

28 Beschleunigung

Die Beschleunigung eines materiellen Punktes soll die Veränderung der Geschwindigkeit charakterisieren. Ähnlich wie bei der Definition der Geschwindigkeit in Kapitel 2, Band 1 hängt der Begriff *Beschleunigung* mathematisch mit der Ableitung einer Vektorfunktion nach der Zeit zusammen.

28.1 Definition der Beschleunigung, Hodograph

Man betrachte die Bewegung eines materiellen Punktes bezüglich eines Bezugskörpers Oxyz und seine durch die Vektorfunktion

$$\underline{\mathbf{r}} = \underline{\mathbf{f}}(t)$$

charakterisierte Bahnkurve C (Fig. 28.1). Die Geschwindigkeit zur Zeit t ist gemäß Band 1 als

$$\underline{\mathbf{v}} := \dot{\underline{\mathbf{r}}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\underline{\mathbf{f}}(t + \Delta t) - \underline{\mathbf{f}}(t)}{\Delta t} \quad (28.1)$$

definiert. Demzufolge ist jeder Zeit t und damit auch jeder Lage M(t) auf C ein Geschwindigkeitsvektor $\underline{\mathbf{v}}$ zugeordnet. Die entsprechende Vektorfunktion bezeichnen wir der Einfachheit halber mit dem gleichen Buchstaben und schreiben

$$t \mapsto \underline{\mathbf{v}}(t) \quad . \quad (28.2)$$

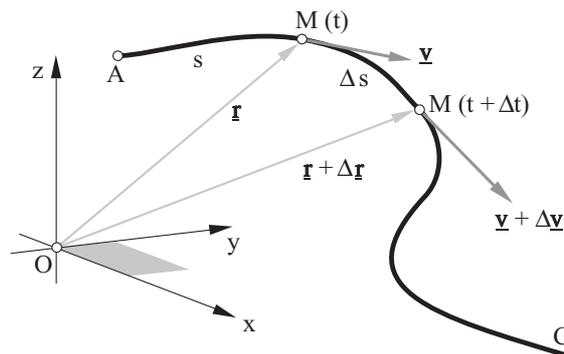


Fig. 28.1: Zur Definition der Beschleunigung

Man betrachte die Geschwindigkeiten $\mathbf{v}(t)$ und $\mathbf{v}(t+\Delta t)$ in zwei Lagen $M(t)$ und $M(t+\Delta t)$ auf der Bahnkurve C und definiere die Beschleunigung \mathbf{a} als Grenzwert

$$\mathbf{a} := \dot{\mathbf{v}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{v}(t+\Delta t) - \mathbf{v}(t)}{\Delta t} . \quad (28.3)$$

Dabei wird vorausgesetzt, dass dieser Grenzwert existiert, d.h., $\mathbf{v}(t)$ differenzierbar ist.

DEFINITION: Die **Beschleunigung** ist die zeitliche Ableitung der Geschwindigkeit.

KOROLLAR: Die Beschleunigung ist die zweite Ableitung des Ortsvektors \mathbf{r} nach der Zeit, nämlich

$$\mathbf{a} = \ddot{\mathbf{r}} . \quad (28.4)$$

Der Beweis folgt sofort aus (28.1), (28.3) und der Definition einer zweiten Ableitung.

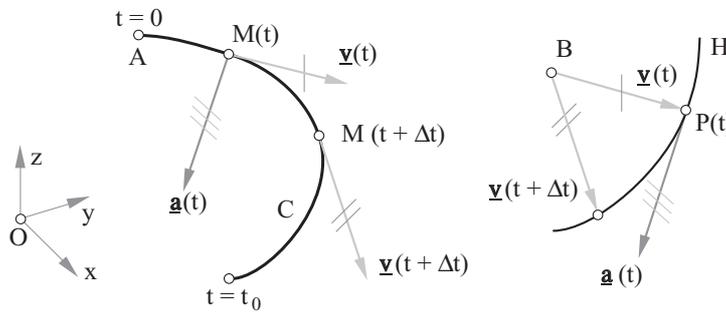


Fig. 28.2: Hodograph

Wie wir in Kapitel 2, Band 1 bewiesen haben, folgt aus (28.1), dass der Geschwindigkeitsvektor in jeder Lage $M(t)$ tangential zur Bahnkurve C ist. Zu welcher Kurve ist der Beschleunigungsvektor tangential? Um diese Frage zu beantworten, verschiebt man die Geschwindigkeitsvektoren $\mathbf{v}(t)$ für alle $t \in [0, t_0]$ eines gegebenen Zeitintervalls in einen beliebigen Punkt B , welcher als gemeinsamer Ursprung dient. Die Spitzen $P(t)$ dieser Pfeile beschreiben dann eine Bahnkurve H , welche **Hodograph** der Bewegung genannt wird (Fig. 28.2). Im Hodographen ist $\mathbf{v}(t)$ der Ortsvektor von $P(t)$. Die Beschleunigung $\mathbf{a}(t)$, als Ableitung von \mathbf{v} , entspricht demzufolge der Geschwindigkeit von $P(t)$ und ist tangential zum Hodographen.

Der Hodograph einer räumlichen Bewegung, bei der die Bahnkurve nicht in einer Ebene bleibt, ist eine räumliche Kurve. Notwendig und hinreichend für einen ebenen Hodographen ist, dass

die Bewegung selbst eben ist, d.h., die Bahnkurve C in einer Ebene bleibt. Bei einer ebenen, gleichförmigen, jedoch nicht notwendigerweise kreisförmigen Bewegung (*gleichförmig* steht für konstante Schnelligkeit) liegt der Hodograph auf einem Kreis. Bei einer geradlinigen Bewegung ist der Hodograph ebenfalls geradlinig. Der Leser möge diese Aussagen beweisen. Der Hodograph kann insbesondere bei der Analyse und Synthese von Mechanismen und Getrieben eine nützliche, veranschaulichende Rolle spielen.

28.2 Darstellung im begleitenden Dreiein

Der Beschleunigungsvektor kann genau wie die Geschwindigkeit in kartesische, zylindrische oder sphärische Komponenten zerlegt werden. Diese Aufgabe wird im nächsten Abschnitt besprochen. Hier wollen wir eine Zerlegungsart erörtern, welche der Bahnkurve C des materiellen Punktes angepasst ist und einige Grundbegriffe aus der Differentialgeometrie der räumlichen Kurven benötigt.

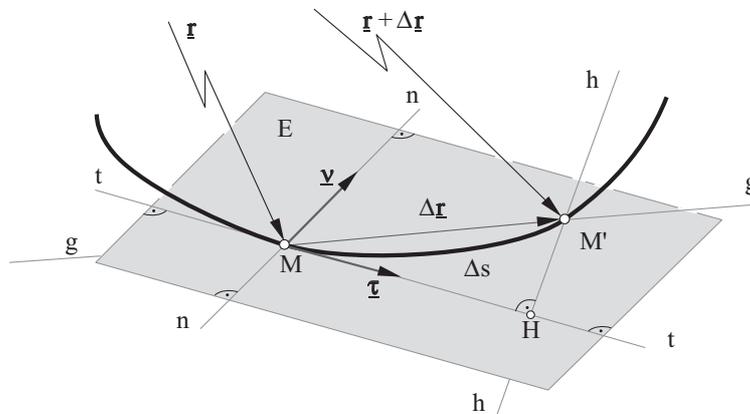


Fig. 28.3: Tangente, Hauptnormale, Schmiegungeebene

a) Geometrische Grundlagen

Man betrachte eine beliebige räumliche Kurve C und auf ihr zwei willkürlich gewählte Punkte M, M' (Fig. 28.3). Die **Sekante** g ist die Gerade durch M und M' . Lassen wir M' gegen M streben, so nimmt definitionsgemäß die Sekante die Grenzlage der Tangente t ein. Wir wählen eine positive Richtung (+) für die Bogenlänge auf C und führen auf t den tangentialen Einheitsvektor τ in (+)-Richtung ein. Die Bogenlänge in M sei s . In M' betrage sie $s + \Delta s$. Der Vektor $\underline{MM'} = \Delta \underline{r}$ entspricht der Differenz

der Ortsvektoren \mathbf{r} und $\mathbf{r} + \Delta\mathbf{r}$ von M bzw. M' . Der Ortsvektor sei eine mindestens zweimal differenzierbare Funktion von s gemäß

$$s \mapsto \mathbf{r}(s)$$

(wir verwenden den gleichen Buchstaben für Funktion und Funktionswert).

In Kapitel 2, Band 1 haben wir bewiesen, dass

$$\underline{\mathbf{t}} := \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta s} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \mathbf{r}_{,s} \quad (28.5)$$

gilt. Mit anderen Worten ist der tangential Einheitsvektor $\underline{\mathbf{t}}$ die erste Ableitung von \mathbf{r} nach s . Betrachtet man die Ebene $\{g, t\}$, die durch die Sekante g und die Tangente t in M aufgespannt wird, und lässt M' gegen M streben, so nimmt diese Ebene eine Grenzlage E ein, die zu folgender Definition Anlass gibt:

DEFINITION: Die **Schmiegungeebene** E einer räumlichen Kurve in M ist die Grenzlage der Ebene $\{g, t\}$, aufgespannt von der Sekante g , welche M und einen beliebigen Punkt M' auf der Kurve verbindet, und der Tangente t in M , wenn M' gegen M strebt.

Per Konstruktion ist die Schmiegungeebene in M *tangential* zur räumlichen Kurve C . Bei einer ebenen Kurve fällt die Schmiegungeebene mit der Ebene der Kurve zusammen.

Die Kurve C besitzt in M unendlich viele Normalen, welche sich alle in der **Normalenebene** zur Tangente t in M befinden. Mit Hilfe der Schmiegungeebene lässt sich eine dieser Normalen wie folgt auszeichnen:

DEFINITION: Die **Hauptnormale** zur räumlichen Kurve C in M ist die Normale n (senkrecht zur Tangente t) in der Schmiegungeebene.

Die zur Tangente t senkrechte Gerade h durch M' ist per Konstruktion in der Ebene $\{g, t\}$; lässt man M' gegen M streben, so erreicht sie als Grenzlage die Hauptnormale n in M . Dieses Erkenntnis erlaubt uns, die Richtung der Hauptnormalen in M mit der Richtung der Ableitung von $\underline{\mathbf{t}}$ nach s , nämlich mit der Richtung von

$$\frac{d\underline{\mathbf{t}}}{ds} := \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\underline{\mathbf{t}}(s + \Delta s) - \underline{\mathbf{t}}(s)}{\Delta s} = \underline{\mathbf{t}}_{,s} \quad (28.6)$$

zu identifizieren.

Zum Beweis betrachtet man die *Taylor-Entwicklung* von $\mathbf{r}(s + \Delta s)$ bis auf Terme 3. Ordnung in Δs

$$\mathbf{r}(s + \Delta s) = \mathbf{r}(s) + \mathbf{r}_{,s} \Delta s + \mathbf{r}_{,ss} [\Delta s]^2 / 2 + \mathbf{O}\{[\Delta s]^3\} \quad .$$

Hieraus und aus (28.5) folgt

$$\Delta \underline{r} = \underline{MM}' = \underline{r}(s + \Delta s) - \underline{r}(s) = \underline{\tau} \Delta s + \underline{\tau}_{,s} [\Delta s]^2 / 2 + \underline{O}\{[\Delta s]^3\} . \quad (28.7)$$

Der Vektor \underline{HM}' ist die Differenz zwischen $\Delta \underline{r}$ und seiner Projektion \underline{HM} auf t (Fig. 28.3), d.h.

$$\underline{HM}' = \Delta \underline{r} - (\Delta \underline{r} \cdot \underline{\tau}) \underline{\tau} .$$

Setzt man $\Delta \underline{r}$ ein und berücksichtigt, dass aus $\underline{\tau} \cdot \underline{\tau} = 1$ nach Ableitung

$$\underline{\tau} \cdot \underline{\tau}_{,s} = 0$$

folgt, so erhält man bis auf Terme 3. Ordnung in Δs

$$\underline{HM}' = \underline{\tau}_{,s} [\Delta s]^2 / 2 + \underline{O}\{[\Delta s]^3\} .$$

Der Vektor

$$2 \underline{HM}' / [\Delta s]^2 = \underline{\tau}_{,s} + \underline{O}(\Delta s)$$

unterscheidet sich demzufolge von $(d\underline{\tau}/ds)$ durch Terme 1. Ordnung in Δs . Da dieser Vektor auf der Geraden h liegt, unterscheidet sich die Richtung dieser Geraden von der Richtung des Vektors $\underline{\tau}_{,s}$ auch um Terme 1. Ordnung in Δs . Lässt man M' gegen M streben, so wird $\Delta s \rightarrow 0$; die Gerade h nimmt die Richtung der Hauptnormalen n und die Terme 1. Ordnung $\underline{O}(\Delta s)$ verschwinden. Daraus folgt, dass $\underline{\tau}_{,s}$ die Richtung der Hauptnormalen n besitzt.

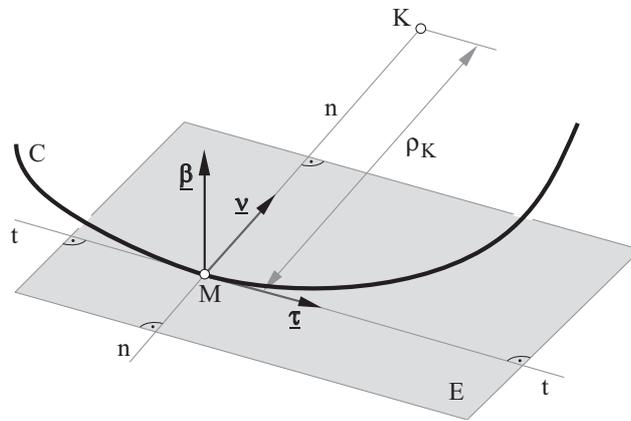


Fig. 28.4: Begleitendes Dreibein, Krümmungsradius, Krümmungsmittelpunkt

Wir führen längs der Hauptnormalen n , in Richtung der *konkaven* Seite der Kurve, d.h. in Richtung von $\underline{\tau}_{,s}$, den Einheitsvektor \underline{v} (griechisches „nü“) ein und ergänzen den Satz der Einheitsvektoren durch einen dritten Einheitsvektor (Fig. 28.4)

$$\underline{\beta} := \underline{\tau} \times \underline{v} . \quad (28.8)$$

Der Einheitsvektor $\underline{\beta}$, der definitionsgemäß zu den Vektoren $\underline{\tau}$ und \underline{v} senkrecht ist, heißt **binormaler Einheitsvektor**. Sinngemäß heißt \underline{v} **hauptnormaler Einheitsvektor** und spannt zusammen mit $\underline{\beta}$ die normale Ebene in M auf.

DEFINITION : Der tangentielle Einheitsvektor $\underline{\tau}$, der hauptnormale Einheitsvektor \underline{v} und der binormale Einheitsvektor $\underline{\beta}$ in M bilden eine orthonormale, rechtshändige Basis, die **begleitendes Dreibein** in M genannt wird.

Der französischen Mathematiker Jean F. Frenet (1816-1900) führte 1847 das begleitende Dreibein $\underline{\tau}$, \underline{v} , $\underline{\beta}$ ein, um mit dessen Hilfe die Differentialgeometrie von räumlichen Kurven zu studieren.

Da $\underline{\tau}_s$ und \underline{v} gleiche Richtung und gleichen Richtungssinn haben, schreiben wir

$$\underline{\tau}_s = \kappa \underline{v} \quad , \quad \kappa \geq 0 \quad . \quad (28.9)$$

Die Größe κ heißt **Krümmung** der Kurve in M . Der reziproke Wert, der die Dimension einer Länge besitzt, heißt **Krümmungsradius**, nämlich

$$\rho_K = 1/\kappa \quad (> 0) \quad . \quad (28.10)$$

Den Krümmungsradius tragen wir von M aus auf die Hauptnormale n in positiver \underline{v} -Richtung ein und erhalten einen Punkt K auf n , der **Krümmungsmittelpunkt** der räumlichen Kurve C in M genannt wird. Die Beziehung (28.9) lässt sich als

$$\underline{\tau}_s = \underline{v}/\rho_K \quad (28.11)$$

schreiben. Während die Tangente in M eine *lineare* Approximation eines Kurvenstücks um diesen Punkt darstellt, deuten wir mit Schmiegungeebene, Hauptnormale, Krümmungsradius und Krümmungsmittelpunkt an, dass das Kurvenstück um M in zweiter Approximation als *Kreisbogen* in der Schmiegungeebene mit Zentrum K und Radius ρ_K aufgefasst werden kann.

Um die letzte Aussage zu bestätigen, beachte man zunächst, dass gemäß (28.7) die Approximation 2. Ordnung des Vektors $\Delta \underline{r}$ und damit auch des Kurvenstücks MM' , bis auf Terme 3. Ordnung in Δs , in der Schmiegungeebene liegen, denn sowohl $\underline{\tau}$ als auch $\underline{\tau}_s$ liegen in dieser Ebene. Man betrachte einen Kreisbogen MM' mit Zentrum O und Radius R (Fig. 28.5). Der Verbindungsvektor $\Delta \underline{r} = \underline{MM}'$ lässt sich aus der Differenz $\underline{OM}' - \underline{OM}$ berechnen, nämlich

$$\Delta \underline{r} = R \sin(\Delta\varphi) \underline{\tau} + R [1 - \cos(\Delta\varphi)] \underline{v} \quad .$$

Wir entwickeln $\sin(\Delta\varphi)$ und $\cos(\Delta\varphi)$ bis auf Terme 3. Ordnung in $\Delta\varphi$, benutzen $R \Delta\varphi = \Delta s$ und erhalten

$$\Delta \underline{r} = \underline{\tau} \Delta s + \underline{v} [\Delta s]^2 / 2 R + \underline{O}\{[\Delta s]^3\} \quad . \quad (28.12)$$

Aus dem Vergleich von (28.12) mit (28.7) folgt

$$\underline{\tau}_s = \underline{v}/R \quad .$$

Die Gegenüberstellung mit (28.11) beweist tatsächlich, dass das räumliche Kurvenstück von Fig. 28.4 in M bis auf Terme 3. Ordnung in Δs mit dem Kreisbogen von Fig. 28.5 approximiert werden kann, wobei die Ebene des Kreisbogens der Schmiegungeebene, der Radius R dem Krümmungsradius ρ_K und das Zentrum O dem Krümmungsmittelpunkt K entspricht.

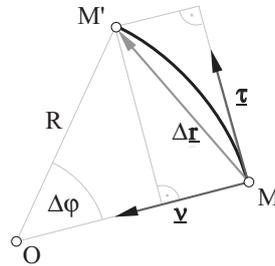


Fig. 28.5: Kreisbogen MM' mit Zentrum O und Radius R

b) Darstellung der Beschleunigung

Unter Verwendung der oben besprochenen differentialgeometrischen Grundlagen lässt sich die Beschleunigung mit einfachen Schritten im begleitenden Dreiein zerlegen. Man drücke zunächst die Geschwindigkeit als

$$\underline{v} = \dot{s} \underline{\tau} \quad (28.13)$$

in Funktion der Schnelligkeit $v = \dot{s}$ aus und leite mit Hilfe der Produktregel nach der Zeit ab, um gemäß (28.3) die Beschleunigung zu erhalten, nämlich

$$\underline{a} = \dot{\underline{v}} = \ddot{s} \underline{\tau} + \dot{s} \dot{\underline{\tau}} \quad (28.14)$$

Der erste Term auf der rechten Seite ergibt den Anteil der Beschleunigung, der mit der Änderung der Schnelligkeit verknüpft ist, während der zweite die Änderung der Geschwindigkeitsrichtung (dargestellt durch $\underline{\tau}$) berücksichtigt. Diesen zweiten Term können wir mit Hilfe der Kettenregel als

$$\dot{\underline{\tau}} = \underline{\tau}_{,s} \dot{s}$$

umformen. Die Beziehung (28.11) ergibt

$$\underline{\tau}_{,s} = \frac{\dot{s}}{\rho_K} \underline{v} \quad .$$

Hieraus entsteht die wichtige Beschleunigungsformel

$$\underline{a} = \ddot{s} \underline{\tau} + \frac{\dot{s}^2}{\rho_K} \underline{v} \quad (28.15)$$

Die Beschleunigung von M liegt demnach in der Schmiegungeebene und weist einerseits eine **Tangentialkomponente**

$$\underline{a}_\tau = \dot{s} \underline{\tau} \quad (28.16)$$

und andererseits eine **Normalkomponente**

$$\underline{a}_v = \frac{\dot{s}^2}{\rho_K} \underline{v} \quad (28.17)$$

auf. Die Tangentialkomponente \underline{a}_τ charakterisiert, wie oben erwähnt, die zeitliche Änderung der Schnelligkeit, während die Normalkomponente \underline{a}_v infolge einer etwaigen zeitlichen Richtungsänderung der Bewegungsrichtung entsteht. Da \dot{s}^2/ρ_K eine positive Größe ist und \underline{v} von M aus in Richtung des Krümmungsmittelpunktes weist, richtet sich die Normalbeschleunigung \underline{a}_v stets *gegen die konkave Seite der Bahnkurve C*, d.h. gegen den Krümmungsmittelpunkt K (Fig. 28.6).

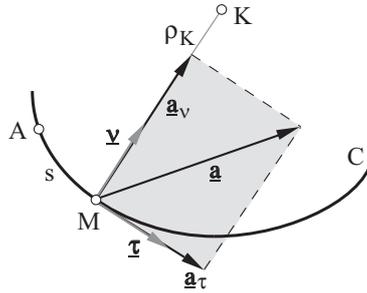


Fig. 28.6: Tangentialbeschleunigung \underline{a}_τ und Normalbeschleunigung \underline{a}_v

Nimmt bei einer Bewegung im Zeitintervall $t \in [t_1, t_2]$ die Schnelligkeit $v = \dot{s}$ zu, so ist der skalare Teil a_τ der Tangentialbeschleunigung positiv, da er gleich der Ableitung der Schnelligkeit ist ($a_\tau = \dot{v} = \ddot{s}$). Bei einer Zunahme der Schnelligkeit liegt also die Tangentialbeschleunigung \underline{a}_τ in positiver $\underline{\tau}$ -Richtung. Nimmt dagegen die Schnelligkeit ab, so wird der skalare Teil a_τ negativ, d.h., \underline{a}_τ liegt in negativer $\underline{\tau}$ -Richtung. Der skalare Teil der Normalbeschleunigung

$$a_v = \dot{s}^2 / \rho_K$$

kann, wie oben erwähnt, nicht negativ werden, d.h., \underline{a}_v hat stets den gleichen Richtungssinn wie \underline{v} .

Bei einer **gleichförmigen Bewegung** mit konstanter Schnelligkeit verschwindet die Tangentialbeschleunigung ($a_\tau = 0$), und die Gesamtbeschleunigung \underline{a} ist normal zur Bahnkurve, welche auch in diesem Fall durchaus eine räumliche Kurve sein kann. Bei einer *krümmeligen Bewegung erwartet man stets eine Normalbeschleunigung*,

solange sich der materielle Punkt nicht in momentaner Ruhe befindet. In der Tat verändert sich bei einer krummlinigen Bewegung ($\rho_K < \infty$) die Richtung der Geschwindigkeit und ergibt damit die Normalbeschleunigung \underline{a}_v gemäß (28.17). Die Normalbeschleunigung verschwindet nur bei einer *geradlinigen Bewegung*, denn in diesem Fall ist $\kappa = 0$, d.h. $\rho_K \rightarrow \infty$, und damit wird $\underline{a}_v = \underline{0}$.

c) **Anwendung auf die Kreisbewegung** (Fig. 28.7)

Falls sich ein materieller Punkt M auf einem Kreis mit Radius R bewegt, besteht zwischen der Bogenlänge s und dem Zentriwinkel φ die einfache Beziehung $s = R \varphi$. Zudem ist der Krümmungsradius ρ_K konstant und gleich dem Kreisradius R. Die Schnelligkeit ergibt sich in Funktion der Winkelschnelligkeit $\omega := \dot{\varphi}$ als

$$\dot{s} = \dot{\varphi} R = \omega R \quad . \quad (28.18)$$

Die Formel (28.15) führt dann zu

$$\underline{a} = R \dot{\omega} \underline{\tau} + R \omega^2 \underline{v} \quad . \quad (28.19)$$

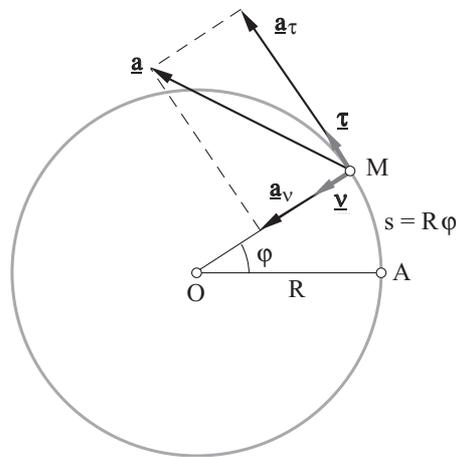


Fig. 28.7: Kreisbewegung und Beschleunigungskomponenten

Die Tangentialbeschleunigung

$$\underline{a}_\tau = R \dot{\omega} \underline{\tau} = R \dot{\varphi} \underline{\tau} \quad (28.20)$$

besteht nur dann, wenn sich die Winkelschnelligkeit $\omega = \dot{\varphi}$ verändert. Bei einer gleichförmigen Bewegung mit $\omega = \text{konstant}$ verschwindet sie.

Mit Ausnahme der momentanen Ruhelagen des materiellen Punktes ($\omega=0$) ist die Normalbeschleunigung

$$\mathbf{a}_v = R \omega^2 \underline{\mathbf{v}} = R \varphi^2 \underline{\mathbf{v}} \quad (28.21)$$

stets von null verschieden. Zudem richtet sie sich wegen $R \omega^2 \geq 0$ stets *gegen den Kreismittelpunkt*. Bei einer gleichförmigen Bewegung ist der skalare Teil $a_v = R \omega^2$ konstant (im Gegensatz zur allgemeinen gleichförmigen krummlinigen Bewegung mit einem veränderlichen Krümmungsradius ρ_K).

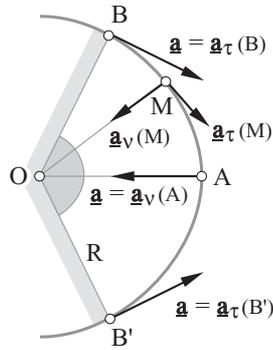


Fig. 28.8: Schwingung auf Kreis mit Winkelamplitude φ_0

Beispiel: Ein materieller Punkt auf einem Kreis mit Radius R (Fig. 28.8) führe eine Schwingung aus, bei der die zeitliche Drehwinkelfunktion

$$\varphi = \varphi_0 \sin(\omega_0 t)$$

sei.

Die Winkelamplitude ist demzufolge φ_0 , und die Kreisfrequenz beträgt ω_0 . Mit Hilfe der Winkelschnelligkeit

$$\omega := \dot{\varphi} = \varphi_0 \omega_0 \cos(\omega_0 t)$$

lässt sich die (skalare) Tangentialbeschleunigung

$$a_\tau = -R \varphi_0 \omega_0^2 \sin(\omega_0 t)$$

und die (skalare) Normalbeschleunigung

$$a_v = R \varphi_0^2 \omega_0^2 \cos^2(\omega_0 t)$$

berechnen. Die Tangentialbeschleunigung verschwindet im Punkt A mit $\varphi=0$. Hier ist die Schnelligkeit und damit auch die Normalbeschleunigung $a_v = R \varphi_0^2 \omega_0^2$ maximal. In den Punkten B, B' mit $\varphi = \varphi_0$ bzw. $-\varphi_0$ verschwindet die Schnelligkeit und damit auch die Normalbeschleunigung. Hier nimmt die Tangentialbeschleunigung ihren größten Absolutwert, nämlich $R \varphi_0 \omega_0^2$. Man beachte, dass beide Beschleunigungskomponenten zum Quadrat der Kreisfre-