

13 Partielle Differentialgleichungen

13.1 Einführung

In vorangehenden Kapiteln haben wir gewöhnliche Dgl betrachtet, die dadurch charakterisiert sind, daß in ihnen nur eine unabhängige Variable auftritt, d.h., auftretende unbekannte Funktionen (Lösungsfunktionen) und deren Ableitungen sind Funktionen einer reellen Variablen. Diese unabhängige Variable ist entweder eine Orts- oder Zeitvariable und wird meistens mit x bzw. t bezeichnet.

Viele Anwendungsaufgaben lassen sich jedoch mathematisch nur sinnvoll durch Dgl modellieren, wenn mehrere Ortsvariable bzw. eine zusätzliche Zeitvariable zugelassen sind. Dies führt auf partielle Dgl, die wir im folgenden vorstellen.



Man kann ohne Übertreibung sagen, daß sich viele Naturgesetze in der Sprache partieller Dgl beschreiben lassen, d.h., partielle Dgl treten in zahlreichen mathematischen Modellen von Technik und Naturwissenschaften auf.



Bei *partiellen Dgl* treten in den Gleichungen unbekannte reelle Funktionen (Lösungsfunktionen)

$$u(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (n \geq 2)$$

mit mehreren (mindestens zwei) unabhängigen reellen Variablen x_1, x_2, \dots, x_n auf und deren partielle Ableitungen

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \dots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}, \dots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}, \dots$$

für die wir im Buch die Indexschreibweise bevorzugen, d.h.

$$u_{x_1}, u_{x_2}, \dots, u_{x_n}, u_{x_1 x_1}, u_{x_1 x_2}, \dots, u_{x_n x_n}, \dots$$

Mit x_1, x_2, \dots, x_n bezeichnet man üblicherweise *Ortsvariable*, die zu einem Variablenvektor (Zeilen- bzw. Spaltenvektor) \mathbf{x} mit n Komponenten zusammengefaßt werden, d.h.

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Damit schreiben sich Lösungsfunktionen partieller Dgl in der einfachen Form $u(\mathbf{x})$. Da bei partiellen Dgl neben Ortsvariablen auch eine *Zeitvariable* vorkommen kann, bezeichnet man diese zur Unterscheidung meistens mit t und schreibt Lösungsfunktionen, die von Orts- und Zeitvariablen abhängen, in der Form $u(\mathbf{x}, t)$.

Treten nur maximal drei unabhängige Variable auf, so werden diese oft mit x, y, z bezeichnet, wenn es sich um Ortsvariable handelt. Kommt noch eine Zeitvariable t hinzu, so schreibt man Lösungsfunktionen in der Form $u(x, y, z, t)$.

Physikalische Erscheinungen laufen in einer dreidimensionalen Welt ab, so daß i.allg. drei Ortsvariable x, y, z benötigt werden. Da sich partielle Dgl mit weniger Ortsvariablen einfacher lösen lassen, verwendet man oft nur Modelle mit einer bzw. zwei Ortsvariablen, indem man zur Vereinfachung annimmt, daß es sich wie z.B. in der Wärmeleitung um dünne Stäbe bzw. Platten handelt (siehe Beisp. 13.2a, 13.3a, 15.2a und b).

Stellen wir Fakten über partielle Dgl zusammen, die zum Verständnis der Problematik hilfreich sind:

- Eine stetige Funktion $u(\mathbf{x})$ heißt Lösung (*Lösungsfunktion*) einer partiellen Dgl, wenn sie erforderliche stetige partielle Ableitungen besitzt und die Dgl identisch erfüllt.
- Treten in einer partiellen Dgl nur partielle Ableitungen bzgl. einer Variablen auf, so kann diese als gewöhnliche Dgl gelöst werden, indem man die restlichen Variablen als konstant ansieht. Wir illustrieren dies im Beisp. 13.1d.
- Die Lösungsmannigfaltigkeit partieller Dgl ist wesentlich umfangreicher als die gewöhnlicher Dgl, da in ihren allgemeinen Lösungen frei wählbare Funktionen auftreten, wie im Beisp. 13.1c illustriert wird.
- Die Theorie partieller Dgl ist vielschichtiger als die gewöhnlicher Dgl, so daß wir im Rahmen des Buches nur einen Einblick geben können. Dies zeigt sich bereits bei *partiellen Dgl zweiter Ordnung*, die in Physik und Technik dominieren und deren Theorie im Unterschied zu gewöhnlichen Dgl zweiter Ordnung wesentlich vom Typ der partiellen Dgl abhängt.
- Bestimmte Klassen partieller Dgl bilden die Grundlage einzelner Wissenschaftsgebiete, wie z.B. Maxwellsche Gleichungen in der Elektrodynamik oder Navier-Stokes-Gleichungen in der Hydrodynamik.
- Eine Reihe von Aussagen, Begriffen und Bezeichnungen aus der Theorie gewöhnlicher Dgl treten in angepaßter Form auch bei partiellen Dgl auf. Dies darf aber nicht zu der Meinung führen, daß sich die Theorie partieller Dgl einfach aus der Theorie gewöhnlicher herleiten läßt. Am ehesten gelingt dies bei *partiellen Dgl erster Ordnung*, deren Lösung sich auf die Lösung gewöhnlicher Dgl-Systeme erster Ordnung zurückführen läßt (siehe Kap.14).
Die im Abschn. 3.5.1 vorgestellten allgemeinen Prinzipien zur exakten Lösung von Dgl gelten sowohl für gewöhnliche als auch partielle Dgl. So sind Lösungsmethoden für gewöhnliche Dgl wie Ansatzmethoden, Reihenlösungen,

Laplace- und Fouriertransformationen und Greensche Methoden in entsprechender Form auch auf partielle Dgl anwendbar.

- Für nichtlineare partielle Dgl ist ebenso wie für gewöhnliche Dgl keine umfassende Theorie zu erwarten, da hier die Eigenschaften der Linearität (Superpositionsprinzip) fehlen. Hier treten neue Phänomene wie Stoßwellen und Solitonen (Solitärwellen) auf.

Es gibt nur für Sonderfälle exakte Lösungen, die in entsprechenden Wissenschaftsgebieten untersucht werden, so z.B. Navier-Stokes-Gleichungen in der Hydrodynamik.



In den folgenden Kapiteln gegebene Hinweise dienen zur Illustration des umfangreichen Gebiets partieller Dgl am Beispiel von Dgl erster und zweiter Ordnung, um erste Kenntnisse zu vermitteln und die Lösungsproblematik aufzuzeigen, d.h. einen ersten Einstieg und mögliche Anwendungen von MATHCAD und MATLAB zu geben.



Stellen wir abschließend in dieser Einführung wesentliche *Begriffe*, *Definitionen* und *Klassifikationen* für partielle Dgl zusammen, die für ein Verständnis der Problematik und für die Anwendung von MATHCAD und MATLAB und weiterer Programmsysteme erforderlich sind:

- Bei partiellen Dgl bestimmt analog zu gewöhnlichen die höchste auftretende partielle Ableitung die *Ordnung*.
- Bei partiellen Dgl läßt sich die allgemeine Form einer Gleichung m-ter Ordnung nicht so einfach wie bei gewöhnlichen schreiben. Da $m!$ verschiedene partielle Ableitungen m-ter Ordnung auftreten können, ist dies unmittelbar einzusehen, so daß nur implizite Darstellungsformen

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, u, u_{x_1}, u_{x_2}, \dots, u_{x_n}, u_{x_1 x_1}, u_{x_1 x_2}, \dots) = 0$$

möglich sind, wobei $u = u(\mathbf{x}) = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ die zu bestimmende Lösungsfunktion darstellt.

- Partielle Dgl erster und zweiter Ordnung, auf die wir uns im Rahmen des Buches beschränken, lassen sich in folgender geschlossener impliziter Form darstellen:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, u, u_{x_1}, u_{x_2}, \dots, u_{x_n}) = 0 \quad \text{bzw.}$$

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, u, u_{x_1}, u_{x_2}, \dots, u_{x_n}, u_{x_1 x_1}, u_{x_1 x_2}, \dots, u_{x_n x_n}) = 0$$

- Bei der Darstellung linearer Dgl zweiter Ordnung wird zur Vereinfachung der Schreibweise häufig der *Laplaceoperator* Δ eingesetzt, der folgendermaßen definiert ist:

$$\Delta u(\mathbf{x}) = \Delta u(x_1, x_2, \dots, x_n) = u_{x_1 x_1} + u_{x_2 x_2} + \dots + u_{x_n x_n}$$

- Lösungsfunktionen $u(\mathbf{x})$ werden in den meisten Anwendungen nicht für alle Werte des Variablenvektors \mathbf{x} gesucht, sondern nur in einem Gebiet (Bereich) G des n -dimensionalen Raumes \mathbb{R}^n , das als *Lösungsgebiet* (Lösungsbereich) bezeichnet und als abgeschlossen und für zahlreiche Aufgaben als beschränkt vorausgesetzt wird.
- Partielle Dgl heißen *linear*, wenn die unbekannte Funktion (Lösungsfunktion) $u(\mathbf{x})$ und deren partielle Ableitungen nur linear eingehen (siehe Beisp. 13.1).
- Lineare partielle Dgl heißen *homogen*, wenn in ihnen keine Summanden auftreten, die nicht mit der Lösungsfunktion $u(\mathbf{x})$ oder einer ihrer Ableitungen multipliziert sind (siehe Beisp. 13.1).
- Partielle Dgl m -ter Ordnung heißen *quasilinear*, wenn partielle Ableitungen m -ter Ordnung der Lösungsfunktion $u(\mathbf{x})$ nur linear vorkommen. Die Koeffizienten der m -ten partiellen Ableitungen von $u(\mathbf{x})$ können dabei außer von \mathbf{x} noch von $u(\mathbf{x})$ und ihren partiellen Ableitungen bis zur Ordnung $m-1$ abhängen (siehe Beisp. 13.1b und Abschn. 14.2.2).

Beispiel 13.1:

Im folgenden schreiben wir Lösungsfunktionen u in den Dgl ohne Variablen x, y .

- a) Allgemeine *lineare partielle Dgl 2. Ordnung* für Lösungsfunktionen $u(x, y)$ haben folgende Form:

$$a(x, y) \cdot u_{xx} + b(x, y) \cdot u_{xy} + c(x, y) \cdot u_{yy} + d(x, y) \cdot u_x + e(x, y) \cdot u_y + g(x, y) \cdot u = f(x, y)$$

Hängen die Koeffizienten a, b, \dots, g nicht von x, y ab, d.h., sie sind konstant, so spricht man von Dgl mit *konstanten Koeffizienten*. Ist die rechte Seite der Dgl identisch gleich Null, d.h. $f(x, y) \equiv 0$, so heißt die Dgl *homogen*.

- b) Im folgenden ist eine *quasilineare partielle Dgl 2. Ordnung* für Lösungsfunktionen $u(x, y)$ zu sehen, die dadurch charakterisiert ist, daß sie nur in partiellen Ableitungen zweiter Ordnung linear sein muß, d.h.

$$a(x, y, u, u_x, u_y) \cdot u_{xx} + b(x, y, u, u_x, u_y) \cdot u_{xy} + c(x, y, u, u_x, u_y) \cdot u_{yy} = f(x, y, u, u_x, u_y)$$

- c) Folgende Aufgaben zeigen, daß allgemeine Lösungen partieller Dgl von frei wählbaren Funktionen abhängen.

- c1) Die *allgemeine Lösung* der linearen homogenen partiellen Dgl erster Ordnung

$$y \cdot u_x - x \cdot u_y = 0 \quad \text{lautet} \quad u(x, y) = F(x^2 + y^2)$$

wie im Beisp. 14.2b gezeigt wird. In dieser Lösung ist die Funktion F frei wählbar, so daß alle differenzierbaren Funktionen $F(s)$ einer Variablen s Lösungen sind, wenn s von den Variablen x, y in der Form

$x^2 + y^2$ abhängt, wie z.B.

$$e^{x^2+y^2}, \sin(x^2+y^2), \ln(x^2+y^2), \sqrt{x^2+y^2}, \frac{\sqrt[4]{x^2+y^2}}{(x^2+y^2)^3}, \dots$$

Geometrisch stellen diese Lösungsfunktionen Rotationsflächen dar, wie man sich leicht überlegt.

c2) Die Funktion $u(x,y) = g(x) \cdot h(y)$ mit frei wählbaren differenzierbaren Funktionen $g(x)$ und $h(y)$ ist offensichtlich Lösung der quasilinearen partiellen Dgl zweiter Ordnung

$$u \cdot u_{xy} - u_x \cdot u_y = 0$$

wie man durch Einsetzen leicht nachprüfen kann. Damit sind alle Funktionen Lösung der gegebenen Dgl, deren Variablen sich trennen lassen, wie z.B.

$$e^{x+y^2}, \sin x \cdot \cos y, \ln x \cdot \sqrt{1+y^2}, \frac{\sqrt{x} \cdot \tan y}{x^2 \cdot y^3}, \dots$$

c3) Die allgemeine Lösung der einfachen partiellen Dgl zweiter Ordnung

$$u_{xy} = 0$$

ergibt sich durch Integration bzgl. x und y zu (siehe Abschn. 15.4.2)

$$u(x,y) = F(x) + G(y)$$

mit frei wählbaren differenzierbaren Funktionen $F(x)$ und $G(y)$.

d) Da die partielle Dgl zweiter Ordnung

$$u_{xx} + u = 0$$

nur partielle Ableitungen bzgl. x enthält, läßt sie sich als gewöhnliche Dgl

$$u'' + u = 0$$

lösen, die die allgemeine Lösung

$$C_1 \cdot \cos x + C_2 \cdot \sin x \quad (C_1, C_2 - \text{frei wählbare reelle Konstanten})$$

besitzt (siehe Beisp. 7.2 und 7.3b). Da die Variable y als konstant angesehen wurde, erhält man hieraus die *allgemeine Lösung* der *partiellen Dgl*, indem man die Konstanten C_1 und C_2 als frei wählbare Funktionen $F(y)$ bzw. $G(y)$ von y auffaßt. Damit hat die allgemeine Lösung der partiellen Dgl die Form

$$u(x,y) = F(y) \cdot \cos x + G(y) \cdot \sin x$$


13.2 Anwendungen

Praktische Anwendungen sind für partielle Dgl nicht überschaubar, da sie in mathematischen Modellen verschiedenster Gebiete von Technik und Naturwissenschaften auftreten. Für viele dieser Gebiete bilden sie die theoretische Grundlage. Stellen wir einige Gesichtspunkte zur praktischen Anwendung partieller Dgl zusammen:

- Viele Naturgesetze lassen sich durch Modelle mit partiellen Dgl beschreiben.
- In der Physik spielen partielle Dgl eine große Rolle, so u.a. bei Untersuchung von
 - * Gleichgewichtszuständen und Feldern, d.h. Größen, die in Raum und Zeit variieren. Am bekanntesten sind elektrische und magnetische Felder, die sich durch Maxwell'sche Gleichungen (System partieller Dgl) beschreiben

lassen. Ein Schwerpunkt der Elektrodynamik liegt in der Entwicklung von Lösungsmethoden für diese linearen Dgl, die sich zum Teil auch auf andere Typen von Dgl anwenden lassen.

- * Wärmeleitungs- und Diffusionsprozessen
- * Schwingungs- und Wellenvorgängen
- Ein Erfolg der theoretischen Physik besteht darin, daß für eine Reihe von Phänomenen mathematische Modelle gefunden wurden, denen lineare partielle Dgl zugrunde liegen.
- In Anwendungen treten auch nichtlineare Dgl auf wie z.B. bei Navier-Stokes-Gleichungen der Hydrodynamik und beim Dreikörperproblem der Himmelsmechanik, für die sich nicht immer exakte Lösungen finden lassen, so daß man auf numerische Methoden (Näherungsmethoden) angewiesen ist.
- In den letzten Jahrzehnten wurden auch exakte Lösungen für wichtige nichtlineare Gleichungen wie z.B. für gewisse Arten von Navier-Stokes-Gleichungen gefunden (siehe [46, 61, 65]).
- In modernen Theorien der Wirtschaftswissenschaften treten ebenfalls Modelle mit partiellen Dgl auf, wenn auch nicht so zahlreich wie in Technik und Naturwissenschaften.

Aus der Vielzahl von Anwendungen wählen wir im folgenden Beisp. 13.2 drei klassische Aufgaben der Physik für lineare partielle Dgl zweiter Ordnung aus, an denen wir im Abschn. 13.3 die Vorgabe von Anfangs- und Randbedingungen illustrieren und im Kap.15 typische Lösungsmethoden für partielle Dgl skizzieren.

Beispiel 13.2:

- a) Wärmeleitungsvorgänge in homogenen Medien lassen sich durch folgende lineare partielle Dgl zweiter Ordnung beschreiben, die vom *parabolischen Typ* (siehe Abschn. 15.2) sind, wobei x, y, z Ortsvariable und t die Zeitvariable darstellen ($a > 0$ – gegebene reelle Konstante):

$$a1) u_t(x, t) - a \cdot u_{xx}(x, t) = f(x, t)$$

$$a2) u_t(x, y, t) - a \cdot (u_{xx}(x, y, t) + u_{yy}(x, y, t)) = f(x, y, t)$$

$$a3) u_t(x, y, z, t) - a \cdot (u_{xx}(x, y, z, t) + u_{yy}(x, y, z, t) + u_{zz}(x, y, z, t)) = f(x, y, z, t)$$

Der Unterschied zwischen den drei Dgl liegt darin, daß man die Temperaturverteilung

- a1) in einem dünnen langen Stab betrachtet. Man nimmt hier an, daß die Temperaturverteilung im Querschnitt konstant ist und nur von der Längenausdehnung x abhängt, so daß neben der Zeitvariablen t nur eine Ortsvariable x auftritt. Man spricht hier von eindimensionalen Wärmeleitungsgleichungen.
- a2) in einer dünnen Platte betrachtet. Hier nimmt man an, daß die Temperaturverteilung nur in einer Ebene (xy -Ebene) variiert und keine räumliche Ausdehnung besitzt, so daß neben der Zeitvariablen t nur zwei Ortsvariable x, y

auftreten. Man spricht hier von zweidimensionalen Wärmeleitungsgleichungen.

- a3) in einem Gebiet des dreidimensionalen Raumes betrachtet, so daß neben der Zeitvariablen t alle Ortsvariablen x, y, z auftreten. Man spricht hier von dreidimensionalen Wärmeleitungsgleichungen.

Dgl parabolischen Typs finden auch bei Diffusionsvorgängen Anwendung, so daß sie unter der Bezeichnung ein-, zwei- bzw. dreidimensionale *Wärmeleitungs-* und *Diffusionsgleichungen* geführt werden.

Unter Verwendung des *Laplaceoperators* lassen sich parabolische Dgl in der gemeinsamen Kurzform $u_t - a \cdot \Delta u = f$ schreiben, die häufig Anwendung findet.

- b) Schwingungsvorgänge (Wellenausbreitungen) in homogenen Medien lassen sich durch folgende lineare partielle Dgl zweiter Ordnung beschreiben, die vom *hyperbolischen Typ* (siehe Abschn. 15.2) sind, wobei x, y, z Ortsvariable und t die Zeitvariable darstellen ($a > 0$ – gegebene reelle Konstante):

$$b1) u_{tt}(x, t) - a \cdot u_{xx}(x, t) = f(x, t)$$

$$b2) u_{tt}(x, y, t) - a \cdot (u_{xx}(x, y, t) + u_{yy}(x, y, t)) = f(x, y, t)$$

$$b3) u_{tt}(x, y, z, t) - a \cdot (u_{xx}(x, y, z, t) + u_{yy}(x, y, z, t) + u_{zz}(x, y, z, t)) = f(x, y, z, t)$$

Der Unterschied zwischen den drei Dgl liegt darin, daß man Schwingungen

b1) eindimensional betrachtet, z.B. bei einer Saite.

b2) zweidimensional betrachtet, z.B. bei einer Membran.

b3) eines räumlich ausgedehnten (dreidimensionalen) Körpers betrachtet.

Dgl hyperbolischen Typs werden unter der Bezeichnung ein-, zwei- bzw. dreidimensionale *Schwingungs-* und *Wellengleichungen* geführt.

Unter Verwendung des *Laplaceoperators* lassen sich hyperbolische Dgl in der gemeinsamen Kurzform

$$u_{tt} - a \cdot \Delta u = f$$

schreiben, die häufig Anwendung findet.

- c) Gleichgewichtszustände und stationäre (zeitunabhängige) Vorgänge wie z.B. stationäre Wärmeverteilungen oder Felder lassen sich durch lineare partielle Dgl zweiter Ordnung beschreiben, die vom *elliptischen Typ* (siehe Abschn. 15.2) sind, wobei x, y, z Ortsvariable darstellen:

$$c1) u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) = f(x, y)$$

$$c2) u_{xx}(x, y, z) + u_{yy}(x, y, z) + u_{zz}(x, y, z) = f(x, y, z)$$

Der Unterschied zwischen den zwei Dgl liegt darin, daß man Vorgänge

c1) in der Ebene,

c2) im Raum

betrachtet. Die in c1 und c2 gegebenen Dgl elliptischen Typs werden als *Poissonsche Dgl* und im homogenen Fall (d.h. $f \equiv 0$) als *Laplacesche Dgl* oder *Po-*

tentialgleichungen bezeichnet. Elliptische Dgl sind mit parabolischen Dgl verwandt, da sie stationäre Lösungen (d.h. $u_t = 0$) darstellen.

Unter Verwendung des *Laplaceoperators* lassen sich elliptische Dgl in der gemeinsamen Kurzform

$$\Delta u = f$$

schreiben, die häufig Anwendung findet.

Die in den Beisp. a – c betrachteten linearen Dgl werden *homogen* (d.h. $f=0$), wenn keine *äußeren Einflüsse* vorliegen, wie z.B. Wärmequellen oder Kräfte.



13.3 Anfangs-, Rand- und Eigenwertaufgaben

Eine Lösungsdarstellung für partielle Dgl, die alle möglichen Lösungen enthält, heißt *allgemeine Lösung*, wobei die Existenz von Lösungen vorausgesetzt wird (siehe Abschn. 13.4). Im Unterschied zu gewöhnlichen Dgl, bei denen die allgemeine Lösung frei wählbare Konstanten enthält, sind in allgemeinen Lösungen partieller Dgl frei wählbare Funktionen enthalten, wie im Beisp. 13.1c illustriert wird.

Allgemeine Lösungen lassen sich für partielle Dgl ebenso wie für gewöhnliche nur für Sonderfälle konstruieren. Sie besitzen für praktische Anwendungen weniger Bedeutung. Hier sind ebenso wie bei gewöhnlichen Dgl spezielle Lösungen gesucht, die gewisse Bedingungen erfüllen, die aus praktischen Gegebenheiten entstehen.

Je nach vorliegenden Bedingungen unterscheidet man zwischen

- *Anfangsbedingungen*

Hier werden längs einer gegebenen Kurve (Mannigfaltigkeit) die Werte (*Anfangswerte*) $u(\mathbf{x})$ der Lösungsfunktion und ihrer Normalenableitungen vorgegeben.

Liegen nur Anfangsbedingungen vor, so spricht man von *Anfangswertaufgaben*, denen man z.B. bei Dgl erster Ordnung und hyperbolischen und parabolischen Dgl zweiter Ordnung begegnet (siehe Beisp. 13.3a1, 13.4a und Abschn. 14.2.3 und 15.3).

- *Randbedingungen*

Hier werden Werte (*Randwerte*) für die Lösungsfunktion $u(\mathbf{x})$ auf dem Rand ∂G des Lösungsgebiets G vorgegeben.

Liegen nur Randbedingungen vor, so spricht man von *Randwertaufgaben*, denen man z.B. bei elliptischen Dgl zweiter Ordnung begegnet (siehe Beisp. 13.3c und Abschn. 15.3).

Sind alle vorgegebenen Randwerte gleich Null, so spricht man von *homogenen Randbedingungen*. Ist auch die (lineare) Dgl homogen, so liegt eine *homogene Randwertaufgabe* vor.

- *Anfangs- und Randbedingungen*

Bei partiellen Dgl kann es erforderlich werden, für gewisse Variablen Randbedingungen und für gewisse Variablen Anfangsbedingungen vorzugeben. Dies ist z.B. bei praktischen Aufgaben der Fall, wo neben Ortsvariablen x zusätzlich eine Zeitvariable t auftritt, d.h. die Lösungsfunktion die Gestalt $u(x,t)$ hat. Hier liegen für die Ortsvariablen meistens Randbedingungen und für die Zeitvariable Anfangsbedingungen vor.

Sind Anfangs- und Randbedingungen gegeben, so spricht man von *Anfangsrandwertaufgaben*, die z.B. bei hyperbolischen und parabolischen Dgl zweiter Ordnung auftreten (siehe Beisp. 13.3b und Abschn. 15.3).



Eigenwertaufgaben (siehe Abschn. 6.3.7) treten auch bei partiellen Dgl auf: Homogene Randwertaufgaben haben bei linearen partiellen Dgl meistens nur die Lösungsfunktion $u(x) \equiv 0$, d.h. die *triviale Lösung*. Eigenwertaufgaben sind spezielle homogene Randwertaufgaben, die einen Parameter λ enthalten, der so zu wählen ist, daß nichttriviale Lösungsfunktionen $u(x)$ existieren, d.h. Lösungsfunktionen $u(x)$, die nicht identisch Null sind.



Beispiel 13.3:

Betrachten wir typische praktische Beispiele für Anfangs-, Anfangsrand- und Randwertaufgaben, die ausführlicher in den Kap.14 und 15 vorgestellt werden.

a) Für die eindimensionale *Wärmeleitungsgleichung*

$$u_t(x,t) - a \cdot u_{xx}(x,t) = f(x,t) \quad (a - \text{gegebene reelle Konstante})$$

der Temperaturverteilung $u(x,t)$ in einem homogenen und dünnen Stab können folgende Aufgaben entstehen:

a1) Eine typische *Anfangswertaufgabe* liegt vor, wenn der Stab als unbegrenzt („unendlich lang“) betrachtet wird. Hier stellt sich die

$$\text{Anfangsbedingung} \quad u(x,0) = u_0(x)$$

mit der zur Zeit $t=0$ bekannten (gegebenen) Anfangstemperatur

$$u_0(x).$$

a2) Wird der Stab als begrenzt mit der Länge l betrachtet, so ergibt sich eine typische *Anfangsrandwertaufgabe* mit

$$\text{Anfangsbedingung für Zeitvariable } t: \quad u(x,0) = u_0(x)$$

$$\text{Randbedingungen für Ortsvariable } x: \quad u(0,t) = u_1(t), \quad u(l,t) = u_2(t)$$

mit an Stabenden bekannten (gegebenen) Temperaturen

$$u_1(t), u_2(t).$$

b) Für die eindimensionale *Schwingungsgleichung (Saitengleichung)*

$$u_{tt}(x,t) - a \cdot u_{xx}(x,t) = f(x,t) \quad (a - \text{gegebene reelle Konstante})$$

ergibt sich für eine fest eingespannte (endliche) Saite der Länge l eine *Anfangsrandwertaufgabe* ($0 \leq x \leq l$, $t \geq 0$) mit

Anfangsbedingungen für Zeitvariable t : $u(x,0) = u_0(x)$, $u_t(x,0) = u_1(x)$

Randbedingungen für Ortsvariable x : $u(0,t) = u(l,t) = 0$

in denen $u_0(x)$ die Anfangsauslenkung und $u_1(x)$ die Anfangsgeschwindigkeit der Saite zur Zeit $t=0$ darstellen. Betrachtet man eine unbegrenzte („unendlich lange“) Saite, so stellt sich eine *Anfangswertaufgabe*.

- c) Betrachtet man eine stationäre (zeitunabhängige) Temperaturverteilung in einem Körper G , so ergibt sich für die Poissonsche Dgl (siehe Beisp. 13.2c)

$$\Delta u(x,y,z) = u_{xx}(x,y,z) + u_{yy}(x,y,z) + u_{zz}(x,y,z) = f(x,y,z)$$

eine *Randwertaufgabe* mit

Randbedingungen $u(x,y,z) = h(x,y,z)$ für alle $(x,y,z) \in \partial G$

und bekannter Funktion $h(x,y,z)$, d.h., auf dem Rand ∂G des betrachteten Körpers G (Lösungsgebiet) sind die Werte $h(x,y,z)$ der Lösungsfunktion $u(x,y,z)$ (Temperatur) bekannt.



13.4 Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen

Analog zu gewöhnlichen Dgl versteht man bei partiellen Dgl unter einer *Lösung* (*Lösungsfunktion* oder *Integral*) eine stetige Funktion $u(\mathbf{x})$ die erforderliche (partielle) Ableitungen besitzt und die Dgl im gegebenen Lösungsgebiet G identisch erfüllt. Eine Lösungsdarstellung heißt *allgemeine Lösung*, wenn sie alle möglichen Lösungen enthält.

Da man schon bei relativ einfachen Dgl keine geschlossene Lösungsdarstellung findet (siehe Beisp. 13.4c), besteht großes mathematisches Interesse an Untersuchungen, unter welchen Voraussetzungen eine vorliegende partielle Dgl überhaupt Lösungen besitzt.

Deshalb werden in der Theorie partieller Dgl unter zusätzlichen Voraussetzungen für Klassen von Dgl Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen nachgewiesen. Dies gestaltet sich aber schwieriger als für gewöhnliche Dgl, so daß wir hierauf nicht eingehen können.



Anwendern in Physik, Technik, Natur- und Wirtschaftswissenschaften interessieren Existenz und Eindeutigkeit bei Dgl weniger, da sie bei den untersuchten Problemen von einer Lösung ausgehen und dies auch vom aufgestellten mathematischen Modell in Form einer Dgl erwarten. Da aber diese Modelle i. allg. nur eine vereinfachte Darstellung liefern ist Vorsicht geboten, weil sie nicht immer eine Lösung besitzen müssen.



Zur Lösungsproblematik partieller Dgl ist folgendes zu bemerken:

- Im Rahmen des Buches betrachten wir sogenannte *klassische Lösungen* $u(\mathbf{x})$ für partielle Dgl m -ter Ordnung. Diese sind dadurch charakterisiert, daß stetige Funktionen $u(\mathbf{x})$ existieren, die stetige partielle Ableitungen bis zur Ordnung m besitzen und die Dgl identisch erfüllen.

In der modernen Theorie wird dieser Lösungsbegriff abgeschwächt, falls keine klassischen Lösungen existieren. Man spricht dann wie bei gewöhnlichen Dgl von *schwachen* oder *verallgemeinerten Lösungen*, die auch bei praktischen Aufgaben Anwendung finden. Hierauf können wir jedoch im Rahmen des Buches nicht eingehen und verweisen auf die Literatur [71].

- Bei praktischen Aufgaben sind meisten nicht allgemeine Lösungen gesucht, sondern Lösungen, die vorgegebene Anfangs- und/oder Randbedingungen erfüllen. Deshalb werden außer bei Dgl erster Ordnung für Dgl ab zweiter Ordnung mit wenigen Ausnahmen keine allgemeinen Lösungen bestimmt, sondern spezielle Lösungen, die gewisse Bedingungen (Anfangs- und Randbedingungen) erfüllen. Dies liegt darin begründet, daß allgemeine Lösungen schwierig zu bestimmen sind und praktisch wenig interessieren.
- *Sachgemäß (korrekt)* gestellte Aufgaben lernen wir bereits bei gewöhnlichen Dgl kennen (siehe Abschn. 4.4). Sie werden auch bei partiellen Dgl gefordert und sind dadurch charakterisiert, daß sie eine eindeutige Lösung besitzen, die stetig von den Nebenbedingungen (Anfangs- und/oder Randbedingungen) und eventuellen weiteren Parametern der Aufgaben abhängen.
- Wenn die Existenz einer Lösung gesichert ist, entsteht naturgemäß die Frage nach ihrer konkreten Form und Berechnung.
Der Idealfall liegt vor, wenn exakte Lösungen partieller Dgl sich aus endlich vielen elementaren mathematischen Funktionen zusammensetzen oder in analytischer (geschlossener) Darstellung (Potenzreihe oder Integral) vorliegen (siehe Beisp. 13.4a und b), d.h., eine exakte (analytische) Lösungsmethode erfolgreich ist. Leider ist dies schon bei relativ einfachen partiellen Dgl nicht der Fall (siehe Beisp. 13.4c).

Beispiel 13.4:

- a) Für die eindimensionale homogene *Schwingungsgleichung (Saitengleichung)*

$$u_{tt}(x,t) - a^2 \cdot u_{xx}(x,t) = 0 \quad (a - \text{gegebene reelle Konstante})$$

läßt sich die *allgemeine Lösung* $u(x,t) = F(x - a \cdot t) + G(x + a \cdot t)$

berechnen (siehe Abschn. 15.4.2), in der F und G frei wählbare zweimal stetig differenzierbare Funktionen einer unabhängigen Variablen sind.

Betrachtet man im Unterschied zum Beisp. 13.3b eine unendlich lange Saite, so ergibt sich eine *Anfangswertaufgabe* für die Schwingungsgleichung mit den Anfangsbedingungen

$$u(x,0) = u_0(x) \quad , \quad u_t(x,0) = u_1(x) \quad (-\infty < x < +\infty \quad , \quad t \geq 0)$$

in denen $u_0(x)$ die Anfangsauslenkung und $u_1(x)$ die Anfangsgeschwindigkeit der Saite zur Zeit $t=0$ darstellen. Für diese Anfangsbedingungen be-

rechnet sich aus der allgemeinen Lösung folgende spezielle Lösung in geschlossener Form (*Lösungsformel von d'Alembert*), die als analytische oder geschlossene Lösungsdarstellung bezeichnet wird (siehe Abschn. 15.4.2):

$$u(x,t) = \frac{1}{2} \cdot (u_0(x-a \cdot t) + u_0(x+a \cdot t)) + \frac{1}{2 \cdot a} \cdot \int_{x-a \cdot t}^{x+a \cdot t} u_1(s) ds$$

Wenn sich die Funktionen $u_0(x)$ und $u_1(x)$ aus elementaren mathematischen Funktionen zusammensetzen und das enthaltene Integral ebenfalls mittels elementarer mathematischer Funktionen berechenbar ist, hat man ein Beispiel für die Lösungsdarstellung mittels elementarer mathematischer Funktionen. Da dies nicht immer der Fall ist, muß man allgemein die gegebene analytische (geschlossene) Lösungsdarstellung mit dem Integralausdruck weiterverwenden.

- b) Bereits folgende einfache lineare partielle (parabolische) Dgl zweiter Ordnung $u_t(x,t) - a^2 \cdot u_{xx}(x,t) = 0$ (*Wärmeleitungsgleichung*)

mit der Anfangsbedingung $u(x,0) = u_0(x)$

und den homogenen Randbedingungen $u(0,t) = u(1,t) = 0$

besitzt keine Lösung, die sich aus einer endlichen Zahl elementarer Funktionen zusammensetzt. Diese *Anfangsrandwertaufgabe* beschreibt die Wärmeleitung in einem endlich langen, homogenen dünnen Stab der Länge 1 (ohne Wärmequellen), an dessen Enden die Temperatur gleich Null ist und dessen Anfangstemperatur (zur Zeit $t=0$) durch die Funktion $u_0(x)$ (mit $u_0(0) = u_0(1) = 0$) vorgegeben ist.

Hier besteht eine Möglichkeit zur Konstruktion der Lösungsfunktion $u(x,t)$ darin, eine analytische (geschlossene) Lösungsdarstellung in Form einer konvergenten Funktionenreihe

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \cdot \sin\left(\frac{k \cdot \pi}{1} \cdot x\right) \cdot e^{-\left(\frac{k \cdot \pi \cdot a}{1}\right)^2 \cdot t}$$

zu erhalten. Diese Vorgehensweise stellen wir im Abschn. 15.4.3 vor.

- c) Folgende einfache nichtlineare partielle Dgl erster bzw. zweiter Ordnung für Lösungsfunktionen $u(x,y)$

* $u_x^2 + u^2 = -1$ besitzt keine Lösung,

* $u_{xy}^2 + u^2 = 0$ besitzt nur die triviale Lösung $u(x,y) \equiv 0$,

wie man sich einfach überlegt.



13.5 Lösungsmethoden

Für partielle Dgl gibt es eine Vielzahl von Lösungsmethoden, in die in den Kap. 14–16 ein Einblick gegeben wird. Bei Lösungsmethoden unterscheidet man ebenso wie bei gewöhnlichen Dgl zwischen exakten und numerischen (siehe Abschn. 13.5.1 und 13.5.2). Allgemeine Prinzipien dieser Methoden werden im Abschn. 3.5 vorgestellt.

13.5.1 Exakte Lösungsmethoden

Unter *exakten Lösungsmethoden* für partielle Dgl versteht man analog zu gewöhnlichen Dgl Methoden, die

- Lösungsfunktionen in endlich vielen Schritten liefern, die sich aus elementaren mathematischen Funktionen zusammensetzen.
- eine geschlossene Darstellung für Lösungsfunktionen liefern, wie z.B. in Form konvergenter unendlicher Funktionenreihen oder in Integralform

Beide Arten von Lösungen werden *exakte* oder *analytische Lösungen* genannt und man spricht von *exakten* oder *analytischen Lösungsmethoden* bzw. *analytischen (geschlossenen) Lösungsdarstellungen*. Diese Methoden sind für partielle Dgl ebenso wie für gewöhnliche nicht universell einsetzbar, sondern nur für spezielle Klassen erfolgreich.

Die im Abschn. 3.5.1 vorgestellten allgemeinen Prinzipien zur exakten Lösung finden auch bei partiellen Dgl Anwendung. Auf diesen Prinzipien aufbauende Lösungsmethoden existieren für eine Reihe von Sonderfällen partieller Dgl, wie im Kap.14 und 15 zu sehen ist. Unter diesen Sonderfällen spielen lineare Dgl eine herausragende Rolle, während für nichtlineare partielle Dgl das Finden exakter Lösungen schwieriger ist.

13.5.2 Numerische Lösungsmethoden

Bei den meisten praktischen Aufgaben ist man auf numerische Lösungsmethoden (Näherungsmethoden) und damit auf den Computer angewiesen, da sich numerische Methoden effektiv nur mittels Computer realisieren lassen.

Die Anwendung numerischer Methoden liegt einerseits in der Tatsache begründet, daß sich für viele praktische Aufgaben keine exakten Lösungsmethoden angeben lassen. Andererseits können für exakt lösbare Dgl die enthaltenen Koeffizienten und Parameter praktisch nur näherungsweise bestimmt werden, so daß eine numerische Lösung mittels Computer vorzuziehen ist.

Die im Abschn. 3.5.2 vorgestellten allgemeine Prinzipien numerischer Methoden finden auch bei partiellen Dgl Anwendung. Im Kap.16 geben wir einen Einblick, um Anwendern zu ermöglichen, MATHCAD und MATLAB und weitere Programmsysteme erfolgreich einsetzen zu können.

13.5.3 Anwendung von MATHCAD und MATLAB

Die Anwendung des Computers ist bei der Lösung praktischer Aufgaben für partielle Dgl erforderlich, da eine exakte bzw. numerische Lösung per Hand nur bei einfachen Aufgaben möglich ist. Die numerische Lösung spielt bei partiellen ebenso wie bei gewöhnlichen Dgl die Hauptrolle, da sich die meisten praktisch auftretenden Dgl nicht exakt lösen lassen.

Wir haben im vorliegenden Buch MATHCAD und MATLAB gewählt, um partielle Dgl exakt bzw. numerisch mittels Computer zu lösen:

- Zur *exakten Lösung* partieller Dgl sind in MATHCAD und MATLAB keine Funktionen vordefiniert. Sie können jedoch für die exakte Lösung gewisser Aufgabenklassen herangezogen werden (siehe Abschn. 14.2.4 und 15.4.7). In MATLAB läßt sich zusätzlich die MAPLE-Funktion **pdsolve** einsetzen, um einfache partielle Dgl exakt zu lösen, wie wir im Beisp. 14.5 und 15.10 für partielle Dgl erster bzw. zweiter Ordnung illustrieren. Ausführlichere Informationen zu dieser Funktion erhält man durch die Eingabe von `>> mhelp pdsolve` in das Arbeitsfenster von MATLAB.
- MATHCAD und MATLAB können mit ihren vordefinierten Funktionen und Erweiterungspaketen nur Standardaufgaben für partielle Dgl zweiter Ordnung *numerisch lösen*. Dies ist nicht anders zu erwarten bei der Vielzahl unterschiedlicher Typen partieller Dgl, die in einzelnen Anwendungsgebieten auftreten. Für MATLAB existiert als Erweiterungspaket eine Toolbox zu partiellen Dgl, die umfangreichere Möglichkeiten zur numerischen Lösung liefert. Im Abschn. 16.4 und 16.5 findet man einen Einblick in Möglichkeiten von MATHCAD und MATLAB zur numerischen Lösung partieller Dgl.

Der Anwender ist bei der Lösung partieller Dgl neben MATHCAD und MATLAB und ihren Erweiterungspaketen auch auf spezielle Programmsysteme (siehe Abschn. 13.5.4) und Literatur der entsprechenden Fachgebiete angewiesen.

13.5.4 Anwendung weiterer Programmsysteme

In MATHCAD und MATLAB sind nur Funktionen zur numerischen Lösung gewisser Klassen partieller Dgl zweiter Ordnung vordefiniert. Falls eine vorliegende partielle Dgl nicht mit MATHCAD oder MATLAB lösbar ist, muß der Anwender zusätzlich spezielle Programmsysteme wie z.B. ANSYS, DIFFPACK, FEMLAB, IMSL, PLTMG und NAG-Bibliothek heranziehen bzw. Literatur entsprechender Fachgebiete oder das Internet konsultieren. Ausführlichere Informationen zu verschiedenen Programmsystemen erhält man aus dem Internet, indem man z.B. den entsprechenden Namen in eine Suchmaschine wie GOOGLE eingibt.

Gegebenenfalls wird es auch erforderlich sein, eigene Programme zu schreiben, wenn für anfallende partielle Dgl keine Programme zur numerischen Lösung gefunden werden. Dies kann auch im Rahmen von MATHCAD und MATLAB geschehen, wobei hier der Vorteil besteht, alle vordefinierten Funktionen einbinden zu können.