symmetrische Modenverteilungen lassen sich mit Gaslasern, die eine homogene Brechungsindexverteilung des aktiven Mediums aufweisen, relativ leicht erzielen. Bei Festkörperlasern, z. B. Rubin- oder frequenzverdoppelten Neodym-Lasern, wie sie in der Lasermesstechnik häufig eingesetzt werden, schwingen meist zahlreiche transversale Moden höherer Ordnung mit an. Eine Eingrenzung auf die transversale Grundmode  $TEM_{00}$  ist zwar möglich. Hierfür ist jedoch ein beträchtlicher Aufwand erforderlich, z. B. durch den Einsatz von Blendenöffnungen im Resonator. Diese beeinflussen die Fresnel-Zahl und somit die Beugungsverluste der transversalen Moden höherer Ordnung, was jedoch mit einem entsprechenden Energie- bzw. Leistungsverlust gekoppelt ist.

## 1.6 Modenstruktur-Beeinflussung, Modenselektion

Von den Möglichkeiten, aufgrund der komplexen Verteilung anschwingender Moden, [29], die spektrale Emission zu beeinflussen, seien nur einige Verfahren zur Modenselektion angedeutet. Diese werden in der Praxis hauptsächlich

bei Festkörperlasern im Hinblick auf eine Kohärenzverbesserung angewandt. Diese Maßnahmen sind für eine Reihe von Lasermessverfahren, wie z. B. für die im Folgenden zu besprechende Holographie, von ausschlaggebender Bedeutung. Wie in den Abb. 1.11 und 1.12 gezeigt, eignen sich hierfür einerseits gekoppelte Resonatoren sowie andererseits sogenannte sättigbare Absorber.



**Abb. 1.11.** Möglichkeiten zur Modenselektion durch optisch gekoppelte Resonatoren mit Fabry-Perot Etalons, *oben*: in Reflexion sowie *unten*: in Transmission

Die gekoppelten Resonatoren erhält man durch Kombination des ursprünglichen Resonators mit einem, gegebenenfalls auch mit mehreren Fabry-Perot Spiegelsystemen. Prinzipiell können diese in Transmission oder in Reflexion eingesetzt werden, wobei sich (siehe Abb. 1.11) die Transmissionsfilter als schmalbandiger, d. h. selektiver, erweisen als Reflexionsauskopppler. Der effektive Abstand eines im Resonator befindlichen Fabry-Perot Transmissionsfilters lässt sich darüber hinaus durch Verkippen leicht verändern und somit zur Feinabstimmung ausnutzen.

Insbesondere für Festkörperlaser haben sich auch sättigbare Farbstoffe als nichtlineare Absorber zur Einengung des Modenspektrums bewährt. Diese Farbstoffe in entsprechender Konzentration, in geeigneten Lösungsmitteln, haben unter anderem die Eigenschaft, schmalbandig sättigbar zu sein. Der Sättigungsgrad in einer bestimmten longitudinalen Mode  $\nu_k$  beeinflusst somit nicht den der benachbarten Moden. Sättigung wird erreicht wenn, vom Grundzustand ausgehend, die über  $h\nu_k$  erreichbaren oberen Energieniveaus besetzt sind. In diesem Fall wird sich die für kleine Intensitäten (unterhalb der Sättigungsintensität  $I_s$ ) zunächst vorhandene Absorption schlagartig ändern, der Absorber wird oberhalb  $I_s$  transparent, siehe Abb. 1.12.

Geht man von einem vereinfachten 2-Niveau Modell der Schichttiefe  $l$  mit den Besetzungsdichten  $N_i$  der Zustände  $i=1,2$  aus, so lässt sich die Transmission durch  $T_{sa} = \exp[-\sigma(\nu)(N_1 - N_2)l]$  beschreiben.  $\sigma(\nu)$  ist

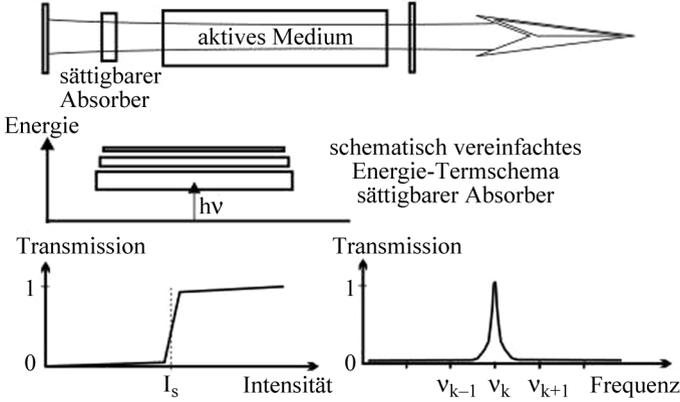


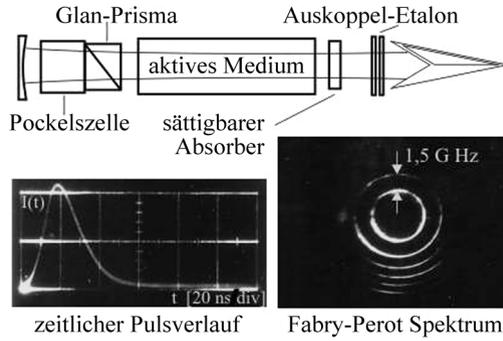
Abb. 1.12. Modenselektion durch Einsatz sättigbarer Absorber

der frequenzabhängige Wirkungsquerschnitt. In Sättigung wird  $T = 1$ , d. h.  $N_1 = N_2 \approx N_0/2$ , wobei  $N_0$  die Gesamtzahl der Farbstoffmoleküle darstellt.

Zur Sättigung eines Absorbers in einem Volumen  $S \cdot l$  ( $S$  ist der ausgeleuchtete Querschnitt) mit einem Impuls der Dauer  $t_p$  ist somit eine Leistung  $P_s = S \cdot l \cdot (N_0/2) \cdot h \cdot \nu / t_p$  notwendig. Mit der konzentrationsbedingten Anfangstransmission  $T_0$  erhält man daraus:

$$P_s = \frac{-\ln T_0}{2\sigma(\nu)t_p} Sh\nu. \tag{1.77}$$

Typische Farbstoffe für Rubinlaser sind Cryptocyanin und Phtalocyanin, die in Methanol oder in anderen Lösungsmitteln gelöst werden. Andere Farbstoff-Lösungsmittel Kombinationen sind in der Literatur bekannt und werden eingesetzt. Die Werte für deren Wirkungsquerschnitte  $\sigma$  liegen in der Größenordnung von einigen  $10^{-15}$  bis  $10^{-16} \text{cm}^2$ , die Relaxationszeiten im sub-ns-Bereich und darunter. Im Hinblick auf eine möglichst große Kohärenzlänge ist es wünschenswert und sogar erforderlich, die Emission des einzusetzenden Lasers auf eine einzige longitudinale Mode sowie auf die transversale Grundmode abzustimmen. Gelingt dies, so würde man beispielsweise bei einem Rubinlaser mit Spiegelreflexionen  $R_1 \approx 1$  und  $R_2 = 0,64$ , d. h.  $R=0,8$  (das sind gängige Werte), nach Gl. 1.73 einen F-Wert von  $F=80$  erhalten. Geht man darüber hinaus von einer optischen Resonatorlänge von 100 cm aus, so könnte man nach Gl. 1.61 (z. B. unter Annahme eines Lorentz Linienprofils), beispielsweise bei einer Verstärkung von  $G=1,1$  eine Kohärenzlänge von 15,6 m erwarten. Als typisches Beispiel für die in der Laserdiagnostik häufig eingesetzten Festkörperlaser zeigt Abb. 1.13 einen praktischen experimentellen Aufbau eines Monomode-Rubinlasers, bei dem zur präzisen Impulssynchronisation zusätzlich eine Pockelszelle mit einem Glan-Prismen Polarisator als elektro-optischer Güteschalter im Resonator verwendet wurde. Die longitudinale Modenselektion erfolgte dabei über die Kombination eines Auskoppel-



**Abb. 1.13.** Monomode Riesenimpuls laser, schematischer Aufbau, zeitliche und spektrale Emission

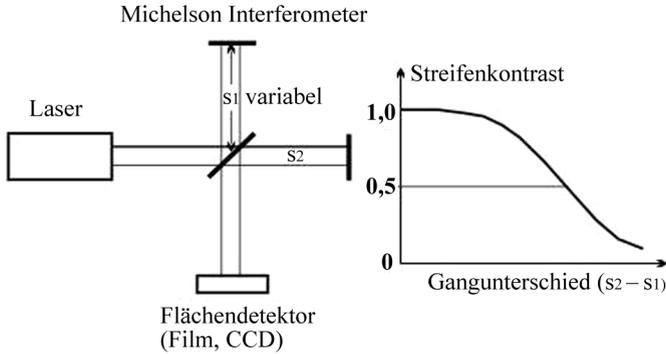
Fabry-Perot Etalons mit einem sättigbaren Absorber (z. B. Kryptocyanin in Methanol).

Der zeitliche Impulsverlauf wurde mit einer biplanaren Fotodiode und einem 1 GHz Oszillographen aufgenommen. Zur Registrierung des Spektrums wurde ein Messaufbau entsprechend der in Abb. 1.8 dargestellten Versuchsanordnung eingesetzt. Der Spiegelabstand des Analysier Fabry-Perot Interferometers wurde so gewählt, dass der Frequenzabstand zweier aufeinanderfolgender Winkelordnungen 1,5 GHz beträgt. Wie das Interferogramm zeigt, enthält dabei jede Winkelordnung nur einen einzigen Ring, wie es bei einer einmodigen Emission entsprechend zu erwarten ist.

### 1.7 Experimentelle Kohärenzlängenbestimmung

Eine experimentelle Bestimmung der zeitlichen Kohärenzeigenschaften ist mit Hilfe der Gl. 1.51 möglich. Diese beschreibt den Zusammenhang zwischen Streifenkontrast und normierter Kohärenzfunktion  $|\gamma_{12}(\tau)|$  bei einem typischen Zweistrahl-Interferenzexperiment. Hierfür eignen sich beispielsweise, wie bereits mehrfach angedeutet, Michelson Interferometer (siehe Abb. 1.14). Der Streifenkontrast ist dabei als Funktion des Gangunterschiedes  $\delta s = (s_2 - s_1)$  in den beiden Interferometerarmen zu bestimmen. Mit zunehmendem  $\delta s$  ist dabei eine stetige Kontrastabnahme festzustellen. Als Kohärenzlänge bezeichnet man üblicherweise den Weglängenunterschied, bei dem die Streifen sichtbarkeit, demnach auch der Betrag der wechselseitigen normierten Kohärenzfunktion, auf einen bestimmten Wert, z. B. auf  $1/e^2$  abgefallen ist.

Messungen mit einem Rubinlaser ergaben allerdings, dass die mit einem derartigen Verfahren bestimmten experimentellen Kohärenzlängen nicht mit den theoretisch zu erwartenden Werten übereinstimmen. Ein Riesenimpuls mit einer typischen Halbwertsbreite von 20 ns besteht danach, selbst wenn die Verfahren der Modenselektion optimal genutzt werden, nicht aus einem



**Abb. 1.14.** Versuchsaufbau zur Messung des Streifenkontrastes  $\mathcal{V}$

über die ganze Zeitdauer der Impulse in sich geschlossenen, kohärenten Wellenzug. Es sind offensichtlich weitere Mechanismen vorhanden, die zu einer Frequenzverbreiterung und somit zu einer entsprechenden Reduzierung der Kohärenzzeit beitragen.

Geht man zur Beschreibung dieses Sachverhaltes vereinfachend von einer ebenen Welle in einem durch den Brechungsindex  $\mu_B$  gekennzeichneten aktiven Lasermedium aus, so kann deren Amplitude, bei Ausbreitung in x-Richtung, durch den Realteil des komplexen analytischen Signals wie folgt beschrieben werden:

$$V(x, t) = V_0 \sin 2\pi(\nu_0 t - \frac{\mu_B x}{\lambda_0}). \quad (1.78)$$

Die Phase  $\phi = 2\pi\nu_0 t - \frac{2\pi}{\lambda_0} \mu_B x$  bestimmt die Frequenz  $\frac{d\phi}{dt}$ , somit gilt

$$d\phi = \frac{\partial\phi}{\partial t} dt + \frac{\partial\phi}{\partial x} dx, \quad (1.79)$$

$$d\phi = 2\pi(\nu_0 - \frac{x}{\lambda_0} \frac{\partial\mu_B}{\partial t}) dt - \frac{2\pi\mu_B}{\lambda_0} dx, \quad (1.80)$$

$$\frac{d\phi}{dt} = 2\pi(\nu_0 - \frac{x}{\lambda_0} \frac{\partial\mu_B}{\partial t}) - \frac{2\pi}{\lambda_0} \mu_B \frac{dx}{dt}. \quad (1.81)$$

An einem festen Raumpunkt  $x$  erhält man somit Frequenzänderungen, wenn sich der Brechungsindex zeitlich, z. B. als Funktion der Temperatur ändert

$$d\nu = -\frac{x}{\lambda_0} \frac{\partial\mu_B}{\partial t} = \frac{x}{\lambda_0} \frac{\partial\mu_B}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t}. \quad (1.82)$$

Bei einem Rubinlaser im Riesenimpulsbetrieb beispielsweise, bei dem wie im vorher betrachteten Beispiel zur Modenselektion sowohl sättigbare Absorber als auch Fabry-Perot Etalons eingesetzt werden, können temperaturbedingte Brechungsindexänderungen im Laserkristall selbst wie in den übrigen optischen Komponenten, insbesondere in der Absorberfarbstoffküvette, erfolgen.

- Einfluss des Laserkristalls am Beispiel Rubin: In der Literatur findet man Frequenzänderungen durch Erwärmung des Rubins von einigen kHz/ns. Daneben bewirken Änderungen der Besetzungsinversion (Volumenänderungen der Chrom-Ionen) ebenfalls optische Brechzahländerungen. Nach Messungen von Witte bewirken Temperaturerhöhungen sowohl Verschiebungen der Mittenfrequenzen  $((1/\nu_0) \cdot (d\nu_0/dT) = -10 \cdot 10^{-6}/^{\circ}C)$  als auch Änderungen der Linienbreiten. Die relativen Kristalllängenänderungen entsprechend der Ausdehnungskoeffizienten können aus der Beziehung  $(1/L) \cdot (dL/dT) = 5,85 \cdot 10^{-6}/^{\circ}C$  abgeschätzt werden. Die Brechzahländerung weist zwei Anteile auf:

$$d\mu_B/dT = \partial\mu_B/\partial T + (\partial\mu_B/\partial\nu) \cdot (d\nu/dT) = (12,5 \cdot 10^{-6} - 4,5 \cdot 10^{-7})/^{\circ}C.$$

- Einfluss der Absorberfarbstofflösungen:  
Die Temperatureffekte in den Flüssigkeiten hängen im Einzelfall von den verwendeten Farbstoffen und Lösungsmitteln ab. Sie sind jedoch gegenüber denen der Kristalle größenordnungsmäßig um einen Faktor 10 stärker ausgeprägt. Hinzu können kompliziertere Prozesse kommen, wie thermisch induzierte Phasengitter, die Reflexionen, nichtlineare Effekte und somit ebenfalls Frequenzänderungen bewirken.

Experimentelle Untersuchungen an Rubinlasern mit einem Fabry-Perot Interferometer, gekoppelt mit einer hochauflösenden Streak-Kamera, ergaben während der Impulsdauer Frequenzänderungen bis zu 200 MHz. Das entspricht einer Frequenzdrift von mehr als 3,4 MHz/ns. Wie im Folgenden gezeigt wird, ergeben sich aus zeitlichen Frequenzverschiebungen unmittelbare Konsequenzen für die Kohärenzlänge.

## 1.8 Einfluss der Frequenzdrift auf die Kohärenzlänge

Die folgenden Ausführungen sollen den kohärenzbegrenzenden Einfluss von Frequenzverschiebungen, wie sie z. B. nach den obigen Ausführungen, durch thermische Prozesse, immer vorhanden sind, durch eine Berechnung der wechselseitigen normierten Kohärenzfunktion  $\gamma_{12}(\tau)$  anschaulich machen. Diese Rechnungen sollen darüber hinaus zeigen, dass die in diesem Kapitel diskutierten Funktionen keineswegs nur abstrakte mathematische Definitionen sind, sondern dass sie für konkrete Anwendungen relativ einfach zu handhaben sind und dass ein direkter Bezug zu experimentell messbaren Größen besteht.

- **Konstante Frequenz:**  $\nu = \nu_0$   
Geht man in einem Experiment, wie es beispielsweise in Abb. 1.14 dargestellt ist, zunächst von den komplexen analytischen Signalen  $V_i$  aus und approximiert die zeitlichen Impulsverläufe durch Gauß-Funktionen der Halbwertsbreite  $\tau_0$ , was für Riesenimpulse von Festkörperlasern (Rubin, Neodym oder anderen Lasern wie Alexandrit oder Ti-Saphir) eine gute Näherung darstellt, dann lassen sich die zur Berechnung der Kohärenzfunktion erforderlichen Feldfunktionen wie folgt darstellen:

$$\begin{aligned}
 V_1(t + \tau) &= V(\vec{r}_1, t + \tau) = V_0 e^{i\phi_1} e^{-\left(\frac{t+\tau}{\tau_0}\right)^2} e^{i2\pi\nu_0(t+\tau)}, \\
 V_2(t) &= V(\vec{r}_2, t) = V_0 e^{i\phi_2} e^{-\left(\frac{t}{\tau_0}\right)^2} e^{i2\pi\nu_0 t}.
 \end{aligned} \tag{1.83}$$

Setzt man für die Durchrechnung zunächst weiter vereinfachend identische Anfangsphasen  $\phi_1 = \phi_2$  voraus, so ergibt sich nach Gl. 1.45 die Kohärenzfunktion  $\Gamma_{12}(\tau)$  aus

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{12}(\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} V_0^2 e^{\left\{-\left(\frac{t+\tau}{\tau_0}\right)^2 - \left(\frac{t}{\tau_0}\right)^2 + i2\pi\nu_0\tau\right\}} dt, \\
 \Gamma_{12}(\tau) &= V_0^2 e^{i2\pi\nu_0\tau} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} e^{\left\{-\left(\frac{t+\tau}{\tau_0}\right)^2 - \left(\frac{t}{\tau_0}\right)^2\right\}} dt.
 \end{aligned} \tag{1.84}$$

Durch quadratische Ergänzung im Exponenten (durch Addition von  $[\left(\frac{\tau}{\sqrt{2}\tau_0}\right)^2 - \left(\frac{\tau}{\sqrt{2}\tau_0}\right)^2]$ ) erhält man dann:

$$\Gamma_{12}(\tau) = V_0^2 e^{i2\pi\nu_0\tau} e^{-\frac{\tau^2}{2\tau_0^2}} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} e^{-\left(\frac{t+\tau}{\tau_0}\right)^2 - \left(\frac{t}{\tau_0}\right)^2 + \left(\frac{\tau}{\sqrt{2}\tau_0}\right)^2} dt. \tag{1.85}$$

Während der Beobachtungszeit  $T_B$  lässt sich der Grenzwert dieses Integrals ausführen

$$\Gamma_{12}(\tau) = V_0^2 e^{i2\pi\nu_0\tau} e^{-\frac{\tau^2}{2\tau_0^2}} \frac{1}{2T_B} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\tau^2}{\tau_0^2} \left(t + \frac{\tau}{2}\right)^2} dt. \tag{1.86}$$

Mit der aus Integraltabellen (z. B. Bronstein) bekannten Beziehung

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \sqrt{2\pi} \tag{1.87}$$

lässt das unbestimmte Integral lösen, mit  $z = \frac{\tau}{\tau_0} \left(t + \frac{\tau}{2}\right)$  und  $dz = \frac{\tau}{\tau_0} dt$

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{12}(\tau) &= V_0^2 e^{i2\pi\nu_0\tau} e^{-\frac{\tau^2}{2\tau_0^2}} \frac{1}{2T_B} \frac{\tau_0}{2} \sqrt{2\pi}, \\
 &= \frac{1}{2T_B} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \tau_0 V_0^2 e^{-\frac{\tau^2}{2\tau_0^2}} e^{i2\pi\nu_0\tau}.
 \end{aligned} \tag{1.88}$$

Entsprechende Beziehungen lassen sich auch für die beiden, für die Normierung von  $\Gamma_{12}(\tau)$  erforderlichen, Autokorrelationsfunktionen  $\Gamma_{11}$  und  $\Gamma_{22}$  erhalten,

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}(0) &= \Gamma_{22}(0) = \frac{1}{2T_B} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \tau_0 V_0^2, \\ \gamma_{12}(\tau) &= \frac{\Gamma_{12}(\tau)}{\sqrt{\Gamma_{11}(0)\Gamma_{22}(0)}} = e^{-\frac{\tau^2}{2\tau_0^2}} e^{i2\pi\nu_0\tau}, \\ |\gamma_{12}(\tau)| &= \sqrt{\gamma_{12}(\tau)\gamma_{12}^*(\tau)} = e^{-\frac{\tau^2}{2\tau_0^2}}. \end{aligned} \tag{1.89}$$

Damit ist der Betrag der normierten wechselseitigen Kohärenzfunktion durch eine relativ einfache analytische Beziehung bestimmt, nach der die vorgegebene Impulsbreite  $\tau_0$  die Kohärenzzeit (beispielsweise definiert durch den Abfall von  $\gamma_{12}(\tau)$  auf  $1/e^2$ ) direkt bestimmen würde. Es ist bei einer quantitativen Überprüfung allerdings festzustellen, dass die nach Gl. 1.89 berechnete wechselseitige Kohärenzfunktion den experimentellen Sachverhalt nicht ausreichend genau beschreibt. Der gerechnete Kurvenverlauf fällt mit wachsendem  $\tau$  langsamer ab als die aus dem Streifenkontrast ermittelte Kurve. Dies ist jedoch zu erwarten, da die Frequenz selbst während der kurzen Impulsdauer nicht konstant bleibt. Im Folgenden soll dies in einer einfachen Näherung berücksichtigt werden.

• **Zeitliche Frequenzdrift:**  $\nu = \nu(t)$

In erster Näherung soll davon ausgegangen werden, dass die zeitliche Frequenzverschiebung als lineare Funktion der Zeit beschrieben werden kann, d. h.  $\nu(t) = \nu_0 + Kt$ , wobei  $K$  eine Konstante darstellt, die am Ende der Rechnung so gewählt wird, dass der errechnete Verlauf mit den Messkurven übereinstimmt. Bei der Bestimmung der normierten Kohärenzfunktion geht man wieder von der Korrelation der beiden komplexen analytischen Signalamplituden aus. Diese sind durch

$$V_i(t) = V_0 e^{-\frac{t}{\tau_0}} e^{i2\pi(\nu_0 + Kt)t} \tag{1.90}$$

gegeben (mit  $i=1$  bzw.  $2$ ), wobei für die Phasen bereits vereinfachend  $\phi_1 = \phi_2$  angenommen wurde, so dass gilt:

$$\begin{aligned} \Gamma_{12}(\tau) &= V_0^2 \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T e^{-\left(\frac{t+\tau}{\tau_0}\right)^2} e^{i2\pi\nu_0(t+\tau)} e^{i2\pi K(t+\tau)^2} \cdot \\ &\quad e^{-\left(\frac{t}{\tau_0}\right)^2} e^{-i2\pi\nu_0 t} e^{-i2\pi K t^2} dt. \end{aligned} \tag{1.91}$$

Im weiteren Berechnungsverlauf führt man ebenfalls eine quadratische Ergänzung des Terms im Exponenten unter dem Integral durch, um dieses auf das bekannte uneigentliche Integral  $\left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(z^2/2)} dz \right\}$  zurückzuführen.

Die Normierung erfolgt auch hier durch Division durch das geometrische Mittel der beiden Autokorrelationsfunktionen, so dass sich nach einigen Zeilen Zwischenrechnung die folgende, von Gleichung 1.89 abweichende Beziehung ergibt:

$$\gamma_{12}(\tau) = e^{-\left(\frac{\tau^2}{2\tau_0^2} + 2\pi^2 K^2 \tau^2 \tau_0^2\right)} e^{i2\pi\nu_0\tau}. \quad (1.92)$$

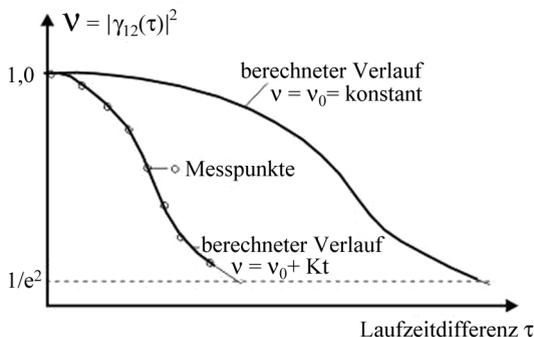


Abb. 1.15. Kohärenzfunktion als Funktion der Laufzeitdifferenz  $\tau$

Wählt man den Wert  $K$  so, dass der damit errechnete Kurvenverlauf der normierten wechselseitigen Kohärenzfunktion  $\gamma_{12}(\tau)$  mit dem experimentell gemessenen Verlauf übereinstimmt, so lässt sich daraus die die Frequenzdrift bestimmende Größe  $K$  in dieser ersten linearen Näherung ermitteln. Dieser Sachverhalt ist schematisch in Abb. 1.15 dargestellt. Im vorliegenden betrachteten Fall eines Rubinlaseroszillators im Riesenimpulsbetrieb konnte danach von A. Hirth, [30], der Wert  $K$  in dem von ihm untersuchten Versuchsaufbau zu  $K = 1,67 \cdot 10^{15} [s^{-2}]$  bestimmt werden. Wie diese Rechnungen zeigen, bewirkt eine thermisch induzierte Frequenzdrift, selbst während kurzer Zeitintervalle (beim gütegeschalteten Riesenimpulsbetrieb im Nanosekundenbereich) eine deutliche Verringerung der Kohärenzzeit und damit der Kohärenzlänge, was bei den in den folgenden Kapiteln zu besprechenden holographischen Messverfahren zu berücksichtigen ist.



<http://www.springer.com/978-3-540-29920-2>

Lasermesstechnik

Diagnostik der Kurzzeitphysik

Hugenschmidt, M.

2007, XV, 411 S., Softcover

ISBN: 978-3-540-29920-2