# Vorwort

Die *Funktionentheorie*, im englischen Sprachraum auch *Komplexe Analysis* genannt, hat in ihrer mehr als 200jährigen Geschichte eine Vielzahl tiefliegender und ästhetischer Ergebnisse hervorgebracht. Im klassischen Verständnis ist die Funktionentheorie die Theorie komplex differenzierbarer Funktionen einer komplexen Veränderlichen oder auch die Theorie der *holomorphen Funktionen*. Diese sind die Lösungen eines $(2 \times 2)$-Systems partieller Differentialgleichungen, die man üblicherweise Cauchy–Riemannsche Differentialgleichungen (CRD) nennt.

Zwar standen die Algebra der reellen Quaternionen nach W.R. Hamilton seit 1843 und die reellen Clifford-Algebren nach W.K. Clifford seit 1878 zur Verfügung, aber bis in die dreißiger Jahre des vorigen Jahrhunderts war die Auffassung vorherrschend, dass es sich bei der Funktionentheorie um eine rein zweidimensionale Theorie handele. Erst die Gruppe um den Schweizer Mathematiker R. Fueter und die rumänischen Mathematiker G.C. Moisil und N. Teodorescu begannen ab 1930 eine Funktionentheorie in der Algebra der reellen Quaternionen und in Clifford-Algebren zu entwickeln. Beginnend mit dem Ende der 1960er Jahre schuf eine Gruppe von belgischen Mathematikern um R. Delanghe in Gent eine reichhaltige Funktionentheorie in höheren Dimensionen. Seit 1990 hat die Anzahl der einschlägigen Arbeiten sehr stark zugenommen. In der Clifford-Analysis wird heute intensiv geforscht, davon zeugen auch die mehr als 9000 Einträge in unserer Datenbank über einschlägige Literatur, die auf der dem Buch beiliegenden CD zu finden ist.

Mit dem vorliegenden Lehrbuch soll ein erster Versuch gemacht werden, wesentliche Elemente der klassischen Funktionentheorie und ihrer höherdimensionalen Verallgemeinerungen in einer einheitlichen Darstellung für die universitäre Lehre bereit zu stellen. Als Interessenten stellen wir uns Studenten der Mathematik, Physik sowie mathematisch interessierte Studenten anderer Studiengänge ab dem dritten Semester vor. Wir haben uns um eine in sich geschlossene Präsentation des umfangreichen Stoffes bemüht. Dabei werden analytische, geometrische und auch numerische Aspekte berücksichtigt. Geschichtliche Hinweise an manchen Stellen sollen die Entwicklung des Gebietes aufzeigen und wesentliche Persönlichkeiten vorstellen.

Im ersten Kapitel werden die komplexen Zahlen, die Quaternionen und die Clifford-Zahlen eingeführt, wobei wir uns bemüht haben, die Parallelität des Vorgehens deutlich zu machen. Dabei nehmen natürlich Quaternionen und Clifford-Zahlen deutlich mehr Raum als die komplexen Zahlen ein. Wir behandeln neben den algebraischen und geometrischen Eigenschaften insbesondere auch Drehungen und Darstellungen.

Im ersten Abschnitt des zweiten Kapitels stellen wir die topologischen und analytischen Grundlagen für die Behandlung von Funktionen bis hin zu den Riemannschen Sphären bereit. Dieser Abschnitt ist wegen der Verwandtschaft zur klassischen Analysis bewusst kurz gehalten. Der zweite Abschnitt behandelt dann einige der möglichen Definitionen der Holomorphie, wobei wir diesen Namen auch in höheren Dimensionen beibehalten, denn die Definitionen sind weitgehend dimensionsunabhängig. Die Literatur verwendet hier meist den Weierstraßschen Begriff der monogenen Funktion. Es erscheint uns aber zumindest zweifelhaft, ob dieser die Sachlage am Besten beschreibt (vgl. Schluss des Abschnittes 5). Auch passt die holomorphe Funktion begrifflich besser zur meromorphen Funktion. Übrigens lässt sich seit den Arbeiten von H. Malonek der Holomorphiebegriff über die lokale Approximierbarkeit durch geeignete lineare Funktionen einführen, so dass auch in dieser Hinsicht die Analogie in allen Dimensionen gegeben ist. Der dritte Abschnitt ist "einfachen" Funktionen gewidmet, nämlich Potenzen und Möbiustransformationen. Als Potenzfunktionen sind in höheren Dimensionen die nach R. Fueter benannten Polynome besonders geeignet, die viele schöne Eigenschaften haben. Leider führt die Reduktion der Fueter-Polynome auf den ebenen Fall zu den Potenzen $(-iz)^n$ und nicht zu $z^n$; die Parallelität ist aber dennoch gegeben. Den Möbiustransformationen in höheren Dimensionen hat sich insbesondere L.V. Ahlfors gewidmet, auch für diese ist die Vergleichbarkeit für alle Dimensionen deutlich zu erkennen.

Die notwendigen Hilfsmittel zur Integration haben wir in Anhang 2 zusammen gestellt, ebenso wie eine kurze Einführung in die Theorie der Differentialformen in Anhang 1. Wir glauben, dass dies hilfreich sein kann, da diese Gebiete in den Anfängervorlesungen häufig nur sehr kurz, wenn überhaupt, behandelt werden. Allerdings verzichten wir auf den Beweis des Integralsatzes von Stokes, da dies zu weit vom Thema wegführen würde. Der Integralsatz von Cauchy und die Integralformel von Borel–Pompeiu sind dann einfache Folgerungen aus dem Satz von Stokes. Wir gehen aber auch auf die Randwertformeln von Plemelj–Sokhotzki ein. Folgerungen aus der Integralformel von Cauchy schließen sich an. Überdies wird die Teodorescu-Transformation untersucht und die Hodge-Zerlegung des quaternionischen Hilbertraumes behandelt. Die dafür notwendigen Funktionenräume werden kurz im Anhang 3 vorgestellt.

Das abschließende Kapitel ist verschiedenen Bereichen der Funktionentheorie gewidmet. Die Taylor- und Laurentreihen stehen an der Spitze. Dabei ist der Aufwand in höheren Dimensionen deutlich größer als in der Ebene, aber die Ähnlichkeit ist natürlich gegeben. Da die Taylorreihe in den Dimensionen größer zwei leider keine Orthogonalentwicklung ist, wird für Quaternionen ein Übergang zu

Orthogonalentwicklungen vorgestellt, der für numerische Zwecke besonders geeignet ist.

Die elementaren Funktionen in der Ebene bieten keine besonderen Schwierigkeiten. Sie sind mehr oder weniger kanonisch gegeben. Es ist ein Kennzeichen aller Übertragungen in höhere Dimensionen, dass ein Königsweg nicht mehr vorhanden ist. So ist es auch hier. Besonders sei auf die verschiedenen Verallgemeinerungen der Exponentialfunktion hingewiesen, wobei einer, die man mit Trennung der Variablen erhalten kann, besondere Bedeutung zukommt. Sie ist ein geeigneter Kern einer Fouriertransformation für quaternionenwertige Funktionen.

Der Abschnitt über die lokale Struktur holomorpher Funktionen zeigt deutlich, dass hier noch ein aktives Feld der Forschung in höheren Dimensionen vorliegt. Die aus der Ebene gewohnten angenehmen Eigenschaften von Nullstellen und isolierten Singularitäten gehen im Raum auf den ersten Blick verloren. Es fehlt noch eine geeignete Sicht, um alle Erscheinungen zu verstehen. Immerhin lässt sich der Residuensatz übertragen, und auch erste Ansätze für das Argumentprinzip wurden gefunden.

Der letzte Abschnitt ist den speziellen Funktionen gewidmet, wobei zuerst die Gammafunktion und die Riemannsche Zetafunktion behandelt werden. Schließlich bieten die Ausführungen über automorphe Funktionen und Formen in $C\ell(n)$ einen Einblick in neueste Forschungen auf diesem Gebiet.

Aufgaben am Ende jedes Abschnittes sollen dem Leser bei der Einarbeitung in das Gebiet eine Hilfe sein. Die Verwendung der (Schief-) Körperstruktur der reellen Quaternionen gestattet es, manche Aussagen präziser und leserfreundlicher als in allgemeinen Clifford-Algebren zu formulieren. Zudem sind für die Anwendungen der $\mathbb{R}^3$ und der $\mathbb{R}^4$ von besonderem Interesse. Daher haben wir mitunter auf den allgemeineren Fall reeller Clifford-Algebren $C\ell(n)$ verzichtet.

In die Darstellung der höherdimensionalen Ergebnisse sind Resultate vieler auf dem Gebiet der Clifford-Analysis arbeitenden Kollegen eingeflossen. Insbesondere möchten wir den Herren Prof. Dr. H. Krüger (Kaiserslautern), Prof. Dr. H. Malonek (Aveiro), Priv.-Doz. Dr. R. S. Kraußhar (Gent) danken, die Abschnitte des Manuskripts mitgestaltet haben. Für Diskussionen zu Detailfragen danken wir Prof. Dr. F. Sommen (Gent) und Prof. Dr. M. Shapiro (Mexiko). Für Verbesserungen im Manuskript haben wir insbesondere Herrn Prof. Dr. G. Jank (Aachen) und dem Herausgeber, Herrn Dr. T. Hempfling (Birkhäuser-Verlag) zu danken. Den kritischen Bemerkungen der Gutachter zu einer ersten Version des Buches sei ebenfalls Dank gesagt. Die sorgfältige Anfertigung der Zeichnungen durch Frau M. Sprößig und Herrn T. Lahmer hat uns wesentlich geholfen. Unsere Frauen haben für die langwierigen Arbeiten am Manuskript stets das notwendige Verständnis aufgebracht.

Weimar, Aachen und Freiberg im August 2005

Klaus Gürlebeck, Klaus Habetha und Wolfgang Sprößig