3 Setz dir ein Ziel: von Optimierungsräumen und Bewertungsfunktionen

► Im vorangegangenen Kapitel haben wir anhand zweier Beispiele typische Eigenschaften von Optimierungsproblemen kennengelernt. Im Folgenden soll dem die systematische Darlegung der Schritte folgen, die einer Optimierung zugrunde liegen. Dazu wird der Begriff der Nachbarschaft einer Konfiguration eingeführt und mit dessen Hilfe der Konfigurationsraum definiert. Die Visualisierung der Zielfunktion als Bewertungslandschaft schließt das Kapitel ab.

3.1 Die Menge macht's: diskrete und kontinuierliche Probleme

Nach den eher illustrativen Ausführungen in Kap. 2 wird es jetzt Zeit, den Untertitel des Buches ernst zu nehmen und zu ergründen, wie man aus *allem das Beste* macht! Sehen wir uns zunächst an, was dabei unter „allem“ zu verstehen ist. Die Antwort fällt nicht schwer, nämlich: „Alles!“ Das heißt, die Menge aller möglichen Konfigurationen des betrachteten Systems, genauer gesagt, all derer, die in die Lösungsfindung einbezogen werden sollen. Beim N-Damen-Problem waren das alle denkbaren Aufstellungen der Damen. Allerdings hatten wir dabei stillschweigend solche Konfigurationen ausgenommen, bei denen mehrere Damen auf demselben Feld stehen, oder manche außerhalb des Brettes, oder bei

F.-M. Dittes, *Optimierung*, Technik im Fokus,
DOI 10.1007/978-3-642-53889-6_3

denen eine Figur liegt oder sonst etwas tut, was nicht zur Lösung der Aufgabe beiträgt.

► **Konfiguration** Zulässige Anordnung der Systemkomponenten, auch als Zustand oder Lösungsansatz bezeichnet

► **Konfigurationsmenge** Gesamtheit aller Konfigurationen

Bei der Standortfindung in Abschn. 2.2 entsprach eine Konfiguration einem Punkt auf dem Gebiet der Bundesrepublik. Und wenn Nebenbedingungen auferlegt wurden, z. B. der Ausschluss bestimmter Bundesländer, dann führte das dazu, dass auch die entsprechenden Konfigurationen auszuschließen waren.

Die Menge aller zulässigen Konfigurationen wird als *Konfigurationsmenge* bezeichnet. Sie bildet den *Definitionsbereich* der Zielfunktion. Im N-Damen-Problem sind das alle möglichen regelkonformen Aufstellungen. Nicht zum Definitionsbereich gehören also z. B. Situationen, bei denen die Anzahl der Damen gar nicht gleich N ist, sondern zu viele oder zu wenig Damen auf dem Feld stehen, oder die auf die eine oder andere weiter oben beschriebene Art irregulär sind. Bei der Suche nach dem optimalen Standort besteht der Definitionsbereich aus sämtlichen Punkten, deren Koordinaten innerhalb Deutschlands oder auf der Landesgrenze liegen.

Anhand der Beispiele in Kap. 2 haben wir dabei bereits ein zentrales Unterscheidungskriterium verschiedener Konfigurationsmengen kennengelernt, nämlich das zwischen diskreten und kontinuierlichen Mengen. *Kontinuierliche* Mengen sind solche, bei denen es zu jeder Konfiguration eine andere gibt, die dieser beliebig nahe ist. Die zitierte Anlage in der Mitte Deutschlands: wir könnten sie theoretisch um einen Meter, ja einen Millimeter oder noch weniger verschieben und hätten eine neue Lage für sie gefunden. Und solange wir bei dieser Verschiebung nicht das Staatsgebiet verlassen, würden wir eine zulässige Konfiguration erhalten, die verschieden von der vorherigen ist.

Im Gegensatz dazu heißt eine Menge *diskret*, wenn sich die Eigenschaften von einem Element zu einem anderen *sprunghaft* ändern. Die Bezeichnung ist einer der zahlreichen alltäglichen Bedeutungen des Wortes „diskret“ entnommen, das nicht nur für „verschwiegen“ und „vertraulich“ steht, sondern auch für Eigenschaften wie „gesondert“ und „unaufdringlich“. Es handelt sich also um Probleme mit alleinstehenden, sich nicht auf(einander)drängenden Konfigurationen. Das N-Damen-Problem kann als Beispiel dienen. Auch wenn wir in der Realität eine Dame beliebig auf dem Spielfeld hin- und herschieben können, eine Winzigkeit hierhin oder dorthin, für das Problem ist nur von Bedeutung, in welchem der 64 (oder allgemein NxN) „Kästchen“ sie steht: Die Konfigurationsmenge ist also diskret.

Einen wichtigen Spezialfall stellen die *kombinatorischen Optimierungsprobleme* dar, die man erhält, wenn die Konfigurationsmenge nicht schlechthin diskret, sondern *endlich* ist. Es gibt dann nur eine begrenzte Anzahl von Konfigurationen und wir können – im Prinzip – diese alle durchprobieren, um die beste zu finden. Im Extremfall beträgt die Zahl der Konfigurationen sogar nur *zwei*, man hat es dann mit einer schlichten Ja-Nein-Entscheidung zu tun. Von den in der Einleitung erwähnten, noch extremeren „alternativlosen“ Fällen, bei denen überhaupt nur eine einzige Möglichkeit in Betracht gezogen wird, wollen wir hier lieber schweigen.

Konfigurationen werden gelegentlich auch als *zulässige Lösungen* bezeichnet, von denen sich die *optimale Lösung* durch ihre extreme Bewertung abhebt. Ich empfinde diese Terminologie aber als etwas unglücklich, weil eine Damen-Konfiguration, die eine von null verschiedene Bewertung hat, von den meisten Menschen ja nicht als Lösung des Problems angesehen wird. Allenfalls könnte man solche Konfigurationen als *Lösungsansätze* bezeichnen.

3.2 Auf gute Nachbarschaft: von kleinen und großen Umgebungen

Keine Konfiguration existiert für sich allein. Manche Konfigurationen stehen einander im wahrsten Sinne des Wortes näher, andere sind weiter voneinander entfernt. Bei der Standortsuche ist klar, was dabei mit „Nähe“ oder „Entfernung“ gemeint ist: Es ist der Abstand zweier Konfigurationen, d. h. zweier potentieller Standorte, auf der Landkarte. Je kleiner dieser Abstand, desto näher sind sich beide Konfigurationen.

► **Schritt** Übergang von einer Konfiguration zu einer anderen

► **Nachbarschaft einer Konfiguration** Menge aller Konfigurationen, die von dieser in einem Schritt erreicht werden können

► **Konfigurationsraum** Konfigurationsmenge, versehen mit einer Nachbarschaftsstruktur

Im N-Damen-Problem kann man unter dem Abstand zweier Konfigurationen die Anzahl an Zügen verstehen, die notwendig ist, um eine Konfiguration in die andere zu überführen. Zwei Aufstellungen sind sich umso näher, je kleiner diese Zahl ist. Insbesondere haben zwei Konfigurationen dann den Abstand „1“, wenn sie durch Bewegung einer einzigen Dame ineinander überführt werden können.

Der Unterschied zwischen kontinuierlichen und diskreten Problemen macht sich auch in folgender Eigenheit der Nachbarschaften bemerkbar: Während der Abstand zweier Konfigurationen im kontinuierlichen Fall beliebig nahe bei null liegen kann, ist der kleinste Abstand im diskreten Fall immer von null verschieden. Es gibt also ein „Abstandsquantum“ für den kleinsten Abstand, und alle größeren Abstände sind Vielfache dieses Quants.

Erst durch die Einführung von Nachbarschaften wird die *Anordnung* der Konfigurationen möglich: Wir können benachbarte Konfigurationen als *nebeneinander* liegend denken und auch grafisch entsprechend darstellen. Im kontinuierlichen Fall ergibt das die normale Landkarte, für diskrete Probleme hingegen ein *Nachbarschaftsnetz*. Die Konfigurationen stellen dabei die Knoten dar – und wenn zwei Konfigurationen benachbart sind, werden sie miteinander verbunden.

In Abb. 3.1 ist dieses Netz für das 2-Damen-Problem dargestellt. Da jede der 6 Aufstellungsmöglichkeiten durch das Ziehen einer Dame in 4 andere überführt werden kann, stellt das Nachbarschaftsnetz ein *Oktaeder* dar.

Mit wachsendem N ergeben sich rasch wesentlich kompliziertere Gebilde. So hat auf dem normalen Schachbrett mit 8 Damen jede Dame bis zu 28 Zugmöglichkeiten: 7 auf die Felder in der Reihe, in der sie steht, 7 entlang der vertikalen Linie und bis zu 7 entlang jeder der beiden Diagonalen. Letzteres gilt natürlich nur für Damen, die genau im

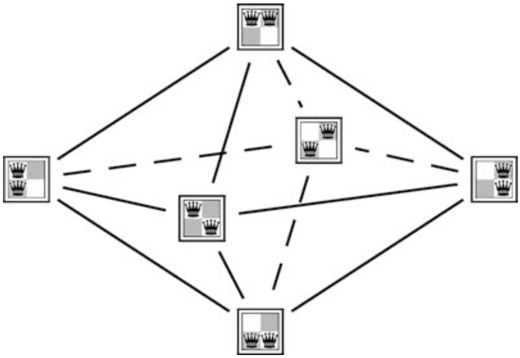

Abb. 3.1 Nachbarschaftsbeziehungen des 2-Damen-Problems

Zentrum des Schachbretts stehen, und auch die horizontale und vertikale Bewegung wird unter Umständen eingeschränkt, falls andere Damen im Wege sind. Die genaue Zahl der möglichen Züge hängt damit von der konkreten Stellung aller 8 Damen ab. Aber selbst wenn es im Mittel nur 10 oder 15 Zugmöglichkeiten für eine Dame gibt, macht das $8 \cdot 10$ bis $8 \cdot 15$ Möglichkeiten, durch einen Zug von einer Konfiguration zu einer benachbarten zu kommen. Das Nachbarschaftsnetz besteht damit aus mehr als 4 Milliarden Knoten (s. Tab. 2.1), von denen jeder mit durchschnittlich 100 anderen verbunden ist – ein unüberschaubares Netz, ja geradezu ein undurchdringliches Knäuel an Bewegungsmöglichkeiten!

Wenn wir von der *Definition* von Nachbarschaften reden, dann suggeriert dies, dass es *verschiedene* Möglichkeiten gibt Nachbarschaften einzuführen. Die eben diskutierten Beispiele erscheinen uns dabei als *natürliche* Definitionen: Die Nachbarschaft eines Punktes auf der Landkarte wird von all jenen Punkten gebildet, deren Abstand zu diesem kleiner ist als ein bestimmter Wert. Je größer dieser Wert, desto größer ist auch die Nachbarschaft. Die kleinste denkbare Nachbarschaft ist die, die aus den Punkten besteht, die *unmittelbar* neben dem betrachteten Punkt liegen. Zwei Nachbarn grenzen dann direkt aneinander – es gibt zwischen ihnen keine weitere Konfiguration. Die Mathematiker würden diese Menge als *Epsilon-Umgebung* bezeichnen, in unserem Kontext könnte man sie auch *fundamentale Nachbarschaft* nennen.

Im diskreten Fall würde dem die Menge aller Konfigurationen entsprechen, die sich *so wenig wie möglich* von der Ausgangskonfiguration unterscheiden. Im N-Damen-Problem ist das *nicht* die oben diskutierte Menge von Feldern, die durch die Bewegung einer Dame erreicht werden kann, sondern eine kleinere: Nur die Konfigurationen, die durch das Ziehen auf ein *unmittelbar* an den Standort einer Dame angrenzendes Feld entstehen, bilden die fundamentale Nachbarschaft der jetzigen Konfiguration.

Die Nachbarschaft hat entscheidenden Einfluss auf den Verlauf der Optimierung. Sie umfasst ja gerade all jene Konfigurationen, die in *einem* Schritt erreichbar sind. Je kleiner die Nachbarschaft, desto langsamer kommt der Such-Algorithmus voran: in der fundamentalen Umgebung des N-Damen-Problems können die Damen nur noch Trippelschrittchen machen! Mehr noch, mit kleinen Schritten kommt man häufig nicht aus den lokalen Minima heraus, die wir in Abb. 2.7 gesehen haben und die wir in vielen anderen Problemen wiederfinden werden.

Wird die Nachbarschaft andererseits zu groß gewählt, kann sich der Optimierungsalgorithmus im wahrsten Sinne des Wortes verlaufen: In jedem Punkt gibt es dann so viele Möglichkeiten, die Suche nach dem Optimum fortzusetzen, dass es schwer fällt, die geeignetste zu finden.

3.3 Weite den Blick: die Dimension des Raumes

Durch die Definition von Nachbarschaften verwandelt sich die Konfigurations*menge* in einen Konfigurations*raum*. Wir können nämlich jetzt von jeder Konfiguration zu ihren Nachbarn „wandern" und uns auf diese Weise auf die Suche nach der besten begeben.

Wie der Konfigurationsraum beschaffen ist, hängt vom konkreten Problem ab. Im vorangegangenen Abschnitt hatten wir die Nachbarschaftsstrukturen des N-Damen-Problems und der Standortbestimmung erörtert. Während sich Letztere auf einem normalen Stück Papier anordnen ließen, s. Abb. 2.4, erforderten zwei Damen bereits das in Abb. 3.1 dargestellte Oktaeder. Und der Konfigurationsraum des 8-Damen-Problems erwies sich gar als undurchdringliches Knäuel!

► **Dimension** Anzahl der Freiheitsgrade, d. h. der unabhängig voneinander veränderbaren Parameter eines Systems, hier konkret des Konfigurationsraums. In gedankenloser Übernahme aus dem Englischen gelegentlich auch als *Dimensionalität* bezeichnet.

Aber:

Die dritte, vierte, ... Dimension: konkreter Freiheitsgrad eines mehrdimensionalen Systems

Wie jedoch kann es sein, dass die Konfigurationsbeziehungen eines kleinen Dame-Bretts komplizierter sind als die eines großen Landes? Die Antwort liegt in der Zahl der *Freiheitsgrade*, d. h. in der *Dimension* des Problems: Bei der Bestimmung der Landesmitte suchten wir genau *einen* Standort, zur Charakterisierung der Lage reichten daher zwei Zahlen, eine für die geografische Länge und eine für die geografische Breite. Dieser Raum ist daher 2-dimensional. Im Gegensatz dazu hat im N-Damen-Problem *jede* Dame zwei Koordinaten, und damit sind zur Charakterisierung einer Konfiguration $2 \cdot N$ Koordinaten notwendig – der Konfigurationsraum ist $2 \cdot N$-dimensional: bei zwei Damen 4-, bei vier 8- und bei acht sogar 16-dimensional.

Einen solchen Raum anschaulich darzustellen, ist nun schlechterdings nicht möglich: Egal, ob es sich um ein Blatt Papier oder einen Computerbildschirm handelt, sie haben nun mal nur 2 Ausdehnungen. Die moderne Kinematographie etabliert zwar gerade das 3-D-Kino, ob sie uns aber jemals helfen wird, auch nur 4-dimensional zu denken, bleibt eine große Frage. Der Mensch ist eben ein 3-dimensionales Wesen und lebt in einer 3-dimensionalen Umwelt – schon das ist manchmal kompliziert genug.

Die 3-Dimensionalität unserer Welt zeigt sich bereits in folgender Fingerübung: Bedienen Sie sich dazu Ihrer rechten Hand und spreizen Sie den Daumen ab. Jetzt den Zeigefinger nach vorn beugen, so dass er senkrecht zum Daumen steht, und den Mittelfinger so ausstrecken, dass er sowohl mit dem Daumen als auch mit dem Zeigefinger einen rechten Winkel bildet. Welcher Finger in welche Richtung zeigt, spielt keine Rolle – nur bitte den Mittelfinger nicht nach oben nehmen! Die drei Finger veranschaulichen jetzt die Achsen eines dreidimensionalen Koordinatensystems: Jeder Punkt des Raumes kann durch 3 Zahlen charakterisiert werden, die den Abstand von der Hand in Daumen-, Zeigefinger- bzw. Mittelfingerrichtung angeben. Um eine vierte Dimension zu erfassen, müssten Sie jetzt den Ringfinger nehmen und ihn so halten, dass er auf *jedem* der anderen Finger senkrecht steht und dann den kleinen, wiederum senkrecht auf allen übrigen usw. usf. – ein offensichtlich unmögliches Unterfangen. Unser Raum ist und bleibt dreidimensional, da kann man die Finger halten, wie man will, eine vierte Dimension eröffnet sich nicht.

Versuchen wir es also mit einer Illustration. Im Sinne der oben gegebenen Definition erfordert ein n-dimensionaler Raum n Parameter, die wir unabhängig voneinander ändern können. Im diskreten Fall stellt das z. B. eine Menge von n Ja-Nein-Entscheidungen dar. Denken Sie an eine Folge von Prüfungen, die jeweils bestanden oder vermasselt werden können. Oder an eine Wegbeschreibung, die aus einer Menge von Links- und Rechtsabbiegungen besteht. Oder an Entscheidungen, die man so oder so hätte treffen können.

Um den zurückgelegten Weg durch die Prüfungszeit, das Straßennetz oder das Leben als Ganzes zu symbolisieren, können wir für jedes „Ja" eine „1" schreiben – und für jedes „Nein" eine „0". Die Folge „101" würde dann für 3 aufeinander folgende Entscheidungen stehen, und zwar für „bestanden – durchgefallen – bestanden" oder für „links – rechts – links". Jede Folge repräsentiert auf diese Weise eine Konfiguration – und ihre fundamentale Nachbarschaft besteht aus all jenen Folgen, die sich an genau einer Stelle von ihr unterscheiden. Für die Konfiguration „101" wären das die Folgen „001", „111" und „100".

Zur Darstellung der Konfigurationen und ihre Nachbarschaftsbeziehungen bietet sich der n-dimensionale „Würfel" an, s. Abb. 3.2. Ein 1-dimensionaler Würfel ist nichts weiter als eine *Strecke* – es gibt ja nur *eine* Entscheidung zu treffen und also nur zwei Konfigurationen, die dargestellt und miteinander verbunden werden müssen. In 2 Dimensionen erhalten wir ein *Quadrat*, jede Richtung steht für eine der beiden Entscheidungen (die neu hinzugekommenen Punkte sind in der Abbildung jeweils weiß gemalt). Der 3-dimensionale Fall ergibt das daneben dargestellte Gebilde. „Endlich ein richtiger Würfel!", werden Sie sagen. Doch nein, es ist nur die *Projektion* eines Würfels auf das Papier. Und nur weil wir selbst 3-dimensional sind, hat unser Gehirn gelernt, in solchen Schattenrissen etwas Räumliches zu sehen.

Nun haben wir es bei vielen Optimierungsproblemen aber nicht mit einem 1-, 2- oder 3-dimensionalen Würfel zu tun, sondern mit einem in n

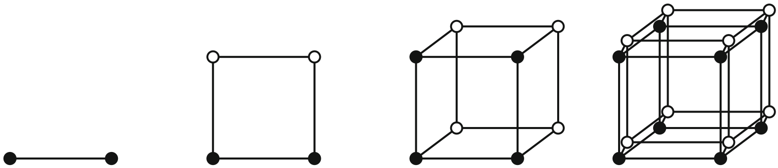

Abb. 3.2 „Würfel" der Dimension 1, 2, 3 und 4

Dimensionen, und n kann dabei sehr, sehr groß sein. Versuchen wir also, die Reihe der Würfel fortzusetzen – zunächst mit der Projektion eines 4-dimensionalen Würfels, s. nach wie vor Abb. 3.2. Das ist ein Gebilde, bei dem von jedem Eckpunkt nicht 1, 2 oder 3, sondern eben 4 Kanten ausgehen.

Reichlich unübersichtlich, nicht wahr? Noch schlimmer wird es beim Würfel der Dimension 5, ganz zu schweigen vom 6- oder vom 256-dimensionalen. In Abschn. 3.5 werden wir deshalb nach Darstellungsmöglichkeiten der Konfigurationen und ihres Zusammenhangs suchen, die auf ein Blatt Papier passen. Dass wir damit immer nur einen kleinen Ausschnitt der Problematik erfassen, dürfen wir dabei jedoch nie vergessen.

Die Elementarteilchenphysiker glauben übrigens, dass unsere Welt nicht bloß 3 Dimensionen hat, auch nicht etwa 4, wie seit Formulierung der Relativitätstheorie unter Hinzunahme der Zeit üblich. Nein, sie ist wahrscheinlich 11-dimensional – für die Filmindustrie gibt es also auch in Zukunft noch einige Spielräume!

3.4 O Täler weit, o Höhen: Bewertungslandschaften

Kommen wir nun wieder auf den Untertitel des Buches zurück. Nachdem wir in den vorangegangenen Abschnitten herausgearbeitet hatten, was unter „allem" zu verstehen ist, und alle Konfigurationen zunächst erfasst und dann säuberlich angeordnet haben, können wir nun unter ihnen „das Beste" suchen. Dazu müssen wir sie *bewerten,* das heißt im wahrsten Sinne des Wortes jeder Konfiguration einen *Wert* zuweisen. Für das N-Damen-Problem war das die Anzahl der „Blickkontakte", für das

Standortproblem von Abschn. 2.2 die jeweilige summare Entfernung zu den betrachteten Städten.

In anderen Zusammenhängen kann unter „Wert“ etwas beliebiges anderes verstanden werden: Physikalische Systeme sind bestrebt, ihre Energie zu minimieren, biologische – eingedenk der darwinischen Evolutionstheorie [1] – ihre Fitness zu maximieren. Die Bewertung des fleißigen Schülers richtet sich nach dem Notendurchschnitt, der so niedrig wie möglich sein sollte. Und wirtschaftliche Überlegungen münden meist in der Überzeugung, dass mehr Geld besser ist als weniger.

Welche Konfiguration ist nun die beste? Natürlich die, die das meiste liefert, die also zum höchsten Wert führt – zum *Extremum*. Unter dem „höchsten“ ist dabei, wie gerade illustriert, je nach Problem das Minimum oder auch das Maximum zu verstehen. In den folgenden Kapiteln wird der Einfachheit halber stets von der Suche nach dem *Minimum* die Rede sein. Daraus spricht in mir zunächst der Physiker, der eben gern minimiert. Aber auch die Veranschaulichung vieler Optimierungsalgorithmen profitiert von dieser Wahl, kann man doch die Suche nach dem Optimum mit einem Murmelspiel vergleichen – und Murmeln rollen nun mal nach unten. In Kap. 8 werden wir darüber hinaus auf eine weitere Größe stoßen, die im Optimum *minimiert* wird: die dem System innewohnende *Frustration*.

► **Extremum** größter („Maximum“) bzw. kleinster („Minimum“) Wert einer Menge

► **Lokales Extremum** Bewertung einer Konfiguration, in deren Nachbarschaft keine größeren („lokales Maximum“) bzw. kleineren („lokales Minimum“) Bewertungen angenommen werden

Falls aber doch einmal eine Problemstellung auftauchen sollte, die am Maximum interessiert ist, so kann diese durch Verkehrung der Bewertung in ihr *Gegenteil* auf die Suche nach dem Minimum zurückgeführt werden: Dort wo die ursprüngliche Aufgabe ein Maximum hatte, hat ihr Gegenteil ein Minimum. Was dabei vernünftigerweise als Gegenteil betrachtet werden sollte, kann allerdings von Problem zu Problem variieren, einfache Vorschriften sind die Umkehr des Vorzeichens oder das Bilden des Kehrwerts.

Indem wir allen Konfigurationen einen Wert zuweisen, erhalten wir eine *Ziel-* oder *Bewertungsfunktion*. Die Zielfunktion ist generell eine Vorschrift, die der Menge der Konfigurationen eine Menge von Zahlen, den *Wertebereich*, zuordnet, die Mathematiker sprechen von einer *Abbildung*. Im einfachsten Fall besteht der Wertebereich aus *zwei* Zahlen, sagen wir +1 und −1, die für „ja" bzw. „nein" oder „schwarz" und „weiß" stehen – was immer Sie sich als Paar von Gegensätzen vorstellen wollen. Für Probleme der kombinatorischen Optimierung ist er eine diskrete, endliche Menge: Jede Aufstellung der Damen hat eine bestimmte Bewertung, der kleinstmögliche Wert ist 0, dann kommt die 2, dann 4 usw. bis zum größten denkbaren Wert, der entsteht, wenn jede Dame jede andere sehen kann. Bei N Damen ergibt das die Zahl $N \cdot (N-1)$, und selbst die wird für $N > 4$ nicht erreicht, weil die Damen sich gegenseitig die Sicht verstellen.

Für kontinuierliche Probleme kann die Bewertungsfunktion beliebige Zahlenwerte annehmen, genauer gesagt, beliebige Werte in einem bestimmten Bereich. Verschob man den Standort in Abschn. 2.2 nur um eine Winzigkeit, so änderte sich auch der summare Abstand nur ganz wenig – die Mathematiker würden sagen: „Die Bewertungsfunktion ist stetig". Der Abstand kann dabei aber weder ganz klein sein noch riesengroß: Die konkrete Lage der Städte und die Beschränkung auf die Suche nach einem Standort in Deutschland führen dazu, dass jeder errechnete Abstand mindestens gut 8000 km, aber höchstens ca. 20.000 km beträgt.

Zwischen den rein kontinuierlichen und den kombinatorischen Optimierungsaufgaben liegen die *ganzzahligen Probleme*, die über einem kontinuierlichen Konfigurationsraum definiert sind. Ein Beispiel ist die Frage nach der maximal herstellbaren Stückzahl eines Produkts bei gegebenen Ressourcen. Oder die nach der minimalen Anzahl von Prozessschritten für die Bewältigung einer Reihe von Produktionsaufgaben.

Auch wenn es darum geht, ob ein Ziel – sagen wir das Bestehen einer Prüfung – erreicht wird oder nicht, kann man den Aufwand in der Vorbereitung stetig ändern, das Ergebnis lautet stets nur „ja" oder „nein". Im Extremfall sind sogar Bewertungsfunktionen denkbar, die nur einen einzigen Wert annehmen. Als Beispiel kann jemand dienen, der bei allem, was er anfängt, Glück hat – oder auch das Gegenstück dazu, der traurige Filmheld, der mit den Worten schließt: „Weißt du, Hans: egal, was du im Leben machst – es ist falsch" [2].

Abb. 3.3 Hügel über Hügel: Die Gleichberge im Süden Thüringens

Schließlich werden wir in Kap. 9 Probleme kennenlernen, bei denen die Bewertung jeder Konfiguration nicht nur *eine* Zahl erfordert, sondern *mehrere*. Denken Sie an den Weg zwischen zwei Städten, der nicht nur eine bestimmte Länge hat, sondern auch konkrete Kosten verursacht. Oder im Sinne der Schulnoten an ein ganzes Zeugnis, das zur Charakterisierung der vielfältigen Leistungen eines Schülers herangezogen werden muss.

In Anlehnung an unsere Umwelt wird die Bewertungsfunktion als *Bewertungslandschaft* oder auch einfach als *Landschaft* bezeichnet. Die Landschaft für die Platzierung des Kraftwerks ist dabei eine *wirkliche* Landschaft. Das liegt daran, dass die am Optimierungsproblem beteiligten Punkte in einer Ebene liegen, dass es sich also um ein 2-dimensionales Problem handelt. Natürlich kann man analog auch 3-, 4- oder mehrdimensionale Probleme betrachten. Man redet dann immer noch von Landschaften, auch wenn diese nicht mehr so leicht zu veranschaulichen sind.

Eine erste Landschaft in diesem Sinne hatten wir in Abb. 2.4 gesehen. Allerdings ist die dort gezeigte Landschaft recht langweilig. Sie hat nämlich nur *ein* Minimum, und das lässt sich mit den Methoden des nächsten Kapitels leicht finden. *Reale* Landschaften sind da wesentlich komplizierter, s. Abb. 3.3. Dabei habe ich weder die zerklüftete Struktur der Alpen genommen, noch die manchen etwas langweilig erscheinende Weite des Norddeutschen Tieflands.

Die gezeigte Landschaft ist trotzdem *typisch* für die Probleme, die wir untersuchen wollen. Sie weist nämlich *viele* Minima und *viele* Maxima auf – eine Eigentümlichkeit, auf die wir schon in Abb. 2.7 gestoßen sind und die uns in vielen weiteren Beispielen begegnen wird. Mehr noch, auch andere Besonderheiten realer Landschaften werden wir in den Bewertungsfunktionen vieler Optimierungsprobleme wiedererkennen: Es gibt nicht nur liebliche Hügel und Täler, sondern auch schroffe Einschnitte, steile Abbrüche, tiefe Gräben und Löcher. Es gibt Pässe und Sättel, und das alles nicht nur in ein oder zwei Dimensionen, sondern über beliebig komplizierten Konfigurationsräumen. Die Optimierer sprechen in solchen Fällen von rauen („rugged") Landschaften. Und es ist wie im realen Leben: Je schwieriger das Gelände, desto schwerer fällt es auch, einen Weg auf den höchsten Berg oder in das tiefste Tal zu finden!

3.5 Ein Bild sagt mehr als tausend Worte: das Problem der Darstellung

Zur Veranschaulichung der Bewertungsfunktion kann man diese grafisch auftragen. Wie gut oder schlecht das geht, hängt ganz wesentlich von der *Dimension* des Konfigurationsraums ab. In Abb. 2.7 ist die Bewertungslandschaft im eindimensionalen Fall gezeigt, die Einfügung in Abb. 2.4 illustriert eine zweidimensionale Situation.

Sobald der Konfigurationsraum jedoch mehr als 2 Dimensionen aufweist, versagt unsere Anschauung. Zur Visualisierung müssen wir uns dann mit einem *Schnitt*, einem *Aus-Schnitt* begnügen. Denken Sie an einen Bohrkern: Er stellt einen winzigen Ausschnitt der Erdkruste dar, aufgenommen an *einem einzigen* Punkt der Oberfläche, und doch können die Geologen aus den darin befindlichen Steinchen, Spuren und Knochenresten große Abschnitte der Erdgeschichte rekonstruieren. Oder an das Stäbchen, mit dem wir in den Kuchen im Backofen stechen, um zu sehen, ob noch Teig daran haften bleibt: Aus der Bewertung eines eindimensionalen Ausschnitts schließen wir auf den Zustand des gesamten Backwerks. Der Schnitt – und damit die Probenahme – muss dabei nicht unbedingt entlang einer geraden Linie erfolgen. Sie können auch eine beliebige Kurve darstellen, wichtig ist nur ihre Eindimensionalität.

In Abschn. 2.3 hatten wir es bereits mit einem solchen Schnitt zu tun: Die Grenze Nordrhein-Westfalens hat aus der Menge aller möglichen Standorte unserer Anlage einen Teil herausgeschnitten. Wir können uns vorstellen, entlang dieser Grenze zu wandern und für jeden Punkt auf ihr den Wert der Zielfunktion zu berechnen. Was wir erhalten, ist genau der in Abb. 2.7a dargestellte Verlauf.

Eine bildhafte Darstellung ist auch für *zweidimensionale* Ausschnitte möglich. Beim Kuchen spricht man dann eher von An-Schnitt, und er wird gemeinhin erst nach dem Ende des Backens gemacht, wenn der Zustand des ersten Stückchens den Familienmitgliedern ein lautes „Oooh" oder andere Laute entlockt.

Auch die Mediziner reden von Schnitten. Und bevor Skalpell oder Messer zum Einsatz kommen, wird heutzutage – hoffentlich – ein virtueller Schnitt angefertigt: eine Computertomographie oder eine MRT-Aufnahme, die das Körperinnere „scheibchenweise" darstellt. Jeder Punkt eines solchen Bildes hat einen bestimmten Helligkeitswert, aus dem der Mediziner den Zustand von Knochen und Gewebe ableiten kann.

Auch für das N-Damen-Problem ist die Visualisierung der Bewertungslandschaft nur anhand eines Schnittes möglich, da die *gesamte* Landschaft außerordentlich kompliziert ist: Sie zieht sich über die in Tab. 2.1 angegebene Zahl von Konfigurationen und ordnet jeder von ihnen einen Wert, eine Höhe zu. Schon die Darstellung des Konfigurationsraums des N-Damen-Problems ist ein Problem: Die Konfigurationen müssten so angeordnet werden, dass Aufstellungen, die durch die Bewegung *einer* Dame ineinander übergehen können, auch optisch benachbart erscheinen. Das ging gerade noch für $N = 2$, s. Abb. 3.1, für mehr Damen ist es auf einem normalen Stück Papier, d. h. in nur zwei Dimensionen praktisch nicht durchführbar.

Betrachten wir deshalb einen Schnitt durch diese riesige Menge: Wir halten alle Damen bis auf eine fest und tragen die unterschiedlichen Bewertungen des Problems bei Änderung der Lage dieser *einen* Dame auf. Da das Spielfeld nur zwei Ausdehnungen hat, ist dieser Schnitt auch 2-dimensional – das kann man also gut zeichnen. In Abb. 3.4 ist die sich ergebende Landschaft für den Fall von 8 Damen dargestellt. Sieben der Damen sind bereits in der optimalen Stellung, wie sie Abb. 2.2a entspricht und nur für eine wird noch der beste Platz gesucht. Die Farben entsprechen der Bewertung der resultierenden Stellung: weiß steht für den Wert 0, grün entspricht 2, gelb – 4, orange – 6 und rot – 8.

Wenn wir eine derartige Visualisierung der Bewertungsfunktion vornehmen, müssen wir uns allerdings stets der Beschränktheit der aus ihr abgeleiteten Aussagen bewusst sein. Beim Verständnis der Problematik hilft uns auch hier der Vergleich mit einer realen Landschaft. Betrach-

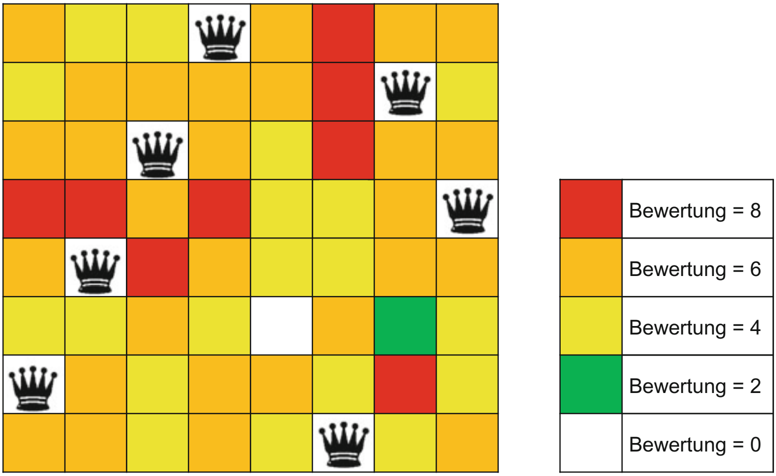

Abb. 3.4 Ausschnitt aus der Landschaft des 8-Damen-Problems

ten wir dazu noch einmal die Fotografie der Gleichberge, Abb. 3.3. Auf ihr sieht es so aus, als würde zwischen dem Großen Gleichberg (links hinten im Bild) und seinem rechts davon gelegenen kleinen Bruder ein lokales Minimum liegen. Allerdings kommt dieser Eindruck nur durch die *Projektion* der Realität auf die Fotoplatte zustande, in Wahrheit befindet sich an der fraglichen Stelle ein *Sattel:* in einer Ausrichtung steigt der Verlauf der Oberfläche an, aber senkrecht dazu fällt er ab. Lediglich der *Anstieg* der Funktion ist in diesem Punkt entlang aller denkbaren Richtungen gleich null, die Mathematiker bezeichnen ihn daher als *stationären Punkt*: Die Funktionswerte rühren sich in einer klitzekleinen Umgebung dieses Punktes nicht von der Stelle, gerade so wie mancher Patient bei einem stationären Aufenthalt oder mancher Zug auf einer Bahnstation.

Stationäre Punkte gibt es schon bei ein- und zwei-dimensionalen Problemen in den vielfältigsten Spielarten, wobei alle Kombinationen von ansteigenden und abfallenden Verläufen vertreten sind, s. Abb. 3.5.

▶ **Stationärer Punkt** Punkt des Konfigurationsraums, in dem die Anstiege der Bewertungsfunktion entlang aller Richtungen gleich null sind

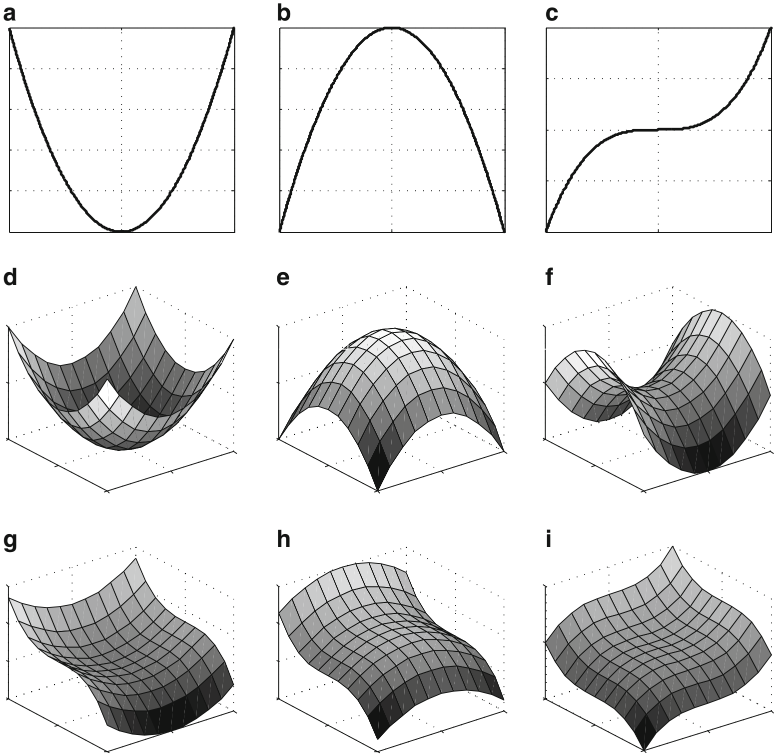

Abb. 3.5 Stationäre Punkte: **a**–**c** in einer Dimension, **d**–**i** in zwei Dimensionen

Noch mehr Kombinationsmöglichkeiten gibt es in 3 Dimensionen, wieder mehr in 4 usw. usf. Mit zunehmender Dimensionszahl überwiegen dabei die Sattelpunkte immer stärker, wie bereits aus einer einfachen statistischen Überlegung ersichtlich wird. Dazu ordnet man den Dimensionen, entlang deren es von einem stationären Punkt nach „oben" geht, die also im Hinblick auf diese Richtungen ein Minimum haben, ein „+" zu. Analog erhalten die Dimensionen, entlang deren es nach „unten" geht, ein „–" und die, in welchen die Funktion in eine Richtung anwächst, in die entgegengesetzte Richtung aber abfällt, eine „0". Die

Verläufe der oberen Reihe in Abb. 3.5 haben damit die Kodierung „+“ (Abb. 3.5a), „–“ (Abb. 3.5b) bzw. „0“ (Abb. 3.5c), die der mittleren entsprechend „++“, „−−“ und „+−“. In zwei Dimensionen gibt es daneben noch die Kombinationsmöglichkeit „−+“ sowie fünf Verläufe, die eine „0“ enthalten. Von diesen 9 Möglichkeiten stellt aber nur die Kombination „++“ ein lokales Minimum dar, alle übrigen enthalten mindestens eine Richtung, entlang der die Funktion abfällt. Analog repräsentiert nur „−−“ ein Maximum, alle übrigen Kombinationen sind Sattelpunkte.

Für einen dreidimensionalen Konfigurationsraum lassen sich die stationären Punkte durch alle möglichen Dreier-Kombinationen von „+“, „0“ und „–“ kennzeichnen. Davon gibt es $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$, aber nur die Folge „+++“ stellt ein Minimum dar. Analog ist in 4 Dimensionen nur noch eine von $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$ Kombinationsmöglichkeiten ein Minimum, in 5 – von $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 243$ usw. usf. Das bedeutet nicht, dass es in vieldimensionalen Systemen nicht immer noch viele lokale Minima geben kann, es zeigt aber, dass es unerwartet viele stationäre Punkte gibt, von denen aus ein Weg in Richtung des globalen Extremums existiert.

Anmerkung zur Überschrift

Mit „O Täler weit, o Höhen“ beginnt das bekannte romantische Lied „Abschied vom Walde“ von Joseph Freiherr von Eichendorff (1788–1857) und Felix Mendelssohn Bartholdy (1809–1847) [3].

Literatur

1. Darwin C (2003) On the Origin of Species – Faksimile der Erstausgabe. Harvard Univ. Press
2. Ahadi AS (Regie) Salami Aleikum. Deutschland, 2009
3. Eichendorff-Liederbuch Teil 2: Abschied (1965) Bärenreiter-Verlag, Kassel

http://www.springer.com/978-3-642-53888-9

Optimierung
Wie man aus allem das Beste macht
Dittes, F.-M.
2015, VII, 166 S. 57 Abb., 11 Abb. in Farbe., Softcover
ISBN: 978-3-642-53888-9