Kapitel 2

Quellen und Senken als Feldursachen

Wir sprechen von Quellenfeldern und Wirbelfeldern. Beide unterscheiden sich grundlegend voneinander. Wir wollen deswegen beide Feldarten getrennt besprechen, um deren Unterschiede deutlich herausarbeiten zu können. Zunächst gehört unsere Aufmerksamkeit den Quellenfeldern.

2.1 Quellenfelder qualitativ

Freie elektrische (nicht aber magnetische!) Ladungen wie z.B. Elektronen und Ionen, die im Raum einzeln, also diskret, oder auch kontinuierlich als makroskopische Raumladungsdichten vorkommen, sind Ursachen eines elektrischen Quellenfeldes. Dabei sind diese Ladungen getrennt worden von der sie neutralisierenden elektrischen Gegenladung.

1. Beispiel

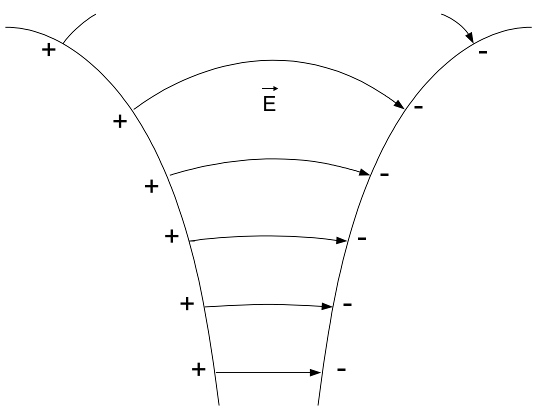


Bild 2.1.1: Elektrisches Quellenfeld E zwischen zwei Körpern

Von zwei einander benachbarten Körpern enthalte der eine einen Überschuß an positiver Ladung, der andere einen Überschuß an negativer Ladung. Es entsteht ein Quellenfeld, das bei positiven Ladungen (Quellen) entspringt und bei negativen Ladungen (Senken) endet.

2. Beispiel: Eine Metallkugel, die einen Überschuß an positiven elektrischen Ladungen trägt (Elektronen wurden abgezogen) und die, verglichen mit ihrem Radius r_0, weit von anderen Körpern entfernt ist, ist Anfang, Ausgangspunkt oder Quelle für ein kugelsymmetrisches elektrisches Quellenfeld $\vec{E}$:

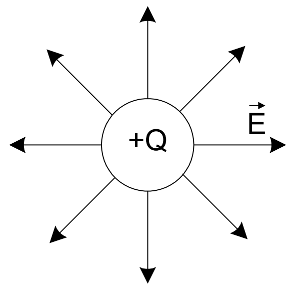


Bild 2.1.2: Kugel mit positivem Ladungsüberschuß als Quelle

Definitionsgemäß, was allein historisch begründet ist, zeigt der elektrische Feldvektor von positiven zu negativen Ladungen hin und nicht umgekehrt. Eine andere Kugel, mit nur negativem Ladungsüberschuß, ist daher Ende, Senke oder negative Quelle eines kugelsymmetrischen Vektorfeldes $\vec{E}$:

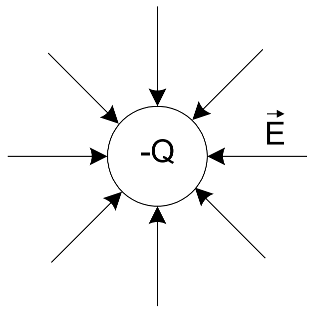


Bild 2.1.3: Kugel mit negativem Ladungsüberschuß als Senke eines Quellenfeldes

Positive elektrische Ladungen sind also Anfang oder **Quellen**, **negative elektrische Ladungen** sind Ende oder **Senken** eines elektrischen Quellenfeldes. Von einem "Senkenfeld" spricht man nicht. Eher bezeichnet man gelegentlich eine Senke (negative elektrische Ladung) als negative Quelle.

3. Beispiel: Ein komplizierterer Verlauf des elektrischen Feldes entsteht bei den folgenden drei, einander benachbarten, elektrisch geladenen Kugeln.

Treten nicht nur drei, sondern n diskrete Quellen im Raum v auf, so sind sie alle Ursache für das Entstehen eines entsprechend komplizierteren Quellenfeldes. An Stellen, an denen keine elektrischen Ladungen vorkommen, ist zwar ein elektrisches Feld vorhanden, aber es ist quellenfrei (der Raum zwischen den drei Kugeln). Das Feld kann von Ladungen, die an anderer Stelle sitzen, (bei unserem Beispiel auf den Kugeln,) erzeugt werden.

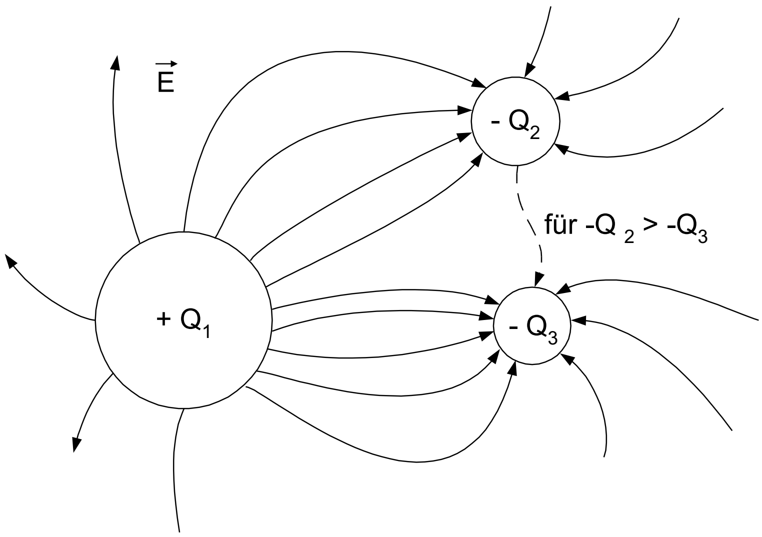
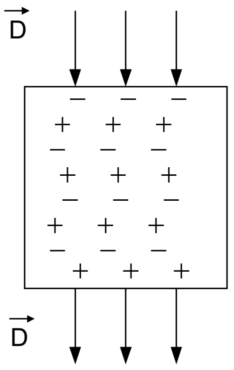


Bild 2.1.4: Quellenfeld bei drei geladenen Kugeln

Einige Quellen der Elektrotechnik

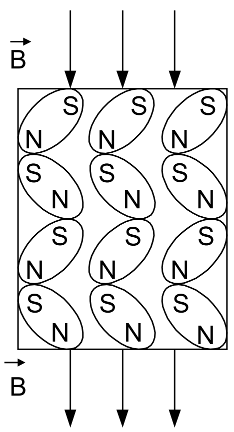
Einzelne (diskrete) positive und negative elektrische Ladungen q_i sowie kontinuierliche Flächenladungsdichten σ und Raumladungsdichten η sind Quellen des elektrischen Feldes. Es gibt jedoch keine damit vergleichbaren freien oder abtrennbaren magnetischen Ladungen. Dennoch kennt man an Ferromagnetika Quellen der magnetischen Feldstärke $\vec{H}$ (nicht aber von $\vec{B}$), auch ohne Existenz magnetischer Einzelladungen oder Monopole. Ebenso gibt es Quellen der elektrischen Feldstärke $\vec{E}$ (nicht aber von $\vec{D}$) an Dielektrika, auch ohne Vorhandensein freier elektrischer Ladungen, wie spätere Beispiele zeigen werden.

Solche Quellen findet man z.B. bei permanent polarisierter Materie an den Stirnflächen von Permanentmagneten und Elektreten. Aber auch ohne permanente Polarisation, jedoch bewirkt durch ein äußeres Feld, gibt es Quellen, besonders an Stirnflächen von Dielektrika durch elastische Ladungsverschiebung oder durch Ausrichtung von elektrischen Elementardipolen. Und es gibt Quellen, besonders an den Stirnflächen von Ferromagnetika, durch Ausrichtung von Elementarmagneten. Bild 2.1.5 möge dies für ein nicht polarisiertes Dielektrikum, Bild 2.1.6 für ein Ferromagnetikum schematisch verdeutlichen:



Eine von außen eingeprägte, elektrische Flußdichte $\vec{D}$ bewirkt mehr oder weniger starke elastische Ladungsverschiebungen im Dielektrikum, derart, daß an der einen Stirnfläche die negativen, an der anderen Stirnfläche die positiven Ladungen überwiegen. So werden die Stirnflächen zu Quellen für $\vec{E}$. (Siehe auch Abschnitt 4.1.1)

Bild 2.1.5: Prinzip der elastischen Ladungsverschiebung im unpolarisierten Dielektrikum



Eine von außen eingeprägte, magnetische Flußdichte $\vec{B}$ bewirkt im Ferromagnetikum eine mehr oder weniger starke Ausrichtung der Elementarmagnete derart, daß an der einen Stirnfläche die Nordpole, an der anderen Stirnfläche die Südpole überwiegen. So werden die Stirnflächen zu Quellen von $\vec{H}$. (Siehe Abschnitt 4.2.2)

Bild 2.1.6: Prinzip der Ausrichtung von Elementarmagneten im Ferromagnetikum

2.2 Quellenfelder quantitativ

2.2.1 Ergiebigkeit oder Quellenstärke

Es wurde gezeigt, daß für das Vektorfeld $\vec{u}$ ein Fluß durch das Flächenintegral $\phi = \iint \vec{u}\, d\vec{a}$ definiert ist. Wir wählen jetzt als Fläche eine geschlossene Hülle, eine Hüllfläche a_H, die das endlich große Volumen v einschließt. An der Oberfläche der Hülle soll ein Vektorfeld $\vec{u}$ vorhanden sein. Dieses kann durch Ursachen, die innerhalb oder außerhalb der Hüllfläche liegen, verursacht sein. Wir vereinbaren, wie allgemein üblich, daß der Normalenvektor $\vec{n}$ stets von der Hüllfläche weg, nach außen zeigt; dann gilt diese Richtung $\vec{n}$ auch für das Flächenelement auf der Oberfläche der Hülle

$$d\vec{a} = \vec{n}\; da. \qquad (2.2\text{– }1)$$

Alle Feldvektoren $\vec{u}$, die von der Oberfläche der Hülle nach außen (innen) zeigen, liefern einen positiven (negativen) Beitrag zum Fluß. Nur für tangential verlaufende Feldlinien: $\vec{u} \perp d\vec{a}$ ist $\vec{u}\, d\vec{a} = 0$.

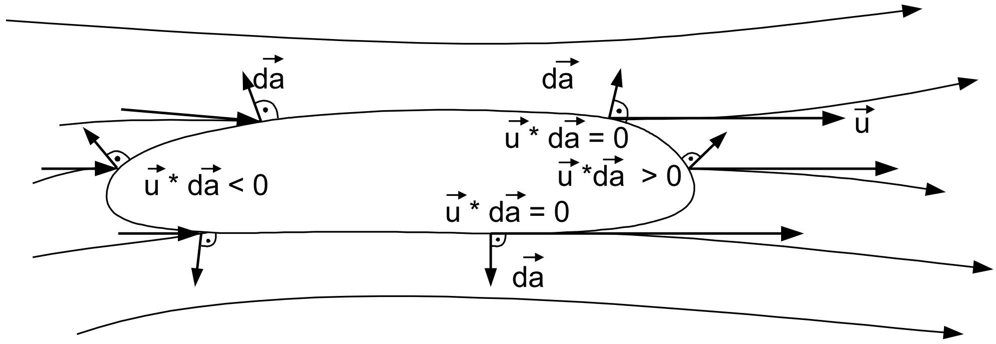


Bild 2.2.1: Flußanteile, die teilweise positiv, negativ oder Null sind

Den Wert des Hüllenintegrals bezeichnen wir als **Hüllenfluß** ϕ_H oder als **Ergiebigkeit** des eingeschlossenen Volumens v:

$$\phi_H = \oiint \vec{u}\, d\vec{a} = \begin{cases} a) & > & 0 \\ b) & < & 0 \\ c) & = & 0 \end{cases} \tag{2.2– 2}$$

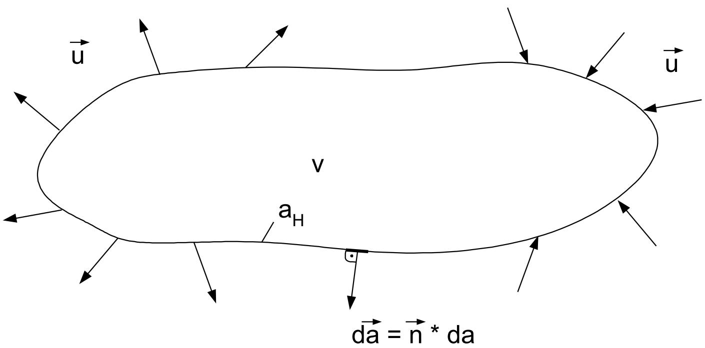


Bild 2.2.2: Volumen mit möglicherweise Quellen und Senken innerhalb a_H

Wir diskutieren die nach Bild 2.2.2 möglichen Ergebnisse.

Zu **a)** $\phi_H > 0$: Im eingeschlossenen Volumen v befinden sich eine oder mehrere Quellen, so daß mehr Feldlinien, Feldröhren oder Feldvektoren aus der Hüllfläche austreten, als in sie hineinführen: $\oiint \vec{u}\, d\vec{a} > 0$ bedeutet ϕ_H und daher auch die Ergiebigkeit sind positiv.

Zu **b)** $\phi_H < 0$: Die Hüllfläche schließt eine oder mehrere Senken, vielleicht u.a. auch Quellen ein, jedoch bleibt ein Überschuß der Senken: $\oiint \vec{u}\, d\vec{a} < 0$. Es führen also mehr Feldlinien, Feldröhren oder Feldvektoren in die Hülle hinein als aus ihr heraus. Der Hüllenfluß ϕ_H und damit die Ergiebigkeit sind negativ.

Zu **c)** $\phi_H = 0$: Der Wert des Hüllenintegrals und damit die Ergiebigkeit sind Null. Dafür gibt es zwei Möglichkeiten:

c,1) Die Hüllfläche a_H schließt Quellen und Senken von gleichem Betrag ein. Die Ergiebigkeit ist Null. Beispiel mit diskreten elektrischen Ladungen:

$$\sum_{i=1}^{n} |q_{i+}| = \sum_{j=1}^{m} |q_{j-}| \qquad (2.2\text{– }3)$$

c,2) In der Hüllfläche sind gar keine echten Quellen und Senken enthalten. Daher müssen alle in die Hülle eintretenden Feldlinien, Feldröhren oder Feldvektoren (an anderer Stelle) auch wieder aus der Hülle austreten.

Beispiel Permanentmagnet: Nordpol und Südpol sind polarisierte Quelle und Senke eines magnetischen Feldes, jedoch gibt es keine freien magnetischen Ladungen als Quellen und Senken (siehe hierzu Abschnitt 2.2.3, Beispiel 1). Umfaßt die Hülle den ganzen Permanentmagneten, dann ist die Ergiebigkeit gleich Null. Das Hüllenintegral

$$\boxed{\phi_H = \oiint \vec{u}\, d\vec{a} = \oiint \vec{u}\, \vec{n}\, da \qquad \textbf{Hüllenintegral}} \qquad (2.2\text{– }4)$$

ist die allgemeingültige Rechenvorschrift zur Ermittlung der **Ergiebigkeit**, die auch **Quellenstärke** genannt wird. Sie liefert stets den Überschuß zwischen eingeschlossenen Quellen und Senken als integralen (zusammenfassenden, summierenden) Wert.

Beispiel zu positiver Ergiebigkeit

Eine Metallkugel vom Radius r_0 sei durch Wegnehmen von Elektronen mit einer Ladung +Q positiv geladen. Sie verteilt sich gleichmäßig auf der Kugeloberfläche mit der Ladungsdichte $\sigma = Q/(4\pi r^2)$. Für $R \geq r_0$ zeigen radial nach außen: Der Vektor $\vec{D} = (+Q/(4\pi R^2))\vec{e}_r$ der elektrischen Flußdichte und der Vektor $\vec{E} = \vec{D}/\epsilon = (D/\epsilon)\vec{e}_r$ der elektrischen Feldstärke.

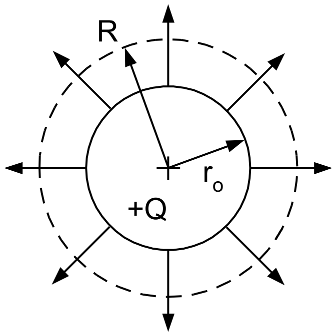


Bild 2.2.3: Radialsymmetrisches Feld um eine geladene Metallkugel

Legt man in Gedanken eine Hüllfläche um die Metallkugel und zwar zweckmäßigerweise eine konzentrische Hohlkugel mit dem Radius $R > r_0$, dann ist die dort zu berechnende Ergiebigkeit:

$$\oiint \vec{D}\, d\vec{a} = \oiint \frac{Q\, \vec{e}_r}{4\pi R^2} da\, \vec{e}_r = \frac{Q}{4\pi R^2} \oiint da = \frac{Q}{4\pi R^2} 4\pi R^2 = Q. \qquad (2.2\text{– }5)$$

Die Ergiebigkeit oder Quellenstärke ist gleich der eingeschlossenen Ladung +Q. Denn im Volumen mit den Radien $r_0 < r \leq R$ kommen, was wir voraussetzen wollen, keine weiteren elektrischen Ladungen vor.

2.2.2 Divergenz oder Quellendichte

Die Ergiebigkeit oder Quellenstärke, ist eine integrale Aussage. Man erfährt durch sie, ob es in einem endlichen Volumen einen Überschuß der Quellen über die Senken oder umgekehrt gibt und wie groß er ist. Aber an welchen Orten innerhalb der Hüllfläche a_H im Volumen v Quellen oder Senken sitzen, ist zunächst unbekannt.

Vergleich: In einem Paket sei eine bestimmte Masse enthalten. Man spürt's am Gewicht. Dies ist eine integrale Feststellung, ähnlich der Ergiebigkeit. Wie jedoch die Masse innerhalb des Paketes auf die Volumenelemente verteilt ist, darüber sagt die Ergiebigkeit nichts aus. Man benötigt eine Rechenvorschrift die einer Lupe vergleichbar ist. Sie muß differentieller Art sein und Aussagen machen über die "Masseverteilung", elektrisch über Quellen und Senken in den Volumenelementen. Das ist die Quellendichte.

Gedankenexperiment zur **Herleitung der Quellendichte**: Wir berechnen wie im Abschnitt 2.2.1 die Ergiebigkeit mittels des Hüllenintegrals, wählen jedoch unsere Hüllfläche kleiner und kleiner, bis sie schließlich nur noch ein Volumenelement umfaßt. Mathematisch bedeutet dies, wir bilden einen Grenzwert. Dann dividieren wir durch dieses winzige Volumen:

$$lim_{v\to 0}\frac{1}{v}\oiint \vec{u}\,d\vec{a}\begin{cases} =\text{Ergiebigkeit pro Volumenelement} \\ =\text{Quellendichte des Vektors } \vec{u} \\ =\text{Divergenz } \vec{u} \quad (= div\ \vec{u}) \end{cases} \qquad (2.2\text{– }6)$$

Soweit die Herleitung von $div\,\vec{u}$, gesprochen: Divergenz u. Sie ist ein Skalar und lautet als **Rechenvorschrift**, angewandt auf den Vektor $\vec{u}$, in kartesischen Koordinaten:

$$div\,\vec{u} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}; \qquad \vec{u} = u_x\,\vec{e}_x + u_y\,\vec{e}_y + u_z\,\vec{e}_z. \qquad (2.2\text{– }7)$$

Für kartesische Koordinaten kann dieses Ergebnis auch mit dem symbolischen Vektor Nabla "∇" wie folgt angeschrieben werden:

$$\boxed{\begin{aligned} & div\,\vec{u} \equiv \nabla\vec{u} \\ &\qquad = \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial z}\vec{e}_z\right)(u_x\,\vec{e}_x + u_y\,\vec{e}_y + u_z\,\vec{e}_z) \\ &\qquad = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{aligned}} \qquad (2.2\text{– }8)$$

Der Ausdruck $div\,\vec{u}$ sollte in Zylinder- oder Kugelkoordinaten, der Fehlerquellen wegen, nicht durch $\nabla\vec{u}$ gebildet werden. Es ist besser, der Nichtmathematiker schlägt die fertige Formel in den gewünschten Koordinaten im Anhang nach!

Erklärung der Divergenz in Worten

Die Divergenz oder Quellendichte eines Vektorfeldes $\vec{u}$ ist nichts anderes als die Ergiebigkeit eines Volumenelementes bezogen darauf. Ist die Divergenz des Vektorfeldes $\vec{u}$ ungleich Null, so gibt es Quellen oder Senken im betrachteten Volumenelement dv. Differentiell betrachtet, ist $div\,\vec{u}$ gleich der Längsänderung des Vektors $\vec{u}$ im kleinen; denn jede Komponente von $\vec{u}$ wird differenziert nach derjenigen Variablen, in deren Richtung diese Komponente wirkt:

$$\text{aus } u_x \text{ wird } \frac{\partial u_x}{\partial x}, \qquad \text{aus } u_y \text{ wird } \frac{\partial u_y}{\partial y}, \qquad \text{aus } u_z \text{ wird } \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

gebildet. Für diese Berechnung der Divergenz muß der funktionale Zusammenhang (also der Vektor $\vec{u}$ mit der Ortsabhängigkeit seiner Komponenten) gegeben sein:

$$u_x = f_1(x,y,z); \qquad u_y = f_2(x,y,z); \qquad u_z = f_3(x,y,z).$$

Quellen oder Senken im Raum werden dann vorhanden sein, wenn sich u_x in x–Richtung und/oder u_y in y-Richtung und/oder u_z in z-Richtung ändern. Bei dieser Aussage ist jedoch Vorsicht geboten; denn die Quellendichte kann auch Null sein, wenn, z. B. in der Ebene ($u_z = 0$), u_x von x in der gleichen Weise abhängt, wie $-u_y$ von y; dann nämlich gilt mit

$$\frac{\partial u_z}{\partial z} = 0; \qquad \frac{\partial u_x}{\partial x} = -\frac{\partial u_y}{\partial y} \qquad \text{und} \qquad div\,\vec{u} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + 0 = 0.$$

Solche Vektorfelder sind quellenfrei!

1. Einfachstes Beispiel für Quellenhaltigkeit

Gegeben sei ein **linear polarisiertes Vektorfeld** $\vec{u}$ (der Feldvektor $\vec{u}$ zeigt dabei nur in eine Richtung) z.B.: $\vec{u} = u_x\,\vec{e}_x$. Seine Quellendichte ist von Null verschieden, wenn gilt:

$$div\,\vec{u} = \frac{\partial u_x}{\partial x} \neq 0.$$

Die vorhandene u_x–Komponente muß sich also in Richtung $\pm\vec{e}_x$ ändern, dann ist dieses Feld ist in seinem Verlauf quellenhaltig.

Graphische Darstellung durch ein Vektorfeld:

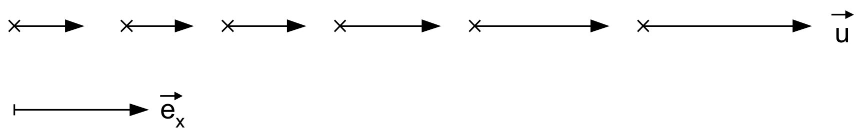


Bild 2.2.4: Linear polarisiertes Quellenfeld

2. Qualitatives Beispiel

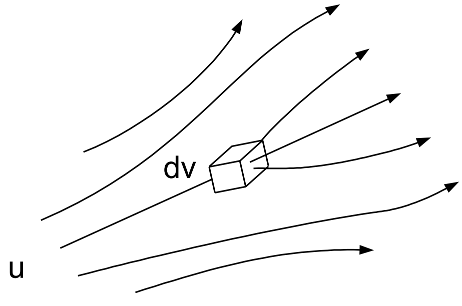


Bild 2.2.5: Quelle im Volumenelement dv

Das vorhandene Feldlinienbild wird durch eine Quelle in dv verändert: Zwei zusätzliche Feldlinien entspringen in dv. Dieses in dv neu entstehende Quellenfeld überlagert sich dem äußeren Vektorfeld. Daraus folgt ein Flußüberschuß, es gibt eine Quellendichte in dv.