1

Prädikatenlogik

Die Constraint-logische Programmierung basiert auf der Prädikatenlogik: Constraints sind prädikatenlogische Formeln und logische Sprachen wie PROLOG machen einen Ausschnitt der Prädikatenlogik ausführbar. Daher wiederholen wir in diesem Kapitel wichtige Grundbegriffe der Prädikatenlogik und illustrieren diese anhand von Beispielen. Eine ausführliche Darstellung hierzu findet man z. B. in [38, 131]. Unsere Darstellung orientiert sich an [38, 89].

Wir beginnen mit der Definition zweier zentraler Begriffe: Signaturen und Strukturen.

1.1 Signaturen und Strukturen

Mit Hilfe einer *Signatur* legen wir die Syntax fest, d. h. die Symbole, mit denen wir Ausdrücke wie Terme und Constraints bilden können. Wie diese dann interpretiert werden, also deren Semantik, wird durch eine passende *Struktur* definiert.

Definition 1.1 (Signatur)

Eine (mehrsortige) ***Signatur*** $\Sigma = (S, F, R)$ ist definiert durch

- eine Menge S von *Sorten*,
- eine Menge F von *Funktionssymbolen* und
- eine Menge R von *Prädikat-* oder *Relationssymbolen*.

Dabei sind S, F und R wechselseitig disjunkt.

Jedem Funktionssymbol $f \in F$ und jedem Prädikatsymbol $r \in R$ ist eine *Deklaration* $f : s_1 \ldots s_n \to s$ bzw. $r : s_1 \ldots s_m$, $s, s_i \in S$, $n, m \geq 0$, und damit eine *Stelligkeit* n bzw. m zugeordnet.[1] Ist $n = 0$, nennen wir f auch ein *Konstantensymbol*.

[1] Im Folgenden schreiben wir auch f/n und r/m für ein n-stelliges Funktionssymbol und ein m-stelliges Prädikat- oder Relationssymbol.

X^s bezeichnet eine Menge von Variablen der Sorte $s \in S$. Eine Menge von Variablen passend zu Σ, oder kurz eine Menge von *Σ-Variablen*, ist eine mehrsortige Menge $X = \bigcup_{s \in S} X^s$, wobei die X^s gegenseitig disjunkt sind und für alle $s \in S$ die Menge X^s nichtleer ist.

Beispiel 1.1 Die Signatur $\Sigma_5 = (S, F, R)$ besteht aus der Sortenmenge $S = \{num\}$, der Menge der Funktionssymbole $F = \{succ, plus, mul, 0, 1, 2, 3, 4\}$ und den Prädikatsymbolen $R = \{eq, geq\}$. Für die Symbole geben wir folgende Deklarationen an und fassen dabei solche mit gleicher Deklaration jeweils zusammen:

$succ : num \to num$
$plus, mul : num\ num \to num$
$0, 1, 2, 3, 4 : num$
$eq, geq : num\ num$

$\diamondsuit$

Bis jetzt haben wir nur die Syntax – also Symbole – festgelegt. Wir wissen noch nicht, was diese Symbole, wie z. B. *succ* oder *plus* oder auch 1 und 2 bedeuten sollen (auch wenn wir es schon ahnen). Die Zuordnung der Bedeutung wird durch die *Struktur* geregelt.

Definition 1.2 (Σ-Struktur)

Sei $\Sigma = (S, F, R)$ eine Signatur. Eine ***Σ-Struktur*** $\mathcal{D} = (\{\mathcal{D}^s \mid s \in S\}, \{f^{\mathcal{D}} \mid f \in F\}, \{r^{\mathcal{D}} \mid r \in R\})$ besteht aus

- einer S-sortigen Menge nichtleerer *Trägermengen* $\mathcal{D}^s$, wobei $s \in S$,
- einer Menge von *Funktionen* $f^{\mathcal{D}}$ mit $f \in F$ und
- einer Menge von *Prädikaten* bzw. *Relationen* $r^{\mathcal{D}}$ mit $r \in R$.

Für ein Funktionssymbol $f \in F$ mit $f : s_1 \ldots s_n \to s$ sei $f^{\mathcal{D}}$ eine n-stellige Funktion, so dass $f^{\mathcal{D}} : \mathcal{D}^{s_1} \times \ldots \times \mathcal{D}^{s_n} \to \mathcal{D}^s$ gilt.
Für ein Prädikatsymbol $r \in R$ mit $r : s_1 \ldots s_m$ sei $r^{\mathcal{D}}$ ein m-stelliges Prädikat, so dass $r^{\mathcal{D}} \subseteq \mathcal{D}^{s_1} \times \ldots \times \mathcal{D}^{s_m}$ gilt.

Beispiel 1.2 Der Signatur $\Sigma_5 = (S, F, R)$ aus Beispiel 1.1 ordnen wir nun eine Σ-Struktur $\mathcal{D}_5 = (\{\mathcal{D}^{num}\}, \{f^5 \mid f \in F\}, \{r^5 \mid r \in R\})$ mit den folgenden Bestandteilen zu:

- Die Trägermenge $\mathcal{D}^{num} = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ enthält die Menge der natürlichen Zahlen von 0 bis 4.
- Die Funktionsmenge $\{succ^5, plus^5, mul^5, 0^5, 1^5, 2^5, 3^5, 4^5\}$ ordnet jedem Funktionssymbol eine Funktion zu.
- Die Prädikatmenge $\{eq^5, geq^5\}$ definiert für die Prädikatsymbole entsprechende Prädikate.

Die Funktionen und Prädikate sind wie folgt definiert (mit den Symbolen 0, …, 4 wird – wie wir es erwartet haben – die jeweilige natürliche Zahl assoziiert):

$succ^5 \colon \mathcal{D}^{num} \to \mathcal{D}^{num}$ und für alle $x \in \mathcal{D}^{num}$ gilt: $succ^5(x) = (x+1)\ mod\ 5$,

$plus^5 \colon \mathcal{D}^{num} \times \mathcal{D}^{num} \to \mathcal{D}^{num}$,
wobei für alle $x, y \in \mathcal{D}^{num}$ gilt: $plus^5(x,y) = (x+y)\ mod\ 5$,

$mul^5 \colon \mathcal{D}^{num} \times \mathcal{D}^{num} \to \mathcal{D}^{num}$,
wobei für alle $x, y \in \mathcal{D}^{num}$ gilt: $mul^5(x,y) = (x * y)\ \ mod\ 5$.

$0^5 \colon \mathcal{D}^{num}$ mit $0^5 = 0$,
$1^5 \colon \mathcal{D}^{num}$ mit $1^5 = 1$,
$2^5 \colon \mathcal{D}^{num}$ mit $2^5 = 2$,
$3^5 \colon \mathcal{D}^{num}$ mit $3^5 = 3$,
$4^5 \colon \mathcal{D}^{num}$ mit $4^5 = 4$.

$eq^5 \subseteq \mathcal{D}^{num} \times \mathcal{D}^{num}$,
wobei für alle $x, y \in \mathcal{D}^{num}$ gilt: $eq^5(x,y)$ gdw. $x = y$,

$geq^5 \subseteq \mathcal{D}^{num} \times \mathcal{D}^{num}$,
wobei für alle $x, y \in \mathcal{D}^{num}$ gilt: $geq^5(x,y)$ gdw. $x \geq y$.

Da die Trägermenge nur die natürlichen Zahlen von 0 bis 4 enthält, haben wir die Operationen modulo 5 definiert; man beachte, dass dies für die Relationen eq^5 und geq^5 nicht notwendig ist. $\Diamond$

1.2 Terme, Formeln und Gültigkeit

In diesem Abschnitt geben wir eine kurze Einführung in die *Syntax und Semantik der Prädikatenlogik*. Diese werden durch die Menge der prädikatenlogischen *Formeln* einerseits und die sog. *Gültigkeitsrelation* andererseits festgelegt.

Sei im Folgenden $\Sigma = (S, F, R)$ eine Signatur, sei X eine Menge von Σ-Variablen und sei $\mathcal{D}$ eine Σ-Struktur. Mit Hilfe der Symbole der Signatur können wir *Terme* bilden. Diese brauchen wir später als Bestandteile von Formeln.

Definition 1.3 (Term, Grundterm)

Die Menge der ***Terme*** $\mathcal{T}(F, X)$ über Σ und X ist wie folgt definiert: $\mathcal{T}(F,X) = \bigcup_{s \in S} \mathcal{T}(F,X)^s$, wobei für jede Sorte $s \in S$ die Menge $\mathcal{T}(F,X)^s$ der Terme der Sorte s die kleinste Menge ist, die

1. jede Variable $x \in X^s$ (der Sorte s) enthält sowie
2. jedes nullstellige Funktionssymbol $f \in F$ mit $f : s$, d. h. jedes Konstantensymbol, und

3. jeden Ausdruck $f(t_1, \ldots, t_n)$, $n \geq 1$, wobei $f \in F$ ein Funktionssymbol mit der Deklaration $f : s_1 \ldots s_n \rightarrow s$ ist und jedes $t_i, i \in \{1, \ldots, n\}$ ein Term aus $\mathcal{T}(F, X)^{s_i}$.

Terme, die keine Variablen enthalten, werden ***Grundterme*** genannt.

Terme sind also induktiv definiert: Zu ihnen zählen einerseits die Variablen und Konstantensymbole und weiterhin aus Termen zusammengesetze Ausdrücke, bei deren Bildung die Deklaration der beteiligten Funktionssymbole zu berücksichtigen ist.

Beispiel 1.3 Wir betrachten die Signatur $\Sigma_5 = (S, F, R)$ aus Beispiel 1.1 und eine Menge X von Σ_5-Variablen mit $\{x, y, z\} \subseteq X$.

Terme aus $\mathcal{T}(F, X)^{num}$ sind z. B. 2, x, y, $succ(2)$, $succ(z)$, $plus(x, succ(z))$, $plus(succ(4), 1)$ und $mul(3, plus(x, succ(y)))$. Dabei sind 2, $succ(2)$ sowie $plus(succ(4), 1)$ Grundterme, denn sie enthalten keine Variablen.

Hingegen sind beispielsweise $succ(plus(4))$ und $mul(succ(0), 6)$ keine Terme aus $\mathcal{T}(F, X)$; für $succ(plus(4))$ ist die Stelligkeit bzw. Deklaration von $plus$ nicht korrekt berücksichtigt, $mul(succ(0), 6)$ enthält ein Symbol 6, das in der Signatur gar nicht vorkommt.

Da die Signatur Σ_5 nur die Sorte num enthält, also einsortig ist, gilt $\mathcal{T}(F, X) = \mathcal{T}(F, X)^{num}$. $\Diamond$

Während Funktions- und Prädikatsymbolen durch eine Σ-Struktur eine Bedeutung gegeben wird, ist das für Variablen nicht der Fall. Wenn wir einen Term auswerten, also seine Bedeutung bezüglich einer konkreten Struktur feststellen wollen, müssen wir den Variablen Werte zuordnen. Das tun wir mit Hilfe von *Variablenbelegungen*:

Definition 1.4 (Variablenbelegung)

Eine S-sortierte Familie von Abbildungen $\varsigma\colon X \rightarrow \mathcal{D} = (\varsigma^s : X^s \rightarrow \mathcal{D}^s)^{s \in S}$, die jeder Variablen $x \in X^s$ ein Element der Trägermenge $\mathcal{D}^s$, $s \in S$, zuordnet, ist eine ***Variablenbelegung***.

Im Folgenden werden wir abkürzend auch einfach den Begriff „Belegung“ verwenden. Jetzt können wir einen Term bezüglich einer Struktur und einer Belegung auswerten.

Definition 1.5 (Termauswertung)

Sei $\varsigma\colon X \rightarrow \mathcal{D}$ eine Variablenbelegung. Die ***Termauswertung*** $\tilde{\varsigma}\colon \mathcal{T}(F, X) \rightarrow \mathcal{D}$ bezüglich der Struktur $\mathcal{D}$ und der Belegung ς ist eine Familie von Abbildungen $(\tilde{\varsigma}^s\colon \mathcal{T}(F, X)^s \rightarrow \mathcal{D}^s)^{s \in S}$ mit:

- $\tilde{\varsigma}^s(x) = \varsigma^s(x)$ für jede Variable x der Sorte s,
- $\tilde{\varsigma}^s(f) = f^{\mathcal{D}}$ für jedes Konstantensymbol $f \in F$ mit $f : s$ und

- $\tilde{\varsigma}^s(f(t_1,\ldots,t_n)) = f^{\mathcal{D}}(\tilde{\varsigma}^{s_1}(t_1),\ldots,\tilde{\varsigma}^{s_n}(t_n))$ für jedes Funktionssymbol $f \in F$ mit $f : s_1 \ldots s_n \to s$, alle Sorten $s_1,\ldots,s_n,s \in S$ und alle Terme $t_i \in \mathcal{T}(F,X)^{s_i}, i \in \{1,\ldots,n\}$.

Die Auswertung einer Variablen ergibt einfach die entsprechende Variablenbelegung, die eines Konstantensymbols ihre Konstante aus der Struktur. Bei zusammengesetzen Termen werten wir die Unterterme aus und wenden darauf die Funktion aus der Struktur an, die dem Funktionssymbol zugeordnet ist. Das lässt sich wieder am besten an einem Beispiel demonstrieren:

Beispiel 1.4 Wir betrachten $\Sigma_5 = (S,F,R)$, die Menge $\{x,y,z\} \subseteq X$ von Σ_5-Variablen und die Struktur $\mathcal{D}_5$ aus Beispiel 1.2. Sei ς eine Belegung mit $\varsigma(x) = 1$, $\varsigma(y) = 2$ und $\varsigma(z) = 3$.

Wir werten die Terme aus Beispiel 1.3 bezüglich ς aus:

Für Variablen erhalten wir die Variablenbelegung und für Konstantensymbole die entsprechenden Konstanten:

$\tilde{\varsigma}(x) = 1$, $\tilde{\varsigma}(y) = 2$, $\tilde{\varsigma}(2) = 2$.

Bei zusammengesetzen Termen werten wir die Unterterme aus und wenden die entsprechenden Funktionen aus der Struktur an:

$$\begin{aligned}
&\tilde{\varsigma}(succ(2)) = succ^5(2) = (2+1)\ mod\ 5 = 3,\\
&\tilde{\varsigma}(succ(z)) = succ^5(3) = (3+1)\ mod\ 5 = 4,\\
&\tilde{\varsigma}(plus(x,succ(z))) = plus^5(1,succ^5(3)) = plus^5(1,4) = (1+4)\ mod\ 5 = 0,\\
&\tilde{\varsigma}(plus(succ(4),1)) = plus^5(succ^5(4),1)\\
&\qquad = (((4+1)\ mod\ 5)+1)\ mod\ 5 = 1 \text{ und}\\
&\tilde{\varsigma}(mul(3,plus(x,succ(y)))) = mul^5(3,plus^5(1,succ^5(2)))\\
&\qquad = (3*((1+((2+1)\ mod\ 5))\ mod\ 5))\ mod\ 5\\
&\qquad = (3*((1+3)\ mod\ 5))\ mod\ 5\\
&\qquad = (3*4)\ mod\ 5 = 2.
\end{aligned}$$

Bei der Auswertung von Grundtermen spielt, wie wir gesehen haben, die Belegung der Variablen keine Rolle. $\Diamond$

Jetzt können wir die Menge $Formulae(\Sigma,X)$ der Formeln der Prädikatenlogik erster Stufe und damit die *Syntax der Prädikatenlogik* definieren.

Definition 1.6 (Formeln der Prädikatenlogik)

Die Menge der ***Formeln der Prädikatenlogik*** über Σ und X, bezeichnet durch $Formulae(\Sigma,X)$, ist induktiv wie folgt definiert:

1. Für alle Prädikatsymbole $r : s_1 \ldots s_m$ und alle Terme $t_i \in \mathcal{T}(F,X)^{s_i}$, $i \in \{1,\ldots,m\}$, ist $r(t_1,\ldots,t_m)$ eine (atomare) Formel.
2. $true$ und $false$ sind (atomare) Formeln.
3. Für jede Formel ϕ ist auch $\neg\phi$ eine Formel.

4. Für alle Formeln ϕ und ψ sind auch $(\phi \vee \psi)$, $(\phi \wedge \psi)$, $(\phi \longrightarrow \psi)$ und $(\phi \longleftrightarrow \psi)$ Formeln.
5. Wenn ϕ eine Formel und $x \in X$ eine Variable ist, so sind auch $(\forall x.\phi)$ und $(\exists x.\phi)$ Formeln.

Beispiel 1.5 Wir betrachten die Signatur Σ_5 aus den vorangegangenen Beispielen.

Neben *true* und *false* und einfachen, aus Prädikatsymbolen und Termen aufgebauten Formeln wie $eq(succ(2), succ(x))$ oder $eq(plus(2,2), mul(2,2))$ können Formeln auch mit Hilfe von Negation $\neg$, Konjunktion $\wedge$, Disjunktion $\vee$, Implikation $\longrightarrow$ und Äquivalenz $\longleftrightarrow$ aufgebaut sein, z. B.:
$eq(2,x) \longleftrightarrow eq(succ(2), succ(x))$, $geq(2,x) \vee true$ und $eq(2,y) \wedge true$.

Außerdem sind auch der *Allquantor* $\forall$ und der *Existenzquantor* $\exists$ erlaubt: $\exists x.eq(succ(y), succ(x))$, $\forall z.eq(2, succ(z)) \longrightarrow geq(2,z)$, $\forall x.\exists y.eq(x,y)$ und $eq(y,2) \wedge \forall y.eq(y, plus(y,1))$ sind Formeln. $\diamondsuit$

Die Quantoren $\forall$ und $\exists$ *binden* Variablen in Formeln. Eine solche Formel $\forall x.\phi$ liest man als „Für alle x gilt ϕ.“, die Formel $\exists x.\phi$ als „Es existiert ein x, so dass ϕ gilt.“ und $\forall x.\exists y.\phi$ als „Für alle x existiert ein y mit ϕ.“

Für $\forall x.\forall y.\phi$ schreiben wir meist abkürzend $\forall x, y.\phi$ (Analoges gilt für den Existenzquantor).

Definition 1.7 (Gebundene und freie Variablen)

Ein Vorkommen einer Variablen x in einer Formel ϕ bezeichnen wir als ***gebunden***, wenn x in einer Teilformel von ϕ der Form $\exists x.\psi$ oder $\forall x.\psi$ vorkommt. Andernfalls bezeichnen wir x als ***freie*** Variable.

Definition 1.8 (Geschlossene und offene Formeln)

Eine Formel ϕ ohne Vorkommen freier Variablen nennt man ***geschlossen***, anderenfalls nennt man ϕ ***offen***.

Beispiel 1.6 Wir betrachten die Signatur Σ_5 und die Variablenmenge $\{x, y, z\} \subseteq X$.

Variablen in Formeln ohne Quantoren sind frei, z. B. ist x frei in $\phi = eq(2,x)$. Die Formel ϕ ist eine offene Formel. Im Gegensatz dazu ist $\psi = \exists x.eq(2,x)$ geschlossen und die Variable x ist gebunden.

Ebenso ist x gebunden in $\exists x.eq(succ(y), succ(x))$ und die Variable y ist in dieser Formel frei.

Und schließlich zeigt die Formel $eq(y,2) \wedge \forall y.eq(y, plus(y,1))$, dass Variablen in einer Formel sowohl frei als auch gebunden auftreten können. $\diamondsuit$

Wenn wir später in Kapitel 3 über Constraint-Löser sprechen, werden wir noch folgende Begriffe benötigen:

Definition 1.9 (Universeller und existenzieller Abschluss)

Sei $\phi \in \mathit{Formulae}(\Sigma, X)$ eine Formel der Prädikatenlogik, und sei $\{x_1, \ldots, x_n\}$ die Menge der freien Variablen in ϕ. Der ***universelle Abschluss*** $\forall\phi$ und der ***existenzielle Abschluss*** $\exists\phi$ einer Formel ϕ sind definiert durch:

$$\forall\phi = \forall x_1 \ldots \forall x_n.\ \phi,$$
$$\exists\phi = \exists x_1 \ldots \exists x_n.\ \phi.$$

Der Ausdruck $\tilde{Y}$ mit $Y \subseteq X$ bezeichne eine (beliebige) Sequenz der Variablen der Menge Y. Durch $\exists\_{\tilde{Y}}\psi$ bezeichnen wir den existenziellen Abschluss der Formel ψ außer für die Variablen, die in $\tilde{Y}$ auftreten.

Beispiel 1.7 Sei $Y = \{x, y\}$. Dann gilt:
$\exists\_{\tilde{Y}}\ eq(z, plus(x, y)) = \exists\_{x,y}\ eq(z, plus(x, y)) = \exists z.\ eq(z, plus(x, y)).$ $\diamond$

Noch haben wir nichts über die Bedeutung oder Auswertung einer Formel ausgesagt. Die *Semantik der Prädikatenlogik* ist dadurch bestimmt, dass man jeder Formel eine Bedeutung – wieder bezüglich der jeweils betrachteten Struktur – gibt. Wir definieren die Gültigkeitsrelation zwischen Strukturen und Formeln (analog zu [38]).

Definition 1.10 (Gültigkeit, $\models$, Modell)

Seien $\phi, \psi \in \mathit{Formulae}(\Sigma, X)$ Formeln der Prädikatenlogik.

Sei $\varsigma : X \to \mathcal{D}$ eine Belegung. Mit $\varsigma[x/a] : X \to \mathcal{D}$ bezeichnen wir die Belegung, die die Variable $x \in X^s$ auf $a \in \mathcal{D}^s$, $s \in S$, abbildet und alle anderen Variablen y auf $\varsigma(y)$, d. h.

$$\varsigma[x/a](y) = \begin{cases} \varsigma(y) & \mathit{wenn}\ y \neq x \\ a & \mathit{sonst.} \end{cases}$$

Die Relation $\models$ ist folgendermaßen definiert:

$$\begin{array}{lll}
(\mathcal{D}, \varsigma) \models r(t_1, \ldots, t_m) & \text{gdw.} & (\tilde{\varsigma}(t_1), \ldots, \tilde{\varsigma}(t_n)) \in r^{\mathcal{D}}, \\
(\mathcal{D}, \varsigma) \models \mathit{true}, & & \\
(\mathcal{D}, \varsigma) \not\models \mathit{false}, & & \\
(\mathcal{D}, \varsigma) \models \neg\phi & \text{gdw.} & (\mathcal{D}, \varsigma) \not\models \phi, \\
(\mathcal{D}, \varsigma) \models \phi \wedge \psi & \text{gdw.} & (\mathcal{D}, \varsigma) \models \phi \text{ und } (\mathcal{D}, \varsigma) \models \psi, \\
(\mathcal{D}, \varsigma) \models \phi \vee \psi & \text{gdw.} & (\mathcal{D}, \varsigma) \models \phi \text{ oder } (\mathcal{D}, \varsigma) \models \psi, \\
(\mathcal{D}, \varsigma) \models \phi \longrightarrow \psi & \text{gdw.} & (\mathcal{D}, \varsigma) \not\models \phi \text{ oder } (\mathcal{D}, \varsigma) \models \psi, \\
(\mathcal{D}, \varsigma) \models \phi \longleftrightarrow \psi & \text{gdw.} & (\mathcal{D}, \varsigma) \models \phi \longrightarrow \psi \text{ und } (\mathcal{D}, \varsigma) \models \psi \longrightarrow \phi, \\
(\mathcal{D}, \varsigma) \models \forall x.\phi & \text{gdw.} & (\mathcal{D}, \varsigma[x/a]) \models \phi \text{ für alle } a \in \mathcal{D}^s, s \in S,\ x \in X^s, \\
(\mathcal{D}, \varsigma) \models \exists x.\phi & \text{gdw.} & (\mathcal{D}, \varsigma[x/a]) \models \phi \text{ für mindestens ein } a \in \mathcal{D}^s, \\
 & & s \in S,\ x \in X^s.
\end{array}$$

Eine Formel $\phi \in Formulae(\Sigma, X)$ ist ***gültig** in $\mathcal{D}$,* d. h. es gilt $\mathcal{D} \models \phi$, wenn für jede Belegung $\varsigma : X \to \mathcal{D}$ gilt: $(\mathcal{D}, \varsigma) \models \phi$. Wir nennen $\mathcal{D}$ dann ein ***Modell*** von ϕ.

Beispiel 1.8 Wir betrachten die Belegung ς mit $\varsigma(x) = 1$, $\varsigma(y) = 2$ und $\varsigma(z) = 3$ und prüfen die Gültigkeit der Formeln aus Beispiel 1.5 bezüglich ς und der Struktur $\mathcal{D}_5$. Es gilt:

$(\mathcal{D}_5, \varsigma) \models true$ und $(\mathcal{D}_5, \varsigma) \not\models false$.

$(\mathcal{D}_5, \varsigma) \not\models eq(succ(2), succ(x))$, denn $succ^5(2) = 3 \neq succ^5(1) = 2$.

$(\mathcal{D}_5, \varsigma) \models eq(plus(2,2), mul(2,2))$, denn $plus^5(2,2) = 4 = mul^5(2,2)$.

$(\mathcal{D}_5, \varsigma) \models eq(2,x) \longleftrightarrow eq(succ(2), succ(x))$, denn
$(2,1) \notin eq^5$ bzw. $2 \neq 1$ und $(3,2) \notin eq^5$ bzw. $3 \neq 2$.

$(\mathcal{D}_5, \varsigma) \models geq(2,x) \vee true$, denn $(\mathcal{D}_5, \varsigma) \models true$.

$(\mathcal{D}_5, \varsigma) \models eq(2,y) \wedge true$, denn sowohl $(2,2) \in eq^5$ als auch $true$ gelten.

$(\mathcal{D}_5, \varsigma) \models \exists x.eq(succ(y), succ(x))$, denn
$(\mathcal{D}_5, \varsigma[x/2]) \models eq(succ(y), succ(x))$ und $(3,3) \in eq^5$.

$(\mathcal{D}_5, \varsigma) \models \forall z.eq(2, succ(z)) \longrightarrow geq(2,z)$, denn für alle Belegungen von z gilt:
Wenn $2 = (z+1)$ mod 5, dann $2 \geq z$.

$(\mathcal{D}_5, \varsigma) \models \forall x.\exists y.eq(x,y)$, denn
für alle Belegungen von x können wir eine Belegung von y finden (nämlich genau die gleiche Belegung wie für x), so dass $x = y$.

$(\mathcal{D}_5, \varsigma) \not\models eq(y,2) \wedge \forall y.eq(y, plus(y,1))$, denn
es gilt zwar $(2,2) \in eq^5$ bzw. $2 = 2$, jedoch für keine Belegung von y gilt: $(y, plus^5(y,1)) \in eq^5$ bzw. $y = y + 1$ mod 5.

Einige Formeln von den oben angegebenen sind gültig in $\mathcal{D}_5$, d. h., sie gelten in dieser Struktur unter jeder beliebigen Belegung:

$\mathcal{D}_5 \models true$,
$\mathcal{D}_5 \models eq(plus(2,2), mul(2,2))$,
$\mathcal{D}_5 \models eq(2,x) \longleftrightarrow eq(succ(2), succ(x))$,
$\mathcal{D}_5 \models geq(2,x) \vee true$,
$\mathcal{D}_5 \models \forall z.eq(2, succ(z)) \longrightarrow geq(2,z)$ und
$\mathcal{D}_5 \models \forall x.\exists y.eq(x,y)$.

$\diamondsuit$

Wie man für Formeln deren Gültigkeit bezüglich einer Struktur überprüft und wie man Belegungen berechnet, so dass eine Formel in einer Struktur gilt, werden wir für ganz bestimmte Formelmengen und Strukturen in Kapitel 2 bei der logischen Programmierung und in den Kapiteln 4 und 5 für Constraints untersuchen.

1.3 Aufgaben

Aufgabe 1.1 (Signaturen und Strukturen) Geben Sie passend zur Signatur Σ_5 aus Beispiel 1.1 eine Struktur $\mathcal{D}_3$ an, die eine „Modulo-3-Arithmetik“ definiert!

Aufgabe 1.2 (Terme, Formeln, Variablen) Geben Sie für folgende prädikatenlogischen Formeln alle Terme sowie die freien und gebundenen Vorkommen der Variablen an!

1. $\forall z, x.eq(z, x) \longrightarrow geq(z, x)$
2. $\forall z.eq(z, succ(4)) \longleftrightarrow true$
3. $eq(z, succ(plus(x, 1))) \longleftrightarrow true$
4. $\exists z.(eq(z, x) \longrightarrow (\forall x.eq(z, x)))$

Aufgabe 1.3 (Gültigkeit) Wir betrachten die Signatur Σ_5 und die Struktur $\mathcal{D}_5$ aus Abschnitt 1.1. Untersuchen Sie die Gültigkeit der Formeln aus Aufgabe 1.2 bezüglich $\mathcal{D}_5$ und der Belegung ς mit $\varsigma(x) = 1$ und $\varsigma(z) = 3$.

Aufgabe 1.4 (Prädikatenlogische Formeln) Gegeben seien die Prädikatsymbole $pet/1$, $parrot/1$, $fish/1$, $green/1$, $likes/2$, $=/2$ und eine entsprechende Struktur, die Eigenschaften wie die, ein Haustier, Papagei oder Fisch zu sein oder auch grün gefärbt zu sein, näher festlegt, sowie die Relationen $likes$ und $=$ zwischen je 2 Haustieren.

Welche Aussagen treffen die folgenden Formeln?

1. $\forall X.parrot(X) \longrightarrow pet(X)$
2. $\forall X, Y.((parrot(X) \wedge green(Y) \wedge fish(Y)) \longrightarrow likes(X, Y))$
3. $\exists X.(parrot(X) \wedge \forall Y.fish(Y) \longrightarrow likes(X, Y))$

Geben Sie für folgende Aussagen prädikatenlogische Formeln an!

4. Alle grünen Papageien sind Haustiere.
5. Es gibt genau einen grünen Papagei.
6. Wenn Papageien Fische mögen, dann sind diese grün.