

Lorenz-Peter Schmidt  
Gerd Schaller  
Siegfried Martius

# Grundlagen der Elektrotechnik 3

Netzwerke

PEARSON  
Studium

---

ein Imprint von Pearson Education  
München • Boston • San Francisco • Harlow, England  
Don Mills, Ontario • Sydney • Mexico City  
Madrid • Amsterdam

# Analyse von Netzwerken

3.1	Einführung .....	56
3.2	Maschenstromverfahren .....	57
3.3	Knotenpotenzialverfahren .....	64

**3**

**ÜBERBLICK**

### 3.1 Einführung

Die Analyse von kleinen Netzwerken mit wenigen Knoten und Zweigen lässt sich meist mit wenig Aufwand unter Einsatz der Kirchhoffschen Regeln durchführen. In diesem Kapitel wollen wir uns Netzwerken mit größerer Komplexität zuwenden und Netzwerkanalyseverfahren einführen, die den Berechnungsaufwand überschaubar halten und durch Systematisierung potenziell auch in Netzwerkanalyseprogrammen eingesetzt werden können. Auch hier wollen wir uns auf lineare Netzwerke beschränken und die komplexe Zeigerdarstellung für die Betriebsgrößen verwenden.

Als Beispiel dient die (noch recht überschaubare) Schaltung in Abbildung 3.1 mit  $K = 5$  Knoten und  $Z = 9$  Zweigen.

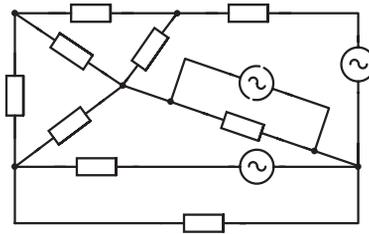


Abbildung 3.1: Netzwerk mit  $K = 5$  Knoten und  $Z = 9$  Zweigen

Da Übertrager und gesteuerte Quellen zunächst noch ausgeklammert bleiben sollen, besteht jeder Zweig  $n$  zwischen zwei Knoten A und B aus einer Impedanz  $\underline{Z}_n$  bzw. Admittanz  $\underline{Y}_n$  sowie einer Konstantspannungsquelle  $\underline{U}_{qn}$  bzw. einer Konstantstromquelle  $\underline{I}_{qn}$ , wie in Abbildung 3.2 dargestellt.

Die Spannung  $\underline{U}_n$  längs des Zweiges  $n$ , der die Knoten A und B verbindet, wird als Zweigspannung bezeichnet, der Strom  $\underline{I}_n$ , der in den Zweig hinein- und wieder herausfließt, wird als Zweigstrom bezeichnet.

Konvention: Wir vereinbaren, dass Zweigspannung und Zweigstrom in einem Zweig immer dieselbe Richtung haben, wie aus Abbildung 3.2 ersichtlich.

Es können Zweige vorkommen, bei denen die Quellspannung bzw. der Quellstrom zu null verschwindet, sodass nur die Zweigimpedanz bzw. -admittanz übrig bleibt.

Bei einer vollständigen Analyse der Schaltung nach Abbildung 3.1 werden  $Z$  Zweigspannungen und  $Z$  Zweigströme gesucht, es gibt also formal  $2 \cdot Z$  Unbekannte. Durch

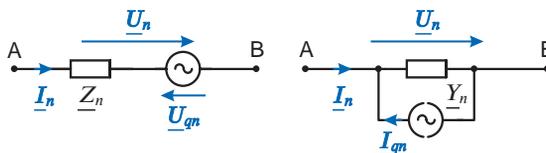


Abbildung 3.2: Zweig  $n$  zwischen den Knoten A und B mit Konstantspannungsquelle bzw. Konstantstromquelle

Anwendung der Strom/Spannungsbeziehungen für jeden Zweig (Gleichung (3.1)) können wir die Anzahl der Unbekannten auf  $Z$  reduzieren.

$$\underline{U}_n = \underline{Z}_n \cdot \underline{I}_n - \underline{U}_{qn} \quad \text{bzw.} \quad \underline{I}_n = \underline{Y}_n \cdot \underline{U}_n - \underline{I}_{qn} \quad (3.1)$$

Bei „konventioneller“ Vorgehensweise können wir zur Schaltungsanalyse die *Kirchhoffschen Gesetze* wie folgt anwenden:

- Knotengleichungen: Es existieren  $K - 1$  linear unabhängige Knotengleichungen; der  $K$ -te Knoten kann durch einen „Superknoten“ der anderen Knoten dargestellt werden und würde daher lediglich eine linear abhängige Gleichung ergeben.
- Maschengleichungen: Es sind noch  $Z - (K - 1)$  unabhängige Maschengleichungen erforderlich, um auf die Gesamtzahl von  $Z$  Gleichungen für unsere  $Z$  Unbekannten zu kommen. Bei der Aufstellung der linear unabhängigen Maschengleichungen ist darauf zu achten, dass jede neue Masche *mindestens* einen vorher noch nicht erfassten Zweig enthält und dass jeder Zweig wenigstens einmal durchlaufen wird.

In unserem Beispiel sind also vier Knotengleichungen und fünf Maschengleichungen erforderlich, die zusammen ein *Gleichungssystem von neun Gleichungen mit neun Unbekannten* ergeben.

Obwohl dieses Netzwerk noch eine recht geringe Komplexität hat, ist also bei konventioneller Vorgehensweise schon ein recht umfangreiches Gleichungssystem zu lösen, um die zunächst unbekanntes Zweigspannungen und Zweigströme zu berechnen.

Im weiteren Verlauf dieses Kapitels werden zwei Verfahren beschrieben, bei denen die Anzahl der Variablen im zu lösenden Gleichungssystem deutlich geringer ist und außerdem die Aufstellung der Gleichungen stark formalisiert werden kann, sodass eine rechnergestützte Netzwerkanalyse ermöglicht wird.

## 3.2 Maschenstromverfahren

Beispielhaft wird für die Erläuterung des Maschenstromverfahrens das Netzwerk in Abbildung 3.3 herangezogen. Bei den im Netzwerk vorkommenden Elementen beschränken wir uns zunächst auf  $R$ -,  $L$ -,  $C$ -Elemente sowie unabhängige Spannungsquellen. Gesucht sind wieder alle Zweigströme und Zweigspannungen im Netzwerk.

Bei konventioneller Lösung mit direkter Aufstellung von Kirchhoffschen Gleichungen für die sechs Zweigspannungen und sechs Zweigströme benötigen wir  $K - 1 = 3$  Knotengleichungen und  $Z - (K - 1) = 3$  Maschengleichungen und erhalten damit sechs Gleichungen mit sechs Unbekannten, mit denen wir zum Beispiel die Zweigspannungen ausrechnen können. Die Zweigströme ergeben sich daraus mit Hilfe der Strom/Spannungsbeziehungen für jeden Zweig (Gleichung (3.1)).

### 3.2.1 Maschenströme

Mit dem Ziel, die Anzahl der Variablen und damit die Größe des zu lösenden Gleichungssystems zu reduzieren, führen wir im Netzwerk so genannte Maschenströme

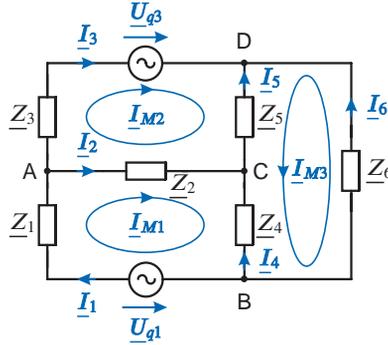


Abbildung 3.3: Netzwerk mit Maschenströmen  $\underline{I}_{M1}$ ,  $\underline{I}_{M2}$ ,  $\underline{I}_{M3}$

ein, die in sich geschlossene Strompfade darstellen. In unserem Beispiel in Abbildung 3.3 sind das die bereits eingezeichneten Maschenströme  $\underline{I}_{M1}$ ,  $\underline{I}_{M2}$ ,  $\underline{I}_{M3}$ . Durch diese Maschenströme sind die Kirchhoffschen Knotengleichungen von vornherein erfüllt, da jeder Maschenstrom in einen betrachteten Knoten hinein- und wieder herausfließt. In jedem Zweig überlagern sich die eingeführten Maschenströme (vorzeichenrichtig) zum gesamten Zweigstrom.

Damit kann eine Verknüpfung der folgenden Form zwischen den sechs Zweigströmen und den drei Maschenströmen hergestellt werden:

$$\begin{aligned}
 \underline{I}_1 &= \underline{I}_{M1} \\
 \underline{I}_2 &= \underline{I}_{M1} - \underline{I}_{M2} \\
 \underline{I}_3 &= \underline{I}_{M2} \\
 \underline{I}_4 &= -\underline{I}_{M1} - \underline{I}_{M3} \\
 \underline{I}_5 &= -\underline{I}_{M2} - \underline{I}_{M3} \\
 \underline{I}_6 &= \underline{I}_{M3} .
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

Diese sechs Gleichungen können auch etwas kompakter in Matrixschreibweise dargestellt werden. Dazu führen wir den Spaltenvektor  $\underline{I}$  der Zweigströme sowie den Spaltenvektor  $\underline{I}_M$  der Maschenströme ein, die gemäß Gleichung (3.2) durch die so genannte Inzidenzmatrix  $\mathbf{A}$  miteinander verknüpft sind:

$$\underline{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \underline{I}_M \quad \text{oder} \quad \underline{I} = \mathbf{A} \cdot \underline{I}_M \tag{3.3}$$

Die Elemente  $a_{ij}$  der Inzidenzmatrix haben offensichtlich den Wert 0 oder +1 oder -1, und zwar abhängig davon, ob der betreffende Zweig  $i$  nicht oder gleichsinnig oder gegensinnig zum Zweigstrom vom Maschenstrom  $j$  durchflossen wird.

Im nächsten Schritt werden jetzt mit Hilfe der Zweigspannungen Maschenumläufe entlang der einzelnen Maschenströme (in Maschenstromrichtung) durchgeführt. Daraus ergeben sich die Gleichungen

$$\begin{aligned}\underline{U}_1 + \underline{U}_2 - \underline{U}_4 &= 0 \\ -\underline{U}_2 + \underline{U}_3 - \underline{U}_5 &= 0 \\ -\underline{U}_4 - \underline{U}_5 + \underline{U}_6 &= 0.\end{aligned}\quad (3.4)$$

Die Matrixdarstellung dieser Gleichungen zeigt, dass die Zweigspannungen über die Transponierte der Inzidenzmatrix miteinander verknüpft sind:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ \vdots \\ \underline{U}_6 \end{pmatrix} = \mathbf{0} \quad \text{oder} \quad \mathbf{A}^T \cdot \underline{\mathbf{U}} = \mathbf{0}.\quad (3.5)$$

Dieselben Maschengleichungen sollen nun jedoch nicht mit den Zweigspannungen, sondern mit Hilfe der Maschenströme aufgestellt werden, um von vornherein die Anzahl der Variablen zu reduzieren. Bei der Durchführung der Maschenumläufe müssen wir natürlich für die Spannungsabfälle an den einzelnen Impedanzen immer alle Maschenströme (vorzeichenrichtig) berücksichtigen, die diese Impedanz durchfließen. Schreiben wir die in den Umläufen vorkommenden Konstantspannungen auf die rechte Gleichungsseite, so ergeben sich die folgenden drei Gleichungen:

$$\begin{aligned}\underline{Z}_1 \cdot \underline{I}_{M1} + \underline{Z}_2 \cdot (\underline{I}_{M1} - \underline{I}_{M2}) + \underline{Z}_4 \cdot (\underline{I}_{M1} + \underline{I}_{M3}) &= \underline{U}_{q1} \\ \underline{Z}_2 \cdot (\underline{I}_{M2} - \underline{I}_{M1}) + \underline{Z}_3 \cdot \underline{I}_{M2} + \underline{Z}_5 \cdot (\underline{I}_{M2} + \underline{I}_{M3}) &= -\underline{U}_{q3} \\ \underline{Z}_4 \cdot (\underline{I}_{M3} + \underline{I}_{M1}) + \underline{Z}_5 \cdot (\underline{I}_{M3} + \underline{I}_{M2}) + \underline{Z}_6 \cdot \underline{I}_{M3} &= 0\end{aligned}\quad (3.6)$$

Die Terme auf den linken Gleichungsseiten können wir noch nach den Maschenströmen sortieren und erhalten drei Gleichungen mit den drei Maschenströmen als Unbekannten:

$$\begin{aligned}(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_4) \cdot \underline{I}_{M1} - & \underline{Z}_2 \cdot \underline{I}_{M2} + & \underline{Z}_4 \cdot \underline{I}_{M3} &= \underline{U}_{q1} \\ -\underline{Z}_2 \cdot \underline{I}_{M1} + (\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 + \underline{Z}_5) \cdot \underline{I}_{M2} + & \underline{Z}_5 \cdot \underline{I}_{M3} &= -\underline{U}_{q3} \\ \underline{Z}_4 \cdot \underline{I}_{M1} + & \underline{Z}_5 \cdot \underline{I}_{M2} + (\underline{Z}_4 + \underline{Z}_5 + \underline{Z}_6) \cdot \underline{I}_{M3} &= 0.\end{aligned}\quad (3.7)$$

In Matrixdarstellung erhalten wir schließlich die folgende Gleichung:

$$\begin{pmatrix} \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_4 & -\underline{Z}_2 & \underline{Z}_4 \\ -\underline{Z}_2 & \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 + \underline{Z}_5 & \underline{Z}_5 \\ \underline{Z}_4 & \underline{Z}_5 & \underline{Z}_4 + \underline{Z}_5 + \underline{Z}_6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{I}_{M1} \\ \underline{I}_{M2} \\ \underline{I}_{M3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{U}_{q1} \\ -\underline{U}_{q3} \\ 0 \end{pmatrix}.\quad (3.8)$$

Das Gleichungssystem (3.7) bzw. die Matrixgleichung (3.8) kann mit gängigen Methoden der linearen Algebra nach den Maschenströmen aufgelöst werden. Sind die Maschenströme ermittelt, dann können daraus mit Hilfe von Gleichung (3.3) alle Zweigströme und mit den Strom/Spannungsbeziehungen in Gleichung (3.1) die einzelnen Zweigspannungen berechnet werden. Damit ist das Netzwerk in Abbildung 3.3

vollständig analysiert. Durch Einführung der Maschenströme haben wir erreicht, dass lediglich ein Gleichungssystem von drei Gleichungen mit drei Unbekannten aufzustellen bzw. zu lösen ist.

Wenden wir uns nun den offensichtlichen Gesetzmäßigkeiten zu, nach denen die Matrixgleichung (3.8) aufgebaut ist. Dazu vergegenwärtigen wir uns, dass die drei Gleichungen und damit die drei Zeilen der Impedanzmatrix in Gleichungen (3.8) aus den drei Maschenumläufen entlang der drei Maschenströme entstanden sind:

- In den Hauptdiagonalelementen  $\underline{Z}_{ii}$  der Matrix stehen die Summen aller Netzwerkimpedanzen, die bei den betreffenden Maschenumläufen berührt werden.
- Die Impedanzmatrix ist symmetrisch zur Hauptdiagonalen, solange keine gesteuerten Quellen im Netzwerk vorhanden sind.
- Die Elemente  $\underline{Z}_{ij}$  außerhalb der Hauptdiagonalen werden durch die Summe derjenigen Netzwerkelemente gebildet, die von den Maschenströmen  $\underline{I}_{Mi}$  und  $\underline{I}_{Mj}$  gemeinsam durchflossen werden.
- Der Spaltenvektor auf der rechten Seite der Matrixgleichung enthält (vorzeichenrichtig) die Spannungen der Konstantspannungsquellen, die von dem betreffenden Maschenumlauf erfasst werden.
- Falls im Netzwerk nur einzelne Ströme oder Spannungen gesucht werden, ist es zweckmäßig, die Maschenströme so zu wählen, dass Zweige mit gesuchten Größen nur einmal von Maschenströmen durchflossen werden.

Vorgehensweise beim Maschenstromverfahren:

- Geeignete Maschen und Maschenströme wählen
- Beziehungen zwischen Maschen- und Zweigströmen aufstellen
- Kirchhoffsche Maschenregel auf alle Maschen anwenden mit Maschenströmen als Variablen
- Lineares Gleichungssystem lösen
- Zweigströme mit Hilfe der Inzidenzmatrix berechnen
- Zweigspannungen über Strom/Spannungsbeziehungen für die einzelnen Zweige ermitteln

### 3.2.2 Maschenauswahl im Netzwerk

Bei komplexeren Netzwerken wird es zunehmend schwieriger, die lineare Unabhängigkeit und Vollständigkeit der Maschengleichungen sicherzustellen. Auch für die Automatisierung des Verfahrens ist es erforderlich, ein einfaches und betriebssicheres Verfahren einsetzen zu können, mit dem die Festlegung von linear unabhängigen Maschenströmen erfolgen kann.

Zu diesem Zweck bedienen wir uns der so genannten Graphendarstellung für ein Netzwerk, die folgende Eigenschaften hat:

Graphendarstellung:

- Die Knotenstruktur des Netzwerks bleibt erhalten
- Zweige werden durch Verbindungslinien zwischen Knoten ersetzt
- Spannungsquellen werden zu null gesetzt, im Graphen also durch Kurzschlüsse ersetzt
- Stromquellen werden ebenfalls zu null gesetzt, im Graphen also durch Leerläufe ersetzt

Als Beispiel wandeln wir unter Anwendung dieser Regeln das Netzwerk in Abbildung 3.1 in einen Graphen um:

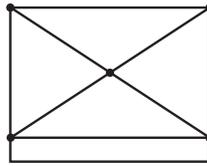


Abbildung 3.4: Graph (oder „Streckenkomplex“) des Netzwerks aus Abbildung 3.1

Das Netzwerk und also auch der Graph besteht (nach wie vor) aus  $K = 5$  Knoten und  $Z = 9$  Zweigen.

Im nächsten Schritt wandeln wir den Graphen in einen „**vollständigen Baum**“ um, indem wir gerade so viele Zweige entfernen, dass im ganzen Netzwerk keine Maschen mehr vorkommen. Dabei müssen jedoch alle Knoten miteinander verbunden bleiben. Wir erhalten dann, wie leicht nachvollzogen werden kann, einen Baum mit genau  $K - 1$  Baumzweigen. Herausgenommen worden sind also  $Z - (K - 1)$  „unabhängige“ Zweige, die nicht zum Baum gehören. Es zeigt sich, dass mehrere, voneinander verschiedene Bäume gefunden werden können, die alle genannten Voraussetzungen erfüllen. In Abbildung 3.5 sind zwei (aus einer Vielzahl von möglichen Bäumen) für das betrachtete Netzwerk dargestellt.

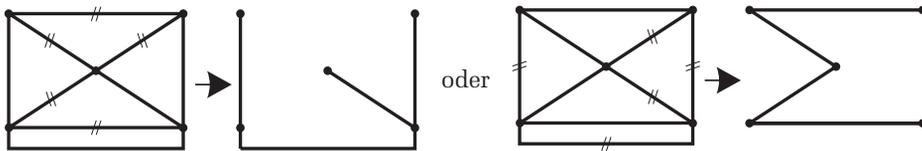


Abbildung 3.5: Zwei „vollständige Bäume“ für das betrachtete Netzwerk

In beiden Fällen ergeben sich also  $K - 1 = 4$  Baumzweige und  $Z - (K - 1) = 5$  unabhängige Zweige. Wir stellen fest, dass jeder Knoten des Netzwerks über Baumzweige erreichbar ist.

Mit jedem unabhängigen Zweig des Netzwerks kann genau eine Masche gebildet werden, die neben diesem unabhängigen Zweig nur Baumzweige enthält. Damit können genau  $Z - (K - 1)$  Maschenströme festgelegt werden, die mit Sicherheit linear unabhängig sind und das Netzwerk vollständig beschreiben.

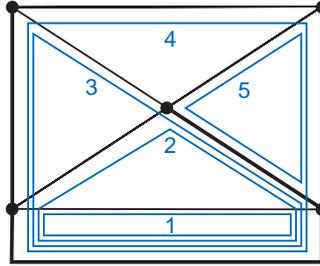


Abbildung 3.6: Darstellung des betrachteten Netzwerks mit Baumzweigen (dicke Linien) und unabhängigen Zweigen (dünne Linien). Eingezeichnet sind auch die  $Z - (K - 1) = 5$  Maschenumläufe, die jeweils nur einen unabhängigen Zweig enthalten und durch die voneinander unabhängigen Maschenströme festgelegt werden.

Als Beispiel ist für den ersten der beiden Bäume aus Abbildung 3.5 genau die erforderliche Maschenzahl  $Z - (K - 1) = 5$  in Abbildung 3.6 eingezeichnet.

Mit diesem Verfahren kann also in einfacher Weise sichergestellt werden, dass auch in sehr komplexen Netzwerken genau die erforderliche Anzahl linear unabhängiger Maschen festgelegt werden. Das Maschenstromverfahren kann dann in der beschriebenen Weise eingesetzt werden.

### 3.2.3 Quellen und Übertrager im Netzwerk

Bisher waren wir vereinfachend davon ausgegangen, dass unser Netzwerk nur  $R$ -,  $L$ -,  $C$ -Elemente sowie Konstantspannungsquellen, jedoch keine Konstantstromquellen, keine gesteuerten Quellen und keine Übertrager enthält. Im Folgenden wollen wir diese Beschränkung aufheben und uns allgemein mit Quellen und Übertragern im Netzwerk befassen.

#### ■ Konstantspannungsquellen:

Es ist zweckmäßig, den Baum für ein Netzwerk so zu gestalten, dass die Spannungsquellen in unabhängigen Zweigen liegen. Dann kommt jede Quelle nur in einer Masche vor und ist im aufzustellenden Gleichungssystem nur in einer Gleichung vorhanden.

#### ■ Konstantstromquellen:

1. Konstantstromquellen werden vor der Netzwerkanalyse in Konstantspannungsquellen umgewandelt (vgl. Kapitel 1.1).
2. Bei  $Y_i = 0$  ist eine direkte Umwandlung der Stromquelle in eine Spannungsquelle nicht möglich. Dieses Problem kann jedoch durch eine vorangestellte Quellenteilung und Quellenversetzung behoben werden.

#### ■ Gesteuerte Quellen:

1. Alle gesteuerten Quellen werden zunächst in maschenstromgesteuerte Spannungsquellen umgewandelt.
2. Bei Aufstellung des Gleichungssystems werden sie zunächst wie Konstantspannungsquellen behandelt und werden zu Elementen des Spannungsvektors auf der rechten Seite der Matrixgleichung (Vergleiche: Gleichung (3.7) bzw. (3.8)).

3. In einem nachfolgenden Rechenschritt wird die Abhängigkeit der gesteuerten Quellen von den Maschenströmen eingesetzt und auf der linken Gleichungsseite bei den Maschenstromkoeffizienten berücksichtigt.

■ Übertrager:

1. Ist ein Übertrager im Netzwerk enthalten, so werden zunächst die Maschen in gewohnter Weise festgelegt. Dabei wird jede Übertragerseite wie ein Zweig des Netzwerks behandelt.
2. Liegt eine Übertragerwicklung im Maschenumlauf, so ist bei Aufstellung der Maschengleichungen zusätzlich zu dem Strom durch diese Wicklung der Maschenstrom durch die gekoppelte Wicklung zu berücksichtigen (über die Gegeninduktivität  $M$ ).

### 3.2.4 Matrixdarstellung

In Kapitel 3.2.1 haben wir die wesentlichen Rechenschritte des Maschenstromverfahrens sowohl mit Einzelgleichungen als auch in Matrixdarstellung vollzogen. Unter Verwendung der Gleichungen (3.3) und (3.5) und bei Zusammenfassung aller Verknüpfungen von Zweigspannungen und Zweigströmen zu einer Matrixgleichung können wir das inhomogene Gleichungssystem zur Berechnung der Maschenströme alternativ zur Rechnung in Kapitel 3.2.1 auch sehr einfach in Matrixschreibweise in allgemein gültiger Form ermitteln:

- Verknüpfung von Zweigströmen und Maschenströmen:

$$\underline{\mathbf{I}} = \mathbf{A} \cdot \underline{\mathbf{I}}_M \quad \text{mit Inzidenzmatrix } \mathbf{A} [Z \times Z - (K - 1)] \quad (3.9)$$

- Aufstellung der Kirchhoffschen Maschengleichungen:

$$\mathbf{A}^T \cdot \underline{\mathbf{U}} = \mathbf{0} \quad [Z - (K - 1) \text{ Gleichungen}] \quad (3.10)$$

- Verknüpfung von Zweigspannungen und Zweigströmen:

$$\underline{\mathbf{U}} = \underline{\mathbf{Z}} \cdot \underline{\mathbf{I}} - \underline{\mathbf{U}}_q \quad [\underline{\mathbf{Z}} \text{ ist Diagonalmatrix der Zweigimpedanzen}] \quad (3.11)$$

- Einsetzen von Gleichung (3.9) in (3.11) und Einsetzen der entstandenen Gleichung in Gleichung (3.10) ergibt das Gleichungssystem für die Maschenströme:

$$\mathbf{A}^T \cdot \underline{\mathbf{Z}} \cdot \mathbf{A} \cdot \underline{\mathbf{I}}_M = \underline{\mathbf{A}}^T \cdot \underline{\mathbf{U}}_q \quad [Z - (K - 1) \text{ Gleichungen}] \quad (3.12)$$

- Die Matrix  $\underline{\mathbf{A}}^T \cdot \underline{\mathbf{Z}} \cdot \mathbf{A} = \underline{\mathbf{Z}}_M$  wird als Maschenimpedanzmatrix bezeichnet.

Das Gleichungssystem kann also (nach Vorbereitung des Netzwerks gemäß Kapitel 3.2.2 und 3.2.3 und unter konsequenter Beachtung aller Vorzeichen!) direkt aus den einfach zu erstellenden Teilmatrizen entsprechend Gleichung (3.12) aufgestellt werden, was für eine automatisierte Schaltungsanalyse sehr nützlich ist.

Literatur: [5], [11], [20]

### 3.3 Knotenpotenzialverfahren

Das Knotenpotenzialverfahren kann als duales Verfahren zur Maschenstromanalyse angesehen werden. Seine Anwendung hat Vorteile bei Netzwerken mit vielen Zweigen und wenigen Knoten sowie in Fällen, wo zahlreiche Stromquellen im Netzwerk enthalten sind. Außerdem hat das Knotenpotenzialverfahren Vorteile beim Einsatz in Schaltungssimulationsprogrammen.

Als beispielhaftes Netzwerk wird die Schaltung in Abbildung 3.7 herangezogen, die durch Umwandlung der Spannungsquellen in Stromquellen aus Abbildung 3.3 hervorgegangen ist.

Bei den weiteren Betrachtungen wollen wir uns zunächst auf Netzwerke mit  $R$ -,  $L$ -,  $C$ -Elementen sowie Konstantstromquellen beschränken.

#### 3.3.1 Knotenpotenziale und Knotenspannungen

Wir ordnen zunächst jedem Knoten im Netzwerk ein Potenzial zu, gehen also bei unserer beispielhaften Schaltung in Abbildung 3.7 von den Potenzialen  $\underline{\varphi}_A$ ,  $\underline{\varphi}_B$ ,  $\underline{\varphi}_C$ ,  $\underline{\varphi}_D$  an den  $K = 4$  Knoten aus, die mit den Buchstaben A, B, C, D gekennzeichnet sind.

Im nächsten Schritt wählen wir einen der Knoten als Bezugs- oder Referenzknoten aus und definieren für die übrigen  $K - 1$  Knoten so genannte **Knotenspannungen** als Potentialdifferenzen zwischen den betreffenden Knoten und dem Referenzknoten. Im vorliegenden Fall erklären wir den Knoten D zum Referenzknoten und erhalten die drei Knotenspannungen:

$$\underline{U}_{K1} = \underline{\varphi}_A - \underline{\varphi}_D; \quad \underline{U}_{K2} = \underline{\varphi}_B - \underline{\varphi}_D; \quad \underline{U}_{K3} = \underline{\varphi}_C - \underline{\varphi}_D \quad (3.13)$$

Aus Abbildung 3.7 ist leicht ersichtlich, dass jede Zweigspannung durch eine oder (über einen Maschenumlauf) durch mehrere Knotenspannungen ausgedrückt werden kann. Diese Verknüpfung von Zweigspannungen und Knotenspannungen wird durch das nachfolgende Gleichungssystem wiedergegeben. Zu beachten ist dabei, dass

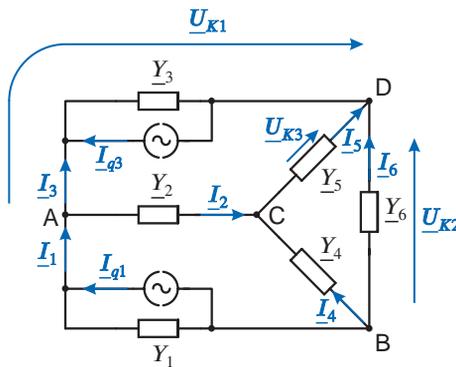


Abbildung 3.7: Netzwerkbeispiel mit Referenzknoten D und Knotenspannungen  $\underline{U}_{K1}$ ,  $\underline{U}_{K2}$ ,  $\underline{U}_{K3}$

gemäß Abbildung 3.2 Zweigspannungen und Zweigströme in einem Zweig immer dieselbe Richtung haben.

$$\begin{aligned}
 \underline{U}_1 &= -\underline{U}_{K1} + \underline{U}_{K2} \\
 \underline{U}_2 &= \underline{U}_{K1} \quad - \underline{U}_{K3} \\
 \underline{U}_3 &= \underline{U}_{K1} \\
 \underline{U}_4 &= \underline{U}_{K2} - \underline{U}_{K3} \\
 \underline{U}_5 &= \underline{U}_{K3} \\
 \underline{U}_6 &= \underline{U}_{K2}
 \end{aligned} \tag{3.14}$$

Wir können das Gleichungssystem wieder in Matrixschreibweise darstellen und erhalten die Inzidenzmatrix  $\mathbf{B}$  als Verknüpfung zwischen dem Spaltenvektor  $\underline{U}$  der Zweigspannungen und dem Spaltenvektor  $\underline{U}_K$  der Knotenspannungen:

$$\underline{U} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \underline{U}_K \quad \text{oder} \quad \underline{U} = \mathbf{B} \cdot \underline{U}_K. \tag{3.15}$$

Auch hier treten in der Inzidenzmatrix für die Matrixelemente  $b_{ij}$  nur die Werte 0, +1, -1 auf, und zwar abhängig davon, ob bei den einzelnen Maschenumläufen die betreffende Knotenspannung verwendet wird und ob Richtungen von Maschenumlauf und jeweiliger Knotenspannung gleich- oder gegensinnig sind.

So, wie beim Maschenstromverfahren durch Einführung der Maschenströme die Kirchhoffschen Knotengleichungen von vornherein erfüllt sind, sind beim Knotenpotenzialverfahren durch Einführung der Knotenspannungen die Kirchhoffschen Maschengleichungen von vornherein erfüllt. Mit den  $K - 1$  Knotenspannungen haben wir wieder einen kompakten Satz von Unbekannten eingeführt, für die wir durch Aufstellung der  $K - 1$  voneinander linear unabhängigen Kirchhoffschen Knotengleichungen eine Lösung finden können.

Zunächst stellen wir die  $K - 1 = 3$  Knotengleichungen für die Knoten A, B, C unseres Beispielnetzwerkes mit Hilfe der Zweigströme auf, wobei abfließende Ströme ein positives Vorzeichen erhalten:

$$\begin{aligned}
 -I_1 + I_2 + I_3 &= 0 \\
 I_1 + I_4 + I_6 &= 0 \\
 -I_2 - I_4 + I_5 &= 0
 \end{aligned} \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \underline{I} = \mathbf{0}. \tag{3.16}$$

Die Matrixdarstellung dieser Gleichungen zeigt, dass die Zweigströme über die Transponierte der Inzidenzmatrix  $\mathbf{B}$  miteinander verknüpft sind:

$$\mathbf{B}^T \cdot \underline{I} = \mathbf{0} \tag{3.17}$$

Dieselben Knotengleichungen können wir als Funktion der Zweigspannungen aufstellen, indem wir die Verknüpfungen zwischen den Zweigströmen und den Zweigspannungen nach Gleichung (3.1) verwenden. (Es ergibt sich zum Beispiel  $\underline{I}_1 = \underline{Y}_1 \cdot \underline{U}_1 + \underline{I}_{q1}$  usw.) Damit lauten die Knotengleichungen:

$$\begin{aligned} -\underline{Y}_1 \cdot \underline{U}_1 + \underline{Y}_2 \cdot \underline{U}_2 + \underline{Y}_3 \cdot \underline{U}_3 &= \underline{I}_{q1} + \underline{I}_{q3} \\ \underline{Y}_1 \cdot \underline{U}_1 + \underline{Y}_4 \cdot \underline{U}_4 + \underline{Y}_6 \cdot \underline{U}_6 &= -\underline{I}_{q1} \\ -\underline{Y}_2 \cdot \underline{U}_2 + \underline{Y}_4 \cdot \underline{U}_4 + \underline{Y}_5 \cdot \underline{U}_5 &= 0. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Werden nun noch mit Hilfe der Gleichungen (3.14) die Zweigspannungen im Gleichungssystem (3.18) durch Knotenspannungen ersetzt, so ergibt sich das gesuchte inhomogene Gleichungssystem zur Berechnung der zunächst unbekanntenen Knotenspannungen (in Matrixschreibweise):

$$\begin{pmatrix} \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3 & -\underline{Y}_1 & -\underline{Y}_2 \\ -\underline{Y}_1 & \underline{Y}_1 + \underline{Y}_4 + \underline{Y}_6 & -\underline{Y}_4 \\ -\underline{Y}_2 & -\underline{Y}_4 & \underline{Y}_2 + \underline{Y}_4 + \underline{Y}_5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{U}_{K1} \\ \underline{U}_{K2} \\ \underline{U}_{K3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{I}_{q1} + \underline{I}_{q3} \\ -\underline{I}_{q1} \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.19)$$

Dieses inhomogene Gleichungssystem kann mit Methoden der linearen Algebra nach den Knotenspannungen aufgelöst werden. Sind die Knotenspannungen bekannt, so können wir mit den Gleichungen (3.14) daraus alle Zweigspannungen und mit Gleichung (3.1) alle Zweigströme im Netzwerk ausrechnen.

Durch Einführung der Knotenspannungen haben wir erreicht, dass lediglich ein Gleichungssystem von drei Gleichungen mit drei Unbekannten aufzustellen bzw. zu lösen ist.

Der etwas umständliche Weg zur Aufstellung des Gleichungssystems, den wir hier zum Zweck der anschaulichen Herleitung gewählt haben, kann abgekürzt werden, wenn wir uns die Bildungsgesetzmäßigkeiten der Matrixgleichung vor Augen geführt haben. Dabei ist zu beachten, dass jede Zeile des Gleichungssystems bzw. der Matrixgleichung einem Knoten des Netzwerks zugeordnet ist.

- In den Hauptdiagonalelementen  $\underline{Y}_{ij}$  der Admittanzmatrix stehen die Summen aller Netzwerkadmittanzen, die an den betreffenden Knoten angeschlossen sind.
- Die Admittanzmatrix ist symmetrisch zur Hauptdiagonalen, solange keine gesteuerten Quellen im Netzwerk vorhanden sind.
- Die Elemente  $\underline{Y}_{ij}$  außerhalb der Hauptdiagonalen werden durch die negativen Summen derjenigen Admittanzen gebildet, die auf dem Pfad zwischen dem Knoten  $i$  und dem Knoten  $j$  liegen.
- Der Spaltenvektor auf der rechten Seite der Matrixgleichung enthält (vorzeichenrichtig) die Summe der Quellströme aller an den jeweiligen Knoten angeschlossenen Zweige. Dem Knoten zufließende Ströme gehen mit positivem Vorzeichen ein.

Grundsätzliche Vorgehensweise beim Knotenpotenzialverfahren:

- Referenzknoten und  $K - 1$  Knotenspannungen festlegen
- Beziehungen zwischen Knoten- und Zweigspannungen aufstellen
- Kirchhoffsche Knotenregel auf  $K - 1$  Knoten anwenden mit Knotenspannungen als Variablen
- Lineares Gleichungssystem lösen
- Zweigspannungen über Inzidenzmatrix aus den Knotenspannungen berechnen
- Zweigströme ermitteln (über Strom-/Spannungsbeziehungen für die einzelnen Zweige)

### 3.3.2 Festlegung der Knotenspannungen

Für die Anwendung des Knotenpotenzialverfahrens ist im Prinzip der Referenzknoten frei wählbar. Meist wird ein zentraler Knoten gewählt, der möglichst viele direkte Verbindungen zu anderen Netzwerkknoten hat. Das ist in vielen Netzwerken der Masseknoten.

Die Vollständigkeit und lineare Unabhängigkeit des Gleichungssystems kann sehr einfach sichergestellt werden. Im Netzwerk mit  $K$  Knoten wird ein Referenzknoten ausgewählt, und es sind  $K - 1$  Knotenspannungen notwendig und hinreichend zur vollständigen Netzwerkbeschreibung.

Da der vollständige Baum eines Netzwerks genau  $K - 1$  Baumzweige enthält, ist es ein sicheres Verfahren, die Spannungen an den  $K - 1$  Baumzweigen als Knotenspannungen auszuwählen. Jede Knotenspannung erstreckt sich dann über genau einen Baumzweig. Der Baum wird dabei nach Möglichkeit so erstellt, dass die Baumzweige von einem zentralen Referenzknoten aus direkt zu den übrigen Knoten verlaufen.

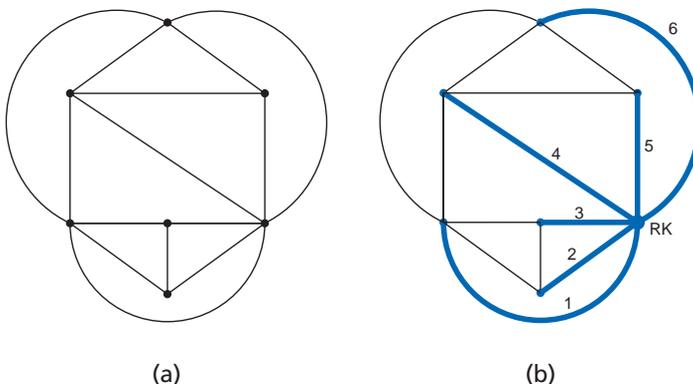


Abbildung 3.8: (a) Graph eines Netzwerks mit 7 Knoten und 14 Zweigen, (b) Baum für dieses Netzwerk mit zentralem Referenzknoten

In Abbildung 3.8 ist ein Netzwerkbeispiel mit  $K = 7$  Knoten und  $Z = 14$  Zweigen skizziert und ein Baum in der beschriebenen Weise eingezeichnet.

Übrigens: Für das Maschenstromverfahren wären bei diesem Netzwerk  $Z - (K - 1) = 8$  Maschenströme erforderlich, beim Knotenpotenzialverfahren reichen  $K - 1 = 6$  Knotenspannungen!

Jede Zweigschaltung an einem unabhängigen Zweig kann mit einem eindeutigen Maschenumlauf ausschließlich über Baumzweige (Knotenspannungen) ermittelt werden.

Für jeden Baumzweig (und die zugehörige Knotenspannung) kann also in eindeutiger Weise ein Schnitt durch das Netzwerk gelegt werden, bei dem nur dieser eine Baumzweig geschnitten wird. Dieser Schnitt definiert einen Knoten oder Superknoten und die zugehörige Kirchhoffsche Knotengleichung.

Wie erwähnt, ist es beim Knotenpotenzialverfahren in der Regel vorteilhaft, einen sternförmigen Baum mit einem zentralen Referenzknoten zu wählen, der in der Regel identisch mit dem Masseknoten ist.

Es gibt jedoch auch Fälle, bei denen kein Knoten gefunden werden kann, von dem aus alle anderen Knoten direkt erreicht werden können. In Abbildung 3.9 ist ein solcher Fall beispielhaft skizziert. In diesen Fällen gehen wir weiterhin so vor, dass Knotenspannungen entlang von Baumzweigen gewählt werden, auch wenn sie nicht alle vom Referenzknoten ausgehen, wie das im Beispiel für den Baumzweig 5 der Fall ist. (Diese Verallgemeinerung des Knotenpotenzialverfahrens wird in der Literatur auch als Schnittmengenanalyse bezeichnet.) Da der Baumzweig 4 kein offenes Ende hat, wird in diesem Fall ein Superknoten definiert, der wiederum nur den zugehörigen Baumzweig und sonst nur unabhängige Zweige schneidet. Für diesen Superknoten kann nun die zum Baumzweig 4 und zur zugeordneten Knotenspannung gehörige Kirchhoffsche Knotengleichung aufgestellt werden.

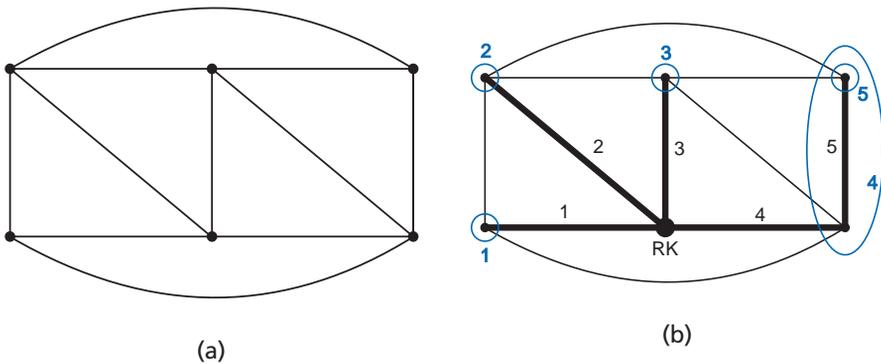


Abbildung 3.9: (a) Graph eines Netzwerks mit 6 Knoten und 11 Zweigen, (b) Baum für dieses Netzwerk mit Referenzknoten, der kein zentraler Knoten ist

### 3.3.3 Quellen und Übertrager im Netzwerk

Auch hier wollen wir die Beschränkung auf Netzwerke mit  $R$ -,  $L$ -,  $C$ -Elementen sowie Konstantstromquellen aufheben und unsere Betrachtung auf Schaltungen mit gesteuerten und konstanten Quellen sowie Übertragern ausdehnen.

#### ■ Konstantstromquellen:

Es ist zweckmäßig, beim Knotenpotenzialverfahren den Baum für ein Netzwerk so zu wählen, dass die Konstantstromquellen ausschließlich in Baumzweigen liegen. Dann kommt jede Quelle nur in der zu diesem Baumzweig gehörenden Knotengleichung vor.

#### ■ Konstantspannungsquellen:

1. Konstantspannungsquellen werden vor der Netzwerkanalyse in Konstantstromquellen umgewandelt (vgl. Kap. 1.1).
2. Bei  $\underline{Z}_i = 0$  ist eine direkte Umwandlung der Spannungsquelle in eine Stromquelle nicht möglich. Dieses Problem kann jedoch durch Quellenteilung und Quellenversetzung behoben werden.

#### ■ Gesteuerte Quellen:

1. Alle gesteuerten Quellen werden zunächst in knotenspannungsgesteuerte Stromquellen umgewandelt.
2. Bei Aufstellung des Gleichungssystems werden sie zunächst wie Konstantstromquellen behandelt und werden zu Elementen des Stromvektors auf der rechten Seite der Matrixgleichung (Vergleiche: Gleichung (3.19)).
3. In einem nachfolgenden Rechenschritt wird die Abhängigkeit der gesteuerten Quellen von den Knotenspannungen eingesetzt und auf der linken Gleichungsseite in der Admittanzmatrix berücksichtigt.

#### ■ Übertrager:

1. Für Übertrager im Netzwerk kann eine Ersatzschaltung mit zwei spannungsgesteuerten Stromquellen verwendet werden (s. Abbildung 3.10). Die Admittanzen im Ersatzschaltbild können leicht aus den üblichen Übertragergleichungen in Impedanzform durch Invertierung des Gleichungssystems gewonnen werden.

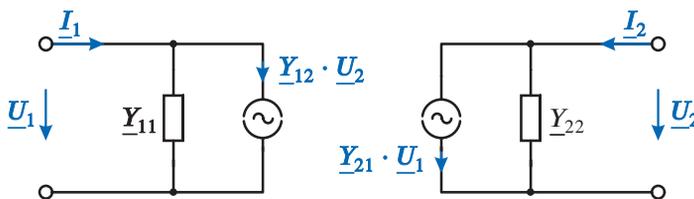


Abbildung 3.10: Übertrager-Ersatzschaltung mit spannungsgesteuerten Stromquellen

### 3.3.4 Matrixdarstellung

Auch beim Knotenpotenzialverfahren können wir bei Verwendung der Matrixdarstellung in sehr einfacher und übersichtlicher Form zu dem Gleichungssystem kommen, das eine Berechnung der gewählten Knotenspannungen und damit eine vollständige Analyse des Netzwerks ermöglicht:

- Verknüpfung von Zweigspannungen und Knotenspannungen:

$$\underline{U} = \mathbf{B} \cdot \underline{U}_K \quad \text{mit Inzidenzmatrix } \mathbf{B} [K - 1 \times Z] \quad (3.20)$$

- Aufstellung der Kirchhoffschen Knotengleichungen:

$$\mathbf{B}^T \cdot \underline{I} = \mathbf{0} \quad [K - 1 \text{ Gleichungen}] \quad (3.21)$$

- Verknüpfung von Zweigströmen und -spannungen:

$$\underline{I} = \underline{Y} \cdot \underline{U} - \underline{I}_q \quad [\underline{Y} \text{ ist Diagonalmatrix der Zweigadmittanzen}] \quad (3.22)$$

- Einsetzen von Gleichung (3.20) in (3.22) und Einsetzen der entstandenen Gleichung in Gleichung (3.21) ergibt das Gleichungssystem für die Knotenspannungen:

$$\mathbf{B}^T \cdot \underline{Y} \cdot \mathbf{B} \cdot \underline{U}_K = \mathbf{B}^T \cdot \underline{I}_q \quad [K - 1 \text{ Gleichungen}] \quad (3.23)$$

- Die Matrix  $\mathbf{B}^T \cdot \underline{Y} \cdot \mathbf{B} = \underline{Y}_K$  wird als Knotenadmittanzmatrix bezeichnet.

Das Gleichungssystem kann wiederum nach geeigneter Vorbereitung des Netzwerks gemäß Kap. 3.3.2 und 3.3.3 und unter konsequenter Beachtung aller Vorzeichen direkt aus den einfach zu erstellenden Teilmatrizen entsprechend Gleichung (3.23) aufgestellt werden. Damit liegen gute Voraussetzungen für eine automatisierte Schaltungsanalyse vor.

Literatur: [5], [11], [20]