1 Einführung in die Computeralgebra

1.1 Was können Computeralgebrasysteme?

1.1

Bevor wir uns mit mathematischen Algorithmen und ihrer Programmierung beschäftigen, wollen wir anhand einiger Beispiele *Mathematicas* Fähigkeiten vorstellen.[1]

Man kann mit *Mathematica* wie mit einem *Taschenrechner* arbeiten. Gibt man die Eingabezeile[2]

In[1]:= $\dfrac{\mathbf{1.23+2.25}}{\mathbf{3.67}}$

ein, so liefert *Mathematica* wie gewünscht die Ausgabe

```
Out[1]= 0.948229
```

Das Rechnen mit Dezimalzahlen geht aber in *Mathematica* weit über die Fähigkeiten eines Taschenrechners hinaus. Mit der Funktion `N` werden Zahlen in Dezimalform dargestellt. Hierbei kann mit einem (optionalen) zweiten Argument eine prinzipiell beliebig große Stellenanzahl angegeben werden. Der Rechenumfang wird hierbei nur vom vorhandenen Speicherplatz bzw. der Rechenzeit beschränkt. Beispielsweise liefert[3]

```
In[2]:= N[π, 500]
```

die ersten 500 Dezimalstellen der Kreiszahl π:

```
Out[2]= 3.141592653589793238462643383279502884197169399375105820974944592
          307864062862089986280348253421170679821480865132823066470938446
          095505822317253594081284811174502841027019385211055596446229489
          549303819644288109756659334461284756482337867831652712019091456
          485669234603486104543266482133936072602491412737245870066063155
          881748815209209628292540917153643678925903600113305305488204665
          213841469519415116094330572703657595919530921861173819326117931
          051185480744623799627495673518857527248912279381830119491
```

---

[1] Dieselben Fragestellungen können problemlos auch mit den im Internet bereitgestellten Sitzungen in *Maple* oder *MuPAD* betrachtet werden.

[2] Diesen Text gibt man in eine leere Zeile ein und schickt die Zeile mit der Tastenkombination `<SHIFT><RETURN>` ab. Zum Editieren können die Paletten – insbesondere die Palette `Basic Input` – verwendet werden, welche man mit Hilfe von **File, Palettes** laden kann, falls sie nicht auf dem Bildschirm erscheinen. Dann ist die Eingabe des Bruchs in Bruchform möglich. Andernfalls können Brüche auch mit `/` eingegeben werden.

[3] Beachten Sie die *eckigen Klammern*. Die Eingabe von π kann entweder durch `Pi`, durch `<ESC>p<ESC>` oder mit einer der Paletten geschehen.

Charakteristisch für Computeralgebrasysteme ist aber nicht in erster Linie das Rechnen mit Dezimalzahlen, sondern die *rational exakte Arithmetik. Mathematica* kann mit beliebig großen ganzen Zahlen rechnen, beispielsweise liefert

In[3]:= **100!**
Out[3]= 9332621544394415268169923885626670049071596826438162146859296389
5217599993229915608941463976156518286253697920827223758251185 2
109168640000000000000000000000000

die *Fakultät* $100! = 100 \cdot 99 \cdots 1$.

Ebenso erhalten wir[4]

In[4]:= $\mathbf{2^{32} - 1}$
Out[4]= 4294967295

In[5]:= **N[%]**
Out[5]= 4.29497×10^9

Hierbei bezieht sich `%` auf die letzte Ausgabe. Die soeben berechnete Zahl stellt in numerisch orientierten Programmiersprachen wie Pascal oder C häufig die *größte ganze Zahl* dar (`maxint`). In derartigen Programmiersprachen wird für jede verwendete Variable ein *fester* Speicherplatz reserviert. Zu diesem Zweck müssen auch alle Variablen zu Programmbeginn *deklariert* werden. Dies ist in Computeralgebrasystemen anders. Hier wird der Speicherbedarf jeder verwendeten Variablen zur Laufzeit *dynamisch* bestimmt. Auch ihr *Typ* ist in der Regel völlig frei und kann nach Belieben verändert werden.

Beim Beispiel

In[6]:= $\mathbf{\dfrac{100!}{2^{100}}}$
Out[6]= 58897122236768765137162784634680788828847238288331257425324980425 6
440585603406374176100610302040933304083276457607746124267578125/8

sieht man, daß *Mathematica* automatisch *gekürzt* hat.

Die Summe

In[7]:= $\displaystyle\sum_{k=1}^{100} \frac{1}{k}$
Out[7]= $\dfrac{14466636279520351160221518043104131447711}{2788815009188499086581352357412492142272}$

liefert ebenfalls einen gekürzten Bruch, nämlich die Summe der Kehrwerte der ersten 100 natürlichen Zahlen. Hierbei ist die Funktion `Sum`, die hinter dem Zeichen $\sum$ steckt, eine Hochsprachenprozedur, welche das Programmieren einer Schleife erspart.

---

[4] Potenzen können über die Paletten oder mit dem Zeichen ˆ eingegeben werden.

Mathematica besitzt viele solcher Hochsprachenkonstrukte. Der numerische Wert der berechneten Summe ist[5]

```
In[8]:= %//N
Out[8]= 5.18738
```

Die Rechnung zeigt, wie langsam diese Reihe wächst.

Welche Teiler hat 100!? Dies erfahren wir durch den Befehl

```
In[9]:= FactorInteger[100!]
```

mit dem Ergebnis[6]

$$\mathit{Out[9]}= \begin{pmatrix} 2 & 97 \\ 3 & 48 \\ 5 & 24 \\ 7 & 16 \\ 11 & 9 \\ 13 & 7 \\ 17 & 5 \\ 19 & 5 \\ 23 & 4 \\ 29 & 3 \\ 31 & 3 \\ 37 & 2 \\ 41 & 2 \\ 43 & 2 \\ 47 & 2 \\ 53 & 1 \\ 59 & 1 \\ 61 & 1 \\ 67 & 1 \\ 71 & 1 \\ 73 & 1 \\ 79 & 1 \\ 83 & 1 \\ 89 & 1 \\ 97 & 1 \end{pmatrix}$$

---

[5] Alle *Mathematica*-Funktionen können in *Standardform* (`N[%]`) mit eckigen Klammern oder in *Postfixform* (`% // N`) mit Hilfe des Operators `//` aufgerufen werden.

[6] Die Ausgabe ist eine Liste von Listen, welche in der angegebenen *Matrixform* ausgegeben wird, falls **Cell, Default Output Format Type, TraditionalForm** ausgewählt ist. Diese Einstellung wird im vorliegenden Buch generell verwendet. Listen werden mit geschweiften Klammern, z. B. {`a,b`}, eingegeben.

Der Teiler 2 tritt also 97 mal auf, der Teiler 3 48 mal usw. Natürlich treten genau die *Primzahlen* bis 100 als Teiler von 100! auf.

Die Frage

```
In[10]:= PrimeQ[1234567]
Out[10]= False
```

liefert den Wert `False`, also ist 1234567 keine Primzahl.[7] Hier sind die Teiler:

```
In[11]:= FactorInteger[1234567]
Out[11]= ( 127 1 )
         ( 9721 1 )
```

Wir *programmieren* nun eine *Mathematica*-Funktion `NextPrime[n]`, welche n ausgibt, falls n Primzahl ist, oder andernfalls die nächstgrößte Primzahl bestimmt.[8]

```
In[12]:= NextPrime[n_] := n + 1/; PrimeQ[n + 1]
         NextPrime[n_] := NextPrime[n + 1]
```

Diese Definition liest sich folgendermaßen: `NextPrime[n]` ist definitionsgemäß gleich $n+1$, falls $n+1$ eine Primzahl ist. Andernfalls erklären wir die nächste Primzahl von n als die nächste Primzahl von $n+1$. Ist also n keine Primzahl, dann wird n (gemäß der zweiten Regel) so lange um 1 vergrößert, bis die erste Bedingung zutrifft, bis also eine Primzahl gefunden wird. Bei dieser Form des *rekursiven* Programmierens ruft sich die definierte Funktion solange selbst auf, bis eine *Abbruchbedingung* erfüllt ist, welche in unserem Fall durch die erste Zeile gegeben ist. Mehr zum Programmieren mit *Mathematica* in Kapitel 2.

Wir berechnen nun

```
In[13]:= NextPrime[1234567]
Out[13]= 1234577
```

Die nächstgrößte Primzahl nach 1234567 ist also 1234577. Probe:

```
In[14]:= PrimeQ[%]
```

---

[7] Liefert `PrimeQ[n]` den Wert `False`, so ist n auf jeden Fall zusammengesetzt; ist `PrimeQ[n]` hingegen `True`, so ist n eine *Pseudoprimzahl*, d. h., mit sehr großer Wahrscheinlichkeit eine Primzahl, s. auch Abschnitt 4.6. *Mathematicas* Hilfestellung sagt hierzu: `PrimeQ` first tests for divisibility using small primes, then uses the Miller-Rabin strong pseudoprime test base 2 and base 3, and then uses a Lucas test.

[8] Funktionen erklärt man i. a. mit der *verzögerten Zuweisung* `:=`. Solche Zuweisungen werden erst beim Aufruf der Funktion vollzogen, weshalb bei der Definition auch keine Ausgabezeile erzeugt wird. Hierbei sind mehrere solcher Zuweisungen zur Definition derselben Funktion zulässig. Dies führt zu übersichtlichen Fallunterscheidungen, was wir uns häufig zu Nutze machen werden. Das Zeichen _ gibt an, daß n variabel ist.

Out[14]= True

Mathematica kann symbolisch mit Wurzeln und anderen algebraischen Zahlen rechnen, s. Kapitel 7. Die Eingabe

In[15]:= $\mathbf{x = \sqrt{2} + \sqrt{3}}$
Out[15]= $\sqrt{2} + \sqrt{3}$

liefert die Summe zweier Quadratwurzeln und weist das Ergebnis der Variablen x zu. Eine Vereinfachung wird, auch wenn dies möglich wäre, nicht automatisch durchgeführt. Wir berechnen den Kehrwert

In[16]:= $\mathbf{\frac{1}{x}}$
Out[16]= $\frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}}$

und vereinfachen diesen

In[17]:= $\mathbf{\frac{1}{x}}$**//Simplify**
Out[17]= $\frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}}$

Mathematicas Vereinfachungsbefehl `Simplify` ist im vorliegenden Fall nicht erfolgreich, und selbst `FullSimplify`, welches sehr viele Vereinfachungen vornimmt und daher i. a. ziemlich lange benötigt, kann diese Zahl nicht vereinfachen:

In[18]:= $\mathbf{\frac{1}{x}}$**//FullSimplify**
Out[18]= $\frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}}$

Wir werden in Abschnitt 7.3 sehen, wie eine Vereinfachung dennoch möglich ist.

Erklärt man weiter

In[19]:= $\mathbf{y = \sqrt{3} - \sqrt{2}}$
Out[19]= $-\sqrt{2} + \sqrt{3}$

so wird z. B. folgende Vereinfachung durchgeführt:

In[20]:= **x * y//Simplify**
Out[20]= 1

welche natürlich zeigt, daß $\frac{1}{x} = y$ ist.

Mathematica kennt ebenfalls spezielle algebraische Werte der *transzendenten Funktionen*:

In[21]:= **Sin**$\mathbf{[\frac{\pi}{5}]}$
Out[21]= $\frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2} \left(5 - \sqrt{5}\right)}$

In[22]:= **Sin**[$\frac{\pi}{5}$] **Cos**[$\frac{\pi}{5}$]//**Simplify**
Out[22]= $\frac{1}{8}\sqrt{\frac{1}{2}\left(5-\sqrt{5}\right)}\left(1+\sqrt{5}\right)$

Bei diesem Beispiel ist `FullSimplify` erfolgreicher.

In[23]:= **Sin**[$\frac{\pi}{5}$] **Cos**[$\frac{\pi}{5}$]//**FullSimplify**
Out[23]= $\frac{1}{4}\sqrt{\frac{1}{2}\left(5+\sqrt{5}\right)}$

In manchen Fällen wird eine automatische Vereinfachung vorgenommen:

In[24]:= **Sin**[π]
Out[24]= 0

Mathematica kann mit *komplexen Zahlen und Funktionen* rechnen:

In[25]:= $\frac{\mathbf{1+i}}{\mathbf{1-i}}$
Out[25]= i

In[26]:= **Re[2 Exp[3x + i y]]**
Out[26]= $2\,e^{3\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)}\cos\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)$

In[27]:= **Clear[x, y]**

In[28]:= **Re[2 Exp[3x + i y]]**
Out[28]= $2\,e^{3\,\mathrm{Re}(x)-\mathrm{Im}(y)}\cos(3\,\mathrm{Im}(x)+\mathrm{Re}(y))$

In[29]:= **ComplexExpand[%]**
Out[29]= $2\,e^{3\,x}$ `Cos(y)`

Mit `Clear[x,y]` haben wir die zugewiesenen Werte der Variablen x und y wieder gelöscht. Die speziellen Symbole i und e stellen die imaginäre Einheit i bzw. die Eulersche Zahl e dar.[9] Die wichtigste Unterscheidung zwischen numerischen Programmiersprachen und Computeralgebraystemen ist das Rechnen mit Symbolen wie bei den letzten beiden Beispielen. `ComplexExpand` vereinfacht unter der Annahme, daß die auftretenden Variablen reell sind.

Mathematica kann mit *Polynomen und rationalen Funktionen* umgehen:

In[30]:= **pol = (x + y)^{10} − (x − y)^{10}**
Out[30]= $(x+y)^{10}-(x-y)^{10}$

In[31]:= **Expand[pol]**
Out[31]= $20\,y\,x^9+240\,y^3\,x^7+504\,y^5\,x^5+240\,y^7\,x^3+20\,y^9\,x$

---

[9] Die Eingabe von i bzw. e kann entweder durch `I` bzw. `E`, durch `<ESC>ii<ESC>` bzw. `<ESC>ee<ESC>` oder durch die Paletten geschehen.

Mit `Expand` werden Polynome ausmultipliziert, während `Factor` Faktorisierungen vornimmt.

In[32]:= **`Factor[pol]`**
Out[32]= $4\,x\,y\left(5\,x^4+10\,y^2\,x^2+y^4\right)\left(x^4+10\,y^2\,x^2+5\,y^4\right)$

Polynomfaktorisierung ist ein Highlight von Computeralgebrasystemen, da man derartige Faktorisierungen von Hand praktisch nicht durchführen kann. Hier gehen viele algebraische Konzepte ein. Wir behandeln dieses Thema in Abschnitt 6.7 sowie in Kapitel 8.

Gibt man eine rationale Funktion ein

In[33]:= **`rat =`** $\mathbf{\dfrac{1-x^{10}}{1-x^4}}$
Out[33]= $\dfrac{1-x^{10}}{1-x^4}$

so wird diese nicht automatisch vereinfacht, d. h., gekürzt. Hierfür ist der Befehl `Together` zuständig:

In[34]:= **`Together[rat]`**
Out[34]= $\dfrac{x^8+x^6+x^4+x^2+1}{x^2+1}$

Man kann rationale Funktionen auch faktorisieren:

In[35]:= **`Factor[rat]`**
Out[35]= $\dfrac{(x^4-x^3+x^2-x+1)\,(x^4+x^3+x^2+x+1)}{x^2+1}$

Faktorisierungen hängen vom betrachteten Ring ab. Die Rechnung

In[36]:= **`Factor[`**$\mathbf{x^6+x^2+1}$**`]`**
Out[36]= x^6+x^2+1

zeigt, daß das Polynom x^6+x^2+1, aufgefaßt als Element des Polynomrings $\mathbb{Z}[x]$, also der Polynome in x mit ganzzahligen Koeffizienten, nicht zerlegbar ist. Betrachtet man „dasselbe Polynom“ allerdings modulo 13, so gibt es eine nichttriviale Faktorisierung:[10]

In[37]:= **`pol = Factor[`**$\mathbf{x^6+x^2+1}$**`, Modulus → 13]`**
Out[37]= $\left(x^2+6\right)\left(x^4+7\,x^2+11\right)$

Daß dieses Produkt modulo 13 mit dem Originalpolynom übereinstimmt, sieht man daran, daß die Differenz

In[38]:= **`Expand[pol - (`**$\mathbf{x^6+x^2+1}$**`)]`**
Out[38]= $13\,x^4+52\,x^2+65$

---

[10] Das Zeichen → wird mit der Palette oder mittels `->` eingegeben.

ein Polynom ist, dessen Koeffizienten durch 13 teilbar sind.

Das Polynom $x^4 + 1 \in \mathbb{Z}[x]$ ist irreduzibel:

In[39]:= **`Factor[x^4 + 1]`**
Out[39]= $x^4 + 1$

aber über dem algebraischen Erweiterungsring $\mathbb{Z}[i]$ von $\mathbb{Z}$ existiert eine Faktorisierung:

In[40]:= **`Factor[x^4 + 1, GaussianIntegers → True]`**
Out[40]= $\left(x^2 - i\right)\left(x^2 + i\right)$

Eine andere Faktorisierung findet man über dem Erweiterungskörper $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$:

In[41]:= **`Factor[x^4 + 1, Extension → {√2}]`**
Out[41]= $-\left(-x^2 + \sqrt{2}\,x - 1\right)\left(x^2 + \sqrt{2}\,x + 1\right)$

Leider hilft uns *Mathematica* also nicht, einen für die Faktorisierung geeigneten Erweiterungskörper von $\mathbb{Q}$ zu finden.

Das Rechnen in Restklassenringen wie $\mathbb{Z}_{13}$ wird in Abschnitt 4.1, $\mathbb{Z}[i]$ in Beispiel 6.1 betrachtet, während algebraische Erweiterungskörper in Abschnitt 7.1 behandelt werden.

Mit *Mathematica* kann man *lineare Algebra* betreiben. Wir erklären die *Hilbertmatrix*

In[42]:= **`HilbertMatrix[n_] := Table[1/(j + k - 1), {j, n}, {k, n}]`**

und berechnen sie für $n = 7$:

In[43]:= **`H = HilbertMatrix[7]`**

Out[43]=
$$\begin{pmatrix}
1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} \\
\frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \frac{1}{8} \\
\frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \frac{1}{8} & \frac{1}{9} \\
\frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \frac{1}{8} & \frac{1}{9} & \frac{1}{10} \\
\frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \frac{1}{8} & \frac{1}{9} & \frac{1}{10} & \frac{1}{11} \\
\frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \frac{1}{8} & \frac{1}{9} & \frac{1}{10} & \frac{1}{11} & \frac{1}{12} \\
\frac{1}{7} & \frac{1}{8} & \frac{1}{9} & \frac{1}{10} & \frac{1}{11} & \frac{1}{12} & \frac{1}{13}
\end{pmatrix}$$

Die Hilbertmatrix für große n ist berüchtigt für ihre schlechte *Kondition*, d. h., *Inverse* und *Determinante* lassen sich numerisch mit Dezimalarithmetik nur schwer bzw. ungenau bestimmen. Ihre Inverse hat ganzzahlige Koeffizienten:

In[44]:= **Inverse[H]**

Out[44]=
$$\begin{pmatrix} 49 & -1176 & 8820 & -29400 & 48510 & -38808 & 12012 \\ -1176 & 37632 & -317520 & 1128960 & -1940400 & 1596672 & -504504 \\ 8820 & -317520 & 2857680 & -10584000 & 18711000 & -15717240 & 5045040 \\ -29400 & 1128960 & -10584000 & 40320000 & -72765000 & 62092800 & -20180160 \\ 48510 & -1940400 & 18711000 & -72765000 & 133402500 & -115259760 & 37837800 \\ -38808 & 1596672 & -15717240 & 62092800 & -115259760 & 100590336 & -33297264 \\ 12012 & -504504 & 5045040 & -20180160 & 37837800 & -33297264 & 11099088 \end{pmatrix}$$

und die Determinante ist eine sehr kleine rationale Zahl, welche wir mit rationaler Arithmetik exakt bestimmen können:

In[45]:= **Det[H]**

Out[45]=
$$\frac{1}{2067909047925770649600000}$$

Die folgende Funktion erklärt die *Vandermonde-Matrix*

In[46]:= **Vandermonde[n_] := Table[x_j^{k-1}, {j, n}, {k, n}]**

Die Vandermonde-Matrix mit 5 Variablen $x_1, \ldots, x_5$ ist gegeben durch

In[47]:= **V = Vandermonde[5]**

Out[47]=
$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & x_1^4 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 & x_2^4 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 & x_3^4 \\ 1 & x_4 & x_4^2 & x_4^3 & x_4^4 \\ 1 & x_5 & x_5^2 & x_5^3 & x_5^4 \end{pmatrix}$$

und ihre Determinante ist ein kompliziertes multivariates Polynom:

In[48]:= **Det[V]**

Out[48]=
$$\begin{aligned}
&-x_2\, x_3^2\, x_4^3\, x_1^4 + x_2^2\, x_3\, x_4^3\, x_1^4 + x_2\, x_3^2\, x_5^3\, x_1^4 - x_2\, x_4^2\, x_5^3\, x_1^4 + x_3\, x_4^2\, x_5^3\, x_1^4 - x_2^2\, x_3\, x_5^3\, x_1^4 + \\
&\quad x_2^2\, x_4\, x_5^3\, x_1^4 - x_3^2\, x_4\, x_5^3\, x_1^4 + x_2\, x_3^3\, x_4^2\, x_1^4 - x_2^3\, x_3\, x_4^2\, x_1^4 - x_2\, x_3^3\, x_5^2\, x_1^4 + x_2\, x_4^3\, x_5^2\, x_1^4 - \\
&\quad x_3\, x_4^3\, x_5^2\, x_1^4 + x_2^3\, x_3\, x_5^2\, x_1^4 - x_2^3\, x_4\, x_5^2\, x_1^4 + x_3^3\, x_4\, x_5^2\, x_1^4 - x_2^2\, x_3^3\, x_4\, x_1^4 + x_2^3\, x_3^2\, x_4\, x_1^4 + \\
&\quad x_2^2\, x_3^3\, x_5\, x_1^4 - x_2^2\, x_4^3\, x_5\, x_1^4 + x_3^2\, x_4^3\, x_5\, x_1^4 - x_2^3\, x_3^2\, x_5\, x_1^4 + x_2^3\, x_4^2\, x_5\, x_1^4 - x_3^3\, x_4^2\, x_5\, x_1^4 + \\
&\quad x_2\, x_3^2\, x_4^4\, x_1^3 - x_2^2\, x_3\, x_4^4\, x_1^3 - x_2\, x_3^2\, x_5^4\, x_1^3 + x_2\, x_4^2\, x_5^4\, x_1^3 - x_3\, x_4^2\, x_5^4\, x_1^3 + x_2^2\, x_3\, x_5^4\, x_1^3 - \\
&\quad x_2^2\, x_4\, x_5^4\, x_1^3 + x_3^2\, x_4\, x_5^4\, x_1^3 - x_2\, x_3^4\, x_4^2\, x_1^3 + x_2^4\, x_3\, x_4^2\, x_1^3 + x_2\, x_3^4\, x_5^2\, x_1^3 - x_2\, x_4^4\, x_5^2\, x_1^3 + \\
&\quad x_3\, x_4^4\, x_5^2\, x_1^3 - x_2^4\, x_3\, x_5^2\, x_1^3 + x_2^4\, x_4\, x_5^2\, x_1^3 - x_3^4\, x_4\, x_5^2\, x_1^3 + x_2^2\, x_3^4\, x_4\, x_1^3 - \\
&\quad x_2^4\, x_3^2\, x_4\, x_1^3 - x_2^2\, x_3^4\, x_5\, x_1^3 + x_2^2\, x_4^4\, x_5\, x_1^3 - x_3^2\, x_4^4\, x_5\, x_1^3 + x_2^4\, x_3^2\, x_5\, x_1^3 - x_2^4\, x_4^2\, x_5\, x_1^3 + \\
&\quad x_3^4\, x_4^2\, x_5\, x_1^3 - x_2\, x_3^3\, x_4^4\, x_1^2 + x_2^3\, x_3\, x_4^4\, x_1^2 + x_2\, x_3^3\, x_5^4\, x_1^2 - x_2\, x_4^3\, x_5^4\, x_1^2 + x_3\, x_4^3\, x_5^4\, x_1^2 - \\
&\quad x_2^3\, x_3\, x_5^4\, x_1^2 + x_2^3\, x_4\, x_5^4\, x_1^2 - x_3^3\, x_4\, x_5^4\, x_1^2 + x_2\, x_3^4\, x_4^3\, x_1^2 - x_2^4\, x_3\, x_4^3\, x_1^2 - x_2\, x_3^4\, x_5^3\, x_1^2 + \\
&\quad x_2\, x_4^4\, x_5^3\, x_1^2 - x_3\, x_4^4\, x_5^3\, x_1^2 + x_2^4\, x_3\, x_5^3\, x_1^2 - x_2^4\, x_4\, x_5^3\, x_1^2 + x_3^4\, x_4\, x_5^3\, x_1^2 - x_2^3\, x_3^4\, x_4\, x_1^2 +
\end{aligned}$$

Out[48]=

$$\begin{aligned}
&x_2^4 x_3^3 x_4 x_1^2 + x_2^3 x_3^4 x_5 x_1^2 - x_2^3 x_4^4 x_5 x_1^2 + x_3^3 x_4^4 x_5 x_1^2 - x_2^4 x_3^3 x_5 x_1^2 + x_2^4 x_4^3 x_5 x_1^2 - \\
&x_3^4 x_4^3 x_5 x_1^2 + x_2^2 x_3^3 x_4^4 x_1 - x_2^3 x_3^2 x_4^4 x_1 - x_2^2 x_3^3 x_5^4 x_1 + x_2^2 x_4^3 x_5^4 x_1 - \\
&x_3^2 x_4^3 x_5^4 x_1 + x_2^3 x_3^2 x_5^4 x_1 - x_2^3 x_4^2 x_5^4 x_1 + x_3^3 x_4^2 x_5^4 x_1 - x_2^2 x_3^4 x_4^3 x_1 + x_2^4 x_3^2 x_4^3 x_1 + \\
&x_2^2 x_3^4 x_5^3 x_1 - x_2^2 x_4^4 x_5^3 x_1 + x_3^2 x_4^4 x_5^3 x_1 - x_2^4 x_3^2 x_5^3 x_1 + x_2^4 x_4^2 x_5^3 x_1 - x_3^4 x_4^2 x_5^3 x_1 + \\
&x_2^3 x_3^4 x_4^2 x_1 - x_2^4 x_3^3 x_4^2 x_1 - x_2^3 x_3^4 x_5^2 x_1 + x_2^3 x_4^4 x_5^2 x_1 - x_3^3 x_4^4 x_5^2 x_1 + \\
&x_2^4 x_3^3 x_5^2 x_1 - x_2^4 x_4^3 x_5^2 x_1 + x_3^4 x_4^3 x_5^2 x_1 + x_2 x_3^2 x_4^3 x_5^4 - x_2^2 x_3 x_4^3 x_5^4 - \\
&x_2 x_3^3 x_4^2 x_5^4 + x_2^3 x_3 x_4^2 x_5^4 + x_2^2 x_3^3 x_4 x_5^4 - x_2^3 x_3^2 x_4 x_5^4 - x_2 x_3^2 x_4^4 x_5^3 + x_2^2 x_3 x_4^4 x_5^3 + \\
&x_2 x_3^4 x_4^2 x_5^3 - x_2^4 x_3 x_4^2 x_5^3 - x_2^2 x_3^4 x_4 x_5^3 + x_2^4 x_3^2 x_4 x_5^3 + x_2 x_3^3 x_4^4 x_5^2 - \\
&x_2^3 x_3 x_4^4 x_5^2 - x_2 x_3^4 x_4^3 x_5^2 + x_2^4 x_3 x_4^3 x_5^2 + x_2^3 x_3^4 x_4 x_5^2 - x_2^4 x_3^3 x_4 x_5^2 - \\
&x_2^2 x_3^3 x_4^4 x_5 + x_2^3 x_3^2 x_4^4 x_5 + x_2^2 x_3^4 x_4^3 x_5 - x_2^4 x_3^2 x_4^3 x_5 - x_2^3 x_3^4 x_4^2 x_5 + x_2^4 x_3^3 x_4^2 x_5
\end{aligned}$$

welches in faktorisierter Form allerdings ganz einfache Gestalt hat:[11]

In[49]:= **`Factor[Det[V]]`**

Out[49]= $(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_2-x_3)(x_1-x_4)(x_2-x_4)(x_3-x_4)(x_1-x_5)(x_2-x_5)(x_3-x_5)(x_4-x_5)$

Mit *Mathematica* kann man *Gleichungen* und *Gleichungssysteme* lösen. Lösung einer quadratischen Gleichung:[12]

In[50]:= **`s = Solve[x`^{2}` - 3x - 1 == 0, x]`**

Out[50]= $\left\{\left\{x \to \frac{1}{2}\left(3-\sqrt{13}\right)\right\}, \left\{x \to \frac{1}{2}\left(3+\sqrt{13}\right)\right\}\right\}$

Die Lösungen von Gleichungen werden als Liste ausgegeben. In unserem Fall gibt es zwei Lösungen, also enthält die Lösungsliste zwei Elemente, welche wiederum aus Listen der Form `{x → a}` bestehen, wobei x die Variable bezeichnet und a die zugehörige Lösung ist. Solche Ausgabelisten werden – unter Verwendung des Einsetzungsbefehls `/.` – zum Einsetzen verwendet:

In[51]:= **`x/.s`**

Out[51]= $\left\{\frac{1}{2}\left(3-\sqrt{13}\right), \frac{1}{2}\left(3+\sqrt{13}\right)\right\}$

Wir lösen eine Gleichung dritten Grades:

In[52]:= **`s = Solve[x`^{3}` - 3x - 1 == 0, x]`**

Out[52]=

$$\begin{aligned}
&\left\{\left\{x \to \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{1}{2}\left(1+i\sqrt{3}\right)}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2}\left(1+i\sqrt{3}\right)}\right\},\right. \\
&\left\{x \to -\frac{1}{2}\left(1-i\sqrt{3}\right)\sqrt[3]{\frac{1}{2}\left(1+i\sqrt{3}\right)} - \left(\frac{1}{2}\left(1+i\sqrt{3}\right)\right)^{2/3}\right\}, \\
&\left.\left\{x \to -\frac{1-i\sqrt{3}}{2^{2/3}\sqrt[3]{1+i\sqrt{3}}} - \frac{\left(1+i\sqrt{3}\right)^{4/3}}{2\sqrt[3]{2}}\right\}\right\}
\end{aligned}$$

---

[11] Man überlege sich, warum die Determinante die berechneten Faktoren enthalten *muß*!

[12] Eine Gleichung wird mit dem Zeichen `==` eingegeben.

deren Lösung ziemlich verschachtelte Wurzeln enthält. Die Dezimalwerte der Lösungen sind gegeben durch:

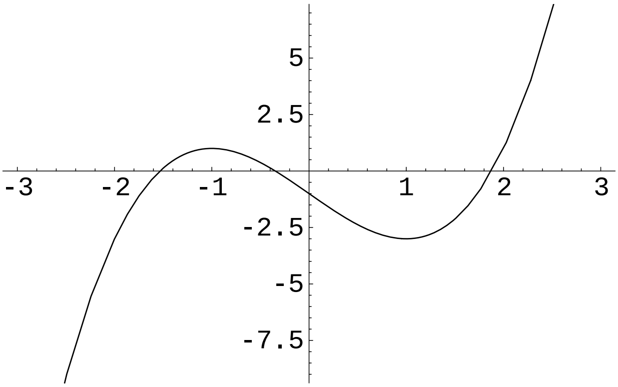
```
In[53]:= s//N
Out[53]= {{x → 1.87939 + 0. ⅈ}, {x → −1.53209 + 1.11022 × 10^-16 ⅈ},
          {x → −0.347296 + 2.22045 × 10^-16 ⅈ}}
```

Die drei Nullstellen sind möglicherweise alle reell, wie durch numerisches Lösen mit

```
In[54]:= NSolve[x^3 - 3x - 1 == 0, x]
Out[54]= {{x → −1.53209}, {x → −0.347296}, {x → 1.87939}}
```

bestätigt wird, obwohl die Darstellung durch die *Cardanischen Formeln* explizit komplexe Zahlen verwendet.[13] Daß das Polynom drei reelle Nullstellen hat, wird auch von der graphischen Darstellung

```
In[55]:= Plot[x^3 - 3x - 1, {x, -3, 3}]
```



```
Out[55]= -Graphics-
```

bestätigt.

Die Lösungen von Polynomgleichungen können bekanntlich bis zum vierten Grad durch Wurzeln ausgedrückt werden. Diese Lösungen sind auf Grund ihrer Kompliziertheit aber häufig praktisch wertlos:

```
In[56]:= s = Solve[x^4 - 3x - 1 == 0, x]
```

---

[13] In dem vorliegenden Fall, dem *casus irreducibilis*, können die Lösungen unter Zuhilfenahme von trigonometrischen Funktionen auch reell dargestellt werden. Diese Darstellung wird von *Mathematica* aber nicht unterstützt.

`Out[56]=`

$$\Bigg\{\Bigg\{x \to -\frac{1}{2}\sqrt{-4\sqrt[3]{\frac{2}{3\left(81+\sqrt{7329}\right)}}+\frac{\sqrt[3]{\frac{1}{2}\left(81+\sqrt{7329}\right)}}{3^{2/3}}}-\frac{1}{2}\sqrt{\left(4\sqrt[3]{\frac{2}{3\left(81+\sqrt{7329}\right)}}-\frac{\sqrt[3]{\frac{1}{2}\left(81+\sqrt{7329}\right)}}{3^{2/3}}-\frac{6}{\sqrt{-4\sqrt[3]{\frac{2}{3\left(81+\sqrt{7329}\right)}}+\frac{\sqrt[3]{\frac{1}{2}\left(81+\sqrt{7329}\right)}}{3^{2/3}}}}\right)}\Bigg\},$$

$$\Bigg\{x \to -\frac{1}{2}\sqrt{-4\sqrt[3]{\frac{2}{3\left(81+\sqrt{7329}\right)}}+\frac{\sqrt[3]{\frac{1}{2}\left(81+\sqrt{7329}\right)}}{3^{2/3}}}+\frac{1}{2}\sqrt{\left(4\sqrt[3]{\frac{2}{3\left(81+\sqrt{7329}\right)}}-\frac{\sqrt[3]{\frac{1}{2}\left(81+\sqrt{7329}\right)}}{3^{2/3}}-\frac{6}{\sqrt{-4\sqrt[3]{\frac{2}{3\left(81+\sqrt{7329}\right)}}+\frac{\sqrt[3]{\frac{1}{2}\left(81+\sqrt{7329}\right)}}{3^{2/3}}}}\right)}\Bigg\},$$

$$\Bigg\{x \to \frac{1}{2}\sqrt{-4\sqrt[3]{\frac{2}{3\left(81+\sqrt{7329}\right)}}+\frac{\sqrt[3]{\frac{1}{2}\left(81+\sqrt{7329}\right)}}{3^{2/3}}}-\frac{1}{2}\sqrt{\left(4\sqrt[3]{\frac{2}{3\left(81+\sqrt{7329}\right)}}-\frac{\sqrt[3]{\frac{1}{2}\left(81+\sqrt{7329}\right)}}{3^{2/3}}+\frac{6}{\sqrt{-4\sqrt[3]{\frac{2}{3\left(81+\sqrt{7329}\right)}}+\frac{\sqrt[3]{\frac{1}{2}\left(81+\sqrt{7329}\right)}}{3^{2/3}}}}\right)}\Bigg\},$$

$$\Bigg\{x \to \frac{1}{2}\sqrt{-4\sqrt[3]{\frac{2}{3\left(81+\sqrt{7329}\right)}}+\frac{\sqrt[3]{\frac{1}{2}\left(81+\sqrt{7329}\right)}}{3^{2/3}}}+\frac{1}{2}\sqrt{\left(4\sqrt[3]{\frac{2}{3\left(81+\sqrt{7329}\right)}}-\frac{\sqrt[3]{\frac{1}{2}\left(81+\sqrt{7329}\right)}}{3^{2/3}}+\frac{6}{\sqrt{-4\sqrt[3]{\frac{2}{3\left(81+\sqrt{7329}\right)}}+\frac{\sqrt[3]{\frac{1}{2}\left(81+\sqrt{7329}\right)}}{3^{2/3}}}}\right)}\Bigg\}\Bigg\}$$

Die Lösung hat die numerische Darstellung

```
In[57]:= s//N
Out[57]= {{x → −0.605102 − 1.26713 ⅈ},
           {x → −0.605102 + 1.26713 ⅈ}, {x → −0.329409}, {x → 1.53961}}
```

mit 2 reellen Lösungen.

Lösungen von Polynomgleichungen vom Grad größer als vier werden i. a. als algebraische Objekte ausgegeben:

```
In[58]:= s = Solve[x^5 − 3x − 1 == 0, x]
Out[58]= {{x → Root[#1^5 − 3 #1 − 1&, 1]},
           {x → Root[#1^5 − 3 #1 − 1&, 2]}, {x → Root[#1^5 − 3 #1 − 1&, 3]},
           {x → Root[#1^5 − 3 #1 − 1&, 4]}, {x → Root[#1^5 − 3 #1 − 1&, 5]}}
```

Diese Antwort scheint über unsere Frage nicht hinauszugehen.[14] Mit den ausgegebenen `Root`-Objekten kann allerdings gerechnet werden: numerisch[15]

```
In[59]:= s//N
Out[59]= {{x → −1.21465}, {x → −0.334734}, {x → 1.38879},
           {x → 0.0802951 − 1.32836 ⅈ}, {x → 0.0802951 + 1.32836 ⅈ}}
```

und symbolisch

```
In[60]:= Product[(x/.s[[k]]), {k, 1, 5}]//RootReduce
Out[60]= 1
```

Im letzten Beispiel haben wir das Produkt der 5 verschiedenen Lösungen berechnet.

`Solve` kann auch polynomiale Gleichungssysteme lösen:

```
In[61]:= Solve[{x^2 + y^2 == 1, −x^2 + 2y^2 + 1 == 0}, {x, y}]
Out[61]= {{x → −1, y → 0}, {x → −1, y → 0}, {x → 1, y → 0}, {x → 1, y → 0}}
```

Wir laden das Package `ImplicitPlot`

```
In[62]:= Needs["Graphics‘ImplicitPlot‘"]
```

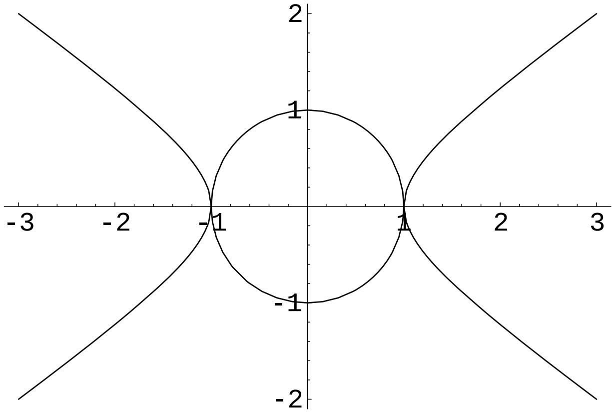
mit welchem wir die implizit gegebenen Funktionen graphisch darstellen können:

```
In[63]:= ImplicitPlot[{x^2 + y^2 == 1, −x^2 + 2y^2 + 1 == 0},
           {x, −3, 3}, {y, −3, 3}]
```

---

[14] Die Lösung besagt nichst anderes als: erste Nullstelle, zweite Nullstelle, … , fünfte Nullstelle des Polynoms $x^5 - x - 1$.

[15] Mit `s[[k]]` wird das k-te Element der Liste s angesprochen.



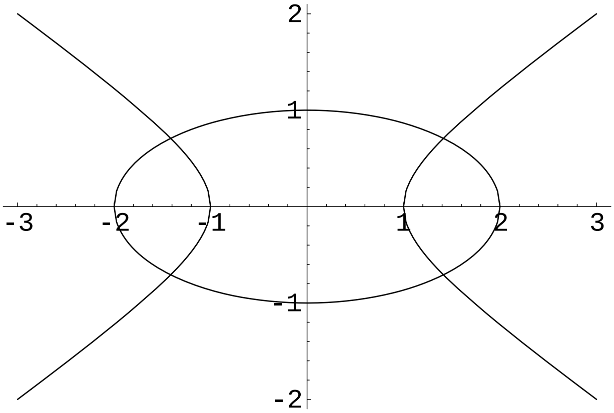
Out[63]= -Graphics-

Der Kreis und die Hyperbel haben – wie berechnet – zwei (doppelte) Schnittpunkte, während folgende Ellipse und Hyperbel vier verschiedene Schnittpunkte besitzen:

In[64]:= $\mathbf{Solve}\left[\left\{\frac{x^2}{4}+y^2==1,\ -x^2+2y^2+1==0\right\},\ \{x,\ y\}\right]$

Out[64]= $\left\{\left\{x\to-\sqrt{2},y\to-\frac{1}{\sqrt{2}}\right\},\left\{x\to-\sqrt{2},y\to\frac{1}{\sqrt{2}}\right\},\right.$
$\left.\left\{x\to\sqrt{2},y\to-\frac{1}{\sqrt{2}}\right\},\left\{x\to\sqrt{2},y\to\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}\right\}$

In[65]:= $\mathbf{ImplicitPlot}\left[\left\{\frac{x^2}{4}+y^2==1,\ -x^2+2y^2+1==0\right\},\right.$
$\left.\{x,\ -3,\ 3\},\ \{y,\ -3,\ 3\}\right]$

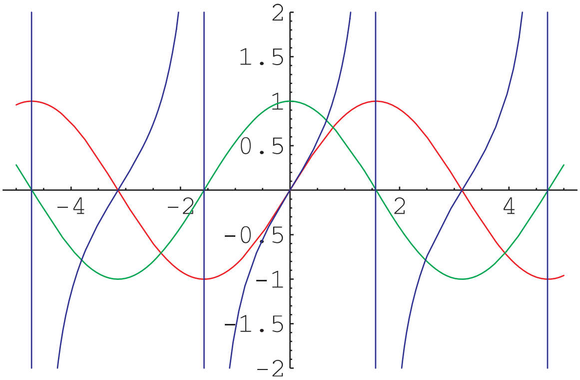


Out[65]= -Graphics-

Das Lösen polynomialer Gleichungssysteme wird in Abschnitt 7.6 behandelt.

Graphische Darstellungen sind ein weiteres Highlight von *Mathematica*. Hier sind die Graphen der trigonometrischen Funktionen:

```
In[66]:= Plot[{Sin[x], Cos[x], Tan[x]}, {x, -5, 5},
           PlotStyle → {RGBColor[1, 0, 0], RGBColor[0, 1, 0],
           RGBColor[0, 0, 1]}, PlotRange → {-2, 2}]
```



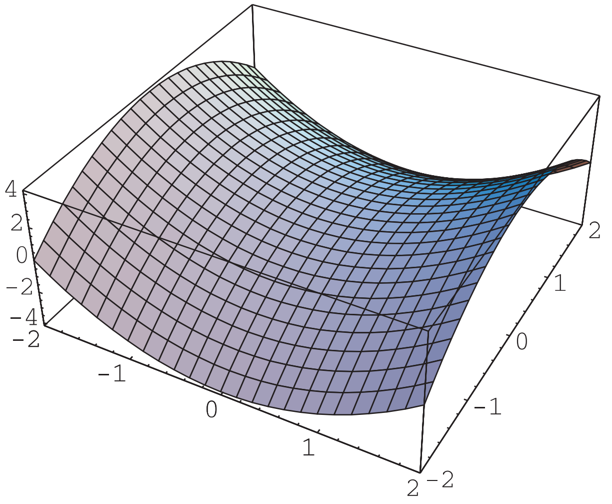
```
Out[66]= -Graphics-
```

Die `Plot`-Funktion hat viele Optionen, mit welchen die Darstellung angepaßt werden kann:

```
In[67]:= Options[Plot]
Out[67]= {AspectRatio → 1/ϕ, Axes → Automatic, AxesLabel → None,
           AxesOrigin → Automatic, AxesStyle → Automatic,
           Background → Automatic, ColorOutput → Automatic, Compiled → True,
           DefaultColor → Automatic, DefaultFont :→ $DefaultFont,
           DisplayFunction :→ $DisplayFunction, Epilog → {},
           FormatType :→ $FormatType, Frame → False, FrameLabel → None,
           FrameStyle → Automatic, FrameTicks → Automatic, GridLines → None,
           ImageSize → Automatic, MaxBend → 10., PlotDivision → 30.,
           PlotLabel → None, PlotPoints → 25, PlotRange → Automatic,
           PlotRegion → Automatic, PlotStyle → Automatic, Prolog → {},
           RotateLabel → True, TextStyle :→ $TextStyle, Ticks → Automatic}
```

Schließlich sehen wir uns einige dreidimensionale Graphiken an: Einen *Sattelpunkt*:

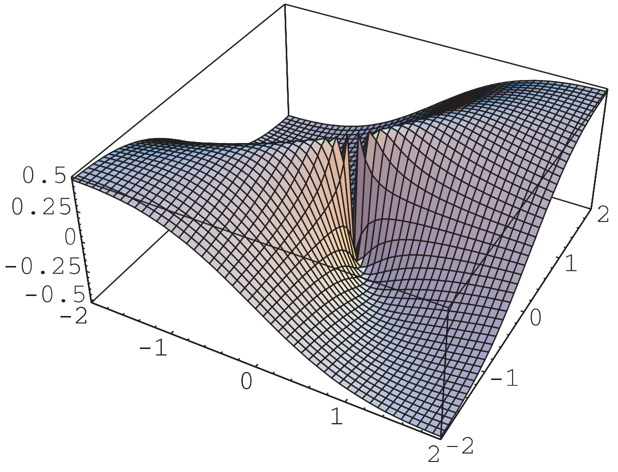
```
In[68]:= Plot3D[x^2 - y^2, {x, -2, 2}, {y, -2, 2}]
```



Out[68]= -SurfaceGraphics-

sowie eine Funktion, welche partiell differenzierbar, aber unstetig ist, s. z. B. [Koe1994]:

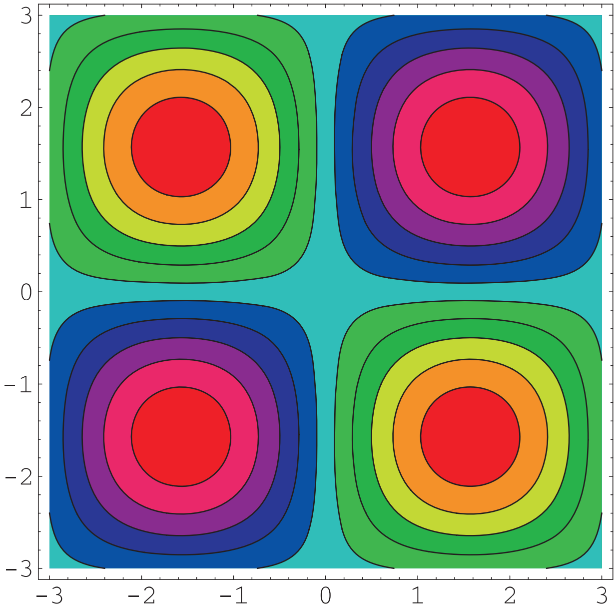
In[69]:= **Plot3D**$\left[\frac{x\,y}{x^2+y^2}\right.$**, {x, -2, 2}, {y, -2, 2}, PlotPoints → 50**$\left.\right]$



Out[69]= -SurfaceGraphics-

und schließlich ein *Höhenliniendiagramm*:

```
In[70]:= ContourPlot[Sin[x] Sin[y], {x, -3, 3},
            {y, -3, 3}, ColorFunction → Hue, PlotPoints → 100]
```



Out[70]= -ContourGraphics-

Mathematica kann auch Fragen aus der *Analysis* lösen, z. B. *Grenzwerte*:

In[71]:= $\texttt{Limit}\left[\frac{\texttt{Exp[x] - 1}}{\texttt{x}}, \texttt{x} \to \texttt{0}\right]$

Out[71]= 1

Taylorpolynome:

In[72]:= $\texttt{Series}\left[\frac{\texttt{Exp[x] - 1}}{\texttt{x}}, \{\texttt{x, 0, 10}\}\right]$

$$\textit{Out[72]=}\ 1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}+\frac{x^3}{24}+\frac{x^4}{120}+\frac{x^5}{720}+\frac{x^6}{5040}+\frac{x^7}{40320}+\frac{x^8}{362880}+\frac{x^9}{3628800}+\frac{x^{10}}{39916800}+O(x^{11})$$

Ableitungen:[16]

In[73]:= $\texttt{ableitung} = \partial_{\texttt{x}} \frac{\texttt{Exp[x] - 1}}{\texttt{x}}$

$$\textit{Out[73]=}\ \frac{e^x}{x}-\frac{-1+e^x}{x^2}$$

und *Integrale* bestimmen:

In[74]:= $\int \texttt{ableitung}\, d\texttt{x}$

$$\textit{Out[74]=}\ \frac{e^x}{x}-\frac{1}{x}$$

---

[16] Ableitung ∂_x und Integration $\int dx$ können mittels der Funktionen `D` bzw. `Integrate` oder über die Palette eingegeben werden.

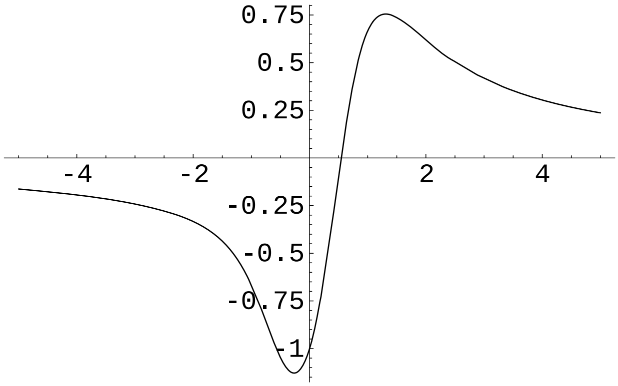
Nicht immer ist es allerdings so einfach, durch Integrieren und Differenzieren einer Funktion diese zu rekonstruieren. Wir betrachten die rationale Funktion

In[75]:= **eingabe** = $\dfrac{\mathbf{x^3+x^2+x-1}}{\mathbf{x^4+x^2+1}}$

Out[75]= $\dfrac{x^3+x^2+x-1}{x^4+x^2+1}$

Zunächst erzeugen wir eine graphische Darstellung:

In[76]:= **Plot[eingabe, {x, –5, 5}]**



Out[76]= -Graphics-

Nun integrieren wir das Resultat:[17]

In[77]:= **integral** = $\int$ **eingabe** d**x**

Out[77]=

$$\frac{1}{24}\left((6+6\,i)\left(1+i\sqrt{3}\right)\sqrt{-i+\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{(1+i)\,x}{\sqrt{i+\sqrt{3}}}\right)-4\sqrt{3}\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2\,x^2+1}\right)-\right.$$
$$\left.(6-6\,i)\left(i+\sqrt{3}\right)^{3/2}\tanh^{-1}\left(\frac{(1+i)\,x}{\sqrt{-i+\sqrt{3}}}\right)+6\,\log\left(x^4+x^2+1\right)\right)$$

und leiten schließlich ab:

In[78]:= **resultat** = ∂_x **integral**

---

[17] Im **TraditionalForm** -Modus werden alle Umkehrfunktionen der trigonometrischen und hyperbolischen Funktionen mit der $^{-1}$-Notation ausgegeben, z. B. $\tan^{-1} = \arctan$. Man beachte: Obwohl der Integrand reell ist, gibt *Mathematica* eine *komplexe* Lösung aus!

Out[78]=
$$\frac{1}{24}\left(\frac{48\,x}{(2\,x^2+1)^2\left(1+\frac{3}{\left(2\,x^2+1\right)^2}\right)}-\frac{12\,\left(i+\sqrt{3}\right)^{3/2}}{\sqrt{-i+\sqrt{3}}\left(1-\frac{2\,i\,x^2}{-i+\sqrt{3}}\right)}+\frac{12\,i\,\left(1+i\,\sqrt{3}\right)\sqrt{-i+\sqrt{3}}}{\sqrt{i+\sqrt{3}}\left(\frac{2\,i\,x^2}{i+\sqrt{3}}+1\right)}+\frac{6\,(4\,x^3+2\,x)}{x^4+x^2+1}\right)$$

Dies sieht nicht aus wie die Eingabefunktion, obwohl das Resultat nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechung mit dieser übereinstimmen muß.[18] Hierzu müssen wir eine *Vereinfachung* vornehmen. `FullSimplify` ist erfolgreich:

In[79]:= **`resultat//FullSimplify`**
Out[79]=
$$\frac{x^3+x^2+x-1}{x^4+x^2+1}$$

Die Vereinfachung rationaler Funktionen wird in Abschnitt 6.9 behandelt. Taylorpolynome und -reihen sind Thema von Kapitel 10, ferner wird in Abschnitt 2.7 ein Differentiations-Algorithmus betrachtet, und Kapitel 12 ist der rationalen Integration gewidmet.

Natürlich ist *Mathematica* auch eine sehr reichhaltige Programmiersprache. Das Programmieren betrachten wir im nächsten Kapitel genauer.

1.2 Ergänzende Bemerkungen

Mathematica kam 1988 auf den Markt und liegt zur Zeit in der Version 5.2 vor. *Mathematica* verband als erstes Computeralgebrasystem Symbolik, Numerik und Graphik unter einer Oberfläche und wurde schnell Marktführer. Inzwischen wurde die Oberfläche weiterentwickelt und ist mit Abstand besser als die der Konkurrenz. Beim mathematischen Kern hängt es von der Fragestellung ab, welches Computeralgebrasystem das Beste ist, s. z.B. [Wes1999]. Wenn *Mathematica* Ihre Fragestellungen nicht beantworten kann, so hilft vielleicht Axiom, Derive, Macsyma, Maple, MuPAD, Reduce oder eines der vielen Spezialsysteme weiter.

Ich möchte einen wesentlichen Nachteil *Mathematicas* nicht verschweigen: Während einige andere Computeralgebrasysteme die Möglichkeit bieten, den Ablauf der Algorithmen, welche hinter einer Berechnung stecken, nachzuvollziehen, ist dies bei *Mathematica* in der Regel unmöglich: Was hinter den Berechnungen von *Mathematica* steckt, ist letztlich oft Betriebsgeheimnis. Das ist offenbar der Preis der Kommerzialisierung des Systems.

---

[18] In Kapitel 12 werden wir zeigen, wie man beim Integrieren die Erzeugung unnötiger Wurzeln vermeiden kann. Dann kann man allerdings zeigen, daß bei unserem Beispiel die Verwendung von $\sqrt{3}$ *unvermeidbar* ist.

Im nächsten Abschnitt werden wir *Mathematicas* Programmierfähigkeiten kennenlernen, welche Konstruktionen zuläßt, die sich direkt an mathematischen Definitionen orientieren und zum Teil weit über die Möglichkeiten anderer Systeme hinausgehen.

1.3 Übungsaufgaben

1.1 (Mersennesche Zahlen)
Ist p eine Primzahl, so nennt man die Zahlen

$$M_p := 2^p - 1 \qquad (p \text{ Primzahl})$$

die *Mersenneschen Zahlen*.

Mersenne vermutete, daß diese lediglich für die Werte $p = 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 67, 127, 257$ Primzahlen sind. Diese Vermutung ist falsch. Zur Zeit sind 42 Mersenne-Primzahlen bekannt. Die größte davon ist die Mersennesche Zahl $M_{25.964.951}$, welche 7.816.230 Dezimalstellen hat und überhaupt die größte momentan bekannte Primzahl darstellt.[19]

(a) Bestätigen Sie die Anzahl der Dezimalstellen von $M_{25.964.951}$. *Hinweis:* Verwenden Sie `N`.

Zu Mersennes Vermutung:

(b) M_{61}, M_{89} und M_{107} sind Primzahlen, die nicht in Mersennes Liste stehen.

(c) M_{67} ist zusammengesetzt, tatsächlich ist

$$M_{67} = 147\,573\,952\,589\,676\,412\,927 = 193\,707\,721 \cdot 761\,838\,257\,287 \,.$$

(d) M_{257} ist zusammengesetzt.

Weisen Sie unter Verwendung von `PrimeQ` und `FactorInteger` mit *Mathematica* (b), (c) und (d) nach. Beachten Sie, wie lange die Faktorisierung von M_{67} braucht.[20]

---

[19] Derartige Aussagen gelten im Zeitalter der Computeralgebrasysteme allerdings nur für kurze Zeit. Daher übernehme ich hierfür keine Garantie. Neues über die Mersenneschen Zahlen finden Sie auf der Internetseite `http://www.mersenne.org`. Zur Geschichte der Mersenneschen Zahlen s. `http://www.utm.edu/research/primes/mersenne`.

[20] Zuerst wurde diese Zahl 1903 von F. N. Cole faktorisiert. Auf die Frage, wie lange er gebraucht habe, M_{67} zu knacken, sagte er „three years of Sundays“. Mit *Mathematica* oder einem anderen Computeralgebrasystem hätte er 3 Jahre gespart…

Die Faktorisierung (d) ist zu schwierig und benötigt zu lange mit *Mathematica*. Ohne Faktorisierung können Sie aber zeigen, daß

(e) $M_{257} = 535\,006\,138\,814\,359 \cdot 1\,155\,685\,395\,246\,619\,182\,673\,033 \cdot 374\,550\,598\,501\,810\,936\,581\,776\,630\,096\,313\,181\,393$.

1.2 (Primzahlzwillinge)

Zwei Primzahlen p_1 und $p_2 = p_1 + 2$ heißen *Primzahlzwillinge*. Finden Sie jeweils die ersten Primzahlzwillinge, die größer als 1000, 10^{10} bzw. 10^{100} sind.

1.3 (Robertson-Vermutung)

(a) Der Mathematiker Robertson vermutete im Jahre 1989 [Rob1989][21], daß die Koeffizienten a_k der Taylorreihe der Funktion

$$f(x) = \sqrt{\frac{e^x - 1}{x}} = 1 + a_1\,x + a_2\,x^2 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} a_k\,x^k$$

alle positiv sind. Überprüfen Sie diese Vermutung!

(b) Die Koeffizienten $B_k(x)$ der Taylorreihe (bei $z_0 = 0$)

$$F(z) = \sqrt{\frac{\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^x - 1}{2xz}} = \sum_{k=0}^{\infty} B_k(x)\,z^k$$

sind Polynome in x vom Grad k (dies muß nicht bewiesen werden.) Berechnen Sie $B_k(x)$ für $k = 0, \ldots, 5$.

Für jeden Koeffizienten $a_k > 0$ aus (a) stellt sich heraus, daß alle Koeffizienten des Polynoms $B_k(x)$ nichtnegativ sind. Ist aber $a_k < 0$ in (a) für ein $k \in \mathbb{N} := \{1, 2, 3, \ldots\}$, dann muß auch (mindestens) ein Koeffizient des Polynoms $B_k(x)$ negativ sein (siehe [Rob1978]–[Rob1989]). Gibt es einen solchen Fall? Falls ja, für welches k tritt dies zum ersten Mal auf? Berechnen Sie $B_k(x)$ in diesem Fall.

1.4 (Kinetische Energie) In der klassischen Mechanik hat ein Körper der Ruhemasse m_0 und der Geschwindigkeit v eine kinetische Energie

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m_0\,v^2\,.$$

---

[21] Es gibt eine andere berühmte Robertson-Vermutung [Rob1936], welche zusammen mit der Bieberbach- und der Milin-Vermutung 1984 von de Branges [DeB1984] bewiesen wurde.

In der speziellen Relativitätstheorie wird gezeigt, daß bei großen Geschwindigkeiten eine Masseänderung eintritt. Die Masse berechnet sich aus der Formel $m = m_0 \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$, wobei c die Lichtgeschwindigkeit ist.

Die Einsteinsche Formel für die Energie

$$E = m\,c^2 = E_{\text{Ruhe}} + E_{\text{kin}} = m_0\,c^2 + E_{\text{kin}}$$

liefert also die relativistische Formel

$$E_{\text{kin}} = m_0\,c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right)$$

für die kinetische Energie.

Zeigen Sie durch eine Taylorentwicklung der Abbruchordnung 5, daß im Grenzfall $v \to 0$ sich wieder der klassische Fall ergibt. Wie groß ist der Fehler bis zur fünften Ordnung?

1.5 (Faktorisierung) Finden Sie heraus, für welche $a \in \mathbb{N}$, $a \leqq 1000$ das Polynom $x^4 + a \in \mathbb{Z}[x]$ eine echte ganzzahlige Faktorisierung besitzt.