

Inhaltsverzeichnis

1	Grundlagen der Maßtheorie	1
1.1	Mengensysteme	1
1.2	Mengenfunktionen	11
1.3	Fortsetzung von Maßen	17
1.4	Messbare Abbildungen	33
1.5	Zufallsvariablen	42
2	Unabhängigkeit	47
2.1	Unabhängigkeit von Ereignissen	47
2.2	Unabhängigkeit von Zufallsvariablen	54
2.3	Kolmogorov'sches 0-1 Gesetz	61
2.4	Beispiel: Perkolation	64
3	Erzeugendenfunktion	75
3.1	Definition und Beispiele	75
3.2	Poisson-Approximation	78
3.3	Verzweigungsprozesse	80
4	Das Integral	83
4.1	Konstruktion und einfache Eigenschaften	83
4.2	Monotone Konvergenz und Lemma von Fatou	91
4.3	Lebesgue-Integral versus Riemann-Integral	93
5	Momente und Gesetze der Großen Zahl	97
5.1	Momente	97
5.2	Schwaches Gesetz der Großen Zahl	104

5.3	Starkes Gesetz der Großen Zahl	107
5.4	Konvergenzrate im starken GGZ	115
5.5	Der Poissonprozess	118
6	Konvergenzsätze	125
6.1	Fast-überall- und stochastische Konvergenz	125
6.2	Gleichgradige Integrierbarkeit	130
6.3	Vertauschung von Integral und Ableitung	136
7	L^p-Räume und Satz von Radon-Nikodym	139
7.1	Definitionen	139
7.2	Ungleichungen und Satz von Fischer-Riesz	141
7.3	Hilberträume	147
7.4	Lebesgue'scher Zerlegungssatz	150
7.5	Ergänzung: Signierte Maße	154
7.6	Ergänzung: Dualräume	160
8	Bedingte Erwartungen	165
8.1	Elementare bedingte Wahrscheinlichkeiten	165
8.2	Bedingte Erwartungen	168
8.3	Reguläre Version der bedingten Verteilung	175
9	Martingale	183
9.1	Prozesse, Filtrationen, Stoppzeiten	183
9.2	Martingale	188
9.3	Diskretes stochastisches Integral	192
9.4	Diskreter Martingaldarstellungssatz und CRR Modell	194
10	Optional Sampling Sätze	199
10.1	Doob-Zerlegung und quadratische Variation	199
10.2	Optional Sampling und Optional Stopping	203
10.3	Gleichgradige Integrierbarkeit und Optional Sampling	207
11	Martingalkonvergenzsätze und Anwendungen	209

11.1	Die Doob'sche Ungleichung	209
11.2	Martingalkonvergenzsätze	211
11.3	Beispiel: Verzweigungsprozess	219
12	Rückwärtsmartingale und Austauschbarkeit	221
12.1	Austauschbare Familien von Zufallsvariablen	221
12.2	Rückwärtsmartingale	226
12.3	Satz von de Finetti	228
13	Konvergenz von Maßen	233
13.1	Wiederholung Topologie	233
13.2	Schwache und vage Konvergenz	240
13.3	Der Satz von Prohorov	248
13.4	Anwendung: Satz von de Finetti – anders angeschaut	257
14	W-Maße auf Produkträumen	259
14.1	Produkträume	260
14.2	Endliche Produkte und Übergangskerne	263
14.3	Satz von Ionescu-Tulcea und Projektive Familien	272
14.4	Markov'sche Halbgruppen	276
15	Charakteristische Funktion und Zentraler Grenzwertsatz	281
15.1	Trennende Funktionenklassen	281
15.2	Charakteristische Funktionen: Beispiele	288
15.3	Der Lévy'sche Stetigkeitssatz	294
15.4	Charakteristische Funktion und Momente	299
15.5	Der Zentrale Grenzwertsatz	304
15.6	Mehrdimensionaler Zentraler Grenzwertsatz	312
16	Unbegrenzt teilbare Verteilungen	315
16.1	Die Lévy-Khinchin Formel	315
16.2	Stabile Verteilungen	327
17	Markovketten	333

17.1	Begriffsbildung und Konstruktion	333
17.2	Diskrete Markovketten, Beispiele	340
17.3	Diskrete Markovprozesse in stetiger Zeit	344
17.4	Diskrete Markovketten, Rekurrenz und Transienz	349
17.5	Anwendung: Rekurrenz und Transienz von Irrfahrten	353
17.6	Invariante Verteilungen	360
18	Konvergenz von Markovketten	365
18.1	Periodizität von Markovketten	365
18.2	Kopplung und Konvergenzsatz	369
18.3	Markovketten Monte Carlo Methode	376
18.4	Konvergenzgeschwindigkeit	383
19	Markovketten und elektrische Netzwerke	389
19.1	Harmonische Funktionen	389
19.2	Reversible Markovketten	392
19.3	Elektrische Netzwerke	393
19.4	Rekurrenz und Transienz	399
19.5	Netzwerkreduktion	405
19.6	Irrfahrt in zufälliger Umgebung	412
20	Ergodentheorie	415
20.1	Begriffsbildung	415
20.2	Ergodensätze	418
20.3	Beispiele	421
20.4	Anwendung: Rekurrenz von Irrfahrten	423
20.5	Mischung	426
21	Die Brown'sche Bewegung	429
21.1	Stetige Modifikationen	429
21.2	Konstruktion und Pfadigenschaften	436
21.3	Starke Markoveigenschaft	441
21.4	Ergänzung: Feller Prozesse	444

21.5	Konstruktion durch L^2 -Approximation	447
21.6	Der Raum $C([0, \infty))$	451
21.7	Konvergenz von W-Maßen auf $C([0, \infty))$	453
21.8	Satz von Donsker	456
21.9	Pfadweise Konvergenz von Verzweigungsprozessen*	460
21.10	Quadratische Variation und lokale Martingale	465
22	Gesetz vom iterierten Logarithmus	477
22.1	Iterierter Logarithmus für die Brown'sche Bewegung	477
22.2	Skorohod'scher Einbettungssatz	480
22.3	Satz von Hartman-Wintner	486
23	Große Abweichungen	489
23.1	Satz von Cramér	490
23.2	Prinzip der großen Abweichungen	494
23.3	Satz von Sanov	498
23.4	Varadhan'sches Lemma und Freie Energie	502
24	Der Poisson'sche Punktprozess	509
24.1	Zufällige Maße	509
24.2	Eigenschaften des Poisson'schen Punktprozesses	513
24.3	Die Poisson-Dirichlet-Verteilung*	519
25	Das Itô-Integral	527
25.1	Das Itô-Integral bezüglich der Brown'schen Bewegung	527
25.2	Itô-Integral bezüglich Diffusionen	535
25.3	Die Itô-Formel	538
25.4	Dirichlet-Problem und Brown'sche Bewegung	546
25.5	Rekurrenz und Transienz der Brown'schen Bewegung	548
26	Stochastische Differentialgleichungen	551
26.1	Starke Lösungen	551
26.2	Schwache Lösungen und Martingalproblem	560
26.3	Eindeutigkeit schwacher Lösungen via Dualität	567

Literatur	575
Notation	583
Glossar englischer Ausdrücke	587
Namensregister	589
Sachregister	593