

## Aus dem Vorwort zur zweiten Auflage

(August 1993)

Querkraftschub und Torsion sind zwei Teilgebiete der Elastizitätstheorie, mit denen der Bauingenieur während des Studiums und auch in der späteren Berufspraxis meist möglichst wenig zu tun haben will. Nachweise auf Querkraftschub oder Torsion sind selten erforderlich, so dass sich die Routine bei der Lösung dieser Probleme nur schwer einstellt. Hinzu kommt, dass sie von der Anschauung her schwer zu fassen sind und einen tieferen mechanischen Hintergrund erfordern, um zu einer klaren Lösung zu kommen.

Hier will dieses Buch einspringen und dem Ingenieur die zwei genannten Teilgebiete von der Theorie her und über zahlreiche Beispiele näher bringen. Durch die Beschränkung auf diese zwei Teilgebiete der Elastizitätstheorie kann die Darstellung in der notwendigen Ausführlichkeit erfolgen. Dabei wird das Hauptgewicht darauf gelegt, von den allgemeinen voraussetzbaren Grundkenntnissen aus das Gebäude „Schub und Torsion“ in systematischen und überschaubaren Schritten aufzubauen mit dem Ziel, allen üblichen Schub- und Torsionsproblemen sicher bearbeiten zu können.

## Vorwort zur dritten Auflage

Bei der Neubearbeitung des Buches wurde die Idee verfolgt, Bewährtes zu erhalten, aber dem Leser durch Ergänzungen weitere hilfreiche Informationen für die Anwendung in der Praxis zu bieten. Beispiele hierfür sind die Themen Cabellager und Wölbfeder. Die Umstellung der Normen auf das Teilsicherheitskonzept stellt einen weiteren Schwerpunkt dar.

Vollständig neu ist das Kapitel mit alternativen Lösungswegen von Torsionsaufgaben. Hier wird der Versuch unternommen, dem Leser mit Hilfe von Analogien mehr Verständnis für die Torsionsaufgaben zu ermöglichen und – Dank der heutigen IT-Produkte – in der täglichen Arbeit wirtschaftlich arbeiten zu können.

Das Buch richtet sich an praktisch tätige Ingenieure und Studierende, sowohl an Fachhochschulen als auch an Technischen Hochschulen und Universitäten. Es hat

zum Ziel, zu einem vertieften Verständnis von Schub und Torsion in geraden Stäben beizutragen und Hilfen für den Alltag zu geben.

Dieses Buch beruht auf einem früheren Vorlesungsskript „Schub und Torsion“ der Technischen Universität Darmstadt (TUD) und meinem Skriptum zur Vorlesung Stahlbau an der Fachhochschule Konstanz. Dank der hervorragenden und verständnisvollen Zusammenarbeit mit dem Vieweg Verlag konnte das Buch meinen Vorstellungen entsprechend verwirklicht werden.

Besonderen Dank schulde ich meinem Doktorvater und Kollegen Herrn Prof. Dr.-Ing. Harald Friemann. Er stimmte meinem Wunsch, diese dritte Auflage herauszugeben, gerne zu. Bei der Bearbeitung erhielt ich von ihm zahlreiche wertvolle Anregungen, gleichzeitig stellte er sich als „Lektor“ zur Verfügung.

Dank auch meinem Kollegen Herrn Prof. Franz A. Zahn, PhD, für die zahlreichen Diskussionen und für die Durchsicht der Kapitel mit dem Werkstoff Stahlbeton.

Herrn Dipl.-Ing. Georg Geldmacher vom Institut für Stahlbau und Werkstoffmechanik an der TUD bin ich dankbar für die intensiven Gespräche und hilfreichen Anmerkungen zum Kapitel „Alternativen zur Lösung von ...“.

Für die tatkräftige Unterstützung bei den Zeichenarbeiten danke ich Frau Angelika Appelt. Mein Dank für die unermüdliche und verständnisvolle Unterstützung gilt meiner lieben Familie.

Angesichts der Vielzahl an Gleichungen, Beispielen etc. sind Fehler trotz aller Sorgfalt nicht auszuschließen. Ich bitte hierfür um Nachsicht und bin für jeden Hinweis sehr dankbar.

Konstanz, im Januar 2005

Wolfgang Francke

## 6.1 Einführung

Eine Torsionsbeanspruchung eines Trägers liegt dann vor, wenn Verdrehungen  $\vartheta(x)$  um seine Längsachse aufitreten und wenn sich gleichzeitig die Größe dieser Verdrehungen mit der Längsordinate  $x$  ändert, d. h., wenn der Träger um  $\vartheta'(x)$  verdreht oder verwunden wird.

Über die äußere Einwirkung ist eine Torsionsbeanspruchung nicht immer eindeutig gekennzeichnet. Nicht nur Querlasten, die außerhalb des Schubmittelpunktes  $M$  angreifen, sondern auch Axialkräfte oder Einzelmomente können einen Träger auf Torsion beanspruchen. Umgekehrt kann bei einem Kreisträger eine konstant außermittliger Querbelastung eine reine Biegebeanspruchung hervorrufen („Krempelmomente“). Die Definition der Torsionsbeanspruchung über die Schnittgrößen des Trägers ist schwieriger, da außer dem Torsionsmoment  $M_T$  nach Bild 1-10 das Wölbmoment  $M_w$  als weitere Schnittgröße hinzukommen kann, die mit keiner der bekannten sechs Schnittgrößen der Technischen Elastizitätstheorie identisch ist und eine Erweiterung dieser Theorie erfordert.

Die Torsionsbeanspruchung eines Stabes ist jedoch immer mit Schubspannungen verbunden.

## 6.2 Voraussetzungen

1. Die Stabachse sei gerade.
- Bei gekrümmten Trägern sind Biegung und Torsion über die geometrischen Beziehungen miteinander gekoppelt. Lösungen hierzu siehe *Becker* (1965), *Vlassow* (1965), *Dabrowski* (1968) u. a.
2. Es treten nur Verdrehungen  $\vartheta(x)$  des Stabes um seine Längsachse auf, wobei sich die Drehachse frei einstellen kann. Verschiebungen  $v$  und  $w$  rechtwinklig zur Stabachse sind nicht vorhanden.

Zur Torsion von Stäben mit konstruktiv vorgegebener Drehachse siehe *Koik* (1978). Die Biegung des Stabes wird mit dieser Annahme als eine unabhängige Beanspruchung vorausgesetzt. Dies gilt jedoch nicht mehr, wenn der Stab nach Theorie II. Ordnung berechnet werden soll, d. h. bei der Lösung der Kipp- und Biegedrillknickprobleme, *Koik/Carll/Lindner* (1972) u. a.

3. Querschnittsverformungen im belasteten Zustand treten nicht auf.
- Bei sehr dünnwandigen Profilen kann diese Voraussetzung häufig werden, insbesondere unter örtlichem Lastangriff. Eine Reihe von Lösungen für solche speziellen Probleme ist in der Literatur zu finden, so z. B. für I-Träger bei *Scheer* (1955) und *Oxfort* (1963), für dünnwandige Kastenträger, siehe Literaturhinweise in Kap. 10.1.1, oder für dünnwandige gekrümmte Rohre bei *Klöppel/Friemann* (1963).
4. Es wird ein linear elastisches Werkstoffgesetz (*Hookes*ches Gesetz) angenommen, so dass die Gleichungen der Mathematischen Elastizitätstheorie nach Kap. 1 gültig sind.
5. Es werden relativ kleine Verdrehungen vorausgesetzt, so dass alle geometrischen Beziehungen linearisiert werden können. Zur Torsionsbeanspruchung bei großen Verdrehungen siehe *Kreuzinger* (1969), *Klöppel/Bilstein* (1972).
6. Der Querschnitt des Trägers ist abschnittsweise prismatisch. Zur Torsion von Trägern mit kontinuierlich veränderlichen Querschnitten siehe *Lee/Szabo* (1967).

### 6.3 Grundlegende Beziehungen

Auf Grund der Voraussetzung 3 in Kap. 6.2 können die Verschiebungen eines beliebigen Querschnittspunktes, die sich aus einer Verdrehung des Querschnitts um einen Pol  $D$  ergeben, rein geometrisch ermittelt werden. Der Kreisbogen, auf dem sich der beliebige Punkt  $B$  um  $D$  dreht, kann aufgrund des sehr kleinen Winkels  $\vartheta$  durch die Tangente an den Kreisbogen ersetzt werden, siehe Bild 6-1 so dass man folgende Verschiebungskomponenten in Richtung der Koordinatenachsen erhält:

$$(6.1) \quad -v = r \cdot \vartheta(x) \cdot \sin \phi = (z - z_D) \cdot \vartheta(x)$$

$$(6.2) \quad w = r \cdot \vartheta(x) \cdot \cos \phi = (y - y_D) \cdot \vartheta(x)$$

$$(6.3) \quad u = n(x, y, z)$$

Die Axialverschiebung  $u$  wird zunächst in ganz allgemeiner Form angesetzt. Es ist von der Anschauung her nur schwer einsichtig, dass überhaupt Axialverschiebungen im Querschnitt auftreten sollen, die mit der Verdrehung  $\vartheta$  bzw. der Verdrehung  $\vartheta'$  des Stabes gekoppelt sind.

Ein Beispiel für solche Axialverschiebungen oder Verwölbungen unter einer Torsionsbeanspruchung, das sich mit Hilfe eines gerollten Blattes Papier leicht nachvollziehen lässt, wurde in Bild 6-2 skizziert. Ein offenes und ein geschlossenes Kreisrohr verhalten sich sehr unterschiedlich gegenüber einer Torsionsbelastung: Abgesehen von der geringeren Drillsteifigkeit des offenen Querschnitts, die sich in der großen

Verdrehung  $\vartheta_1$  bei gleicher Belastung äußert, treten bei diesem Querschnitt Verwölbungen  $w$  auf.

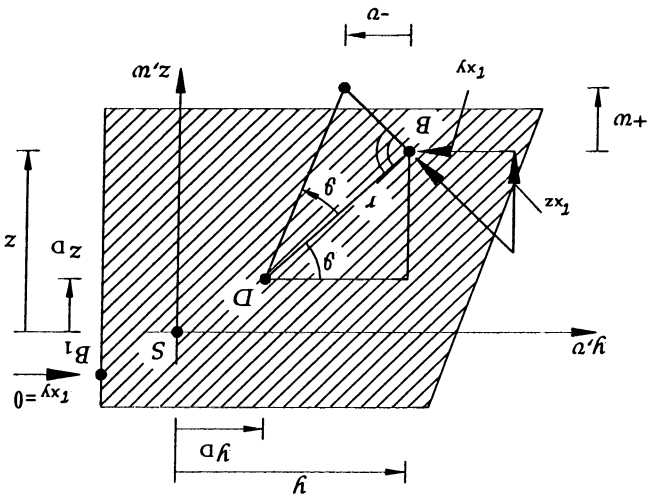


Bild 6-1 Verschiebungen  $w$  eines Querschnittspunktes  $B$  in der Querschnittsebene infolge  $\vartheta$

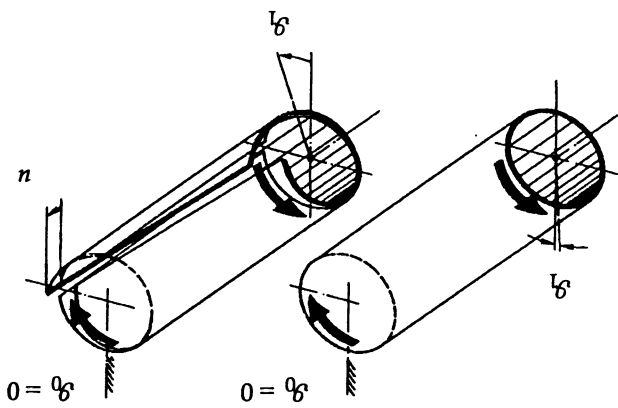


Bild 6-2 Gegenüberstellung der Torsionsverformungen bei einem geschlossenen und offenen Kreisrohr gleicher Abmessungen.

Die ursprünglich ebene Schnittfläche eines Stabes ist im Normalfall im verdrehten Zustand keine Ebene mehr, was mit der Bezeichnung Verwölbungen für die Axialverwölbungen infolge Torsion zum Ausdruck gebracht werden soll.

Für einen Stab mit einem massiven Querschnitt lässt sich allgemein nachweisen, dass die Verdrehung mit einer Verwölbung verbunden ist (*Marguerre* 1940). Greift man ein Stabelement der Länge  $dx$  heraus, so ändern sich vom negativen zum positiven Schnittufer hin die Verschiebungen  $v$ ,  $w$  des Punktes  $B$  nach den Gleichungen (6.1) und (6.2) um

$$\frac{dv}{dx} = -(z - z_D) \cdot g'(x) \quad (6.4)$$

$$\frac{dw}{dx} = +(y - y_D) \cdot g'(x) \quad (6.5)$$

Diesen Zuwachsen der Verschiebungen entsprechen nach Gleichung (1.21) Gleitungen  $\gamma_{xy}$  und  $\gamma_{xz}$  die über das *Hookesche* Gesetz (1.10) Schubspannungen  $\tau_{xy}$  und  $\tau_{xz}$  im Punkt  $B$  zur Folge haben, deren resultierende rechtwinklig zum Radius  $r = \overline{DB}$  nach Bild 6-1 steht.

Für einen Punkt  $B_1$  am Querschnittsrand jedoch kann nach der allgemeinen Aussage 1 in Kap. 2.1.1 nur eine randparallele Schubspannung vorhanden sein. Die rechtwinklig zum Rand gerichtete Komponente - für den Punkt  $B_1$  nach Bild 6-1 die Spannung  $\tau_{xy}$  - muss Null sein. Folglich kann das Element auch nicht in der  $x, y$ -Ebene verzerrt werden:

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad (6.6)$$

Diese Bedingung kann nur dann erfüllt sein, wenn außer dem Teilwinkel

$$\gamma_2 = \frac{\partial v}{\partial x} \quad (6.7)$$

nach Bild 1-9, der nach obiger Gleichung von  $g'$  abhängt, der zweite Teilwinkel

$$\gamma_1 = \frac{\partial u}{\partial y} = -\gamma_2 \quad (6.8)$$

vorhanden ist. Das Element  $B_1$  dreht sich aus der  $x, y$ -Ebene heraus, wobei der Winkel  $\gamma_2$  und damit auch die Verwölbung  $du$  für jeden Querschnittspunkt unterschiedlich ist.

Genauere Aussagen über Form und Größe der Verwölbungen werden an Beispielen in Kap. 7.5 gewonnen, hier wird  $u(x, y, z)$  in dieser allgemeinen Form beibehalten.

Über die geometrischen Beziehungen (1.19) und (1.21) und über die *Hookeschen* Gleichungen (1.9) und (1.10) erhält man folgende Spannungen für einen allgemeinen Querschnittspunkt  $B$ , wobei die Querdehnungszahl  $\mu = 0$  gesetzt wurde:

$$(6.9) \quad \sigma_x = E \cdot \frac{\partial x}{\partial u}$$

$$(6.10) \quad \sigma_y = E \cdot \frac{\partial y}{\partial v} = 0$$

$$(6.11) \quad \sigma_z = E \cdot \frac{\partial z}{\partial w} = 0$$

$$(6.12) \quad \tau_{xy} = G \cdot \left( \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial x}{\partial v} \right) = G \cdot \left( \frac{\partial y}{\partial u} - z \cdot z_D \right) \cdot g'(x)$$

$$(6.13) \quad \tau_{yz} = G \cdot \left( \frac{\partial z}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial w} \right) = G \cdot (-g + g) = 0$$

$$(6.14) \quad \tau_{xy} = G \cdot \left( \frac{\partial x}{\partial w} + \frac{\partial z}{\partial n} \right) = G \cdot \left( \frac{\partial z}{\partial n} + (y - y_D) \cdot g'(x) \right)$$

Die drei Gleichgewichtsaussagen (1.3) bis (1.5) schreiben sich dann in folgender Form:

$$(6.15) \quad \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = F \cdot \frac{\partial x^2}{\partial n} + G \cdot \left( \frac{\partial y^2}{\partial z} + \frac{\partial z^2}{\partial n} \right)$$

$$(6.16) \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = G \cdot \left( \frac{\partial x \cdot \partial y}{\partial z} - z \cdot z_D \right) \cdot g'(x) = 0$$

$$(6.17) \quad \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} = G \cdot \left( \frac{\partial z \cdot \partial z}{\partial n} + (y - y_D) \cdot g'(x) \right) = 0$$

Um das Torsionsproblem weiter lösen zu können, werden die Schubspannungen in zwei Komponenten aufgespalten. Die Gleichgewichtsbedingung Gleichung (6.15) zerfällt dann in zwei Teilausdrücke, die je für sich zu Null werden sollen:

$$(6.18) \quad \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy,II}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz,II}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xy,I}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz,I}}{\partial z} = 0$$

Mit dieser Aufspaltung der allgemeinen Torsionsbeanspruchung eines Stabes in zwei Teilspannungszustände wird hier ein mehr didaktisches Ziel verfolgt. Die Schubspannungen mit dem Index I beschreiben einen reinen Schubspannungszustand in der Querschnittsfläche, der ohne zusätzliche Normalspannungen  $\sigma_x$  im Gleichgewicht steht. Die St. Venant'sche Torsionstheorie nach Kap. 7 geht von der Voraussetzung aus, dass in einem torsionsbeanspruchten Stab eine reine Schubbeanspruchung vorherrscht, die Schubspannungen mit dem Index I entsprechen daher den St. Venant'sche Schubspannungen.

Nach Gleichung (6.18) sollte jedoch deutlich werden, dass diese Theorie nur für Sonderfälle, in denen die Wölbschubspannungen (mit dem Index II) vernachlässigbar klein sind oder überhaupt nicht auftreten, gültig sein kann. Im Allgemeinen sind bei der Teilspannungszustände zu überlagern, wie dies in der übergeordneten Theorie der Wölbkrafttortion geschieht.

In der Literatur werden die Gewichte normalerweise umgekehrt verteilt, indem man der historischen Entwicklung folgt, die *St. Venant'sche* Theorie als eigentliche Grundlage behandelt und die Theorie der Wölbkrafttortion nur als einen Sonderfall anfügt. Trotzdem wird auch hier die *St. Venant'sche* Torsionstheorie zunächst getrennt behandelt. Dies geschieht aus zwei Gründen, einmal kann sie für sehr viele praktische Fälle ausreichend genaue Ergebnisse liefern, und zum anderen erleichtert sie den Einstieg in die allgemeinere Theorie der Wölbkrafttortion.