

## Kapitel 17

# Elektromagnetische Felder

Die Theorie über elektromagnetische Felder gehört neben der Netzwerktheorie zu den Hauptbestandteilen der Theoretischen Elektrotechnik. Sie wurde von Physikern seit Maxwell bis hin zur relativistischen klassischen bzw. nichtklassischen Form ausgearbeitet und in die Feldtheorie integriert.

Seit den ersten technischen Anwendungen ist sie zum Bestandteil der Ausbildung von Elektroingenieuren geworden, weil sich die meisten elektrotechnischen Aufgaben ohne ihre Nutzung nicht oder nicht optimal lösen lassen. In den Ingenieurwissenschaften vollziehen sich wegen des wissenschaftlich-technischen Fortschreitens zwei bedeutende unumkehrbare Entwicklungen:

1. Die Ingenieure sind bei einer steigenden Anzahl von Produkten ( Raketentechnik, Weltraumsonden, Satellitentechnik, Signalübertragungstechnik, Übertragung großer Energien über weite Strecken im fast leeren Raum) gezwungen relativistische Gegebenheiten zu berücksichtigen.
2. Die modernen technische Produkte nutzen meist mehrere Energieformen (mechanische, elektrische, magnetische Energie, Wärmeenergie, Kernenergie).

Die erstgenannte Entwicklungsrichtung setzt einerseits die Theorie und die Analyse elektromagnetischer Felder und andererseits mehr als nur Grundkenntnisse der speziellen Relativitätstheorie voraus.

Der zweite Trend, vor allem erzwungen durch die vielseitigeren Verflechtungen zwischen Informationstechnik, Automatisierung, Elektronik, Mechanik und Magnetik setzt zwar die (klassische) Theorie elektromagnetischer Felder voraus, kommt zukünftig jedoch ohne *energieübergreifende* Methoden nicht hinlänglich aus. Hier tangiert man die Feldtheorie, die die Verschiedenartigkeit von Feldern berücksichtigt. Andererseits lassen sich bei mehreren Energieformen und somit auch Feldern, mit großem Vorteil, meist

als einzige Methode, der Lagrange- bzw. der erweiterte Hamilton-Formalismus zur Berechnung verwenden.

In diesem Kapitel wird auf die Darstellung der Maxwell'schen Gleichungen in verschiedenen Maßsystemen eingegangen, die Frage nach der Anzahl der Feldgleichungen geklärt und der Beweis über ihre eindeutige Lösbarkeit geführt. Daran schließen sich eine Übersicht zu den Arten von Randbedingungen sowie die Forderungen an die verschiedenen Randwertaufgaben.

## 17.1 Maßsysteme, Anzahl der Feldgleichungen, Feldbegriffe und Randwertaufgaben

### 17.1.1 Formen der Maxwell'schen Gleichungen in verschiedenen Maßsystemen

Ingenieure bevorzugen das Internationale Einheitensystem (SI-System), der Physiker rechnet gelegentlich im Gauß'schen Maßsystem. Andere Maßsysteme, z. B. das elektrostatische Maßsystem, das Georgische MMSA-System, haben an Bedeutung verloren und werden kaum noch zugrunde gelegt.

In die Gl. (15.161), (15.193) und (15.194) werden zwei verschiedene festlegbare Konstanten  $\alpha_0$  und  $\beta_0$  eingefügt in der Art:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{\beta_0} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \quad (17.1)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{1}{\beta_0} \left( \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \alpha_0 \mathbf{j} \right), \quad \operatorname{div} \mathbf{D} = \alpha_0 \varrho \quad (17.2)$$

Im SI-System werden  $\alpha_0 = 1$  und  $\beta_0 = 1$  gesetzt, so dass die dem Ingenieur gewohnte Form der Maxwell'schen Gleichungen entsteht:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \quad (17.3)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \left( \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{j} \right), \quad \operatorname{div} \mathbf{D} = \varrho. \quad (17.4)$$

Im Gauß'schen Maßsystem beträgt  $\alpha_0 = 4\pi$  und  $\beta_0 = c$  ist also gleich der Lichtgeschwindigkeit im Vakuum. Die Maxwellgleichungen gehen dann über in:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \quad (17.5)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{1}{c} \left( \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + 4\pi \mathbf{j} \right), \quad \operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi \varrho. \quad (17.6)$$

Da die Dimension von  $\mathbf{B}$  und  $\mathbf{D}$  bei der Wahl der Konstanten unangetastet bleiben, haben im Gauß'schen Maßsystem  $\mathbf{B}$  und  $\mathbf{E}$  sowie  $\mathbf{D}$  und  $\mathbf{H}$  dieselbe Dimension.

### 17.1.2 Die Anzahl der Feldgleichungen

Die Berechnung von elektromagnetischen Feldern verlangt die Lösung der Maxwell'schen Gleichungen unter der Berücksichtigung der Rand- und Anfangsbedingungen. Für den Anwender sind auch Aussagen über Existenz von Lösungen und über die Eindeutigkeit derselben interessant. Demzufolge ist zuerst die Frage nach der Anzahl der Feldgleichungen zu beantworten.

Die homogenen Gleichungen nach Gl. (17.3) umfassen vier partielle Differenzialgleichungen 1. Ordnung für die sechs Komponenten (Koordinaten) der beiden Feldvektoren  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{B}$ . Denn die die Rotation enthaltende Gleichung ist eine Vektorgleichung in dreidimensionaler Form, die drei skalare Gleichungen enthält und die vierte Gleichung ist selbst eine skalare Gleichung.

Bei den inhomogenen Gleichungen nach Gl. (17.4) handelt es sich ebenfalls um vier partielle Differenzialgleichungen 1. Ordnung für die sechs Komponenten (Koordinaten) der beiden Feldgrößen  $\mathbf{H}$  und  $\mathbf{D}$ . Die drei Komponenten der Stromdichte  $\mathbf{j}$  sowie  $\rho$  gelten als vorgegeben.

Die Gesamtheit der Maxwell'schen Gleichungen besteht somit aus acht skalaren Gleichungen für zwölf Feldgrößen, d. h. mathematisch ist dieses Gleichungssystem unterbestimmt.

Die Aufhebung der *Unterbestimmtheit* vollzieht sich über die Materialgleichungen. Für Materialien gelten die Beziehungen:

$$\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}, \quad \mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}. \quad (17.7)$$

Beides sind Vektorgleichungen im dreidimensionalen Raum und umfassen demzufolge sechs skalare Gleichungen. Da die Gleichheit gilt und sich die vier Feldvektoren nur im Zusammenhang mit den Maxwell'schen Gleichungen bestimmen lassen, können in jeder dieser drei skalaren Gleichungen nur zwei Größen (Koordinaten) frei gewählt werden. Die jeweils dritte auf beiden Seiten jeder Gleichung liegt fest, weil die Vektoren dann bestimmt sind. Die beiden Materialgleichungen liefern deshalb weitere vier Gleichungen. Insgesamt liegen 12 Feldgleichungen für die 12 zu berechnenden Koordinaten der vier Feldgrößen vor. Die Materialgleichungen heben die Unterbestimmtheit in den Maxwell'schen Gleichungen auf.

### 17.1.3 Der Feldbegriff

Bis hierher wurde der Feldbegriff als eine Selbstverständlichkeit verwendet und soll nun definiert werden.

In der Mathematik spricht man von einem skalaren Feld, wenn jedem Punkt  $P$  des (dreidimensionalen) Raumes eine skalare Größe  $U(P)$  (z. B. ein Temperaturfeld, die Dichte in einem inhomogenen Medium, das Potenzial eines Kraftfeldes) zugeordnet ist.

Es liegt in einem Raum ein Vektorfeld vor, wenn in jedem Punkt  $P$  dieses Raumes ein Vektor  $\mathbf{V}(P)$  angegeben werden kann (z. B. Kraftfeld der Erde bzw. der Sonne, das Geschwindigkeitsfeld der Teilchen einer strömenden Flüssigkeit, das elektrische Feld, ein magnetisches Feld).

Diese Felder müssen ihre getrennten Ursachen haben. Die Definition des Feldbegriffes setzt das Vorhandensein einer oder mehrerer Ursachen voraus. In der Elektrotechnik ist das die elektrische Ladung. Dieser Begriff bezeichnet nicht nur eine ganz bestimmte, genau charakterisierte Ladung, sondern er steht für ein oder mehrere, allgemeine, mit ihm verbundene, zu seiner Bedeutung zusammengefassten Merkmale:

**Definition 17.1**

1. *Die elektrische Ladung verkörpert eine Eigenschaft außerhalb rein mechanischer Gegebenheiten und ist erfahrungsgemäß ein Skalar.*
2. *Die Ladungen treten nur als ganzzahlige Vielfache der Elementarladung auf. Als Einheit der Ladung könnte man demzufolge die Ladung des Elektrons wählen. Wegen ihrer Kleinheit ist die Ladung eines Elektrons für technische Zwecke ungeeignet, so dass man als praktische Einheit der Ladung ein Coulomb (1C) wählt. Die Ladung eines Elektrons beträgt  $Q_e = -1,602 \cdot 10^{-19} \text{C}$ . In der Einheit der Ladung sind somit  $6,25 \cdot 10^{19}$  Elementarladungen zusammengefasst.*
3. *Demzufolge kann man bei einer großen Zahl von Erscheinungen vom korpuskularen Aufbau der Ladungen absehen und ihre Gesamtheit betrachten, indem man mit der Vorstellung einer über geladene Gebiete kontinuierlich verteilten Ladung ausgeht.*

Damit ist der Begriff *elektrische Ladung* qualitativ und (mittels verifizierbaren Messungen) quantitativ bestimmt, ohne dass man sich auf eine ganz bestimmte Ladung und auf eine Summe genau bezeichneter Elektronen mit ihren Elementarladungen bezieht.

Nun lässt sich aufbauend auf dem Begriff der elektrischen Ladung der Feldbegriff definieren.

**Definition 17.2** *Mit dem Vorhandensein der elektrischen Ladung existiert ein elektrisches Feld, welches sich im Raum in der Umgebung der Ladung ausbreitet. Befindet sich in der Umgebung der ursächlichen Ladung eine zweite Ladung, so wirkt auf sie eine Kraft infolge der Wechselwirkung zwischen dem Feld der ersten Ladung und der zweiten Ladung.*

Das Feld fungiert als Träger der Erscheinung, die in der Wirksamkeit von hier auftretenden elektrischen Kräften besteht.

Die Definition 17.1 steht in Übereinstimmung mit der von Faraday und Maxwell erklärten Nahwirkungstheorie. Nach ihr übertragen sich die Kraftwirkung durch die den

Raum erfüllenden Felder. Vorher wurde ein Fernwirkungspostulat propagiert, welches eine Kraftwirkung aus der Ferne, d. h. eine Wirkung ohne die Vermittlung des dazwischen liegenden Raumes, annahm. Die heutige Feldtheorien lehnen eine solche Fernwirkung ab. Die Nahwirkungstheorie hat sich, da sie in Übereinstimmung mit den Beobachtungen bzw. mit den technischen Vorgängen steht, durchgesetzt.

Sollen nun Felder im Raum beschrieben werden, so steht man vor der Notwendigkeit der Wahl eines Koordinatensystems. Bei rein räumlichen Untersuchungen genügt eine dreidimensionale Basis. Befindet sich in einem Raum eine bestimmte Ladungsmenge, dann kann eine Ladungsdichte  $\rho$  angegeben werden. Das Integral  $\int \rho dV$  muss dann gleich der Summe aller im Integrationsgebiet befindlichen Ladungen sein.

Weil in Wirklichkeit die Ladungen punktförmig sind, ist die Raumladungsdichte  $\rho$  an allen Stellen außer dem Orte der Ladung Null zu setzen. Dazu drücken wir  $\rho$  mittels einer  $\delta$ -Funktion aus und bedienen uns dann der Distribution auch als verallgemeinerte Funktion bezeichnet. Die  $\delta$ -Funktion ist als:

$$\delta(x) = \begin{cases} 0, & \text{für } x \neq 0 \\ \infty, & \text{für } x = 0, \end{cases} \quad (17.8)$$

derart definiert, dass für das Integral:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = 1 \quad (17.9)$$

gilt. Ist  $f(x)$  eine beliebige stetige Funktion, dann gilt:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x-c) dx = f(c) \quad (17.10)$$

und im Besonderen:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x) dx = f(0) \quad (17.11)$$

ist. Das Integrationsgebiet kann beliebig sein, muss in jedem Fall den Punkt enthalten, in dem die  $\delta$ -Funktion nicht verschwindet. Die Gleichheit der folgenden Ausdrücke heißt: Die rechte und die linke Seite ziehen dasselbe Ergebnis nach sich, wenn sie als Faktor in einem Integranden auftreten:

$$\delta(-x) = \delta(x), \quad \delta(cx) = \frac{1}{|c|}\delta(x); \quad c = \text{const.} \quad (17.12)$$

In Analogie zur eindimensionalen  $\delta$ -Funktion  $\delta(x)$  lässt sich die dreidimensionale  $\delta$ -Funktion  $\delta(\mathbf{r})$  definieren. Sie verschwindet überall ausgenommen am Ursprung des

räumlichen Koordinatensystems. Das über den ganzen Raum  $\mathbb{R}^3$  erstreckte Integral liefert:

$$\int_{\mathbb{R}^3 \rightarrow \infty} \delta(\mathbf{r}) \, d\mathbf{r} = 1 . \quad (17.13)$$

Es gilt  $\delta(\mathbf{r}) = \delta(x)\delta(y)\delta(z)$  in kartesischen Koordinaten. Befindet sich die Ladung  $q_a$  am Ort  $\mathbf{r}_a$ , dann kann man die Raumladungsdichte darstellen in der Form:

$$\varrho = \sum_{a=1}^n q_a \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a) . \quad (17.14)$$

Integriert man nun über das gesamte Raumgebiet, so folgt wegen (17.9), ..., (17.13):

$$\int_V \varrho \, dV = \int_V \sum_{a=1}^n q_a \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a) \, dV = \sum_{a=1}^n \int_V q_a \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a) \, dV = \sum_{a=1}^n q_a . \quad (17.15)$$

Das heißt, es wurde die Summe der im Volumen  $V$  enthaltenen Ladung berechnet. Aus der Gl. (17.15) ergibt sich noch eine Schlussfolgerung: Die Ladung (eines Teilchens) ist gemäß ihrer Definition eine Invariante und demzufolge vom Koordinatensystem und erweitert vom Bezugssystem unabhängig. Das gilt nicht für die Raumladungsdichte  $\varrho$ . Erst das Produkt  $\varrho \, dV$  stellt eine Invariante dar.

Diese Darlegungen lassen sich auf das elektromagnetische Feld auszudehnen. Das elektromagnetische Feld wird durch bewegte elektrische Ladungen hervorgerufen. Sowohl dem Feld als auch der Ladung kommt Realität zu. Der Ladung deshalb, weil sie in diskreten Werten vorkommt und das elektromagnetische Feld erzeugt, dem Feld, weil selbiges der Träger der elektromagnetischen Energie und der elektromagnetischen Wirkung ist.

#### 17.1.4 Konvektive und konduktive Ladungs- und Stromdichten

Da die Maxwell'schen Gleichungen nach Gl. (17.3) und (17.4) auch für bewegte Medien gelten, setzt sich die in ihnen eingehende wahre Ladungsdichte  $\varrho$  aus den konvektiven Ladungsdichten  $\varrho^{(cv)}$  und den konduktiven Ladungsdichten  $\varrho^{(cd)}$  zusammen:

$$\varrho = \varrho^{(cv)} + \varrho^{(cd)} \quad (17.16)$$

Die konvektive Ladung wird als freie Ladung oder gebunden an Körper (z. B. auf Isolatoren) transportiert, während die konduktive Ladung aus elektrischen Ladungsträgern bei Bewegung des Mediums hervorgeht. Im Falle ruhender Medien ist  $\varrho^{(cd)} = 0$ . Diese Einsicht hat, und damit der konkrete Ausdruck für die konduktive Ladung, die Relativitätstheorie hervorgebracht. Erst sie ist in der Lage, die Theorie des Elektromagnetismus bei beliebigen Medien richtig wiederzugeben.

Die elektrische Stromdichte  $\mathbf{j}$  setzt sich aus der konvektiven Stromdichte  $\mathbf{j}^{(cv)}$  und der konduktiven Stromdichte  $\mathbf{j}^{(cd)}$ :

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}^{(cv)} + \mathbf{j}^{(cd)} \quad (17.17)$$

zusammen. Die konvektive Stromdichte hat ihre Ursache in der Bewegung elektrischer Ladungen mit der Geschwindigkeit  $\mathbf{v}$ , d. h. in der Bewegung einer auf einem Isolator sitzenden elektrischen Ladung durch den Transport des Isolators selbst. Die konduktive elektrische Stromdichte entspricht der elektrischen Leitungsstromdichte (z. B. ohmsche Leitung elektrischer Ladungen).

## 17.2 Eindeutige Lösbarkeit der Maxwell'schen Gleichungen

Es soll nachgewiesen werden, dass mit Hilfe der Maxwell'schen Gleichungen das elektromagnetische Feld eindeutig bestimmt werden kann. Diese Aussage ist von prinzipieller Bedeutung, da sie mit dem Kausalitätsbegriff in der Physik zusammenhängt. Die Kausalitätsaussage besagt:

Die physikalischen Gesetze sind so aufgebaut, dass mit ihrer Hilfe bei der Kenntnis der gegenwärtigen Werte die zukünftigen eindeutig bestimmt werden können.

Es soll nun gezeigt werden, dass die Maxwell'schen Gleichungen in mathematischer Form kausale Gesetze darstellen. Dazu wird von folgendem Satz ([112], S. 74) ausgegangen:

**Satz 17.1** *Kennt man zu einem Zeitpunkt  $t = t_0$  die elektrische und die magnetische Feldstärke in jedem Punkt des durch eine beliebige Fläche im  $\mathbb{R}^3$  begrenzten Volumens, so lassen sich mittels der Maxwell'schen Gleichungen für eine beliebige Zeit  $t$  sämtliche elektromagnetische Größen berechnen, vorausgesetzt, dass die Tangentialkomponenten von  $\mathbf{E}$  oder von  $\mathbf{H}$  in jedem Punkt der Begrenzungsfläche zum Anfangszeitpunkt  $t_0$  an bis zum Zeitpunkt  $t$  bekannt sind. Es muss weiterhin vorausgesetzt werden, dass die eingepprägten elektromagnetischen Kräfte in Abhängigkeit vom Ort und der Zeit vorliegen.*

### Anmerkung:

1. Bevor der Beweis des Satzes 17.1 ausgeführt wird, sei noch auf folgende Tatsache verwiesen. Es genügt nicht zur Berechnung des elektromagnetischen Feldes im betreffenden Volumen, die Feldgrößen nur am Anfang zum Zeitpunkt  $t_0$  zu kennen. Sie sind auf ihrer Begrenzungsfläche auch zu jedem Zeitpunkt notwendig, weil das herausgegriffene Volumen nicht abgeschlossen ist und durch die Angabe der Koordinaten irgendeines Vektors auf der Begrenzungsfläche der Einfluss der in der Zeit vor sich gehenden Veränderung der Außenwelt seine Berücksichtigung findet.
2. Die Maxwell'schen Gleichungen stellen mathematisch klassifiziert lineare inhomogene partielle Differenzialgleichungen von insgesamt zweiter Ordnung dar.

Beweis des Satzes 17.1

Um den Beweis nicht unnötig zu komplizieren sei angenommen, dass die Materialparameter  $\varepsilon, \mu$  und  $\varkappa$  sowohl von der Zeit als auch von den Feldstärken unabhängig sind.

Der Beweis wird indirekt geführt. Der Ausgangspunkt der Beweiskette bildet die Annahme der Existenz zweier verschiedener Lösungen, die die gegebenen Bedingungen erfüllen. Es bleibt in Übereinstimmung mit dem Inhalt des Satzes 17.1 zu zeigen, dass diese beiden Lösungen identisch sind.

Für die Feldgrößen  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{H}$  sollen zwei verschiedene Paare von Feldgrößen  $\mathbf{E}_1, \mathbf{H}_1$  und  $\mathbf{E}_2, \mathbf{H}_2$  existieren und den oben angeführten Bedingungen genügen. Das bedeutet, zum Zeitpunkt  $t = t_0$  sind sie im gesamten Volumen gleich und in allen Punkten der Randfläche und zu allen Zeitpunkten stimmen die Tangentialkomponenten von  $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2$  oder von  $\mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2$  mit den vorgeschriebenen Werten überein. Die Feldgrößen genügen den Maxwell'schen Gleichungen.

Bildet man die Differenz der beiden Lösungen, so genügen die Vektoren  $\mathbf{E}_0 = \mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2$  bzw.  $\mathbf{H}_0 = \mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2$  ebenfalls den Maxwell'schen Gleichungen, da diese ein lineares Gleichungssystem bilden. Zum Zeitpunkt  $t_0 = 0$  gelten  $\mathbf{H}_0 \equiv 0$  und  $\mathbf{E}_0 \equiv 0$ .

Zur weiteren Beweisführung wird die Leistung nach Gl. (16.13) herangezogen. Unter Berücksichtigung der durch eine fremde elektromotorische Kraft erzeugten, eingepprägten Feldstärke  $\mathbf{E}_e$  gilt für die Leistungsstromdichte:

$$\mathbf{j} = \varkappa(\mathbf{E} + \mathbf{E}_e). \quad (17.18)$$

Damit sowie mit den angenommenen Werten für die Feldstärken geht man in die Gl. 16.13 und gelangt nach einigen Umformungen zur Leistungsbilanz in der Form:

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int_V \left( \frac{1}{2} \mu \mathbf{H}_0^2 + \frac{1}{2} \varepsilon \mathbf{E}_0^2 \right) dV = \int_V \frac{\dot{\mathbf{j}}_0^2}{\varkappa} dV - \int_V \mathbf{E}_{e0} \mathbf{j}_0 dV + \oint_A (\mathbf{E}_0 \times \mathbf{H}_0) d\mathbf{A}. \quad (17.19)$$

Die beiden rechten Summanden werden Null. Die eingepprägte elektrische Feldstärke ist in allen Punkten und zu jeder Zeit unabhängig von der speziellen Lösung der Maxwell'schen Gleichungen gegeben, d. h., es gilt  $\mathbf{E}_{e0} = \mathbf{E}_{e1} - \mathbf{E}_{e2} = 0$ . Dasselbe gilt auf der Randfläche für die Tangentialkomponente der magnetischen bzw. der elektrischen Feldstärke. Der Poyntingvektor  $\mathbf{S}_0 = \mathbf{E}_0 \times \mathbf{H}_0$  ist eine zur Randfläche tangentielle Komponente. Das Spatprodukt  $(\mathbf{E}_0 \times \mathbf{H}_0) d\mathbf{A}$  ergibt in allen Randpunkten den Wert Null. Die Beziehung (17.19) vereinfacht sich dementsprechend zu:

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int_V \left( \frac{1}{2} \mu \mathbf{H}_0^2 + \frac{1}{2} \varepsilon \mathbf{E}_0^2 \right) dV = \int_V \frac{\dot{\mathbf{j}}^2}{\varkappa} dV. \quad (17.20)$$

Wegen der mathematischen Form des Integranden kann die rechte Seite keine negativen Werte annehmen. Demzufolge kann auf der linken Seite der Wert des hinter dem



Differenziationszeichen befindlichen Ausdrucks nur geringer werden oder Null sein. Da er bereits zu Anfang Null war, negative Werte sowohl wegen seiner physikalischen Natur, als auch wegen seiner mathematischen Form nicht annehmen kann, muss er im betrachteten Zeitintervall stets Null sein. Es gilt:

$$\int_V \left( \frac{1}{2} \mu \mathbf{H}_0^2 + \frac{1}{2} \varepsilon \mathbf{E}_0^2 \right) dV = 0 . \quad (17.21)$$

Die Gleichung (17.21) ist nur für  $\mathbf{H}_0 = 0$  und  $\mathbf{E}_0 = 0$  erfüllbar und folgerichtig gelten:

$$\mathbf{H}_1 = \mathbf{H}_2 ; \quad \mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_2 . \quad (17.22)$$

Die zu Beginn des Beweises angenommenen zwei Lösungen sind also identisch. Damit ist die Eindeutigkeit der Lösung der Maxwell'schen Gleichungen nachgewiesen.

## 17.3 Arten von Randbedingungen

Die Maxwell'schen Gleichungen sind mathematisch charakterisiert lineare partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung, die bei gegebenen Randbedingungen zu integrieren sind.

Da die Lösungsfunktion im Allgemeinen sowohl von den Randwerten an den räumlichen Grenzen sowie von zeitlichen Werten abhängen kann, unterscheidet man begrifflich im  $\mathbb{R}^3$  zwischen Rand- und Anfangsbedingungen.

Bei Differentialgleichungen zweiter Ordnung unterscheidet man zwischen hyperbolischen, elliptischen und parabolischen partiellen Differentialgleichungen. Der Typ der Differentialgleichung kann sich ändern. Es wird zudem angenommen, dass im betrachteten Gebiet die Differentialgleichung vom gleichen Typ sei.

### 17.3.1 Hyperbolische Differentialgleichung und ihre Anfangsbedingungen

Das abgeschlossene Gebiet  $\underline{G}$  möge im  $(t, x_1, \dots, x_n)$ -Raum  $\underline{R}^{n+1}$  liegen. Die  $x_i$  sind die Raumkoordinaten.  $t$  bezeichnet einen Parameter, der im Sonderfall die Zeit sein kann. In der Elektrotechnik beschreiben diese Differentialgleichungen Schwingungsvorgänge. Bei hyperbolische Differentialgleichungen spricht man vom Cauchy-Problem, wenn als Lösung der Differentialgleichung:

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n a_{i0} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = F \left( t, x_1, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial t}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right) \quad (17.23)$$

eine zweimal stetig differenzierbare Funktion  $u(t, x_1, \dots, x_n)$  für  $t > 0$  mit den Anfangsbedingungen:

$$u(0, x_1, \dots, x_n) = u_0(x_1, \dots, x_n) , \quad \frac{\partial u}{\partial t}(0, x_1, \dots, x_n) = u_1(x_1, \dots, x_n) \quad (17.24)$$

mit vorgegeben Funktionen  $u_0$  und  $u_1$  gesucht wird.

### 17.3.2 Elliptische Differenzialgleichungen und ihre Randbedingungen

Es sei  $G$  ein beschränktes Gebiet im  $(x_1, \dots, x_n)$ -Raum  $R^n$  und es werden elliptische Differenzialgleichungen betrachtet. Elliptische Differenzialgleichungen beschreiben statische Zustände. Sie haben die mathematische Form nach Gl. (17.25):

$$\sum_{i,j}^n a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = F \left( x_1, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right). \quad (17.25)$$

Gesucht sind Lösungen dieser Differenzialgleichung, die auf dem Rand  $A$  des Gebietes  $G$  Bedingungen der Art:

$$\left( fu + g \frac{\partial u}{\partial n} \right) \Big|_A = h \quad (17.26)$$

genügen.  $\partial/\partial n$  bezeichnet die Normalableitung bezüglich  $A$ .  $f, g$  und  $h$  sind vorgegebene Funktionen auf  $A$  mit  $f \geq 0, g \geq 0$  und  $f + g > 0$ . Diese Aufgabe heißt Randwertproblem. Man unterscheidet zwischen:

$$\text{Randbedingungen erster Art:} \quad u|_A = h_1,$$

$$\text{Randbedingungen zweiter Art:} \quad \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_A = h_2$$

und:

$$\text{Randbedingungen dritter Art:} \quad \left( fu + \frac{\partial u}{\partial n} \right) \Big|_A = h_3.$$

Die zugehörigen Randwertaufgaben heißen Randwertaufgaben erster, zweiter und dritter Art.

Für die später behandelte Laplace- bzw. Poisson-Gleichung  $\Delta\varphi = F(x_1, \dots, x_n)$  wird die Randwertaufgabe erster Art auch *Dirichletsches Problem* und die Randwertaufgabe zweiter Art *Neumannsches Problem* genannt.

Die dritte Randwertaufgabe ist vom Gesichtspunkt der Elektrotechnik aus nicht von vorrangigem Interesse. Sie wird zur inneren Dimensionierung von Halbleitern sowie bei Elektrowärmeaufgaben herangezogen.

### 17.3.3 Parabolische Differenzialgleichungen

*Parabolische Differenzialgleichungen* beschreiben Diffusionsvorgänge. Für Differenzialgleichungen vom Typ:

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial u}{\partial t} \quad (17.27)$$

stellt man das Anfangswertproblem mit der Anfangsbedingung:

$$u(0, x_1, \dots, x_n) = u_0(x_1, \dots, x_n). \quad (17.28)$$

Die Funktion  $u_0$  ist für  $t = 0$  gegeben.

### 17.3.4 Homogene und inhomogene Randbedingungen

Eine Randbedingung wird homogen genannt, wenn eine Linearkombination der die Randbedingung erfüllenden Funktionen  $u_1$  und  $u_2$  wieder den Randbedingungen genügt, d. h., wenn auch die Funktion  $a_1u_1 + a_2u_2$  den Randbedingungen genügt. Sind die Funktionen  $h$  in den Randbedingungen erster bis dritter Art verschieden von Null, so liegen inhomogene Randbedingungen vor. Homogene Randbedingungen liegen für  $h = 0$  vor.

Ein Randwertproblem mit inhomogenen Randbedingungen kann immer auf ein Problem mit homogenen Randbedingungen zurückgeführt werden.

### 17.3.5 Forderungen an die einzelnen Randwertaufgaben

Die einzelnen Randwertaufgaben ergeben sich aus den von der Elektrotechnik (Physik) gestellten Forderungen:

1. Die Lösung des Problems soll existieren.
2. Die Lösung soll eindeutig bestimmt sein.
3. Die Lösung soll stetig von den Daten des Problems abhängen.

Ein Problem, welches diese Forderungen erfüllt, bezeichnet man auch als gestelltes Randwertproblem.

## 17.4 Gliederung der elektromagnetischen Felder

Für die sich anschließende Herleitung ingenieurtechnischer Berechnungsmethoden für elektromagnetische Felder bedarf es deren Gliederung, weil davon die Wahl der Methode abhängt. Diese Gliederung wird einerseits nach den Eigenschaften der Materialien, also nach der Erfassung der Materie im jeweiligen Feld, und andererseits nach dem Zeitverhalten der elektromagnetischen Feldgrößen vorgenommen. So entsteht eine Klassifizierung, die sich für die Lösung technischer Aufgabenstellungen bewährt hat.