

# Definitionen und Grundlagen

## 1.1 Körperschall

Eine sehr große Zahl der Schallereignisse, die unser Ohr erreichen - sei es der Klang einer Geige, das Quietschen einer Bremse oder eine lautstarke Unterhaltung in der nachbarlichen Wohnung - werden durch schwingende Festkörper erzeugt oder fortgeleitet. Man bezeichnet das Gebiet der Physik, das sich mit der Erzeugung, Übertragung und Abstrahlung von - meist sehr kleinen - zeitlich wechselnden Bewegungen und Kräften in festen Körpern beschäftigt als „Körperschall“<sup>1</sup>. Dabei drückt die Bezeichnung „Schall“ bereits aus, dass das Hauptaugenmerk bei den hörbaren Frequenzen - also etwa im Bereich 16 Hz bis 16000 Hz - liegt. Diese Frequenzen sind jedoch durchaus nicht als starre Grenzen anzusehen, so ist es beispielsweise ohne weiteres möglich, dass die Messmethoden, mit denen die Körperschalleigenschaften von Materialien im hörbaren Bereich bestimmt werden, auch im Ultraschallgebiet angewandt werden. Es können andererseits auch Verfahren, die für tiefe Frequenzen (z.B. in der Seismologie oder in der mechanischen Schwingungslehre) entwickelt wurden, auch für Körperschallprobleme benutzt werden.

Trotz der Beschränkung auf hörbare Frequenzen handelt es sich beim Körperschall um ein sehr umfangreiches und abwechslungsreiches Gebiet. Das gilt sowohl für die auftretenden Phänomene als auch für die Anwendung. Hinsichtlich der Phänomene ist die größere Vielfalt der Erscheinungen dadurch bedingt, dass man es mit vielen verschiedenen Medien zu tun hat. Hinzu kommt, dass in Festkörpern zwei Wellentypen und ihre verschiedenen Kombinationen auftreten, während in Gasen oder Flüssigkeiten nur Kompressionswellen interessieren.

---

<sup>1</sup> Der Ausdruck „Körperschall“ wurde bereits 1932 vom Ausschuss für Einheiten und Gleichungsgrößen eingeführt. Eine Verwechslung mit dem Schall, der von Organen des menschlichen Körpers ausgeht, ist im heutigen Sprachgebrauch nicht mehr zu befürchten.

Hinsichtlich der praktischen Anwendung liegt ein wichtiges Interesse bei der Lärmbekämpfung also bei der Vermeidung oder Verringerung von Körperschall im Bauwesen, im Maschinenbau und im Fahrzeugbau. Daneben interessieren Körperschallprobleme auch bei der Materialuntersuchung - speziell bei Hochpolymeren -, bei der Maschinenüberwachung und bei der detaillierten Untersuchung der Vorgänge an vielen Musikinstrumenten. Ferner ist eine Beschäftigung mit Körperschallfragen auch notwendig im Zusammenhang mit der Wasserschallabstrahlung von Schiffen und schließlich bei der Behandlung einer gewissen Klasse von Materialermüdungserscheinungen, wie sie insbesondere bei Flugkörpern auftreten. Diese Erscheinungen, bei denen zwar die einzelnen Schwingungsvorgänge, wenn man sie kurzzeitig betrachtet, noch fast linear sind, bei denen jedoch über längere Zeit gesehen wegen der enorm großen Lastwechselzahlen nicht umkehrbare Effekte auftreten, werden zwar noch mit den Methoden des Körperschalls betrachtet, stellen aber bereits den Übergang zu dem weiten und äußerst komplizierten Gebiet der nichtlinearen Schwingungen dar.

Auch bei Beschränkung auf lineare Vorgänge ist der Amplitudenbereich des Körperschalls sehr groß. Hinsichtlich der Bewegung reicht er von weniger als  $10^{-11}$  m bei leisen, hochfrequenten Geräuschen bis einigen  $10^{-3}$  m bei lauten, tieffrequenten Tönen. Der Bereich der Körperschallschnelle (=Schwinggeschwindigkeit) erstreckt sich von etwa  $10^{-7}$  m/s bis fast 1 m/s und bei den sehr häufig gemessenen Beschleunigungen kann man Werte zwischen  $10^{-3}$  m/s<sup>2</sup> und  $10^4$  m/s<sup>2</sup> erwarten. In diesem Buch werden fast nur lineare Vorgänge behandelt; d.h. solche, bei denen eine Veränderung der anregenden Wechselkraft um einen bestimmten Faktor eine Veränderung der Bewegung um denselben Faktor bewirkt. Bei den meisten Körperschallanwendungen ist diese Linearität vorhanden, falls man in Kauf nimmt, dass die Materialparameter eventuell von der statischen Belastung abhängen. Damit ist auch die Gültigkeit des sog. Superpositionsprinzips gewährleistet. Ausnahmen liegen vor, wenn

- die Materialparameter von den Schwingungsamplituden abhängen, wie das beispielsweise bei hochbelasteten Gummifederkörpern unter Maschinen der Fall sein kann;
- die Bewegungsamplituden von ähnlicher Größe sind wie die kleinsten Abmessungen eines Körpers; (das ist zum Beispiel möglich, wenn die Amplitude einer Plattenschwingung vergleichbar mit der Plattendicke ist oder wenn wie beim Hertzschen Kontakt - die Größe einer Kontaktfläche amplitudenabhängig ist.

Neben den erwähnten Grenzen des uns hier interessierenden Frequenz- und Amplitudenbereichs zeigt die Praxis, das oft auch eine Einschränkung hinsichtlich der Dimension vorgenommen werden kann. Die wichtigsten Bauelemente lassen sich nämlich als eindimensionale Stäbe oder zweidimensionale Platten bzw. Schalen betrachten. Das gilt sowohl für die Pfeiler und Mauern im Bauwesen als auch für die Träger und Bleche, aus denen Fahrzeuge und Maschinen gebaut werden. In all diesen Fällen ist zumindest eine Di-

mension klein gegen die interessierenden Wellenlängen, so dass man, wie in den folgenden Kapiteln gezeigt wird, weit reichende Annäherungen und Vereinfachungen machen kann. Allen Problemstellungen ist gemeinsam, dass sie in drei Teilprobleme zerlegt werden können, nämlich Anregung, Ausbreitung und Abstrahlung. Die Anregung führt zur Einleitung von Schwingungsenergie in eine Struktur. Die Eigenschaften der Struktur bestimmen dann die Wellenausbreitung und damit den Transport der Energie von der Anregung zur Umgebung. Die Verteilung von Schwingungsenergie auf einer Struktur wird immer zwangsläufig zur Abstrahlung von Schall in das umgebende Medium (z.B. Luft) führen. Die Anregung von Strukturen, die Ausbreitung von Wellen auf Strukturen und die Abstrahlung von schwingenden Strukturen sind auch Bestandteile dieses Buches.

## 1.2 Grundlegende Begriffe

Im folgenden Text wird eine kurze Einführung in die Grundlagen und die Nomenklatur für die Beschreibung von Schwingungen und Wellen gegeben. Darüber hinaus werden einige physikalische Grundprinzipien (z.B. Lagrange'sche Gleichungen und Hamilton'sches Prinzip) dargestellt, die sowohl in der Praxis, aber auch im weiteren Text des Buches (z.B. zur Herleitung von Bewegungsgleichungen) sehr hilfreich sind.

### 1.2.1 Der Einmassenschwinger

Das vom Standpunkt der Anschauung einfachste, schwingungsfähige, mechanische System ist der Einmassenschwinger (Bild 1.1).

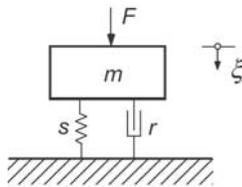


Bild 1.1. Masse-Feder System

Die Bewegungsgleichung für ein solches System ist

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} + r\frac{d\xi}{dt} + s\xi = F, \quad (1.1)$$

wobei  $\xi$  die Auslenkung aus der Ruhelage und  $F$  die anregende Kraft darstellt. Das System besteht aus der Masse  $m$  und der Federsteife  $s$ , sowie des Dämpfers

$r$  (der sog. Reibungswiderstand). Man kann nun eine stationäre harmonisch Anregung  $F(t)$  mit der Form

$$F(t) = \hat{F} \sin(\omega t + \varphi) \quad (1.2)$$

annehmen, bei der  $\hat{F}$  die Amplitude der Kraft,  $\omega$  die Frequenz,  $t$  die Zeit und  $\varphi$  die Phasenlage der Schwingung ist.

Da jeder Zeitverlauf sich aus solchen sinusförmigen (oder cosinusförmigen) Vorgängen zusammensetzen läßt, und wir im folgenden nur mit linearen Beziehungen zwischen den Feldgrößen zu tun haben werden, bei denen diese Teilvorgänge getrennt betrachtet und zum Schluss überlagert werden können, bedeutet das Zurückgreifen auf sinusförmige Vorgänge, oder wie man in der Akustik sagt, auf „reine Töne“, keine Beschränkung, sondern vielmehr eine große Vereinfachung der Darstellung.

Man kann auch von der Darstellung sinusförmiger Vorgänge durch die Projektion rotierender Zeiger auf die reelle Achse Gebrauch machen

$$\begin{aligned} \xi(t) &= \operatorname{Re} \left[ \hat{\xi} e^{j\omega t} \right] = \hat{\xi} \cos \omega t + \phi \\ F(t) &= \operatorname{Re} \left[ \hat{F} e^{j\omega t} \right] = \hat{F} \cos \omega t + \phi. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Der Betrag der komplexen Amplitude (hier  $\hat{\xi}$  und  $\hat{F}$ ) kennzeichnet die Länge des Zeigers, die Phaseninformation  $\phi$  die Lage des Zeigers für den Zeitpunkt  $t = 0$ . Die Unterstreichung einer Größe zur Kennzeichnung ihres komplexen Charakters wird im folgenden Text oft weggelassen, wenn von vorneherein feststeht, welche Größe gemeint ist. Hinsichtlich der Bezeichnung von  $\sqrt{-1}$  mit  $j$  schließen wir uns dem Gebrauch der Elektrotechnik an. Es sei an dieser Stelle auch vermerkt, dass in diesem Buch konsequent mit einer Zeitabhängigkeit der Form  $e^{j\omega t}$  und nicht wie sehr häufig in der anglosächsischen Literatur mit  $e^{-j\omega t}$  gerechnet wird.

Ein weiterer großer Vorteil des Rechnens mit - und Denkens in - Zeigern besteht darin, dass jede Differentiation nach der Zeit zu einer Multiplikation mit  $j\omega$  und jede zweimalige Differentiation also zu einer Multiplikation mit  $-\omega^2$  wird.

Die Beschränkung auf stationäre „reine Töne“ erlaubt die Differentialgleichung (1.1) in eine lineare Gleichung umzuformen

$$(-\omega^2 m + j\omega r + s) \hat{\xi} e^{j\omega t} = \hat{F} e^{j\omega t}. \quad (1.4)$$

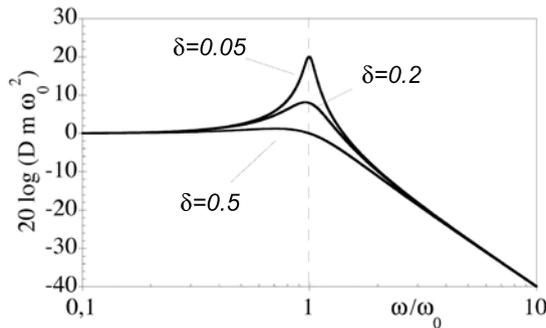
Die Übertragungsfunktion, d.h. die Systemantwort normalisiert auf die anregende Kraft ist somit

$$D(\omega) = \frac{1}{-m\omega^2 + j\omega r + s}. \quad (1.5)$$

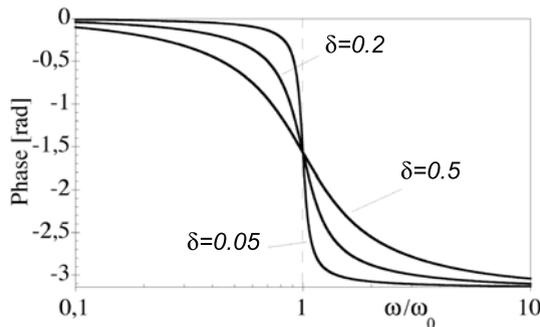
Ohne Dämpfung hätte dieses System die Eigenkreisfrequenz  $\omega_0 = \sqrt{s/m}$ . Mit der hier eingeführten viskosen Dämpfung verringert sich die Eigenkreisfrequenz zu  $\omega_{0D} = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$  mit der Abklingkonstanten  $\delta = \frac{r}{2m}$ . Damit lässt sich Gleichung (1.5) in einer etwas anderen Form schreiben

$$D(\omega) = \frac{1}{m[-\omega^2 + j\omega 2\delta + \omega_0^2]}. \quad (1.6)$$

Der Verlauf dieser komplexen „Übertragungsfunktion“ ist unter Verwendung der in der Akustik üblichen logarithmischen Skalen in Bild 1.2 für verschiedenen Abklingkonstanten wiedergegeben. Er zeigt einen ausgesprochenen Gipfel, der sich mit zunehmender Dämpfung verringert und sich ein wenig unter der für das ungedämpfte System geltenden Eigenkreisfrequenz  $\omega_0$  beschiebt.



**Bild 1.2.** Betrag der Übertragungsfunktion für einen Einmassenschwinger mit verschiedenen Abklingkonstanten  $\delta$



**Bild 1.3.** Phase der Übertragungsfunktion für einen Einmassenschwinger mit verschiedenen Abklingkonstanten  $\delta$

Wenn die Abklingkonstante hinreichend klein ist, kann dieser Unterschied bei der Beschreibung der Gipfelform, Gipfelhöhe und Gipfelform vernachlässigt werden. Es gilt also  $\omega_{0D} \approx \omega_0$  und  $D_{\max}(\omega) \approx \frac{1}{2m\delta\omega_0} = \frac{1}{r\omega_0}$ .

Betrachtet man das Verhältnis der Schnelle  $\underline{v}$  im Verhältnis zu ihrem bei der Resonanz erreichten Maximalwert  $\underline{v}_{\max}$  und führt man die Kreisfrequenzabweichung

$$\Delta\omega = \omega - \omega_0 \quad (1.7)$$

ein, so erhält man unter Vernachlässigung quadratischer Glieder dieser Größe

$$\frac{\underline{v}}{\underline{v}_{\max}} = \frac{1}{1 + j\Delta\omega/\delta}. \quad (1.8)$$

Man kann diese Abhängigkeit des Verhältnisses einer Feldgröße zu ihrem bei Resonanz erreichten Maximalwert von der Frequenzabweichung geradezu zur Definition einer „Resonanzfunktion“ machen. Sie kennzeichnet nicht nur den parabolischen Scheitelpunkt

$$\left| \frac{\underline{v}}{\underline{v}_{\max}} \right| \approx 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{\Delta\omega}{\delta} \right)^2, \quad (1.9)$$

sondern gilt auch noch unterhalb der Wendepunkte bei hinreichend kleinem  $\delta$ , beschreibt also den für alle Resonanzerscheinungen kennzeichnenden „glockenförmigen“ Verlauf der Amplituden, bzw. der Amplitudenquadrate oder deren Logarithmen über der Frequenzabweichung. Bei Auftragung des Logarithmus liegt der Wendepunkt dort, wo das Verhältnis der Amplitudenquadrate, also die Energien, auf den halben Wert herabgesunken sind. Die dazugehörige Kreisfrequenzabweichung sei daher mit dem Index 1/2 versehen. Sie ergibt aus (1.9) zu

$$\Delta\omega_{1/2} = \delta. \quad (1.10)$$

Das Doppelte dieses Abstandes, das als anschauliches Maß für die Gipfelbreite anzusehen ist, wird als „Halbwertsbreite“ bezeichnet. Sie wird meist nicht als Kreisfrequenzänderung, also in  $\text{rad s}^{-1}$ , sondern als Frequenzänderung, also in Hz, angegeben:

$$2\Delta f_{1/2} = \delta/\pi, \quad \text{oft auch einfach mit } \Delta f \text{ bezeichnet.} \quad (1.11)$$

Sind die Amplituden aufgetragen, so kennzeichnet die Halbwertsbreite die Stellen, wo diese das 0,707-fache der Maximalwerte betragen. Sind die relativen Körperschallschnellepegel, also die Größen

$$L_v = 10 \lg \left( \left| \frac{\hat{v}}{\hat{v}_{\max}} \right|^2 \right) \text{ [dB]} \quad (1.12)$$

aufgetragen, so kennzeichnet die Halbwertsbreite den Abfall vom Resonanzgipfel um 3 dB.

Aus der komplexen Übertragungsfunktion kann der Betrag (Bild 1.2)

$$|D| = \frac{1}{m\omega_0^2 \left[ \left( \delta \frac{2}{\omega_0} \right)^2 + \left( 1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right)^2 \right]^{1/2}} \quad (1.13)$$

und die dazugehörige Phase

$$\varphi_D = \arctan \left[ \frac{\delta \frac{1}{\omega_0}}{\left( 1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right)} \right]. \quad (1.14)$$

der Übertragungsfunktion berechnet werden (Bild 1.3). In diesem Fall beschreibt die Funktion das Amplituden- und Phasenverhältnis zwischen resultierender Auslenkung und anregender Kraft. Oft ist man jedoch eher an der Schnelle interessiert. Unter anderem weil gerade das Produkt aus Schnelle und Kraft die Leistung ergibt, die mit der Welle transportiert wird oder von einer Maschine in ein Fundament eingespeist wird. Gleichung (1.6) ergibt in diesem Fall

$$\left( j\omega m + r + \frac{s}{j\omega} \right) \hat{v} = \hat{F}. \quad (1.15)$$

Das Verhältnis zwischen resultierender Schnelle  $\hat{v}$  und anregender Kraft  $\hat{F}$  wird durch die Übertragungsfunktion

$$Y(\omega) = \frac{1}{j\omega m + r + \frac{s}{j\omega}} \quad (1.16)$$

beschrieben.  $Y(\omega)$  (in den folgenden Kapiteln meistens mit  $A(\omega)$  bezeichnet) wird als Admittanz (im Englischen als „mobility“) bezeichnet. Den Quotienten der Zeiger der resultierende Kraft  $\hat{F}$  und der vorgegeben Schnelle  $\hat{v}$  am Angriffspunkt, wird als „mechanische Impedanz“ bezeichnet und durch  $Z(\omega)$  gekennzeichnet.

In dem Beispiel des einfachen Einmassenschwingers mit einer Anregung in einem Freiheitsgrad gilt  $Z(\omega) = 1/Y(\omega)$ . Für ein System mit einer Anregung (einer vorgegebenen Schnelle) in mehr als einem Freiheitsgrad gilt jedoch  $[Z(\omega)] = [Y(\omega)]^{-1}$  wobei  $[Z(\omega)]$  und  $[Y(\omega)]$  Matrizen darstellen. Beispielsweise für ein Systems mit zwei Massen und zwei Federn (Bild 1.4) kann man die Schnelle wie folgt schreiben:

$$\begin{bmatrix} \hat{v}_1(\omega) \\ \hat{v}_2(\omega) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11}(\omega) & Y_{12}(\omega) \\ Y_{21}(\omega) & Y_{22}(\omega) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{F}_1(\omega) \\ \hat{F}_2(\omega) \end{bmatrix}. \quad (1.17)$$

Dabei sind die Admittanzen  $Y_{11}(\omega) = \frac{\hat{v}_1(\omega)}{\hat{F}_1(\omega)}$  und  $Y_{12}(\omega) = \frac{\hat{v}_2(\omega)}{\hat{F}_1(\omega)}$  mit  $\hat{F}_2(\omega) = 0$ , sowie  $Y_{21}(\omega) = \frac{\hat{v}_1(\omega)}{\hat{F}_2(\omega)}$  und  $Y_{22}(\omega) = \frac{\hat{v}_2(\omega)}{\hat{F}_2(\omega)}$  mit  $\hat{F}_1(\omega) = 0$ .

Die mechanische Impedanz ist dann

$$[Z(\omega)] = \begin{bmatrix} Z_{11}(\omega) & Z_{12}(\omega) \\ Z_{21}(\omega) & Z_{22}(\omega) \end{bmatrix} \quad (1.18)$$

mit

$$Z_{11}(\omega) = \frac{\hat{F}_1(\omega)}{\hat{v}_1(\omega)} = \frac{Y_{11}(\omega)}{Y_{11}(\omega)Y_{22}(\omega) - Y_{12}(\omega)Y_{21}(\omega)}$$

und

$$Z_{12}(\omega) = \frac{\hat{F}_2(\omega)}{\hat{v}_1(\omega)} = \frac{-Y_{21}(\omega)}{Y_{11}(\omega)Y_{22}(\omega) - Y_{12}(\omega)Y_{21}(\omega)}$$

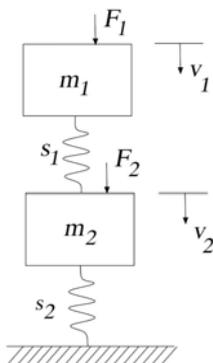
wenn  $\hat{v}_2(\omega) = 0$ , sowie

$$Z_{21}(\omega) = \frac{\hat{F}_1(\omega)}{\hat{v}_2(\omega)} = \frac{-Y_{12}(\omega)}{Y_{11}(\omega)Y_{22}(\omega) - Y_{12}(\omega)Y_{21}(\omega)}$$

und

$$Z_{22}(\omega) = \frac{\hat{F}_2(\omega)}{\hat{v}_2(\omega)} = \frac{Y_{22}(\omega)}{Y_{11}(\omega)Y_{22}(\omega) - Y_{12}(\omega)Y_{21}(\omega)}$$

mit  $\hat{v}_1(\omega) = 0$ .



**Bild 1.4.** System mit einer Anregung in zwei Freiheitsgraden

Während  $Y_{11}$ ,  $Y_{12}$ ,  $Y_{21}$  und  $Y_{22}$  relativ leicht experimentell bestimmt werden können, ist die Messung von  $Z_{11}$ ,  $Z_{12}$ ,  $Z_{21}$ , und  $Z_{22}$  nicht so einfach. Es würde bedeuten, dass die Struktur in allen Freiheitsgraden außer am Anregungspunkt blockiert werden muss (d.h. die Schnelle null ist). Die Matrix der Impedanzen wird in der Praxis durch die Messung der Admittanzen bestimmt. Gleichung 1.18 zeigt aber auch, dass alle Elemente der Admittanzmatrix (mit ausreichender Präzision) für die Berechnung der Impedanzmatrix benötigt werden.

### 1.2.2 Die elastische Aufhängung

Eine typische Problemstellung ist die Vermeidung der Übertragung von Vibrationen von einem Fundament in ein empfindliches Gerät mit Hilfe einer elastischen Lagerung. Bild 1.5 zeigt in idealisiertes Modell einer solchen Anordnung. Die Schnelle des Fundaments  $\hat{v}_s$  ist vorgegeben. Das Instrument ist durch seine Masse  $m$  charakterisiert und die elastische Aufhängung durch die Steife  $s$  und eine viskose Dämpfung  $r$ . Aufgabe ist es die Schnelle  $\hat{v}_m$  der Masse  $m$  so klein wie möglich zu halten. Die Kraft (Federkraft und Reibungskraft), die an der Masse angreift ist:

$$\hat{F} = (\hat{v}_s - \hat{v}_m) r + (\hat{v}_s - \hat{v}_m) \frac{s}{j\omega}. \quad (1.19)$$

Diese Kraft führt zu einer Beschleunigung der Masse

$$\hat{F} = j\omega m \hat{v}_m. \quad (1.20)$$

Aus beiden Gleichungen lässt sich das Verhältnis der Schnelle der Masse zur Schnelle des Fundaments berechnen

$$\frac{\hat{v}_m}{\hat{v}_s} = \frac{1 + \frac{j r \omega}{s}}{1 - \frac{\omega^2 m}{s} + \frac{j \omega r}{s}} = \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + \frac{j \omega}{\omega_0^2} 2\delta}, \quad (1.21)$$

wobei  $\omega_0$  wieder die Resonanzfrequenz des Masse-Federsystems ( $\omega_0 = \sqrt{s/m}$ ) ist. Von (1.21) sieht man, dass unterhalb  $\omega_0$  Fundament und Masse die gleiche Schnelle haben. Oberhalb  $\omega_0$  nimmt die Schnelle der Masse näherungsweise mit  $1/\omega_0^2$  ab. Nur bei der Resonanzfrequenz kann es zu einer höheren Schnelle der Masse im Vergleich zur Schnelle des Fundaments kommen. Hier ist die Dämpfung entscheidend.

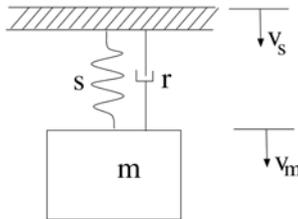


Bild 1.5. Modell einer elastischen Aufhängung

### 1.2.3 Das Problem des „ruhenden Bezugskörpers“ bzw. des „starrten Abschlusses“

Bei zahlreichen optischen und elektrischen Körperschallmessverfahren wird ein „ruhender Bezugskörper“ benötigt. Es handelt sich dabei um eine Idealisierung, die besonders bei Frequenzen über einigen Hundert Hz kaum zu

realisieren ist, weil „ruhend“ bedeutet, dass, bezogen auf ein Inertialsystem, die Bewegungen des ruhenden Körpers wenigstens kleiner als  $10^{-6}$  m, häufig sogar kleiner als  $10^{-10}$  m sein müssen.

Ein ähnliches, im Prinzip unlösbares Problem ist der „starre Abschluss“, der bei einigen Körperschallmessverfahren (z.B. bei der Steifemessung nach Abschnitt 3.4.1.1) erwünscht ist. Auch hier handelt es sich um eine Idealisierung, von der man umso weiter entfernt ist, je höher die Frequenz ist.

Einen Ausweg aus dieser Schwierigkeit bietet die Verwendung von Messgeräten, die nach dem „Tonpilzprinzip“ aufgebaut sind oder die auf andere Weise eine „seismische Masse“ als Bezugsgröße benutzen. Der Grundgedanke besteht offensichtlich darin, den kaum zu realisierenden starren Körper durch einen solchen zu ersetzen, dessen Bewegung exakt berechnet und damit auch berücksichtigt werden kann. Selbstverständlich eignen sich hierfür nicht nur „seismische Massen“, sondern auch andere Anordnungen, falls man ihre Admittanz für die interessierenden Bewegungsrichtungen berechnen kann.

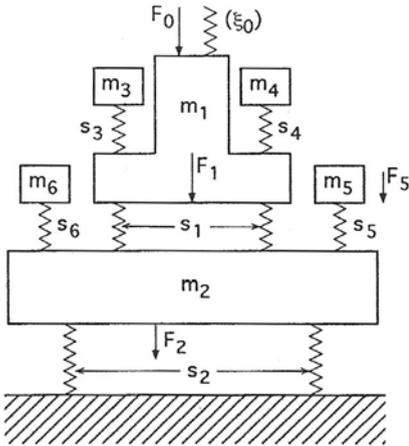
In der Praxis kann es allerdings oft recht schwierig sein eine derartige Berechnung durchzuführen. Ein relativ einfaches Beispiel eines Laboraufbaus, bei dem sogar nur eine Bewegungsrichtung berücksichtigt wird, zeigt Bild 1.6. Es besteht aus den sechs Massen  $m_1$  bis  $m_6$ , deren Bewegungen sich aus den zu beiden Seiten angreifenden Kräften und dem Newton'schen Trägheitsgesetz ergeben. Dabei tritt statt der zweimaligen Zeitableitung der Faktor  $-\omega^2$  auf, weil wir der Einfachheit halber mit Zeigern rechnen und den Faktor  $e^{j\omega t}$  weglassen. Die im Schwingungssystem herrschenden Kräfte sind entweder von außen vorgegeben (z.B.  $F_0$ ) oder können aus der Zusammendrückung der einzelnen Federn der Steife  $s_1$  bis  $s_6$  ermittelt werden. Es entstehen so 12 lineare Beziehungen, die in Bild 1.6 angegeben sind. Es stellt keine Schwierigkeit dar, die Kräfte zu eliminieren. Wir erhalten so folgende 6 lineare Gleichungen für die unbekanntenen Bewegungen

$$\begin{bmatrix} a_{11} & -s_1 & -s_3 & -s_4 & 0 & 0 \\ -s_1 & a_{22} & 0 & 0 & -s_5 & -s_6 \\ -s_3 & 0 & a_{33} & 0 & 0 & 0 \\ -s_4 & 0 & 0 & a_{44} & 0 & 0 \\ 0 & -s_5 & 0 & 0 & a_{55} & 0 \\ 0 & -s_6 & 0 & 0 & 0 & a_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \\ \xi_5 \\ \xi_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (1.22)$$

mit

$$\begin{aligned} a_{11} &= -\omega^2 m_1 + s_1 + s_3 + s_4, & a_{22} &= -\omega^2 m_2 + s_1 + s_2 + s_5 + s_6, \\ a_{33} &= -\omega^2 m_3 + s_3, & a_{44} &= -\omega^2 m_4 + s_4, & a_{55} &= -\omega^2 m_5 + s_5 \\ \text{und } a_{66} &= -\omega^2 m_6 + s_6 \end{aligned} \quad (1.23)$$

Es ist relativ leicht aus (1.22) die Bewegungsamplituden  $\xi_1$  bis  $\xi_6$  auszurechnen und daraus die interessierende Admittanz zu berechnen. Bild 1.7 zeigt Ergebnisse für einen bestimmten Parametersatz. Dabei wurde die Dämpfung durch die Benutzung von komplexen Steifen  $\underline{s} = s(1 + j\eta)$  eingeführt, wobei  $\eta$  der Verlustfaktor ist.



$$F_0 - F_1 + F_3 + F_4 = -\omega^2 m_1 \xi_1 ; F_1 = s_1 (\xi_1 - \xi_2)$$

$$F_1 - F_2 + F_5 + F_6 = -\omega^2 m_2 \xi_2 ; F_2 = s_2 \xi_2$$

$$0 - F_3 = -\omega^2 m_3 \xi_3 ; F_3 = s_3 (\xi_3 - \xi_1)$$

$$0 - F_4 = -\omega^2 m_4 \xi_4 ; F_4 = s_4 (\xi_4 - \xi_1)$$

$$0 - F_5 = -\omega^2 m_5 \xi_5 ; F_5 = s_5 (\xi_5 - \xi_2)$$

$$0 - F_6 = -\omega^2 m_6 \xi_6 ; F_6 = s_6 (\xi_6 - \xi_2)$$

$m_1$  = Bezugskörper;  $m_2$  = Labortisch;  $m_3, m_4$  = Massen, die zu "inneren Resonanzen" des Bezugskörpers führen;  $m_5, m_6$  = Massen von aufliegenden Teilen, z.B. Meßgeräte.

Bild 1.6. Idelasierung eines Messaufbaus, der aus mehreren Teilen besteht

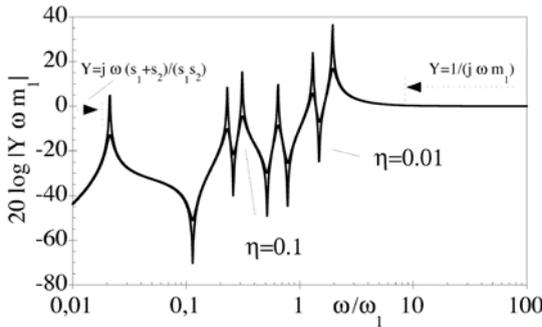


Bild 1.7. Admittanz für die Anordnung in Bild 1.6. Parameter:  $m_2/m_1 = 1$ ,  $m_3/m_1 = 3$ ,  $m_4/m_1 = 1.8$ ,  $m_5/m_1 = 5$ ,  $m_6/m_1 = 32$ ,  $s_2/s_1 = 0.02$ ,  $s_3/s_1 = 0.8$ ,  $s_4/s_1 = 1.1$ ,  $s_5/s_1 = 0.4$ ,  $s_6/s_1 = 0.76$

### 1.2.4 Die Lagrange'schen Gleichungen

Die in Kapitel 1.2.3 benutzte Bilanzierung der Kräfte lässt sich natürlich auch auf kompliziertere Schwingungssysteme anwenden, aber es ist fraglich, ob das immer die geschickteste Vorgehensweise ist. Es soll daher auch noch ein anderes sehr wichtiges Verfahren zur Herleitung von Bewegungsgleichungen vorgestellt werden. Es handelt sich um die Anwendung der Lagrange'schen Gleichungen zweiter Art [1.1]. Dabei kommt man ganz ohne den Begriff der Kraft

aus und hat den zusätzlichen Vorteil, dass hauptsächlich quadratische Terme auftreten, sodass die Wahrscheinlichkeit, Vorzeichenfehler zu machen, etwas geringer ist. Im nächsten Abschnitt werden wir dann sehen, dass die Lagrange'schen Gleichungen eine Folge eines noch fundamentaleren Gesetzes der Mechanik, des Hamilton'schen Prinzips, sind. Die Methode der Lagrange'schen Gleichungen zweiter Art besteht aus zwei Schritten

- a) Berechnung der gesamten im Schwingungssystem enthaltenen kinetischen und potentiellen Energien;
- b) Differentiation der Energien nach den Schnellen und Auslenkungen zur Bestimmung der Bewegungsgleichungen.

Um das Verfahren zu verdeutlichen, wenden wir es auf das Schwingungssystem in Kapitel 1.2.3 an. Die kinetische Gesamtenergie ist in diesem Fall

$$E_{kin} = \frac{1}{2} \sum_{\nu}^6 m_{\nu} v_{\nu}^2. \quad (1.24)$$

Die potentielle Energie ist nur in den Federn enthalten. Man findet sie, indem man annimmt, dass eine Feder in vielen kleinen Stufen jeweils um das Stück  $\Delta l$  zusammengedrückt wird. Die Zusammendrückung nach der  $k$ -ten Stufe sei  $l_k = k\Delta l_k$  und am Ende des Vorgangs - also nach  $k = K$  Stufen -  $l_K$ . Die in der  $k$ -ten Stufe wirkende Kraft ist nach dem Hooke'schen Gesetz  $F_k = s l_k$  und die Arbeit, die beim Übergang von der Stufe  $k$  nach  $k + 1$  geleistet werden muss, ist  $\Delta E_k = F_k \Delta l_k$ . Addiert man die bei den einzelnen Stufen geleisteten Arbeiten, dann erhält man für die in der Feder gespeicherte, gesamte, potentielle Energie

$$\begin{aligned} E_{pot} &= \sum_{k=0}^K \Delta E_k = s \sum_{k=0}^K \Delta l \cdot l_k = s \sum_{k=0}^K k (\Delta l)^2 = s (\Delta l)^2 \sum_{k=0}^K k \\ &= s (\Delta l)^2 \frac{K(K+1)}{2} \approx \frac{1}{2} s (\Delta l \cdot K)^2 = \frac{1}{2} s (l_K)^2. \end{aligned} \quad (1.25)$$

Die in einer Feder gespeicherte, potentielle Energie ist also dem Quadrat der Zusammendrückung proportional. Wenden wir diese Beziehung auf die Anordnung in Bild 1.6 an, so ergibt sich

$$\begin{aligned} E_{pot} &= \frac{1}{2} \left[ s_1 (\xi_1 - \xi_2)^2 + s_2 \xi_2^2 + s_3 (\xi_1 - \xi_3)^2 + s_4 (\xi_1 - \xi_4)^2 \right. \\ &\quad \left. + s_5 (\xi_2 - \xi_5)^2 + s_6 (\xi_2 - \xi_6)^2 + s_0 (\xi_0 - \xi_1)^2 \right]. \end{aligned} \quad (1.26)$$

Man beachte, dass das Ergebnis unabhängig davon ist, ob man  $\xi_1 - \xi_2$  oder  $\xi_2 - \xi_1$  etc. schreibt; man ist also zumindest hier in der Vorzeichenwahl frei. In (1.26) wurde noch ein Term mit den in der Skizze von Bild 1.6 gestrichelt bzw. in Klammern angegebenen Steife  $s_0$  und der vorgegebenen Auslenkung  $\xi_0$  eingeführt. Wir werden ihn zur Darstellung einer eventuellen äußeren Kraft

benötigen und damit die Einführung einer solchen Kraft umgehen. Wie man in Büchern über theoretische Physik nachlesen kann, besteht das Verfahren der Lagrange'schen Gleichungen zweiter Art darin, den Ausdruck

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial (E_{pot} - E_{kin})}{\partial v_i} - \frac{\partial (E_{pot} - E_{kin})}{\partial \xi_i} = 0, \quad \text{mit } i = 1, 2, 3, 4, \dots \quad (1.27)$$

zu bilden. Dabei sind  $v_i$  und  $\xi_i$  die unbekanntenen Schnellen und Auslenkungen - also nicht die vorgegebene und damit bekannte Auslenkung  $\xi_0$ . Man beachte, dass in diesen Rechnungen  $v_i$  und  $\xi_i$  zeitabhängige Größen und keine Zeiger sind. Für alle hier behandelten Beispiele und für viele andere Schwingungsprobleme ist es möglich, die Koordinaten so zu wählen, dass die kinetische Energie nur von den Schnellen  $v_i$  und die potentielle Energie nur von den Auslenkungen  $\xi_i$  abhängen. Damit wird aus (1.27)

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial E_{kin}}{\partial v_i} + \frac{\partial E_{pot}}{\partial \xi_i} = 0 \quad \text{mit } i = 1, 2, 3, 4, \dots \quad (1.28)$$

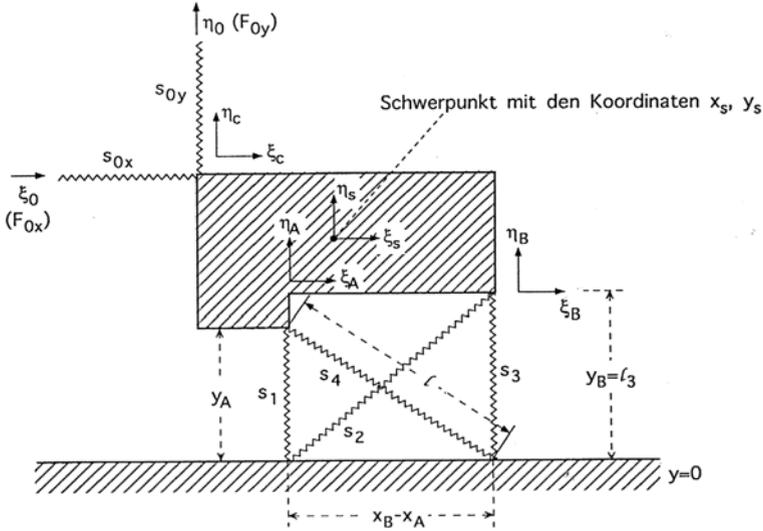
Setzt man (1.24) und (1.26) in (1.27) ein und führt die entsprechenden Differentiationen durch, so erhält man sechs lineare Gleichungen. Sie sind mit (1.22) identisch, vorausgesetzt, dass man die Steife der Hilfsfeder  $s_0$  so klein macht, dass  $s_0 \xi_1 \rightarrow 0$  und  $\xi_0$  so groß wählt, dass  $s_0 \xi_0 = F_0$ . Zudem ist zu berücksichtigen, dass  $\frac{dv_i}{dt} = \frac{d\xi_i}{dt^2}$  bzw. in Zeigerschreibweise  $\frac{dv_i}{dt} = -\omega^2 \xi_i$ .

### 1.2.5 Bewegungen in mehreren Richtungen

Die großen Vorteile des Lagrange'schen Verfahrens kommen erst richtig zum Tragen, wenn man das Schwingungsverhalten komplizierter Systeme behandelt. Beispielsweise werden die Schwingungen von Konstruktionen, die aus Tausenden von Teilen bestehen, oder durch sehr viele Einzelelemente modelliert werden können, normalerweise mit Methode der finiten Elemente (FEM) und damit in den meisten Fällen letztlich nach (1.27) - oder einer Abwandlung davon - berechnet. Wir wollen hier jedoch nicht auf die Einzelheiten der FEM eingehen, weil die damit verbundenen Probleme der Elementwahl, der Dateneingabe, der Handhabung großer Matrizen etc. den Rahmen dieses Buches sprengen würde. Wir geben lediglich noch ein Beispiel an, das zeigen soll, wie man bei Vorhandensein von verschiedenen Bewegungsrichtungen und von Drehbewegungen vorgeht. In Bild 1.8 handelt es sich um ein Schwingungssystem, bei dem vertikale und horizontale Bewegungen sowie eine Drehbewegungen um eine zur Papierebene senkrechte Achse möglich sind. Es ist also bei der kinetischen Energie die Translation mit den Schwerpunktschnellen  $v_{sx}$  bzw.  $v_{sy}$  und die Drehung mit der Winkelschnelle  $\dot{\varphi} = d\varphi/dt$  zu berücksichtigen. Es gilt

$$E_{kin} = \frac{1}{2} m (v_{cx}^2 + v_{cy}^2) + \frac{1}{2} \Theta \dot{\varphi}_{cz}^2, \quad (1.29)$$

mit  $v_{sx} = \frac{d\xi_s}{dt}$ ;  $v_{sy} = \frac{d\eta_s}{dt}$ ;  $\dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt}$ . Dabei ist  $m$  die Masse und  $\Theta$  das Trägheitsmoment des jeweiligen Schwingers.



Koordinaten des Schwerpunktes  $x_s, y_s$

Koordinaten der Federbefestigungspunkte  $(x_A, y_A), (x_B, y_B), (x_C, y_C)$

**Bild 1.8.** Starre Masse auf Federn mit Anregung durch die Bewegung  $\xi_0, \eta_0$  bzw. die Kräfte  $F_{0x}, F_{0y}$

Für die Berechnung der potentiellen Energie müssen wir etwas weiter ausholen, weil die Bewegungsrichtungen miteinander verkoppelt sind. Nach (1.25) gilt für eine Feder der Steife  $s$ , die den Punkt  $(x_\nu, y_\nu)$  mit dem Punkt  $(x_\mu, y_\mu)$  verbindet

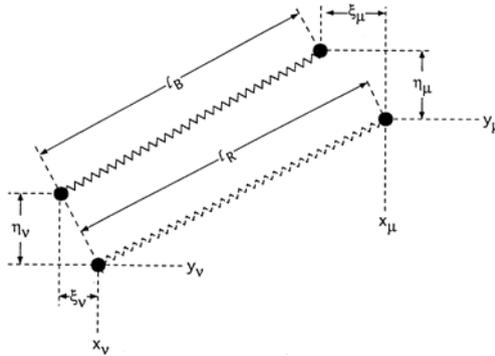
$$E_{pot} = \frac{s}{2} (l_B - l_R)^2 \tag{1.30}$$

Dabei ist  $l_R$  die Federlänge in der Ruhelage und  $l_B$  die bei Bewegung der Federenden um  $(\xi_\nu, \eta_\nu)$  bzw.  $(\xi_\mu, \eta_\mu)$ . Siehe Bild 1.9. Sie ist nach dem Satz von Pythagoras gegeben durch

$$l_B = \left\{ [(x_\nu + \xi_\nu) - (x_\mu + \xi_\mu)]^2 + [(y_\nu + \eta_\nu) - (y_\mu + \eta_\mu)]^2 \right\}^{\frac{1}{2}}. \tag{1.31}$$

Die Federlänge in Ruhelage ist

$$l_R = \left\{ (x_\nu - x_\mu)^2 + (y_\nu - y_\mu)^2 \right\}^{\frac{1}{2}}. \tag{1.32}$$



**Bild 1.9.** Koordinaten einer Feder in Ruhe (Länge  $l_R$ ) und nach einer Bewegung (Länge  $l_B$ )

Durch Einsetzen ergibt sich nach kleineren Umformungen

$$E_{pot} = \frac{s}{2} l_R^2 \left[ \left\{ 1 + 2 \frac{x_\nu - x_\mu}{l_R^2} (\xi_\nu - \xi_\mu) + 2 \frac{y_\nu - y_\mu}{l_R^2} (\eta_\nu - \eta_\mu) + \frac{(\xi_\nu - \xi_\mu)^2}{l_R^2} + \frac{(\eta_\nu - \eta_\mu)^2}{l_R^2} \right\}^{\frac{1}{2}} - 1 \right]^2.$$

Da  $|x_\nu - x_\mu| \leq l_R$  und  $|\xi_\nu - \xi_\mu| \ll l_R$  und entsprechendes für  $y$  und  $\eta$  gilt, sind die Terme mit  $l_R^2$  im Nenner viel kleiner als eins. Man kann also die Näherung

$$(1 + \varepsilon)^{\frac{1}{2}} \approx 1 + \frac{\varepsilon}{2}, \tag{1.33}$$

anwenden und erhält

$$E_{pot} = \frac{s}{2} l_R^2 \left[ \frac{x_\nu - x_\mu}{l_R^2} (\xi_\nu - \xi_\mu) + \frac{y_\nu - y_\mu}{l_R^2} (\eta_\nu - \eta_\mu) + R_\xi + R_\eta \right]^2 \tag{1.34}$$

Die mit  $R_\xi$  und  $R_\eta$  bezeichneten Reste sind von zweiter Ordnung in den Bewegungsgrößen. Sie stellen die sog. „geometrische Nichtlinearität“ dar. Sie treten auch bei vollkommen amplituden-unabhängigem Materialverhalten (konstante Federsteife  $s$ ) auf. Sie können eine Rolle spielen, wenn  $|\xi_\nu - \xi_\mu| \geq |x_\nu - x_\mu|$  oder  $|\eta_\nu - \eta_\mu| \geq |y_\nu - y_\mu|$ , wenn also eine Auslenkung größer oder vergleichbar ist mit der kleinsten Dimension der Gesamtanordnung. Bei sehr schräg liegenden Federn und großen Auslenkungen kann die geometrische Nichtlinearität durchaus eine Rolle spielen. Beispielsweise handelt es sich bei einer Plattenbewegung, wenn die Auslenkung von der Größenordnung der Plattendicke ist, letztlich um eine geometrische Nichtlinearität [1.2]. Auch die zuerst von H. HERTZ beschriebene Amplitudenabhängigkeit der Kontaktsteife ist von diesem Typ [1.3].

In diesem Buch wollen wir uns jedoch auf lineare Schwingungen konzentrieren, d.h. die nichtlinearen Terme  $R_\xi$  und  $R_\eta$  vernachlässigen. Damit wird die potentielle Energie einer Feder bei zweidimensionaler Beanspruchung

$$E_{pot} = \frac{s}{2} \left[ \frac{x_\nu - x_\mu}{l_R} (\xi_\nu - \xi_\mu) + \frac{y_\nu - y_\mu}{l_R} (\eta_\nu - \eta_\mu) \right]^2. \quad (1.35)$$

Als Nächstes müssen wir nun noch die Auslenkungen  $\xi$  und  $\eta$  an einem beliebig gewählten Punkt des Schwingers durch die translatorische Bewegung des Schwerpunktes und die Drehbewegung ausdrücken. Dazu nehmen wir an, dass - bezogen auf einen willkürlich gewählten Koordinatenursprung - der Schwerpunkt die Ruhekoordinaten  $(x_S, y_S)$  habe. Seine Verschiebungen und damit die Translation jedes Punktes des Schwingers seien  $(\xi_S, \eta_S)$ . Siehe Bild 1.10. Den Drehanteil  $(\xi_D, \eta_D)$  an der Verschiebung eines Punktes mit den Ruhekoordinaten  $(x, y)$  finden wir aus den Gleichungen für die Koordinatentransformation bei Drehung. Falls  $\varphi$  der Drehwinkel und der Schwerpunkt der Drehpunkt ist, gilt (siehe auch Bild 1.10)

$$\begin{aligned} \xi_D &= (x - x_S) \cos \varphi - (y - y_S) \sin \varphi - (x - x_S) \\ \eta_D &= (x - x_S) \sin \varphi + (y - y_S) \cos \varphi - (y - y_S). \end{aligned} \quad (1.36)$$

Wegen der  $\cos$ - und  $\sin$ -Funktionen stellt (1.36) einen nichtlinearen Zusammenhang zwischen Drehwinkel und Auslenkung dar. Für die hier interessierenden kleinen Schwingungen kann man die Näherung  $\cos \varphi \approx 1$  und  $\sin \varphi \approx 1$

$$\begin{aligned} \xi_D &= -(y - y_S) \varphi, \\ \eta_D &= (x - x_S) \varphi. \end{aligned} \quad (1.37)$$

Es liegt also auch hier eine „geometrische Nichtlinearität“ vor, die allerdings erst bei höheren Amplituden zum Tragen kommt als die in (1.31) enthaltene Nichtlinearität.

Durch Addition der Translations- und der Drehanteile erhält man schließlich die Gesamtverschiebung am Ort  $(x, y)$  des Körpers

$$\begin{aligned} \xi &= \xi_S + \xi_D = \xi_c - (y - y_S) \varphi \\ \eta &= \eta_S + \eta_D = \eta_c + (x - x_S) \varphi. \end{aligned} \quad (1.38)$$

Setzt man die so ermittelten Verschiebungen in (1.35) ein und addiert die Anteile der einzelnen Federn, so findet man für die in Bild 1.8 skizzierte Anordnung

$$\begin{aligned} E_{pot} &= \frac{s_1}{2} \left[ \frac{y_A}{l_1} \eta_A \right]^2 + \frac{s_2}{2} \left[ \frac{x_B - x_A}{l_2} \xi_B + \frac{y_B}{l_2} \eta_B \right]^2 + \frac{s_3}{2} \left[ \frac{y_B}{l_3} \eta_B \right]^2 \\ &+ \frac{s_4}{2} \left[ \frac{x_A - x_B}{l_4} \xi_A + \frac{y_A}{l_4} \eta_A \right]^2 + \frac{s_{0x}}{2} [\xi_C - \xi_0]^2 + \frac{s_{0y}}{2} [\eta_C - \eta_0]^2 \end{aligned} \quad (1.39)$$

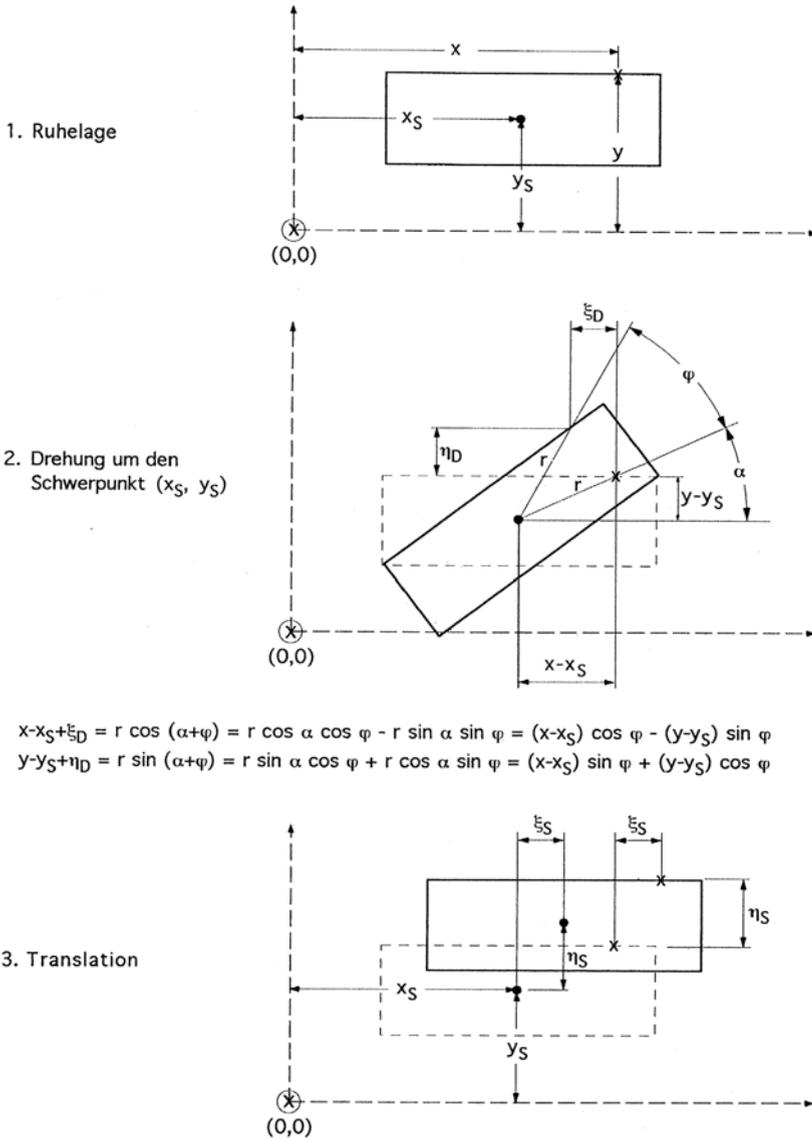


Bild 1.10. Ruhelage, Drehung und Translation eines starren Körpers

In diesem Ausdruck sind  $s_1$  bis  $s_4$  die Steifen der einzelnen Federn und  $l_1$  bis  $l_4$  ihre Längen.  $s_{0x}$  und  $s_{0y}$  sind die Steifen der Hilfsfedern. Die weitere Rechnung ist prinzipiell einfach, aber etwas umständlich. Es empfiehlt sich,

sie von einem Gleichungmanipulationsprogramm vornehmen zu lassen. Die einzelnen Schritte sind

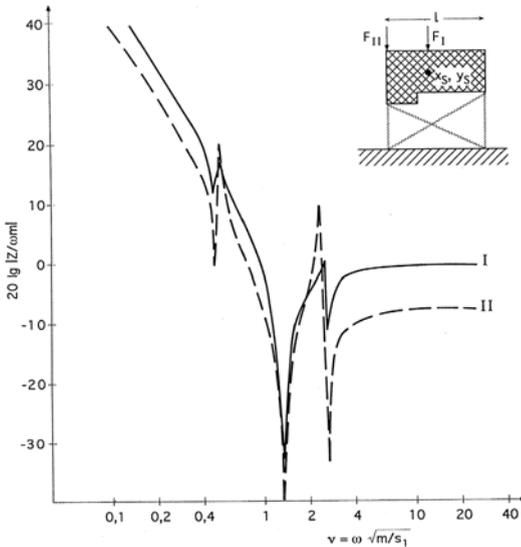
- Einsetzen von (1.38) in (1.39) für den Fall  $x = x_A, x = x_B, y = y_A, y = y_B, x = x_C, y = y_C$ ;
- Einsetzen des so erhaltenen Ausdrucks sowie von (1.29) in (1.27 und 1.28);
- Durchführung der Differentiation nach  $v_{Sx}, v_{Sy}, \dot{\varphi}, x_S, \eta_S, \varphi$ ;
- Übergang zur Zeigerschreibweise;
- Annahme, dass die Hilfsfedern  $s_{0x} \rightarrow 0$  und  $s_{0y} \rightarrow 0$ , aber gleichzeitig die vorgegebenen Auslenkungen so groß sind, dass  $F_{0x} = \xi_0 s_{0x}$  sowie  $F_{0y} = \eta_0 s_{0y}$  die von außen wirkenden Kräfte sind.

Das so erhaltene Gleichungssystem ist von der Form

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_S \\ \eta_S \\ \varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{0x} \\ F_{0y} \\ F_{0x} + F_{0y} \end{bmatrix}, \tag{1.40}$$

wobei  $A_{\nu\mu}$  etwas längere Ausdrücke sind, die von der jeweiligen geometrischen Anordnung abhängen.

In Bild 1.11 sind für ein spezielles Beispiel die Impedanzen für einige Anregerorte aufgetragen.



**Bild 1.11.** Impedanz einer starren Masse auf Federn bei Anregung über dem Schwerpunkt (Kurve I) und außerhalb des Schwerpunktes (Kurve II). Parameter:  $s_2 = 0s_1; s_3 = s_1; s_4 = 0.2s_1; r_\theta = 0.23l; \Theta = mr_\theta^2$

Man erkennt die starke Abhängigkeit vom Anregeort, weil im vorliegenden Fall eine Drehbewegung leicht anzuregen ist. Man erkennt außerdem die beiden „Nebenresonanzen“, die neben der Hauptresonanz auftreten. Sie sind besonders markant, wenn die Anregestelle weit vom Drehpunkt entfernt ist. Man beachte, dass selbst dann Nebenresonanzen auftreten, wenn die äußere Kraft im Schwerpunkt wirkt. Das ist darauf zurückzuführen, dass die Federn nicht symmetrisch angeordnet und nicht gleich sind. Die Kopplung der Bewegungen in den verschiedenen translatorischen und rotatorischen Freiheitsgraden und das dadurch bedingte Auftreten von mehreren Resonanzen (maximal sechs) wird bei Messungen an starren Körpern manchmal übersehen und kann die Ursache von Messfehlern sein.

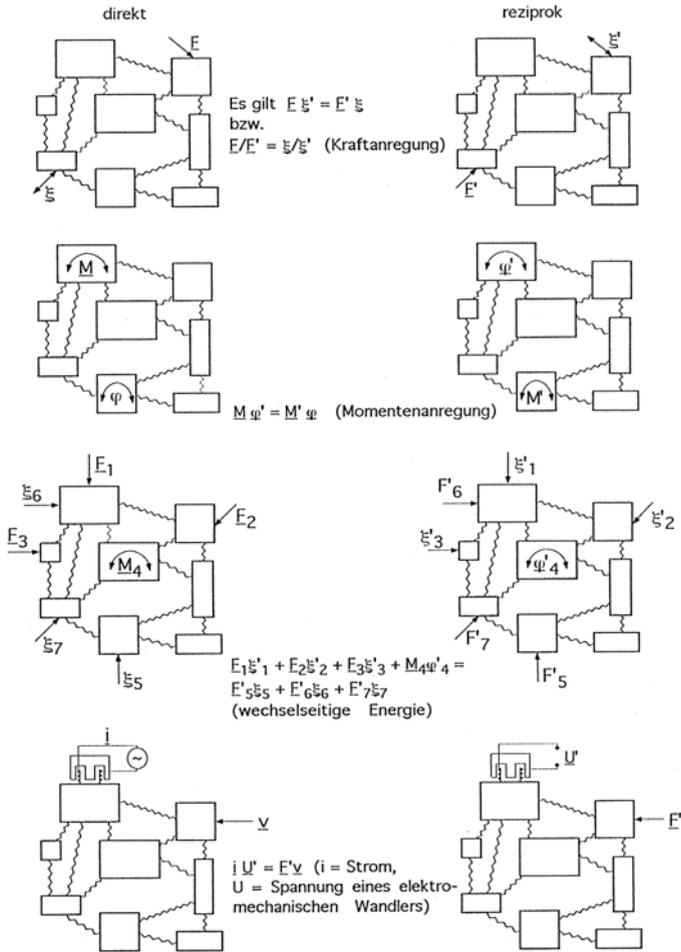
Das Verfahren der Lagrange'schen Gleichungen ist nicht nur ein sehr brauchbares Hilfsmittel zur Aufstellung von Bewegungsgleichungen, es eignet sich auch zur Herleitung wichtiger, allgemeiner Gesetze für lineare Mehrmassenschwinger. Da diese Frage in Büchern über mechanische Schwingungslehre ausführlich behandelt wird, soll es hier genügen, die wichtigsten Ergebnisse ohne Beweis wiederzugeben.

### 1.2.5.1 Reziprozität bzw. wechselseitige Leistung

Da es sich bei den uns interessierenden Energieausdrücken immer um quadratische Formen handelt, ergibt sich stets ein symmetrisches Gleichungssystem. Eine Konsequenz hiervon ist die Gültigkeit des Reziprozitätsprinzips. Es stellt eine Beziehung zwischen den Feldgrößen her, wenn Anrege- und Beobachtungsort vertauscht werden. Es ist dabei Voraussetzung, dass das Produkt aus anregender Größe (Kraft, Moment, Volumenfluss etc.) und beobachteter Größe (Schnelle bzw. Auslenkung, Winkelschnelle, Schalldruck etc.) die Dimension einer Arbeit oder Leistung hat. Eine Verallgemeinerung des Reziprozitätsprinzips ist der Satz von der wechselseitigen Energie [1.4]. Die entsprechenden Beziehungen sind in Bild 1.12 angegeben. Sie sind dabei auf Zeiger, also komplexe Amplituden angewandt. Falls ein System auch reziproke Wandler enthält kann das wechselseitige Produkt aus Strom und Spannung in die Reziprozitätsbeziehungen mit einbezogen werden. Der Beweis hierfür kann mit Hilfe des Hamilton'schen Prinzips erfolgen, wenn man es auch auf elektrische Energiespeicher anwendet. Siehe Gl.(7.63) und (7.64).

### 1.2.6 Entwicklungssatz

Mit Hilfe der Theorie der linearen Gleichungen kann man beweisen, dass Mehrmassenschwinger eine Reihe von Resonanzfrequenzen aufweisen, die sich aus den Singularitätsstellen der Koeffizientenmatrix ergeben. Siehe z.B. [1.4]. Zu jeder der Resonanzfrequenzen gehören eine oder mehrere charakteristische Amplitudenverteilungen, die als Moden bezeichnet werden. Es lässt sich zeigen, dass jede Bewegungsverteilung sich als Summe von Moden darstellen lässt. Im tieffrequenten Bereich genügen meist schon wenige Moden, um die



**Bild 1.12.** Reziprozität und wechselseitige Energie

Schwingungsverläufe in sehr guter Näherung zu beschreiben. Das hat den Vorteil, dass man bei Kenntnis der Moden (z.B. aus einer FEM-Rechnung oder aus einer experimentellen Modalanalyse) mit relativ geringem Aufwand alle tiefrequenten Bewegungen beschreiben kann [1.5, 1.6].

### 1.3 Energiebetrachtungen

In den letzten Abschnitten wurde die kinetische und die potentielle Energie dazu benutzt Bewegungsgleichungen aufzustellen. In diesem Abschnitt soll

gezeigt werden, dass Energiebeziehungen darüber hinaus ein sehr geeignetes Mittel zur Behandlung von Schwingungsvorgängen sind.

### 1.3.1 Energieerhaltung und Energiefluss

Aussagen über die Energieflüsse erhält man, indem man die Bewegungsgleichungen, die stets Kraftgleichgewichte darstellen, mit den Schnellen (Schwinggeschwindigkeiten) multipliziert und so zu den Leistungen (d.h. die Kraft multipliziert mit der Schnelle) übergeht. Am einfachsten sehen wir das beim gedämpften Einmassenschwinger nach (1.1). Fügen wir noch eine äußere, treibende Kraft hinzu, so finden wir

$$m\ddot{\xi} + r\dot{\xi} + s\xi = F \quad (1.41)$$

Nach Multiplikation mit  $\dot{\xi}$  auf beiden Seiten erhalten wir eine Leistungsbilanz, die folgendermaßen umgeformt werden kann

$$m\dot{\xi}\ddot{\xi} + r\dot{\xi}^2 + s\xi\dot{\xi} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (m\dot{\xi}^2) + r\dot{\xi}^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (s\xi^2) = F\dot{\xi} \quad (1.42)$$

oder

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m\dot{\xi}^2 + \frac{1}{2} s\xi^2 \right) + r\dot{\xi}^2 = F\dot{\xi} \quad \text{bzw.} \quad \frac{d}{dt} (E_{kin} + E_{pot}) + P_v = P \quad (1.43)$$

Dieser Ausdruck besagt, dass die von außen übertragene Leistung  $P = F\dot{\xi} = Fv$  entweder von der Dämpfung verbraucht wird (der Anteil  $P_v = r\dot{\xi}^2$ ) oder dazu dient, die aus einem kinetischen und einem potentiellen Anteil bestehende Gesamtenergie zu verändern. Im „eingeschwungenen“ Zustand verschwinden definitionsgemäß die Anteile mit  $d/dt$ ; d.h. die eingespeiste und die durch Dämpfung verbrauchte Leistung sind gleich. In (1.42 und 1.43) haben wir mit den Zeitfunktionen (Momentanwerten) gerechnet. Wenn wir nun zu den Zeigern übergehen, müssen wir beachten, dass Leistung und Energie aus Produkten von Feldgrößen bestehen. Das hat zur Folge, dass die von additiven Verknüpfungen unbeeinflussten Operationen  $Re \dots$  und der Faktor  $e^{j\omega t}$  nicht mehr ohne weiteres weggelassen werden können. Wir müssen also auf die Definitionsgleichung 1.3 zurückgehen und

$$P = F\dot{\xi} = Fv = \operatorname{Re} \left\{ \underline{F} e^{j\omega t} \right\} \operatorname{Re} \left\{ \underline{v} e^{j\omega t} \right\} \quad (1.44)$$

schreiben. Mit  $\underline{F} = |F| e^{j\varphi}$  bzw.  $\underline{v} = |v| e^{j\psi}$  wird daraus ( $|F|$  bedeutet der Absolutwert):

$$\begin{aligned} P &= |\underline{F}| |\underline{v}| \operatorname{Re} \left\{ e^{j(\omega t + \varphi)} \right\} \operatorname{Re} \left\{ e^{j(\omega t + \psi)} \right\} = |\underline{F}| |\underline{v}| \cos(\omega t + \varphi) \cos(\omega t + \psi) \\ &= \frac{1}{2} |\underline{F}| |\underline{v}| [\cos(2\omega t + \varphi + \psi) + \cos(\varphi - \psi)] \end{aligned} \quad (1.45)$$

Bei harmonischen Vorgängen besteht also die Leistung aus einem Anteil, der die doppelte Frequenz hat und einem Gleichanteil. Bildet man den meist allein interessierenden zeitlichen Mittelwert, dann ergibt sich

$$P = \frac{1}{2} |\underline{F}| |\underline{v}| \cos(\varphi - \psi) = \frac{1}{2} |\underline{F}| |\underline{v}| \operatorname{Re} \left\{ e^{j(\varphi - \psi)} \right\} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ |\underline{F}| e^{j\varphi} |\underline{v}| e^{-j\psi} \right\}$$

oder

$$P = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \{ \underline{F} \underline{v}^* \}. \quad (1.46)$$

Wenden wir diesen Ausdruck auf (1.42) an, so erhalten wir

$$\frac{1}{2} r \operatorname{Re} \left\{ \dot{\underline{\xi}} \dot{\underline{\xi}}^* \right\} = \frac{r}{2} |\dot{\underline{\xi}}|^2 = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \{ \dot{\underline{\xi}} \dot{\underline{\xi}}^* \}. \quad (1.47)$$

In diesen Ausdrücken bedeutet \*, dass der konjugiert komplexe Wert zu nehmen ist. Der Anteil mit  $d/dt$  verschwindet für rein harmonische Vorgänge, weil es sich definitionsgemäß um den eingeschwungenen Zustand handelt. Der Übergang zu Mehrmassenschwingern ist einfach, wenn man von (1.28) ausgeht und nach Einsetzen der Dämpfungsterme und äußeren Kräfte die analogen Rechenschritte durchführt.

### 1.3.2 Minimierung der mittleren Energie (Hamilton'sches Prinzip)

Eines der wichtigsten Gesetze der Physik ist das Hamilton'sche Prinzip. Auf mechanische Probleme angewandt, besagt es [1.7], dass sich die Bewegungen der einzelnen Teile eines Systems stets so einstellen, dass im Zeitmittel die Differenz aus kinetischer und potentieller Energie einen Extremwert (in unseren Fällen immer ein Minimum) annimmt. Es ist erstaunlich, dass die ungeheure Vielfalt der physikalischen Vorgänge durch ein so einfach zu formulierendes Prinzip darstellbar ist. Weiterhin ist erwähnenswert, dass man - eventuell mit kleinen Kunstgriffen - bei Anwendung des Hamilton'schen Prinzips alle Vorgänge ohne den Begriff der Kraft (also „ohne Druck und Zwang“) beschreiben kann. Einzelheiten über die mit dem Begriff der Kraft verbundenen Probleme siehe z.B. [1.8]. Als Gleichung geschrieben, lautet das Hamilton'sche Prinzip

$$\frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} (E_{kin} - E_{pot}) dt = \operatorname{Extremum}(\operatorname{Minimum}) \quad (1.48)$$

Da ein Minimum (oder Extremum) einer stetigen und glatten Funktion dadurch charakterisiert ist, dass sich in seiner Nähe der Funktionswert nicht (oder zumindest weniger als linear) ändert, ist die Aussage (1.48) gleichbedeutend damit, dass die Variation der mittleren Energiedifferenz verschwindet; d.h.

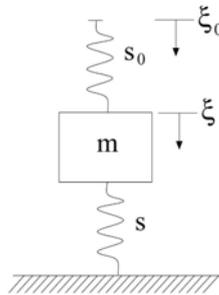
$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (E_{kin} - E_{pot}) dt = 0 \quad (1.49)$$

Der konstante Faktor  $t_1 - t_2$  wurde dabei gekürzt. Das Symbol  $\delta$  bedeutet die Variation. Wie sie in unseren Fällen durch Differenzieren gebildet werden kann, soll das nächste Beispiel zeigen.

Wir betrachten wieder einen Einmassenschwinger, der über die Feder  $s_0$  von einer vorgegebenen Auslenkung  $\xi_0$  angeregt wird. Siehe Bild 1.13. Offensichtlich müssen wir nun den Ausdruck

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{1}{2} m \dot{\xi}^2 - \frac{1}{2} s \xi^2 - \frac{1}{2} s_0 (\xi_0 - \xi)^2 \right) dt = 0 \tag{1.50}$$

bilden. Siehe auch 1.27.



**Bild 1.13.** Reziprozität und wechselseitige Energie

Zur Variation benutzen wir die Tatsache, dass kleine Änderungen (Variationen) einer beliebigen Funktion  $g(x_1, x_2, \dots)$  folgendermaßen aus den Änderungen der Argumente gewonnen werden können:

$$\delta \{g(x_1, x_2, \dots)\} = \frac{\partial g}{\partial x_1} \delta x_1 + \frac{\partial g}{\partial x_2} \delta x_2 + \dots \tag{1.51}$$

Dabei sind  $\delta x_1, \delta x_2$  die Variationen der Argumente. Angewandt auf (1.50) ergibt sich

$$\int_{t_1}^{t_2} \left( m \dot{\xi} \delta \dot{\xi} - s \xi \delta \xi + s_0 (\xi_0 - \xi) \delta \xi \right) dt = 0. \tag{1.52}$$

Den ersten Term kann man durch partielle Integration noch in die geeignetere Form

$$m \int_{t_1}^{t_2} \dot{\xi} \delta \dot{\xi} dt = m \int_{t_1}^{t_2} \frac{d\xi}{dt} \delta \left( \frac{d\xi}{dt} \right) dt = m \left[ \frac{d\xi}{dt} \delta \xi \right]_{t_1}^{t_2} - m \int_{t_1}^{t_2} \frac{d^2 \xi}{dt^2} \delta \xi dt \tag{1.53}$$

bringen. Der erste Term auf der rechten Seite von (1.53) wird zu Null, wenn man beispielsweise die Integrationsgrenzen so wählt, dass dort  $d\xi/dt$  verschwindet. Damit erhalten wir aus (1.52)

$$\int_{t_1}^{t_2} \left( -m \frac{d^2 \xi}{dt^2} - s\xi - s_0\xi + s_0\xi_0 \right) \delta\xi dt = 0. \quad (1.54)$$

Dieser Ausdruck muss für alle denkbaren, auch zeitlich veränderlichen Variationen  $\delta\xi$  verschwinden. Das ist nur möglich, wenn die eckige Klammer identisch mit Null ist. Wir erhalten also

$$m \frac{d^2 \xi}{dt^2} + s\xi + s_0\xi = s_0\xi_0. \quad (1.55)$$

Das ist die gesuchte Bewegungsgleichung des in Bild 1.13 skizzierten Systems.

Wenn mehrere Massen und Federn beteiligt sind, geht man im Prinzip genauso vor. Auf die entsprechende Rechnung wird hier verzichtet, weil sie identisch ist mit der Ableitung der Lagrange'schen Gleichungen zweiter Art, siehe z.B. (1.27). In den späteren Abschnitten werden wir das Hamilton'sche Prinzip noch auf weitere interessantere Fälle anwenden.

### 1.3.2.1 Der Rayleigh-Quotient

Bisher haben wir unter Benutzung von Energiesummen und -differenzen wichtige Beziehungen abgeleitet. In diesem Abschnitt werden wir uns mit einem Verfahren beschäftigen, bei dem eine Energiegleichheit entscheidend ist [1.9][1.10]. Voraussetzung für die Anwendung des Rayleigh-Quotienten ist die Annahme, dass bei allen Resonanzen (aber nicht außerhalb von Resonanzen) die Beziehung

$$\overline{E_{pot}} = \overline{E_{kin}} \quad (\text{bei Resonanz bzw. freien Schwingungen}) \quad (1.56)$$

gilt, wobei die Überstreichung die Mittelung über eine oder mehrere Schwingungsperioden bedeutet.

Nehmen wir beispielsweise an, dass ein Mehrmassenschwinger mit einer seiner Resonanzfrequenzen  $\omega_n$  schwingt, dann haben die Auslenkungen und Schnellen der  $\nu$ -ten Masse den Zeitverlauf

$$\xi_\nu(t) = \xi_{\nu A} \cos(\omega_n t + \varphi_\nu); \quad v_\nu(t) = -\omega_n \xi_{\nu A} \sin(\omega_n t + \varphi_\nu). \quad (1.57)$$

Im Mittel über eine oder mehrere Perioden wird

$$\overline{\xi_\nu(t)^2} = \frac{1}{2} \xi_{\nu A}^2; \quad \overline{v_\nu(t)^2} = \frac{1}{2} \omega_n^2 \xi_{\nu A}^2. \quad (1.58)$$

Damit ergibt sich für einen Mehrmassenschwinger, bei dem die  $\nu$ -te Masse die Auslenkungsamplitude  $\xi_{\nu A}$  hat

$$\omega_n^2 = \frac{\overline{E_{pot}}}{\frac{1}{2} \sum \frac{1}{2} m_\nu \xi_{\nu A}^2}. \quad (1.59)$$

Wegen der zeitlichen Mittelung treten weder in den Ausdrücken für die kinetische noch für die potentielle Energie die Phasen auf, sodass auch  $E_{pot}$  nur eine Funktion der Amplituden  $\xi_{\nu A}$  ist.

Der Vorteil von (1.59) zur Berechnung von Resonanzfrequenzen und Schwingungsformen liegt darin,

- dass (1.59) erstaunlich gute Näherungswerte für die tiefste Resonanzfrequenz liefert, wenn man für  $\xi_{\nu A}$  einigermaßen sinnvolle Schätzwerte einsetzt;
- dass (1.59) eine Minimaleigenschaft hat; d.h. wenn man mit falschen Werten von  $\xi_{\nu A}$  arbeitet, findet man zumindest eine obere Grenze für die Resonanzfrequenz; man kann diese Eigenschaft auch dazu ausnutzen die richtigen Schwingungsverteilungen  $\xi_{\nu A}$  zu finden; man braucht dazu "nur" so lange zu variieren, bis  $\omega_n^2$  ein Minimum wird [1.7].

Ein einfaches Beispiel soll dies verdeutlichen. Wir betrachten dazu einen Tonpilsz, also zwei Massen, die durch eine Feder verbunden sind. Mit den Bewegungsamplituden  $\xi_{1A}$  und  $\xi_{2A}$  der Massen findet man

$$\overline{E_{kin}} = \frac{1}{4}\omega^2(m_1\xi_{1A}^2 + m_2\xi_{2A}^2); \quad \overline{E_{pot}} = \frac{1}{4}s(\xi_{1A} - \xi_{2A})^2. \quad (1.60)$$

Eingesetzt in(1.59) folgt daraus mit  $\alpha = \xi_{2A}/\xi_{1A}$

$$\omega_n^2 = s \frac{(\xi_{1A} - \xi_{2A})^2}{(m_1\xi_{1A}^2 + m_2\xi_{2A}^2)} = s \frac{(1 - \alpha)^2}{m_1 + m_2\alpha^2}. \quad (1.61)$$

Um  $\omega_n^2$  zu finden ,müssen wir nun  $\alpha$  so wählen, dass (1.61) ein Minimum wird. Wie man durch Nullsetzen der Ableitung nach  $\alpha$  leicht zeigen kann gibt es zwei Extremwerte . Sie liegen bei

$$\begin{aligned} \alpha &= 1 \text{ d.h. } \xi_{2A} = \xi_{1A} \quad \text{und} \\ \alpha &= -m_1/m_2 \Leftrightarrow m_2\xi_{2A} = m_1\xi_{1A}. \end{aligned} \quad (1.62)$$

Die sich daraus ergebenden Resonanzen liegen bei

$$\omega_n^2 = 0 \quad \text{bzw.} \quad \omega_\nu^2 = s \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2}. \quad (1.63)$$

Beide Werte stimmen mit den bekannten Gleichungen überein.

---

## Literatur

- 1.1. Sommerfeld, A.: *Vorlesungen über theoretische Physik*, Band 1 (Mechanik) § 34; Akademische Verlagsges. Leipzig (1949)
- 1.2. Timoshenko, S.; Woinowsky-Krieger, S.: *Theory of plates and shells*, Chapt. 13; McGraw Hill (1959)
- 1.3. Johnson, K. L.: *Contact mechanics*, Chapt. 4.7, Cambridge University Press (1985)
- 1.4. Heaviside, O.: *Electrical papers*, Vol. I, p. 520; Vol. II (1892), p.202
- 1.5. Blevins, R. D.: *Formulas for natural frequency and mode shape*; Van Nostrand (1979)
- 1.6. Crandall, S. H.; McCalley, Jr., R. B.: *Matrix methods of analysis*; Chapt. 28 in *Shock and vibration handbook* (ed. Harris; Crede); McGraw Hill (1976)
- 1.7. Morse, P. M.; Feshbach, H.: *Methods of theoretical physics*; McGraw Hill, § 3.2 (1953) , p. 281
- 1.8. Hertz, H.: *Die Prinzipien der Mechanik in neuem Zusammenhang dargestellt. Drei Arbeiten von Heinrich Hertz mit einem Vorwort von H. v. Helmholtz*; Akademische Verlagsanstalt Leipzig (1884)
- 1.9. Zurmühl, R.: *Praktische Mathematik*, § 31 - 33; Springer (1965)
- 1.10. Temple, G.; Bickley, W. G.: *Rayleigh's principle and its applications to engineering*, Dover Publication (1956)



<http://www.springer.com/978-3-540-40336-4>

Körperschall

Physikalische Grundlagen und technische Anwendungen

Möser, M.; Kropp, W.

2010, XX, 580 S. 200 Abb., Hardcover

ISBN: 978-3-540-40336-4