

mb
maschinenbau

Russell C. Hibbeler

Technische Mechanik 3 Dynamik

10., überarbeitete und erweiterte Auflage

Übersetzung aus dem Amerikanischen:
Georgia Mais

Fachliche Betreuung und Erweiterungen:
Jörg Wauer, Wolfgang Seemann

PEARSON
Studium

ein Imprint von Pearson Education
München • Boston • San Francisco • Harlow, England
Don Mills, Ontario • Sydney • Mexico City
Madrid • Amsterdam

Kinetik eines Massenpunktes: Arbeit und Energie

3

3.1 Arbeit einer Kraft	193
3.2 Arbeitssatz	198
3.3 Arbeitssatz für ein Massenpunktsystem.....	200
3.4 Leistung und Wirkungsgrad.....	207
3.5 Konservative Kräfte und potenzielle Energie.....	211
3.6 Energieerhaltung.....	214
3.7 Methode Energieintegral.....	220

ÜBERBLICK



Bei der Dimensionierung des Loopings der Achterbahn muss sichergestellt sein, dass die Wagen genügend Energie zum Durchlaufen des Loopings haben und nicht herunterfallen.

Lernziele

- Herleitung des Arbeitssatzes und seine Anwendung auf Aufgaben zur Berechnung der Geschwindigkeit eines Massenpunktes unter der Einwirkung von Kräften als Funktion des Weges
- Untersuchung von Problemen bezüglich Leistung und Wirkungsgrad
- Einführung des Begriffes einer konservativen Kraft und Anwendung des Energieerhaltungssatzes zur Lösung entsprechender Kinetikaufgaben

3.1 Arbeit einer Kraft

In der Mechanik leistet eine Kraft \mathbf{F} nur dann *Arbeit* an einem Massenpunkt, wenn dieser eine *Verschiebung in Richtung der Kraft erfährt*. Betrachten wir die Kraft \mathbf{F} auf den Massenpunkt in Abbildung 3.1. Bewegt sich der Massenpunkt auf der durch die Bogenlänge s charakterisierten Bahn von einem Anfangspunkt, beschrieben durch den Ortsvektor \mathbf{r} zu einem Nachbarpunkt, beschrieben durch den Ortsvektor \mathbf{r}' , dann beträgt die differenzielle Lageänderung $d\mathbf{r} = \mathbf{r}' - \mathbf{r}$. Der Betrag von $d\mathbf{r}$ wird durch ds wiedergegeben, dem differenziellen Bogenlängenelement der Bahn. Der Winkel zwischen $d\mathbf{r}$ und \mathbf{F} ist θ , Abbildung 3.1, und die Arbeit dW von \mathbf{F} ist eine *skalare Größe*, definiert als

$$dW = F ds \cos \theta$$

Aufgrund der Definition des Skalarproduktes, siehe Gleichung (C.14), kann diese Gleichung auch in der Form

$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

geschrieben werden. Dieses Ergebnis kann auf zweierlei Weise interpretiert werden: als Produkt von F und der Verschiebung $ds \cos \theta$ in Richtung der Kraft oder als Produkt von ds und des Kraftanteils $F \cos \theta$ in Richtung der differenziellen Verschiebung. Für $0^\circ \leq \theta < 90^\circ$ haben die Kraftkomponente und die differenzielle Verschiebung die *gleiche Richtung*, sodass die Arbeit *positiv* ist, während für $90^\circ < \theta \leq 180^\circ$ diese Vektoren *entgegengerichtet* und die Arbeit damit *negativ* ist. Steht die Kraft *senkrecht* auf der Bewegungsbahn, gilt $dW = 0$, denn $\cos 90^\circ = 0$. Die Arbeit dW ist auch dann null, wenn die Kraft an einem *raumfesten Punkt* angreift, denn dann ist der zurückgelegte Weg gleich null.

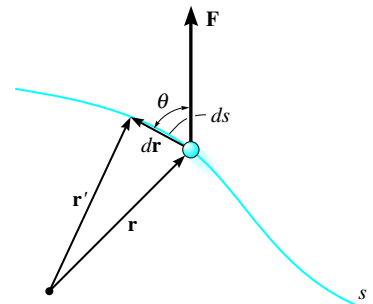


Abbildung 3.1

Die Grundeinheit der Arbeit im SI-System ist das *Joule* [J]. Diese Einheit verknüpft die Einheiten von Kraft und Weg. Ein *Joule* Arbeit wird verrichtet, wenn eine Kraft von einem Newton um einen Meter auf ihrer Wirkungslinie verschoben wird, d.h. $1 \text{ [J]} = 1 \text{ [Nm]}$. Das Moment einer Kraft hat ebenfalls die Einheit [Nm], die Begriffe *Moment* und *Arbeit* sind jedoch in keiner Weise verknüpft. Ein Moment ist eine Vektorgröße, während die Arbeit ein Skalar ist.

Arbeit einer variablen Kraft entlang einem endlichen Weg Legt ein Massenpunkt auf seiner Bewegungsbahn eine endliche Strecke, charakterisiert durch die Ortsvektoren \mathbf{r}_1 und \mathbf{r}_2 bzw. die Bogenlänge von s_1 nach s_2 (gemessen von einem bestimmten Ausgangspunkt auf der Bahnkurve) zurück, siehe Abbildung 3.2a, wird die Arbeit durch Integration berechnet. Mit \mathbf{F} beispielsweise als Funktion des Ortes, $F = F(s)$, ergibt sich unmittelbar

$$W_{1-2} = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{s_1}^{s_2} F \cos \theta \, ds \quad (3.1)$$

Wird der Arbeit leistende Anteil der Kraft, $F \cos \theta$, als Funktion von s aufgetragen, Abbildung 3.2b, entspricht das Integral in dieser Gleichung der *Fläche unter der Kurve* zwischen s_1 und s_2 .

Arbeit einer konstanten Kraft entlang einer Geraden Hat die Kraft \mathbf{F}_0 einen konstanten Betrag und eine Wirkungslinie, die den konstanten Winkel θ mit dieser Wirkungslinie einschließt, Abbildung 3.3a, so beträgt die Koordinate von \mathbf{F}_0 in Richtung der Bahn $F_0 \cos \theta$. Die von \mathbf{F}_0 geleistete Arbeit für die Strecke des Massenpunktes von s_1 nach s_2 wird mit Gleichung (3.1) bestimmt. Es ergibt sich

$$W_{1-2} = F_0 \cos \theta \int_{s_1}^{s_2} ds,$$

d.h.

$$W_{1-2} = F_0 \cos \theta (s_2 - s_1) \quad (3.2)$$

Die Arbeit von \mathbf{F}_0 entspricht hier der *Fläche des Rechtecks* in Abbildung 3.3b.

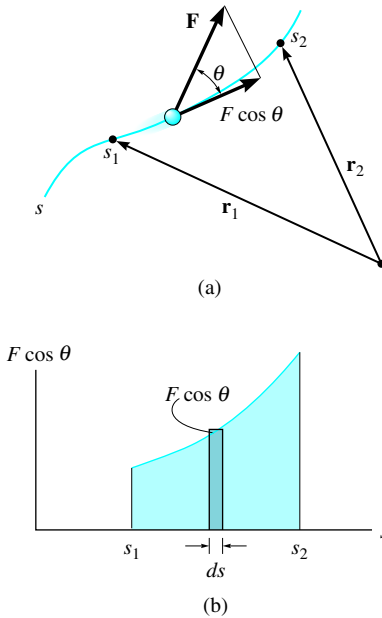


Abbildung 3.2

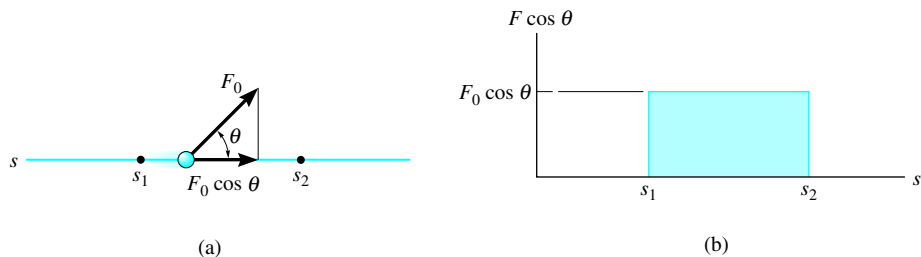


Abbildung 3.3

Arbeit eines Gewichts Betrachten wir einen Massenpunkt, der auf der gekrümmten Bahn, beschrieben durch die Bogenlänge s in Abbildung 3.4 die Strecke von s_1 nach s_2 zurücklegt. Für einen Punkt dazwischen beträgt die zurückgelegte differentielle Wegstrecke $d\mathbf{r} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}$. Wir wenden Gleichung (3.1) mit $\mathbf{G} = -G\mathbf{j}$ an und erhalten

$$\begin{aligned} W_{1-2} &= \int_{r_1}^{r_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{r_1}^{r_2} (-G\mathbf{j}) \cdot (dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}) \\ &= \int_{y_1}^{y_2} -G dy = -G(y_2 - y_1) \end{aligned}$$

d.h.

$$W_{1-2} = -G\Delta y$$

(3.3)

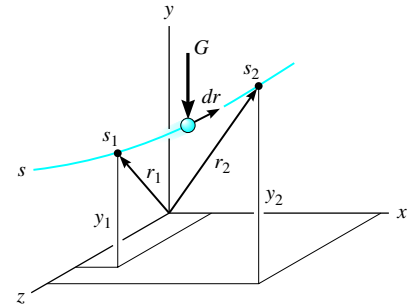


Abbildung 3.4

Die geleistete Arbeit ist also gleich dem Betrag des Gewichts des Massenpunktes mal der von ihm zurückgelegten vertikalen Strecke. Für den in Abbildung 3.4 dargestellten Fall ist die Arbeit *negativ*, denn G ist nach unten und Δy nach oben gerichtet. Wird der Massenpunkt jedoch nach unten verschoben, so ist die Arbeit *positiv*. Warum?

Arbeit einer Federkraft Der Betrag einer äußeren vorgegebenen Kraft, die eine linear elastische Feder um s auslenkt, beträgt $F_F = cs$; c ist die Federkonstante der Feder. Wird die Feder aus der Lage s_1 in die Lage s_2 gedehnt oder gestaucht, Abbildung 3.5a, dann leistet F_F an der Feder *positive* Arbeit, denn in jedem Fall haben Kraft und Auslenkung die *gleiche Richtung*, d.h. es gilt

$$\begin{aligned} W_{1-2} &= \int_{s_1}^{s_2} F_F ds = \int_{s_1}^{s_2} cs ds \\ &= \frac{1}{2} cs_2^2 - \frac{1}{2} cs_1^2 \end{aligned}$$

Diese Gleichung beschreibt die Trapezfläche unter der Geraden $F_F = cs$, Abbildung 3.5b.

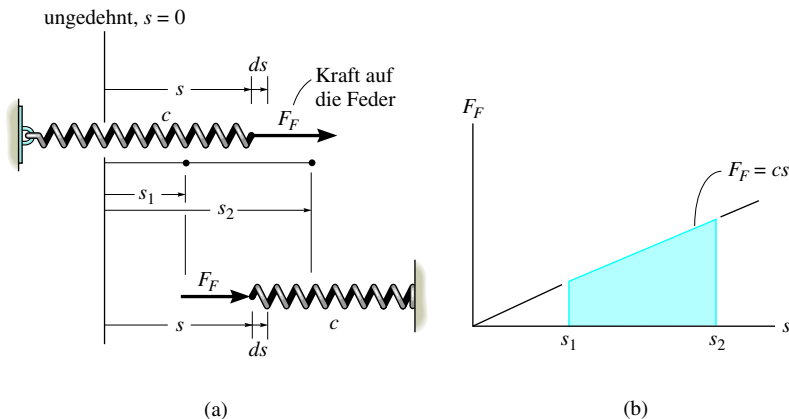
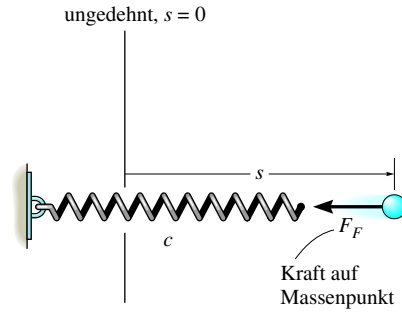


Abbildung 3.5



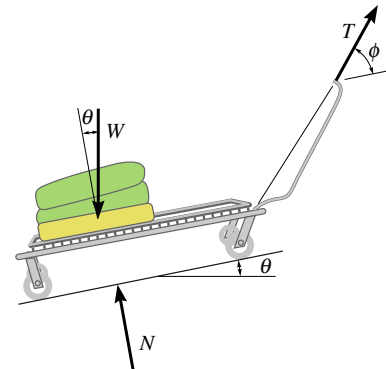
(c)

Abbildung 3.5

Ist ein Massenpunkt (oder ein Körper) an einer Feder befestigt, so entsteht bei seiner Bewegung s eine Kraft F_F von der Feder auf den Massenpunkt, die der Bewegungsrichtung entgegenwirkt, Abbildung 3.5c. Folglich leistet diese Kraft *negative Arbeit* bezüglich des Massenpunktes, wenn dieser sich bewegt und dabei die Feder weiter verlängert (oder gestaucht) wird. Dann ergibt sich

$$W_{1-2} = -\left(\frac{1}{2}cs_2^2 - \frac{1}{2}cs_1^2\right) \quad (3.4)$$

Bei der Anwendung dieser Gleichung wird ein Vorzeichenfehler leicht vermieden, wenn man einfach die Richtung der Federkraft auf den Massenpunkt betrachtet und diese mit der Bewegungsrichtung des Massenpunktes vergleicht. Sind beide *gleich gerichtet*, ist die Arbeit *positiv*, sind sie *entgegengesetzt gerichtet*, dann ist die Arbeit *negativ*.



Die Kräfte auf den Karren, der die Strecke s den Hang hinaufgezogen wird, sind im Freikörperbild eingetragen. Die konstante Zugkraft T leistet die positive Arbeit $W_T = (T \cos \phi) s$, das Gewicht die negative Arbeit $W_G = -(G \sin \theta) s$, die Normalkraft N jedoch keine Arbeit, denn diese Kraft steht senkrecht auf der Bewegungsbahn.

Beispiel 3.1

Die Masse m ruht auf der glatten schiefen Ebene, siehe Abbildung 3.6a. Die Feder ist dabei um s_1 gedehnt. Eine horizontale Kraft P (die größer ist als jene, die im Ruhezustand vorhanden war) schiebt die Masse die schiefe Ebene die zusätzliche Wegstrecke s hinauf. Berechnen Sie die gesamte Arbeit, die alle Kräfte an der Masse leisten.

$$m = 10 \text{ kg}, s = 2 \text{ m}, s_1 = 0,5 \text{ m}, c = 30 \text{ N/m}, P = 400 \text{ N}, \alpha = 30^\circ$$

Lösung

Zunächst wird das Freikörperbild der Masse mit allen realen Kräften (d.h. den eingprägten Kräften und den Zwangskräften) gezeichnet, um alle Einzelbeiträge auf die am Massenpunkt geleistete Arbeit zu erkennen, Abbildung 3.6b.

Horizontale Kraft P Da diese Kraft *konstant* ist, wird die Arbeit mit Gleichung (3.4) bestimmt. Die Arbeit kann zum einen als Kraft mal Weganteil in Richtung der Kraft berechnet werden, d.h.

$$W_P = P(s \cos \alpha) = 400 \text{ N} (2 \text{ m} \cos 30^\circ) = 692,8 \text{ J}$$

oder auch als Verschiebung entlang der schiefen Ebene mal Kraftanteil in Richtung der Bewegung, d.h.

$$W_P = (P \cos \alpha)s = (400 \text{ N} \cos 30^\circ)(2 \text{ m}) = 692,8 \text{ J}$$

Federkraft F_F In der Ausgangslage ist die Feder um s_1 gedehnt, in der Endlage um $s_2 = s_1 + s$. Es ergibt sich eine negative Arbeit, denn Kraft und Bewegung haben entgegengesetzte Richtungen. Die Arbeit von F_F ist somit

$$\begin{aligned} W_F &= -\left[\frac{1}{2}c(s_1 + s_2)^2 - \frac{1}{2}cs_1^2\right] \\ &= -\left[\frac{1}{2}(30 \text{ N/m})(0,5 \text{ m} + 2 \text{ m})^2 - (30 \text{ N/m})(0,5 \text{ m})^2\right] = -90 \text{ J} \end{aligned}$$

Gewicht G Da das Gewicht nach unten, dem vertikalen Anteil der Verschiebung entlang der schiefen Ebene entgegenwirkt, ist die Arbeit negativ, d.h.

$$W_G = -G(s \sin \alpha) = -98,1 \text{ N} (2 \text{ m} \sin 30^\circ) = -98,1 \text{ J}$$

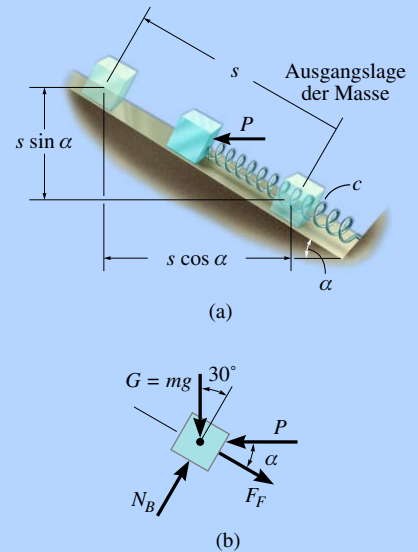
Es kann auch der Gewichtsanteil in Bewegungsrichtung betrachtet werden:

$$W_G = -(G \sin \alpha)s = -(98,1 \sin 30^\circ \text{ N}) 2 \text{ m} = -98,1 \text{ J}$$

Normalkraft N Diese Kraft *leistet keine Arbeit*, denn sie steht *immer* senkrecht auf der Bewegungsbahn.

Gesamtarbeit Die Arbeit aller Kräfte bei einer Verschiebung der Masse um die Strecke s ist die Summe:

$$W_{ges} = W_P + W_F + W_G = 692,8 \text{ J} - 90 \text{ J} - 98,1 \text{ N} = 505 \text{ J}$$

**Abbildung 3.6**

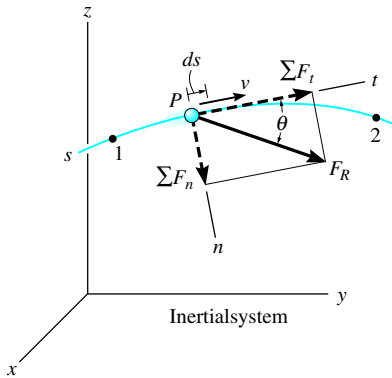


Abbildung 3.7

3.2 Arbeitssatz

Betrachten wir einen Massenpunkt, siehe Abbildung 3.7, der sich zum betreffenden Zeitpunkt – gemessen in einem Inertialsystem – im Punkt P befindet. Der Massenpunkt hat die Masse m und eine Reihe äußerer Kräfte greifen an ihm an, die durch ihre Resultierende $\mathbf{F}_R = \sum \mathbf{F}$ repräsentiert werden. Das Newton'sche Grundgesetz für den Massenpunkt in tangentialer Richtung lautet dann $\sum F_t = ma_t$. Mit der kinematischen Gleichung $a_t = v dv/ds$, der Integration beider Seiten und der Annahme, dass der Massenpunkt in der Anfangslage $s = s_1$ die Geschwindigkeit $v = v_1$, aber später in der Lage $s = s_2$ die Geschwindigkeit $v = v_2$ hat, erhalten wir

$$\begin{aligned} \sum \int_{s_1}^{s_2} F_t ds &= \int_{v_1}^{v_2} mv dv \\ \sum \int_{s_1}^{s_2} F_t ds &= \frac{1}{2} mv_2^2 - \frac{1}{2} mv_1^2 \end{aligned} \quad (3.5)$$

Gemäß Abbildung 3.7 gilt $\sum F_t = \sum F \cos \theta$ und mit der Definition der Arbeit aus Gleichung (3.1) schreiben wir als Ergebnis

$$\sum W_{1-2} = \frac{1}{2} mv_2^2 - \frac{1}{2} mv_1^2 \quad (3.6)$$

Diese Gleichung als ein erstes Integral des Newton'schen Grundgesetzes bezüglich des Ortes ist der so genannte *Arbeitssatz* für den Massenpunkt. Der Term auf der linken Seite ist die Summe der Arbeit *aller* tatsächlichen Kräfte auf den Massenpunkt, wenn dieser sich von Punkt 1 nach Punkt 2 bewegt. Die beiden Terme auf der rechten Seite in der allgemeinen Form $T = \frac{1}{2} mv^2$ definieren die *kinetische Energie* des Massenpunktes am Anfang und am Ende der betrachteten Bewegung. Diese Terme sind immer *positive* Skalare. Gleichung (3.6) ist offenbar einheitlich in den Dimensionen, die kinetische Energie hat die gleiche Einheit wie die Arbeit, z.B. Joule [J].

Bei Anwendung der Gleichung (3.6) wird diese oft in der Form

$$T_1 + \sum W_{1-2} = T_2 \quad (3.7)$$

geschrieben. Das bedeutet, dass die kinetische Anfangsenergie des Massenpunktes plus die von allen Kräften geleistete Arbeit, wenn der Massenpunkt die Wegstrecke vom Anfangs- zum Endpunkt zurücklegt, gleich seiner kinetischen Energie am Ende der Bewegung ist.

Der Arbeitssatz ist also ein Integral der Beziehung $\sum F_t = ma_t$ unter Verwendung der kinematischen Gleichung $a_t = v dv/ds$. Somit ist dieser Satz eine einfache *Substitution* der Bewegungsgleichung $\sum F_t = ma_t$ für den Fall, dass kinetische Aufgaben zu lösen sind, in denen die Geschwindigkeit als Funktion des Weges bei einwirkenden Kräften auf den Massenpunkt gesucht werden, denn genau diese Variablen sind in Gleichung (3.7) miteinander verknüpft. Ist z.B. die Anfangsgeschwindigkeit des Massenpunktes bekannt, und kann die Arbeit aller auf den Massenpunkt wirkenden Kräfte bestimmt werden, dann kann mit Gleichung (3.7) *direkt* die Endgeschwindigkeit v_2 des Massenpunktes nach Zurücklegen



Fährt ein Auto auf diese Stoß-Barrieren, so wird die kinetische Energie des Wagens in Arbeit umgewandelt, die die Barrieren und in einem gewissen Ausmaß auch das Auto verformt. Ist die Energie bekannt, die jede Tonne aufnimmt, so kann eine Stoßabsorbereinrichtung, wie hier dargestellt, konstruiert werden.

einer bestimmten Wegstrecke berechnet werden. Sollte aber v_2 aus der ursprünglichen Bewegungsgleichung bestimmt werden, so sind in der Tat zwei Schritte erforderlich: Zunächst liefert die Bewegungsgleichung $\sum F_t - ma_t = 0$ die Beschleunigung a_t ; anschließend ermittelt man die Geschwindigkeit v_2 durch Integration von $a_t = v dv/ds$. Der Arbeitssatz fasst diese beiden Schritte also zusammen.

Beachten Sie, dass der Arbeitssatz nicht zur Berechnung von Kräften verwendet werden kann, die *senkrecht* auf der Bewegungsbahn stehen, denn diese Kräfte verrichten keine Arbeit am Massenpunkt. Zur Berechnung der Normalkraft hat man die Gleichung $\sum F_n = ma_n$ zu verwenden. Bei nicht geradlinigen Bahnkurven ist der Betrag der Normalkraft allerdings eine Funktion der Geschwindigkeit. Es ist dann eventuell einfacher, die Geschwindigkeit mit Hilfe des Arbeitssatzes zu bestimmen, diesen Wert in die Zwangskraftgleichung $\sum F_n = mv^2/\rho$ einzusetzen und die Normalkraft daraus zu berechnen.

Lösungsweg

Der Arbeitssatz dient zur Lösung von kinetischen Aufgaben, in denen die *Geschwindigkeit* eines Massenpunktes unter der Einwirkung von *Kräften* als Funktion des *Weges* gesucht ist. Folgender Lösungsweg wird vorgeschlagen:

Arbeit (Freikörperbild)

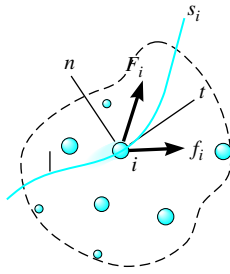
- Führen Sie ein Inertialsystem ein und zeichnen Sie ein Freikörperbild des Massenpunktes, um alle realen Kräfte zu erfassen, die während der Bewegung am Massenpunkt Arbeit verrichten.

Arbeitssatz

- Wenden Sie den Arbeitssatz an: $T_1 + \sum W_{1-2} = T_2$.
- Die kinetische Energie am Anfang und am Ende ist immer positiv, denn sie enthält das Quadrat der Geschwindigkeit ($T = \frac{1}{2}mv^2$)
- Eine Kraft verrichtet Arbeit, wenn sie eine Wegstrecke in Krafrichtung zurücklegt.
- Arbeit ist *positiv*, wenn die Kraft die *gleiche Richtung* hat wie die Verschiebung des Massenpunktes, sonst ist sie negativ.
- Für Kräfte, die wegababhängig sind, ist die Arbeit durch Integration zu erhalten. Grafisch wird die Arbeit durch die Fläche unter der Kraft-Weg-Kurve repräsentiert.
- Die Arbeit des Gewichts ist das Produkt von Gewichtsbetrag und des vertikalen Verschiebungsanteils, $W_G = -G y$. Sie ist positiv, wenn sich das Gewicht nach unten bewegt.
- Die Arbeit einer Feder ist $W_F = \frac{1}{2}cs^2$, worin c die Federkonstante und s die Dehnung bzw. Stauchung der Feder gegenüber dem ungedehnten Zustand ist.

Die Anwendung dieses Lösungsweges wird zusammen mit den zu *Abschnitt 3.3* gehörenden Beispielen erläutert.

3.3 Arbeitssatz für ein Massenpunktsystem



Inertialsystem

Abbildung 3.8

Der Arbeitssatz kann auch auf ein System von n endlich vielen Massenpunkten in einem abgeschlossenen Gebiet des Raums, siehe Abbildung 3.8, erweitert werden. An einem beliebigen i -ten Massenpunkt der Masse m_i greift die resultierende äußere Kraft F_i und die resultierende innere Kraft f_i , die alle anderen Massenpunkte auf den i -ten Massenpunkt ausüben, an. Mit Gleichung (3.5) in tangentialer Richtung ergibt sich der Arbeitssatz für den i -ten Massenpunkt:

$$\frac{1}{2} m_i v_{i1}^2 + \int_{s_{i1}}^{s_{i2}} (F_i)_t ds + \int_{s_{i1}}^{s_{i2}} (f_i)_t ds = \frac{1}{2} m_i v_{i2}^2$$

Analoge Gleichungen ergeben sich, wenn der Arbeitssatz auf die anderen Massenpunkte des Systems angewendet wird. Da Arbeit und kinetische Energie skalare Größen sind, kann das Ergebnis algebraisch addiert werden und man erhält

$$\sum \frac{1}{2} m_i v_{i1}^2 + \sum \int_{s_{i1}}^{s_{i2}} (F_i)_t ds + \sum \int_{s_{i1}}^{s_{i2}} (f_i)_t ds = \sum \frac{1}{2} m_i v_{i2}^2$$

Diese Gleichung kann auch in der Form

$$\sum T_1 + \sum W_{1-2} = \sum T_2 \quad (3.8)$$

geschrieben werden. Sie besagt, dass die anfängliche kinetische Energie ($\sum T_1$) plus der von allen äußeren und inneren Kräften an den Massenpunkten geleistete Arbeit ($\sum W_{1-2}$) gleich der kinetischen Energie des Systems von Massenpunkten am Ende der Bewegung ($\sum T_2$) ist. In diese Gleichung muss wirklich die gesamte Arbeit aller äußeren und inneren Kräfte einbezogen werden. Dabei ist zu berücksichtigen, dass, auch wenn die inneren Kräfte zwischen benachbarten Massenpunkten in gleich großen, aber entgegengesetzt wirkenden kollinearen Paaren auftreten, die gesamte Arbeit aller Kräfte sich im Allgemeinen *nicht aufhebt*, denn die Bahnkurven der verschiedenen Massenpunkte sind *unterschiedlich*. Es gibt allerdings zwei wichtige, häufig auftretende Ausnahmen dieser Regel. Befinden sich die Massenpunkte innerhalb eines *translatorisch bewegten starren* Körpers, erfahren alle inneren Kräfte die gleiche Verschiebung und die innere Arbeit wird gleich null. Massenpunkte, die miteinander durch ein undehnbares Seil verbunden sind, bilden ein System mit inneren Kräften, die um gleiche Beträge verschoben werden. In diesem Fall üben benachbarte Massenpunkte gleiche, aber entgegengesetzt gerichtete innere Kräfte aufeinander aus, deren Komponenten gleich verschoben werden. Daher hebt sich die Arbeit dieser Kräfte gegenseitig auf. Geht man andererseits davon aus, dass der Körper *nicht starr* ist, werden die Massenpunkte des Körpers entlang *unterschiedlicher Bahnkurven* verschoben, etwas von der Energie kann bei den Wechselwirkungen der Kräfte abgegeben und als Wärme verloren gehen oder wird im Körper gespeichert, wenn dauerhafte Verformungen auftreten. Diese Effekte werden kurz am Ende dieses Abschnittes und etwas ausführlicher in *Abschnitt 3.4* diskutiert.

Hier wird der Arbeitssatz nur auf Probleme angewendet, bei denen Energieverluste nicht berücksichtigt werden müssen.

Der in *Abschnitt 3.2* dargestellte Lösungsweg stellt auch zur Anwendung der Gleichung (3.8) eine Bearbeitungsmethode zur Verfügung, allerdings gilt diese Gleichung für das gesamte System. Sind Massenpunkte durch Seile verbunden, können im Allgemeinen weitere Gleichungen zur Verknüpfung der Massenpunktgeschwindigkeiten mit den kinematischen Aussagen aus *Abschnitt 2.9* hergeleitet werden, siehe *Beispiel 3.6*.

Reibungsarbeit bei Gleitvorgängen Eine besondere Art von Problemen, die im Folgenden behandelt wird, erfordert eine besonders sorgfältige Anwendung von Gleichung (3.8), wenn nämlich das Gleiten eines Körpers auf einem anderen unter Berücksichtigung der Reibung diskutiert werden soll. Betrachten wir als Beispiel die Masse in *Abbildung 3.9a*, der auf der rauhen Oberfläche die Strecke s zurücklegt. Die aufgebrachte Kraft P soll gerade mit der *resultierenden* Reibungskraft $\mu_g N$ im Gleichgewicht sein, siehe *Abbildung 3.9b*. Aufgrund des Gleichgewichts wird eine konstante Bewegungsgeschwindigkeit v aufrecht gehalten und Gleichung (3.8) kann wie folgt angewendet werden:

$$\frac{1}{2}mv^2 + Ps - \mu_g Ns = \frac{1}{2}mv^2$$

Diese Gleichung ist für $P = \mu_g N$ erfüllt, die beide auch denselben Weg s zurücklegen. Allerdings sind P und s gleich gerichtet, während $\mu_g N$ und s in entgegengesetzter Richtung weisen. Die antreibende Kraft P führt dem mechanischen System (der Masse) also Energie zu, während die Reibungskraft $\mu_g N$ Energie dissipiert, vom mechanischen System also abführt. Der aus der Erfahrung heraus bekannte Sachverhalt, dass reibungsbehaftetes Gleiten *Wärme erzeugt*, kann damit einfach erklärt werden. Die infolge Gleitreibung dissipierte Energie wird nämlich durch die von P aufgebrachte mechanische Energie verbraucht, wird in Wärme an die Umgebung (einschließlich einer Erwärmung der Masse) abgegeben und ist mechanisch nicht mehr zurück zu gewinnen. Für den Klotz kommt es zu einer Zunahme der *inneren Energie*, die zu einer Temperaturerhöhung desselben führt. Deshalb erwärmen sich bei der Vollbremsung eines Autos sowohl die Bremsbeläge als auch die Bremsscheibe ziemlich stark.

Gleichung (3.8) kann also auch auf Aufgaben mit Gleitreibung angewendet werden, wobei jedoch zu beachten ist, dass die Arbeit $\mu_g Ns$ der resultierenden Reibungskraft in andere Formen der inneren Energie wie Wärme umgewandelt wird.¹

In analoger Weise lassen sich die Überlegungen auch auf Bewegungen anwenden, die beispielsweise durch einen Stoßdämpfer beeinflusst werden. Auch dieses Bauelement entzieht dem mechanischen System Energie in Form von Wärme, die bei Aufrechterhaltung der Bewegung dem System durch einen entsprechenden Antrieb zugeführt werden muss. Oft arbeiten derartige Stoßdämpfer geschwindigkeitsproportional (Dämpferkonstante k), sodass die auf eine bewegende Masse entstehende Rückstellkraft $F_D = kv$ ist, die in die Gegenrichtung der Bewegung weist.

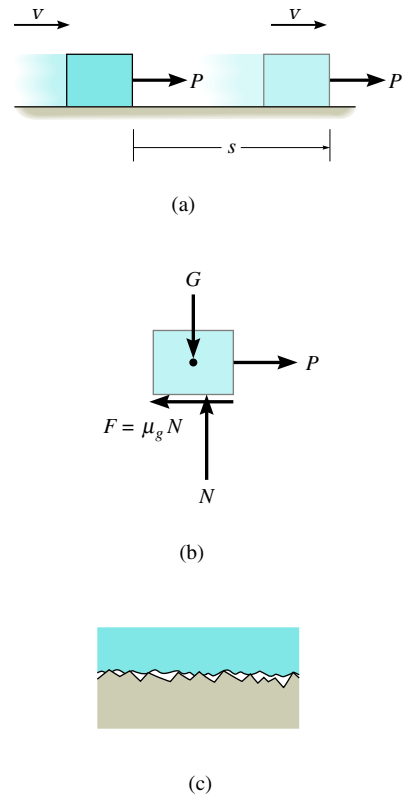
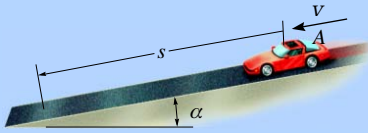


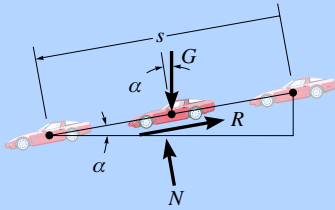
Abbildung 3.9

¹ Vgl. B.A. Sherwood und W.H. Bernard, „Work and Heat Transfer in the Presence of Sliding Friction“, Am.J.Phys. 52, 1001 (1984)

Beispiel 3.2



(a)



(b)

Das Auto mit dem Gewicht G , siehe Abbildung 3.10a, fährt mit der konstanten Geschwindigkeit v die Straße mit der Neigung α hinunter. Der Fahrer tritt heftig auf die Bremse, sodass die Räder blockieren. Wie weit rutscht das Fahrzeug auf der Straße? Der Gleitreibungskoeffizient μ_g zwischen den Rädern und der Straße ist gegeben.

$$G = 17,5 \text{ kN}, v = 6 \text{ m/s}, \alpha = 10^\circ, \mu_g = 0,5$$

Lösung I

Diese Aufgabe kann mit dem Arbeitssatz gelöst werden, da ein Zusammenhang zwischen Kraft, Geschwindigkeit und Weg diskutiert werden soll.

Arbeit (Freikörperbild) Wie in Abbildung 3.10b dargestellt, leistet die Normalkraft N keine Arbeit, denn sie steht senkrecht auf der Bewegungsrichtung entlang der schiefen Ebene. Das Gewicht G wird um $s \sin \alpha$ verschoben und leistet positive Arbeit. Warum? Die Reibkraft R leistet negative Arbeit, wenn sie die *gedachte* Verschiebung s erfährt, denn sie wirkt der Bewegung entgegen. Die Gleichgewichtsbedingung senkrecht zur schiefen Ebene führt auf

$$\begin{aligned} \sum F_n &= 0; & N - G \cos \alpha &= 0 \\ & & N &= 17234,1 \text{ N} \end{aligned}$$

Somit ergibt sich

$$R = \mu_g N = 8617,1 \text{ N}$$

Arbeitssatz

$$T_1 + \sum W_{1-2} = T_2$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{G}{g} \right) v^2 + [G(s \sin \alpha) - Rs] = 0$$

Wir lösen nach s auf und erhalten

$$s = \frac{Gv^2}{2g(R - G \sin \alpha)} = 5,75 \text{ m}$$

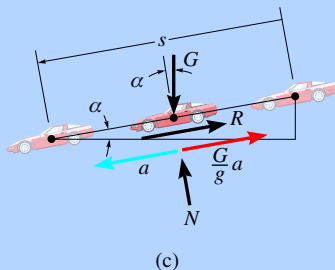
Lösung II

Bei der Lösung auf der Basis der Bewegungsgleichung sind *zwei Schritte* erforderlich. Die Bewegungsgleichung erhält man beispielsweise über das Prinzip von d'Alembert mit dem dynamischen Kräftegleichgewicht entlang der schiefen Ebene gemäß dem generalisierten Freikörperbild in Abbildung 3.10c:

$$\begin{aligned} \sum F_s - m_A a_s &= 0; & G \sin \alpha - R - (G/m)a &= 0 \\ & & a &= -3,13 \text{ m/s}^2 \end{aligned}$$

Mit $a ds = v dv$ (Kinematik) und der konstanten Beschleunigung a ergibt die Integration

$$\begin{aligned} v^2 &= v_0^2 + 2a_0(s - s_0) \\ s &= 5,75 \text{ m} \end{aligned}$$



(c)

Abbildung 3.10

Beispiel 3.3

Für eine bestimmte Zeit hebt der Kran in Abbildung 3.11a den Balken der Masse m mit Hilfe der Kraft F hoch. Ermitteln Sie die Geschwindigkeit nach einer vertikalen Wegstrecke s . Wie lange braucht er, um diese Höhe aus der Ruhe zu erreichen?

$$m = 2500 \text{ kg}, F = (b + cs^2), s = 3 \text{ m}, b = 28 \text{ kN}, c = 3 \text{ kN/m}^2$$

Lösung

Wir können den ersten Teil der Aufgabe mit dem Arbeitssatz lösen, denn Kraft, Geschwindigkeit und Weg in ihrer Wechselwirkung sind zu diskutieren. Die Zeit wird dann mittels einer kinematischen Aussage bestimmt.

Arbeit (Freikörperbild) Wie in Abbildung 3.11b dargestellt, leistet die Zugkraft F positive Arbeit, die durch Integration bestimmt werden muss, weil die Kraft wegbabhängig ist. Das Gewicht ist konstant und leistet negative Arbeit, denn die Verschiebung ist nach oben gerichtet.

Arbeitssatz

$$T_1 + \sum W_{1-2} = T_2$$

$$0 + \int_0^s F d\bar{s} - mgs = \frac{1}{2}mv^2$$

$$\begin{aligned} v^2 &= \frac{2}{m} \int_0^s (b + c\bar{s}^2) d\bar{s} - 2gs \\ &= \frac{2}{m} \left(bs + \frac{c\bar{s}^3}{3} \right) - 2gs \end{aligned}$$

Für $s = 3 \text{ m}$ ergibt sich

$$v = 5,47 \text{ m/s}$$

Kinematik Da die Geschwindigkeit als Funktion des Weges geschrieben werden kann, wird die Zeit mittels $v = ds/dt$ bestimmt. Es ist

$$\begin{aligned} \frac{ds}{dt} &= \left[\frac{2}{m} \left(bs + \frac{cs^3}{3} \right) - 2gs \right]^{1/2} \\ t &= \int_0^s \frac{d\bar{s}}{\left[\frac{2}{m} \left(b\bar{s} + \frac{c\bar{s}^3}{3} \right) - 2g\bar{s} \right]^{1/2}} \end{aligned}$$

Die Integration wird beispielsweise mit einem Taschenrechner durchgeführt. Das Ergebnis ist

$$t = 1,79 \text{ s}$$

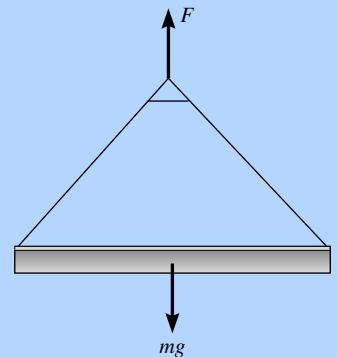


Abbildung 3.11

Beispiel 3.4

Die Plattform P in Abbildung 3.12a hat eine vernachlässigbare Masse und wird so gehalten, dass die undeformbare Seile der Länge l_S die Feder der Steifigkeit c und der Länge l_F um $s = l_F - l_S$ stauchen, wenn die Plattform *unbelastet* ist. Anschließend wird ein Klotz der Masse m darauf gelegt und die Plattform mit Klotz um d nach unten gedrückt, siehe Abbildung 3.12b. Bestimmen Sie die maximale Höhe h_{max} über dem Boden, die der Klotz nach dem Loslassen aus der Ruhe heraus in die Luft fliegt. $m = 2 \text{ kg}$, $l_S = 0,4 \text{ m}$, $l_F = 1 \text{ m}$, $d = 0,1 \text{ m}$, $c = 200 \text{ N/m}$

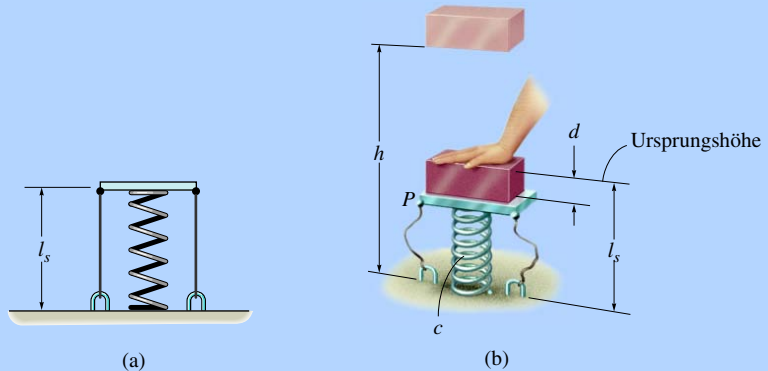
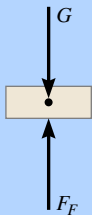


Abbildung 3.12

Lösung

Arbeit (Freikörperbild) Da die Plattform mit Klotz aus der Ruhe losgelassen wird und später die maximale Höhe erreicht, sind die Anfangs- und die Endgeschwindigkeit gleich null. Das Freikörperbild des Klotzes in Kontakt mit der Bühne ist in Abbildung 3.12c dargestellt. Das Gewicht leistet positive Arbeit, die Federkraft negative Arbeit. Warum? Die *Anfangsstauchung* der Feder beträgt $s_1 = s + d$. Aufgrund der undeformbaren Seile kann die *Stauchung* das Maß $s_2 = s$ nicht unterschreiten. Im Moment des Abhebens des Klotzes von der Plattform ist also die *Endstauchung* der Feder genau $s_2 = s$. Die Unterseite des Klotzes steigt dann von der Höhe $h_0 = s_1 = l_S - d$ auf die Endhöhe h_{max} .



(c)

Arbeitssatz

$$T_1 + \sum W_{1-2} = T_2$$

$$\frac{1}{2} m v_1^2 + \left[-\left(\frac{1}{2} c s_2^2 - \frac{1}{2} c s_1^2 \right) - G \Delta y \right] = \frac{1}{2} m v_2^2$$

Da hier $s_1 > s_2$ gilt, ist die mit Gleichung (3.4) berechnete Arbeit der Feder positiv. Das führt auf

$$0 + \left[-\left(\frac{1}{2} c s_2^2 - \frac{1}{2} c s_1^2 \right) - G (h_{max} - h_0) \right] = 0$$

Das ergibt

$$h_{max} = 0,963 \text{ m}$$

Beispiel 3.5

Pakete mit der Masse m werden mit der Geschwindigkeit v_0 von einem Transportband auf eine glatte kreisförmige Rampe mit dem Radius r befördert, siehe Abbildung 3.13a. Bestimmen Sie den Winkel θ_{max} unter dem die Pakete die Oberfläche verlassen.

$$m = 2 \text{ kg}, r = 0,5 \text{ m}, v_0 = 1 \text{ m/s}$$

Lösung

Arbeit (Freikörperbild) Das Freikörperbild eines Paketes in allgemeiner Lage θ mit allen realen Kräften wird gezeichnet. Das Gewicht G leistet beim reibungsfreien Gleiten auf der Unterlage positive Arbeit. Ein Paket verlässt bei θ_{max} die Rampe, dabei erfährt die Gewichtskraft eine vertikale Verschiebung $(r - r \cos \theta_{max})$, siehe Abbildung 3.13b.

Arbeitssatz

$$T_1 + \sum W_{1-2} = T_2$$

$$\frac{1}{2} m v_0^2 + [mg(r - r \cos \theta_{max})] = \frac{1}{2} m v_2^2$$

$$v_2^2 = 2gr(1 - \cos \theta_{max}) + v_0^2 \quad (1)$$

Bewegungsgleichung In Gleichung (1) gibt es zwei Unbekannte, θ_{max} und v_2 . Das Newton'sche Grundgesetz (oder das Prinzip von d'Alembert) in *Normalenrichtung* (siehe Freikörperbild) liefert die Verknüpfung dieser beiden Variablen. (Der Arbeitssatz ersetzt ja $\sum F_t = ma_t$, wie bei der Herleitung dargelegt.) Somit ergibt sich

$$\sum F_n = ma_n; \quad -N + mg \cos \theta = m \left(\frac{v^2}{r} \right)$$

Beim Verlassen der Rampe bei θ_{max} ist $N = 0$ und $v = v_2$ und daraus folgt

$$\cos \theta_{max} = \frac{v_2^2}{gr} \quad (2)$$

Die Unbekannte v_2^2 fällt durch Umformen der Gleichungen (1) und (2) heraus:

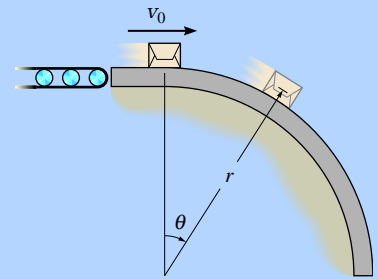
$$gr \cos \theta_{max} = 2gr(1 - \cos \theta_{max}) + v_0^2$$

Somit erhalten wir

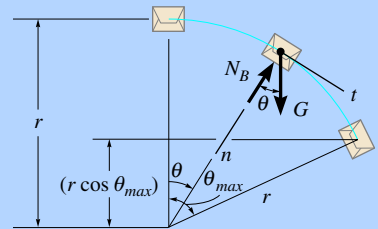
$$\cos \theta_{max} = 0,735$$

$$\theta_{max} = 42,7^\circ$$

Diese Aufgabe wurde bereits in *Beispiel 2.9* gelöst. Beim Vergleich der beiden Wege sieht man, dass der Arbeitssatz eine direktere Lösung liefert.



(a)



(b)

Abbildung 3.13

Beispiel 3.6

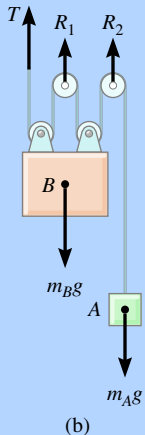
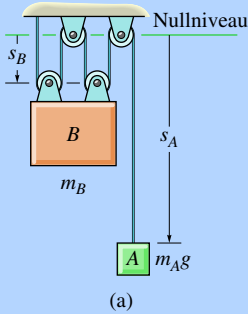


Abbildung 3.14

Die Massen m_A und m_B sind in Abbildung 3.14a dargestellt. Bestimmen Sie die Strecke, die B zwischen der Höhe, in der sie losgelassen wird, und der Höhe, in der sie die Geschwindigkeit v_B erreicht, zurücklegt.

$$m_A = 10 \text{ kg}, m_B = 100 \text{ kg}, v_B = 2 \text{ m/s}$$

Lösung

Die Aufgabe kann durch separates Betrachten der einzelnen Massen und Anwenden des Arbeitssatzes auf jede Masse gelöst werden. Die Arbeit der (unbekannten) Seilkraft fällt heraus, wenn man die beiden Klötze A und B als *System* gemeinsam betrachtet. Die Lösung erfordert die simultane Auswertung des Arbeitssatzes *und* einer kinematischen Beziehung. Für eine konsistente Vorzeichenkonvention nehmen wir an, dass sich beide Massen in *positiver* Richtung nach unten bewegen.

Arbeit (Freikörperbild) Wie im Freikörperbild *des Systems*, Abbildung 3.12b, dargestellt, leisten die Seilkraft T und die Reaktionskräfte F_{R1} und F_{R2} *keine Arbeit*, denn es handelt sich um die Reaktionen von der Decke und den Lagern der Seilrollen, die bei der Bewegung der Massen nicht verschoben werden. Die beiden Gewichtskräfte leisten positive Arbeit, denn – wie oben erläutert – nehmen wir an, dass beide Massen nach unten verschoben werden.

Arbeitssatz Da beide Massen aus der Ruhe losgelassen werden, gilt

$$\begin{aligned} \sum T_1 + \sum W_{1-2} &= \sum T_2 \\ \left\{ \frac{1}{2} m_A (v_A)_1^2 + \frac{1}{2} m_B (v_B)_1^2 \right\} + \{ m_A g \Delta s_A + m_B g \Delta s_B \} \\ &= \left\{ \frac{1}{2} m_A (v_A)_2^2 + \frac{1}{2} m_B (v_B)_2^2 \right\} \end{aligned} \quad (1)$$

Kinematik Auf der Basis der Verfahren zur Berechnung kinematischer Zusammenhänge bei abhängigen Bewegungen aus *Abschnitt 1.9* zeigt Abbildung 3.14a, dass zu einem beliebigen Zeitpunkt die Gesamtlänge l aller vertikalen Seilsegmente durch die Ortskoordinaten s_A und s_B ausgedrückt werden kann:

$$s_A + 4s_B = l$$

Eine Lageänderung führt demnach zur Beziehung

$$\begin{aligned} \Delta s_A + 4\Delta s_B &= 0 \\ \Delta s_A &= -4\Delta s_B \end{aligned} \quad (2)$$

auf Lageebene. Beide Verschiebungen Δs_A und Δs_B sind nach unten positiv. Ableitung nach der Zeit führt zu

$$v_A = -4v_B = -4(2 \text{ m/s}) = -8 \text{ m/s}$$

Beibehalten des negativen Vorzeichens in Gleichung (2) und Einsetzen in Gleichung (1) ergibt

$$\Delta s_B = 0,883 \text{ m}$$

d.h. tatsächlich eine Verschiebung der Masse B nach unten (während sich A nach oben bewegt).

3.4 Leistung und Wirkungsgrad

Leistung Die *Leistung* ist definiert als Arbeit pro Zeiteinheit. Somit ist die momentane *Leistung* einer Maschine, welche die Arbeit dW im differentiellen Zeitintervall dt verrichtet,

$$P = \frac{dW}{dt} \quad (3.9)$$

Verwendet man die Arbeit in der Form $dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, so lautet die Gleichung

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt},$$

d.h.

$$P = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} \quad (3.10)$$

Die Leistung ist also eine *skalare Größe*, \mathbf{v} ist die Geschwindigkeit des Kraftangriffspunktes von \mathbf{F} .

Die SI-Grundeinheit der Leistung ist das Watt [W]. Diese Einheit ist definiert als

$$1 \text{ W} = 1 \text{ J/s} = 1 \text{ Nm/s}.$$

Der Begriff der „Leistung“ ist also die Grundlage zur Bestimmung des erforderlichen Maschinentyps, innerhalb einer bestimmten Zeit eine bestimmte Menge Arbeit zu leisten. Zwei Pumpen können beispielsweise einen Behälter leeren, wenn sie genügend Zeit dafür haben. Die Pumpe mit der größeren Leistung wird dies aber in kürzerer Zeit schaffen, wenn nur eine Pumpe allein arbeitet.

Wirkungsgrad Der *mechanische Wirkungsgrad* einer Maschine ist definiert als das Verhältnis der abgegebenen Nutzleistung zur zugeführten Leistung. Es gilt also

$$\eta = \frac{\text{abgegebene Leistung}}{\text{zugeführte Leistung}} \quad (3.11)$$

Geschieht die Energiezufuhr einer Maschine im *gleichen Zeitintervall* wie die Energieabfuhr, kann der Wirkungsgrad auch als Verhältnis von abgegebener und zugeführter Energie geschrieben werden:

$$\eta = \frac{\text{abgegebene Energie}}{\text{zugeführte Energie}} \quad (3.12)$$



Die abgegebene Leistung dieser Lokomotive entsteht durch die antreibende Reibungskraft F ihrer Räder. Diese Kraft überwindet den Reibwiderstand der angehängten Wagen und kann das Gewicht des Zuges eine Steigung hinaufziehen.

Besteht die Maschine aus mehreren beweglichen Teilen, treten in der Maschine immer Reibungskräfte auf, die dann durch zusätzliche Energie überwunden werden müssen. Folglich gilt für den *Wirkungsgrad einer Maschine immer $\eta < 1$* .



Der Leistungsbedarf des Aufzuges hängt von der vertikalen Kraft F ab, die auf ihn wirkt und ihn nach oben bewegt. Bei der Geschwindigkeit v beträgt die abgegebene Leistung $P = Fv$.

Lösungsweg

Die einem Körper zugeführte Energie wird folgendermaßen berechnet:

- Bestimmen Sie zunächst die äußere Kraft F auf den Körper, die die Bewegung hervorruft. Die Kraft wird normalerweise durch einen Antrieb erzeugt, der entweder innerhalb oder auch außerhalb des Körpers platziert werden kann.
- Im Falle einer Beschleunigung des Körpers kann es erforderlich sein, sein Freikörperbild zu zeichnen und mit der Bewegungsgleichung ($\sum F = ma$) die Antriebskraft F zu bestimmen.
- Nach Ermittlung von F und der Geschwindigkeit v des Punktes, an dem F angreift, wird die Leistung durch Multiplikation des Kraftbetrages mit dem Geschwindigkeitsanteil in Richtung von F bestimmt, (d.h. $P = F \cdot v = Fv \cos \theta$).
- Die Leistung kann durch Berechnung der Arbeit von F pro Zeiteinheit ermittelt werden, entweder als mittlere Leistung, $P_{\text{mittel}} = \Delta W / \Delta t$, oder als momentane Leistung $P = dW/dt$.

Beispiel 3.7

Der Motor M des Hebezeugs in Abbildung 3.15a hat den Wirkungsgrad η . Wie groß muss die zugeführte Leistung sein, um die Kiste K mit dem Gewicht G in dem Moment zu heben, in dem Punkt P des Seiles die Beschleunigung a und die Geschwindigkeit v erfährt. Vernachlässigen Sie die Masse des Flaschenzugs.

$$G = 375 \text{ N}, a = 1,2 \text{ m/s}^2, v = 0,6 \text{ m/s}, \eta = 0,85$$

Lösung

Zur Berechnung der abgegebenen Leistung muss zunächst die benötigte Zugkraft im Seil ermittelt werden, denn diese Kraft wird vom Motor erzeugt.

Aus dem Freikörperbild der Kiste im Sinne d'Alemberts, Abbildung 3.15b, erhalten wir

$$\sum F_y - ma_y = 0; \quad -2T + G - \frac{G}{g}a_K = 0 \quad (1)$$

Die Beschleunigung a_K der Kiste wird über eine kinematische Beziehung mit der bekannten Beschleunigung von Punkt P , Abbildung 3.15a, verknüpft. Mit den Verfahren aus Abschnitt 1.9 werden zunächst auf Lageebene die Koordinaten s_K und s_P in Abbildung 3.15a unter Berücksichtigung eines konstanten Seillängenabschnitts l in Beziehung gesetzt, der sich aus den Lageänderungen s_K und s_P in vertikaler und horizontaler Richtung zusammensetzt: $2s_K + s_P = l$. Zweimaliges Ableiten führt auf

$$2a_K = -a_P \quad (2)$$

Mit $a_P = a = +1,2 \text{ m/s}^2$ berechnen wir $a_K = -a/2 = -0,6 \text{ m/s}^2$. Was bedeutet das negative Vorzeichen? Wir setzen dieses Ergebnis *unter Berücksichtigung* des negativen Vorzeichens in Gleichung (1) ein – denn die Beschleunigung wird in *beiden* Gleichungen (1) und (2) als nach unten positiv angenommen – und erhalten

$$\begin{aligned} -2T + G - \frac{G}{g}a_K &= 0 \\ T &= \frac{1}{2} \left(-\frac{G}{g}a_K + G \right) = 199,0 \text{ N} \end{aligned}$$

Die zum Ziehen des Seils mit der momentanen Geschwindigkeit v erforderliche abgegebene Leistung ist somit

$$P = \mathbf{T} \cdot \mathbf{v} = (199 \text{ N})(0,6 \text{ m/s}) = 119,4 \text{ W}$$

Bei dieser abgegebenen Leistung muss eine *Leistung*

$$\begin{aligned} P_{zu} &= \frac{1}{\eta} P_{ab} \\ &= \frac{1}{0,85} (119,4 \text{ W}) = 140,5 \text{ W} \end{aligned}$$

zugeführt werden. Da die Geschwindigkeit der Kiste sich ständig ändert, gilt dieser Leistungsbedarf *nur für den betrachteten Zeitpunkt*.

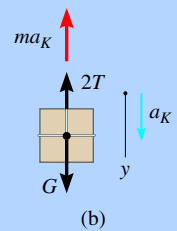
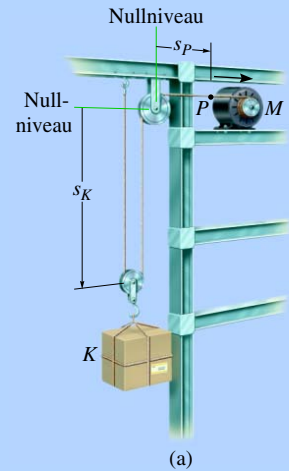


Abbildung 3.15

Beispiel 3.8

Der Sportwagen mit der Masse m in Abbildung 3.16a fährt mit der Geschwindigkeit v , als er mit allen Rädern abgebremst wird. Der Gleitreibungskoeffizient μ_g ist gegeben. Bestimmen Sie die Leistung der Reibungskraft beim Rutschen des Autos. Ermitteln Sie anschließend die Geschwindigkeit des Autos nach einem Rutschen über die Strecke s .

$$m = 2000 \text{ kg}, v_1 = 25 \text{ m/s}, s = 10 \text{ m}, \mu_g = 0,35$$



Abbildung 3.16

Lösung

Wie im Freikörperbild, Abbildung 3.15b, gezeigt, sind die Normalkraft N und die Reibungskraft R die resultierenden Kräfte aller vier Räder.

Zur Ermittlung von N wenden wir die (statische) Gleichgewichtsbedingung in y -Richtung an und erhalten

$$\sum F_y = 0; \quad N = G = mg = 19,62 \text{ kN}$$

Die kinetische Reibungskraft ist somit

$$R = \mu_g(mg) = 0,35(19,62) \text{ kN} = 6,867 \text{ kN}$$

Die Geschwindigkeit des Autos nach der Wegstrecke s kann mit dem Arbeitssatz bestimmt werden. Warum?

$$\begin{aligned} T_1 + \sum W_{1-2} &= T_2 \\ \frac{1}{2}mv_1^2 - Rs &= \frac{1}{2}mv_2^2 \\ v_2 &= 23,59 \text{ m/s} \end{aligned}$$

Die Leistung der Reibungskraft zu Beginn des Bremsvorgangs ist somit

$$P = |\mathbf{R} \cdot \mathbf{v}| = 6,867(10^3) \text{ N}(25 \text{ m/s}) = 172 \text{ kW}$$

3.5 Konservative Kräfte und potenzielle Energie

Konservative Kräfte Wenn die Arbeit einer Kraft, die einen Massenpunkt verschiebt, *unabhängig von der Bahnkurve* des Massenpunktes ist, und nur von Anfangs- und Endpunkt auf der Bahn abhängt, dann heißt diese Kraft *konservativ*. Das Gewicht des Massenpunktes und die Kraft einer elastischen Feder sind zwei typische Beispiele für konservative Kräfte in der Mechanik. Die Arbeit des Gewichtes eines Massenpunktes ist *unabhängig von der Bahnkurve*, denn sie hängt nur von dem *vertikalen Verschiebungsanteil* ab. Die Arbeit einer Feder *auf einen Massenpunkt* ist ebenfalls *unabhängig von der Bahnkurve* des Massenpunktes, denn sie hängt nur von der Dehnung oder Stauchung s der Feder ab.

Als Gegensatz zu einer konservativen Kraft betrachten wir die Gleitreibungskraft von einer ortsfesten Unterlage auf *ein gleitendes Objekt*. Die Arbeit dieser Reibungskraft *hängt von der Bahnkurve ab* – je länger der Weg ist, desto größer die Arbeit. Folglich sind *Reibungskräfte nicht konservativ*. Die Arbeit wird vom Körper in Form von Wärme dissipiert.

Potenzielle Energie Energie kann definiert werden als Möglichkeit, Arbeit zu leisten. Wenn die Energie von der *Bewegung* des Massenpunktes herrührt, heißt sie *kinetische Energie*. Wenn sie sich auf die *Position* des Massenpunktes bezüglich eines festen Nullniveaus bezieht, heißt sie *potenzielle Energie*. Somit ist die *potenzielle Energie* ein Maß für die Arbeit einer konservativen Kraft, wenn sie sich von einer gegebenen Position zum Nullniveau verschiebt. In der Mechanik spielt die potenzielle Energie infolge Gravitationskraft (Gewicht) oder elastischer Federkraft eine wichtige Rolle.

Schwerepotenzial Befindet sich ein Massenpunkt im Abstand y *oberhalb* eines beliebig gewählten Nullniveaus, siehe Abbildung 3.17, so hat das Gewicht G das positive Schwerepotenzial V_G , denn G hat die Möglichkeit, positive Arbeit zu leisten, wenn der Massenpunkt zurück zum Nullniveau verschoben wird. Befindet sich der Massenpunkt *unterhalb* des Nullniveaus, dann ist V_G negativ, denn das Gewicht leistet negative Arbeit, wenn der Massenpunkt zurück zum Nullniveau verschoben wird. Auf Höhe des Nullniveaus gilt $V_G = 0$.

Im Allgemeinen gilt, wenn y *nach oben positiv* ist, für das Schwerepotenzial eines Massenpunktes mit dem Gewicht² G

$$V_G = Gy \quad (3.13)$$

² Das Gewicht wird hier als *konstant* angenommen. Diese Annahme ist für kleine Höhenunterschiede Δy richtig. Bei großen Höhenunterschieden muss die Veränderung des Gewichtes mit der Höhe allerdings berücksichtigt werden, (siehe *Aufgabe 3.97*).

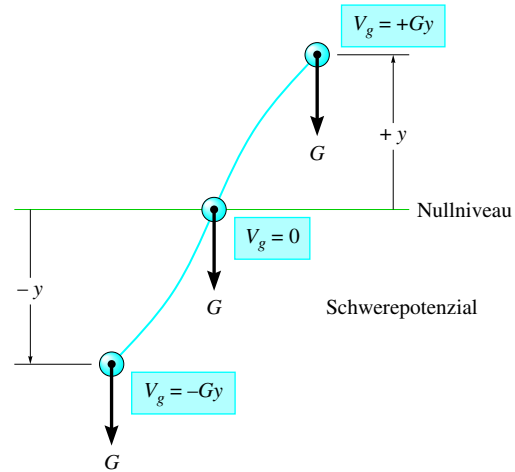


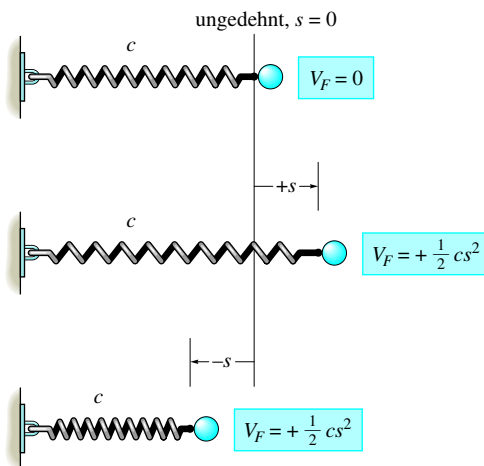
Abbildung 3.17

Elastisches Federpotenzial Wird eine elastische Feder um s verlängert oder gestaucht, so kann die elastische potenzielle Energie V_F als

$$V_F = +\frac{1}{2}cs^2 \quad (3.14)$$

geschrieben werden.

V_F ist immer positiv, denn in der verformten Lage hat die Federkraft die Möglichkeit, immer positive Arbeit am Massenpunkt zu verrichten, wenn die Feder in ihre Ausgangslage zurückkehrt, siehe Abbildung 3.18.



Elastisches Federpotenzial

Abbildung 3.18

Potenzialfunktion Greifen an einem Massenpunkt Gewicht- und elastische Federkräfte an, dann wird seine potenzielle Energie durch die algebraische Summe, die so genannte *Potenzialfunktion*, bestimmt:

$$V = V_G + V_F \quad (3.15)$$

Der Betrag von V hängt gemäß den Gleichungen (3.13) und (3.14) von der Position des Massenpunktes bezüglich der Referenzlage ab.

Befindet sich der Massenpunkt an einem beliebigen Punkt (x,y,z) im Raum, so gilt für die Potenzialfunktion $V = V(x,y,z)$. Die von einer konservativen Kraft beim Verschieben des Massenpunktes vom Punkt (x_1,y_1,z_1) nach (x_2,y_2,z_2) geleistete Arbeit wird durch die *Differenz* dieser Funktion angegeben:

$$W_{1-2} = V_1 - V_2 \quad (3.16)$$

Die Potenzialfunktion für einen Massenpunkt mit dem Gewicht G , der an einer Feder hängt, wird in Abhängigkeit von seiner Lage s bezüglich eines Nullniveaus bei ungedehnter Federlänge angegeben, Abbildung 3.19. Es ergibt sich

$$\begin{aligned} V &= V_G + V_F \\ &= -Gs + \frac{1}{2}cs^2 \end{aligned}$$

Senkt sich der Massenpunkt von s_1 nach s_2 ab, dann gilt für die Arbeit von G und F_F

$$\begin{aligned} W_{1-2} &= V_1 - V_2 = \left(-Gs_1 + \frac{1}{2}cs_1^2\right) - \left(-Gs_2 + \frac{1}{2}cs_2^2\right) \\ &= G(s_2 - s_1) - \left(\frac{1}{2}cs_2^2 - \frac{1}{2}cs_1^2\right) \end{aligned}$$

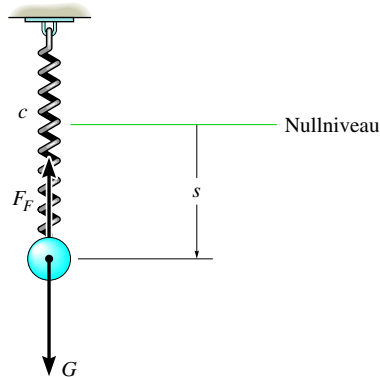


Abbildung 3.19

Wird eine infinitesimale Strecke entlang der Bahnkurve von Punkt (x,y,z) nach $(x + dx, y + dy, z + dz)$ zurückgelegt, dann nimmt Gleichung (3.16) die Form

$$dW = V(x,y,z) - V(x + dx, y + dx, z + dz) = -dV(x,y,z) \quad (3.17)$$

an. Werden Kraft und Verschiebung beispielsweise in kartesischen Koordinaten angegeben, so kann die Arbeit auch als

$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = (F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j} + F_z \mathbf{k}) \cdot (dx \mathbf{i} + dy \mathbf{j} + dz \mathbf{k}) = F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

formuliert werden. Setzen wir dieses Ergebnis in Gleichung (3.17) ein und schreiben das totale Differenzial $dV(x,y,z)$ mit seinen partiellen Ableitungen

$$dV = -(F_x dx + F_y dy + F_z dz) = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz$$

bezüglich V , ist diese Gleichung, da alle Änderungen von x , y und z voneinander unabhängig sind, genau dann erfüllt, wenn

$$F_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial V}{\partial z} \quad (3.18)$$

gilt. Somit ist

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= -\frac{\partial V}{\partial x} \mathbf{i} - \frac{\partial V}{\partial y} \mathbf{j} - \frac{\partial V}{\partial z} \mathbf{k} \\ &= -\left(\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k} \right) V \end{aligned}$$

oder

$$\mathbf{F} = -\nabla V \quad (3.19)$$

wobei der Nabla-Operator über $\nabla = (\partial/\partial x)\mathbf{i} + (\partial/\partial y)\mathbf{j} + (\partial/\partial z)\mathbf{k}$ erklärt ist.

Gleichung (3.19) verknüpft eine Kraft \mathbf{F} mit ihrer Potenzialfunktion V und stellt damit ein mathematisches Kriterium zum Nachweis dafür dar, dass \mathbf{F} konservativ ist. Das Schwerepotenzial eines Körpers mit dem Gewicht G in der Höhe y über dem Nullniveau ist z.B. $V_G = Gy$. Zum Nachweis, dass das Gewicht G konservativ ist, muss gezeigt werden, dass G die Gleichung (3.19) (oder 3.18) erfüllt:

$$F_y = -\frac{\partial V}{\partial y}; \quad F_y = -\frac{\partial}{\partial y}(Gy) = -G$$

Offensichtlich ist dies für die nach unten gerichtete Gewichtskraft G , entgegengesetzt zum positiven, nach oben gerichteten y , der Fall.

3.6 Energieerhaltung

Greifen an einem Massenpunkt konservative *und* nichtkonservative Kräfte an, so ist der Anteil der Arbeit, der von *konservativen Kräften* herrührt, gemäß Gleichung (3.16) die Differenz ihrer potenziellen Energien: $(\sum W_{1-2})_{\text{konservativ}} = V_1 - V_2$. Der Arbeitssatz lautet folglich

$$T_1 + V_1 + (\sum W_{1-2})_{\text{nichtkonservativ}} = T_2 + V_2 \quad (3.20)$$

$(\sum W_{1-2})_{\text{nichtkonservativ}}$ ist die Arbeit der am Massenpunkt angreifenden, nichtkonservativen Kräfte.

Greifen *nur konservative Kräfte* am Körper an, ist dieser Anteil gleich null und wir erhalten

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2 \quad (3.21)$$

Diese Gleichung spiegelt die *Erhaltung der mechanischen Energie* wider und wird deshalb *Energieerhaltungssatz* genannt. Der Satz besagt, dass während der Bewegung die Summe der kinetischen und der potenziellen Energie *konstant* bleibt. Damit dies zutrifft, muss kinetische Energie in potenzielle Energie umgewandelt werden und umgekehrt. Fällt ein Ball mit dem Gewicht G aus der Höhe h über dem Boden (Nullniveau), Abbildung 3.20, ist die potenzielle Energie des Balles maximal, bevor er fällt. Zu dieser Zeit ist die kinetische Energie gleich null. Die gesamte mechanische Energie des Balles in seiner Ausgangslage ist somit

$$E = T_2 + V_2 = 0 + Gh = Gh$$

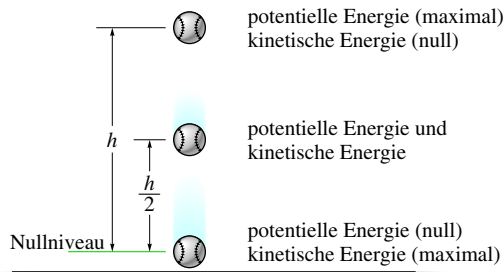


Abbildung 3.20

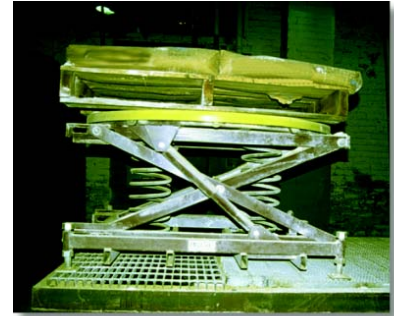
Hat der Ball die Fallhöhe $h/2$ durchlaufen, so gilt für seine Geschwindigkeit die Gleichung $v^2 = v_0^2 + 2a_0(y - y_0)$. Diese Beziehung führt auf $v = \sqrt{2g(h/2)} = \sqrt{gh}$. Die Energie des Balles in der halben Höhe ist also

$$E = T_2 + V_2 = \frac{1}{2} G (\sqrt{gh})^2 + G \frac{h}{2} = Gh$$

Unmittelbar bevor der Ball auf den Boden auftrifft, ist seine potenzielle Energie gleich null (für das gewählte Nullniveau) und seine Geschwindigkeit wird $v = \sqrt{2gh}$. Die gesamte Energie des Balles ist dann

$$E = T_3 + V_3 = \frac{1}{2} G (\sqrt{2gh})^2 + 0 = Gh$$

Wenn der Ball den Boden berührt, so verformt er sich ein wenig, und wenn der Boden hart genug ist, dann prallt er wieder zurück und erreicht die neue Höhe h' , die geringer ist als die ursprüngliche Höhe h . Unter Vernachlässigung des Luftwiderstandes entspricht der Höhenunterschied einem Energieverlust $\Delta E = G(h - h')$, der während des Stoßes auftritt. Dieser führt teilweise zu Geräuschen (durch den abgestrahlten Schall infolge des Stoßes), lokaler Verformung des Balles und des Bodens sowie zu Wärme.



Das Gewicht der Säcke auf der Hebebühne repräsentiert potenzielle Energie, die in den Stützfedern gespeichert wird. Wird ein Sack entfernt, *hebt* sich die Bühne ein Stück, denn ein Teil der potenziellen Energie der Federn wird in zusätzliche potenzielle Schwereenergie der übrigen Säcke umgewandelt. Mit der Vorrichtung kann man Säcke wegnehmen, ohne sich zu bücken, während sie abgeladen werden.

Massenpunktsysteme Greifen an einem System von Massenpunkten nur konservative Kräfte an, dann kann eine Gleichung ähnlich Gleichung (3.14) für die einzelnen Massenpunkte angeschrieben werden. Mit entsprechenden Überlegungen wird dann Gleichung (3.8), $\sum T_1 + \sum W_{1-2} = \sum T_2$, in

$$\sum T_1 + \sum V_1 = \sum T_2 + \sum V_2 \quad (3.22)$$

übergehen. Die Summe der ursprünglichen kinetischen und potenziellen Energien des Systems ist gleich der Summe der kinetischen und der potenziellen Energien des Systems zu einem anderen Zeitpunkt, d.h. es gilt $\sum T + \sum V = \text{konstant}$ zu jedem Zeitpunkt.

Wesentlich ist, dass nur Aufgaben mit konservativen Kräftesystemen (Gewichte und Federn) mit dem Energieerhaltungssatz als Sonderfall des Arbeitssatzes gelöst werden können. Wie oben festgestellt, sind Reibung und andere Widerstandskräfte nicht konservativ. Ein Teil der Arbeit dieser Kräfte wird in Wärmeenergie umgewandelt, wird also in die Umgebung abgegeben und kann nicht mehr zurückgewonnen werden.

Lösungsweg

Mit dem Energieerhaltungssatz werden Aufgaben gelöst, bei denen die *Geschwindigkeit* als Funktion des *Weges* unter der Einwirkung *rein konservativer Kräfte* berechnet werden soll. Diese Aufgabe ist im Allgemeinen *einfacher zu behandeln* als der Arbeitssatz, denn für den Energieerhaltungssatz ist lediglich die Angabe der kinetischen und potenziellen Energie des Massenpunktes an nur *zwei Punkten* der Bahn erforderlich, und nicht die Bestimmung der Arbeit, wenn der Massenpunkt eine *Strecke* zurücklegt. Zur Anwendung wird der folgende Lösungsweg vorgeschlagen.

Potenzielle Energie

- Erstellen Sie eine Zeichnung, die den Massenpunkt in seiner Anfangs- und seiner Endlage auf der Bahn zeigt.
- Führen Sie ein ortsfestes horizontales Nullniveau ein, wenn der Massenpunkt eine vertikale Strecke zurücklegt. Das Schwerepotenzial V_G des Massenpunktes wird bezüglich dieses Nullniveaus berechnet.
- Die Höhe des Massenpunktes bezüglich des Nullniveaus und die Dehnung bzw. Stauchung s von auftretenden Federn werden geometrisch aus den beiden Zeichnungen ermittelt.
- Es gilt $V_G = Gy$, worin y bezogen auf das Nullniveau nach oben positiv und nach unten negativ ist. Entsprechend ist $V_F = \frac{1}{2}cs^2$ immer positiv.

Energieerhaltung

- Wenden Sie den Energieerhaltungssatz $T_1 + V_1 = T_2 + V_2$ an.
- Bei der Berechnung der kinetischen Energie, $T = \frac{1}{2}mv^2$, muss die Geschwindigkeit v bezüglich eines Inertialsystems gemessen werden.

Beispiel 3.9

Mit dem Portalkran im Foto wird die Reaktion eines Flugzeugs bei einem Absturz getestet. Wie in Abbildung 3.21a dargestellt, wird das Flugzeug der Masse m bis zum Winkel $\theta = \theta_1$ angehoben. Nachdem das Flugzeug zur Ruhe gekommen ist, wird das Seil AC gekappt. Bestimmen Sie die Geschwindigkeit des Flugzeugs kurz vor dem Auftreffen auf dem Boden bei $\theta = \theta_2$. Wie groß ist die maximale Zugkraft im Halteseil während der Bewegung. Vernachlässigen Sie den Auftrieb durch die Tragflächen während der Bewegung und die Größe des Flugzeugs.

$$m = 8000 \text{ kg}, l = 20 \text{ m}, \theta_1 = 60^\circ, \theta_2 = 15^\circ$$

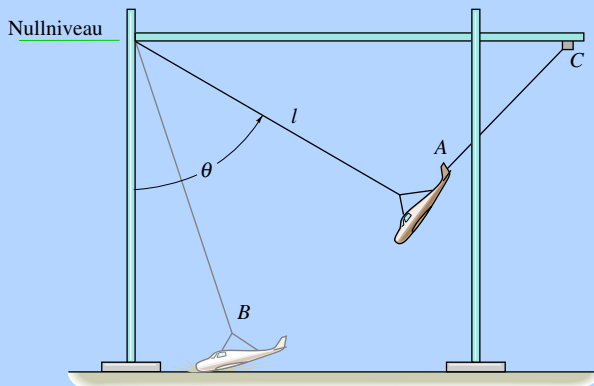


Abbildung 3.21

Lösung

Da die Seilkraft *keine Arbeit* am Flugzeug verrichtet, weil sie immer senkrecht auf der kreisförmigen Bewegungsbahn des Flugzeuges steht, wird diese mittels Newton'schem Grundgesetz oder Prinzip von d'Alembert aus der Zwangskraftgleichung ermittelt. Wir müssen allerdings zunächst die Geschwindigkeit des Flugzeugs in B bestimmen. Dazu kann der Energieerhaltungssatz angewandt werden.

Potenzielle Energie Aus Gründen der Einfachheit wird das Nullniveau in die Höhe der oberen Kante des Portals gelegt.

Energieerhaltung

$$\begin{aligned} T_A + V_A &= T_B + V_B \\ \frac{1}{2} m v_A^2 - mgl \cos \theta_1 &= \frac{1}{2} m v_B^2 - mgl \cos \theta_2 \\ v_B &= \sqrt{2gl (\cos \theta_1 - \cos \theta_2)} = 13,5 \text{ m/s} \end{aligned}$$

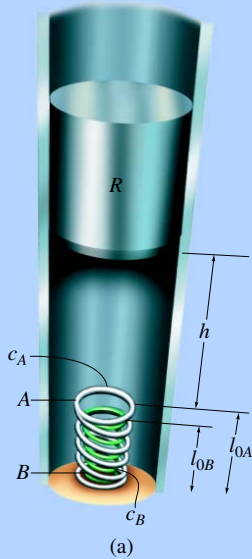
Zwangskraftgleichung Aus dem Freikörperbild für Punkt B , siehe Abbildung 3.21b, liefert das Newton'sche Grundgesetz in Normalenrichtung

$$\begin{aligned} \sum F_n &= m a_n; \quad T - mg \cos \theta_2 = m \frac{v_B^2}{l} \\ T &= mg \cos \theta_2 + m \frac{v_B^2}{l} = 149 \text{ N} \end{aligned}$$



(b)

Beispiel 3.10



Der Rammkolben in Abbildung 3.22a mit der Masse m wird in der Höhe h über der Feder A (Federkonstante c_A) aus der Ruhe freigegeben. Eine zweite Feder B (Federkonstante c_B) ist in A eingebettet. Bestimmen Sie den Federweg s_A von A , bei dem der Rammkolben zur Ruhe kommt. Die ungedehnte Länge jeder Feder ist gegeben. Vernachlässigen Sie die Masse der Federn.

$m = 100 \text{ kg}$, $l_{0A} = 0,4 \text{ m}$, $l_{0B} = 0,3 \text{ m}$, $h = 0,75 \text{ m}$, $c_A = 12 \text{ kN/m}$,
 $c_B = 15 \text{ kN/m}$

Lösung

Potenzielle Energie Wir nehmen an, dass der Rammkolben in dem Moment, wenn er zur Ruhe kommt, beide Federn staucht. Das Nullniveau liegt in Höhe der Ausgangslage des Kolbens, siehe Abbildung 3.22b. Wenn die kinetische Energie erneut null wird ($v_2 = 0$), dann wird A um s_A und B um $s_B = s_A - (l_{0A} - l_{0B})$ gestaucht.

Energieerhaltung

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2$$

$$\frac{1}{2} m v_1^2 + 0 = \frac{1}{2} c_A s_A^2 + \frac{1}{2} c_B (s_A - (l_{0A} - l_{0B}))^2 - mg(h + s_A)$$

$$0 = \frac{1}{2} c_A s_A^2 + \frac{1}{2} c_B (s_A^2 - 2s_A(l_{0A} - l_{0B}) + (l_{0A} - l_{0B})^2) - mgh - mgs_A$$

Wir stellen die Gleichung um und erhalten

$$\left(\frac{1}{2} c_A + \frac{1}{2} c_B\right) s_A^2 + (c_B(l_{0A} - l_{0B}) - mg) s_A + \left(\frac{1}{2} c_B(l_{0A} - l_{0B})^2 - mgh\right) = 0$$

Wir lösen die quadratische Gleichung und berechnen die positive Wurzel³ von s_A zu

$$s_A = 0,331 \text{ m}$$

Für s_B ergibt sich $s_B = 0,331 \text{ m} - 0,1 \text{ m} = 0,231 \text{ m}$, also ein positiver Wert. Die Annahme, dass beide Federn vom Kolben gestaucht werden, ist also korrekt.

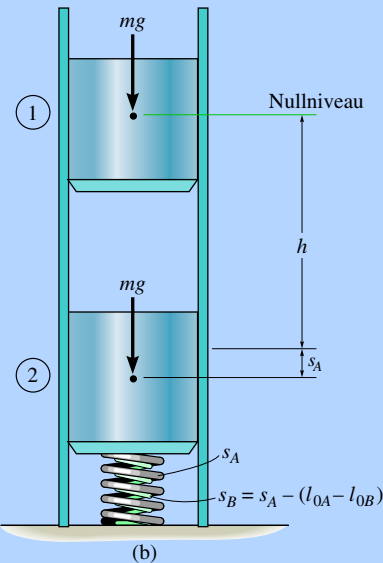


Abbildung 3.22

3 Die zweite Wurzel, $s_A = -0,148 \text{ m}$, ist physikalisch sinnlos. Da positive s nach unten gemessen werden, bedeutet ein negatives s , dass die Feder A nach oben gedehnt werden müsste, um den Kolben zum Anhalten zu bringen.

Beispiel 3.11

Die glatte Hülse C in Abbildung 3.23a passt spielfrei auf die vertikale Welle. Die Feder ist ungedehnt, wenn die Hülse in Position A ist. Bestimmen Sie die Geschwindigkeit der Hülse bei $y = y_1$, wenn sie (a) in A aus der Ruhe losgelassen wird, (b) in A mit der Geschwindigkeit v_A nach oben gestartet wird.

$$m = 2 \text{ kg}, l_0 = 0,75 \text{ m}, c = 3 \text{ N/m}, v_A = 2 \text{ m/s}, y_1 = 1 \text{ m}$$

Lösung**Teilaufgabe a)**

Potenzielle Energie Aus Gründen der Einfachheit wird das Nullniveau durch AB gelegt, Abbildung 3.23b. Befindet sich die Hülse in C , so beträgt das Schwerpotenzial $-(mg)y_1$, denn sie befindet sich *unterhalb* des Nullniveaus, und die potenzielle Federenergie beträgt $\frac{1}{2}c(\Delta l)^2$. Die *Längenänderung* Δl der Feder berechnet sich zu $\Delta l = l - l_0 = 0,5 \text{ m}$, worin die verformte Federlänge mit $l = \sqrt{y_1^2 + l_0^2} = 1,25 \text{ m}$ ermittelt werden kann.

Energieerhaltung

$$T_A + V_A = T_C + V_C$$

$$\frac{1}{2}mv_A^2 + 0 = \frac{1}{2}mv_C^2 + \left\{ \frac{1}{2}c(\Delta l)^2 - mgy_1 \right\}$$

$$0 + 0 = \frac{1}{2}mv_C^2 + \left\{ \frac{1}{2}c(\Delta l)^2 - mgy_1 \right\}$$

$$v_C = \sqrt{-\frac{2}{m} \left\{ \frac{1}{2}c(\Delta l)^2 - mgy_1 \right\}} = 4,39 \text{ m/s}$$

Diese Aufgabe kann auch durch Auswertung der Bewegungsgleichung oder mit dem Arbeitssatz gelöst werden. Dabei müssen jeweils die Änderung des Betrages und der Richtung der Federkraft berücksichtigt werden (siehe *Beispiel 3.4*). Das oben vorgestellte Lösungsverfahren ist in diesem Fall jedoch deutlich einfacher, denn die Berechnungen hängen *nur* von Werten am Anfangs- und am Endpunkt der Bahn ab.

Teilaufgabe b)

Energieerhaltung Man muss lediglich die kinetische Energie T_A modifizieren, ansonsten bleibt die Rechnung unverändert:

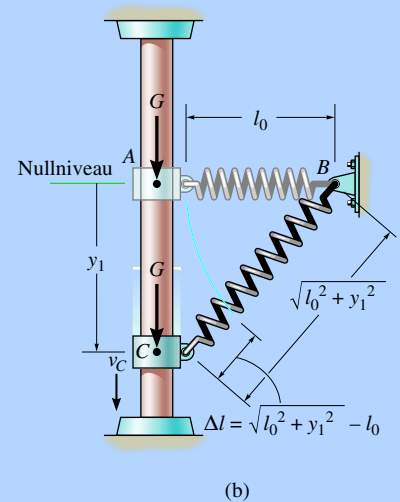
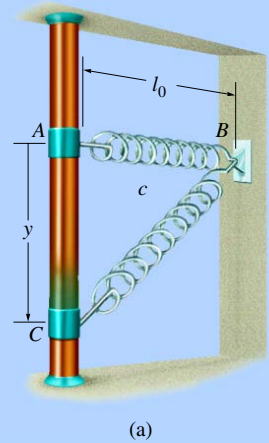
$$T_A + V_A = T_C + V_C$$

$$\frac{1}{2}mv_A^2 + 0 = \frac{1}{2}mv_C^2 + \left\{ \frac{1}{2}c(\Delta l)^2 - mgy_1 \right\}$$

$$\frac{1}{2}mv_C^2 = \frac{1}{2}mv_A^2 - \left\{ \frac{1}{2}c(\Delta l)^2 - mgy_1 \right\}$$

$$v_C = \sqrt{v_A^2 - \frac{2}{m} \left\{ \frac{1}{2}c(\Delta l)^2 - mgy_1 \right\}} = 4,82 \text{ m/s}$$

Beachten Sie, dass die kinetische Energie der Hülse nur vom *Quadrat* der Geschwindigkeit und damit nur von ihrem *Betrag* abhängt. Daher ist unerheblich, ob sich die Hülse nach oben oder nach unten bewegt, wenn sie in A mit endlicher Geschwindigkeit gestartet wird.

**Abbildung 3.23**

3.7 Methode Energieintegral

Das Verfahren dient bei konservativen mechanischen Systemen zur Berechnung der Lage $\mathbf{r}(t)$ aus der mit Hilfe des Energieerhaltungssatzes als erstes Integral gefundenen Beziehung $\dot{\mathbf{r}}(\mathbf{r})$ durch *nochmalige* Integration. Dabei wird vorausgesetzt, dass sich die Lage des Massenpunktes durch eine Koordinate, z.B. die Bogenlänge s , beschreiben lässt.

Ausgangspunkt ist der Energieerhaltungssatz für einen einzelnen Massenpunkt in der Form

$$\frac{m}{2} \dot{\mathbf{r}}^2 + V(\mathbf{r}) = E_0, \quad \text{d.h.} \quad \frac{m}{2} \dot{s}^2 + V(s) = E_0$$

Auflösen nach \dot{s} liefert

$$\dot{s} = \frac{ds}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m} [E_0 - V(s)]}$$

und nach *Trennen der Veränderlichen*

$$dt = \frac{ds}{\sqrt{\frac{2}{m} [E_0 - V(s)]}}$$

kann formal und zwar bestimmt integriert werden:

$$t - t_0 = \int_{s_0}^s \frac{d\bar{s}}{\sqrt{\frac{2}{m} [E_0 - V(\bar{s})]}} \quad (3.23)$$

Nach (numerischer) Auswertung der rechten Seite erhalten wir $t(s)$ und nach Bilden der Umkehrfunktion $s(t)$ und damit auch $\mathbf{r}(t)$.

Als Ergebnis können wir festhalten, dass für ein konservatives *Einmassen*-System, dessen Lage durch *eine* Koordinate beschrieben wird (und nur dann), mit dem Energieerhaltungssatz als Ausgangspunkt die Zeit-Weg-Berechnung auf ein bestimmtes Integral (eine so genannte Quadratur) zurückgeführt werden kann.

Bereits in *Beispiel 3.3* waren wir auf diesen Sachverhalt gestoßen. Dort wurde die hier allgemein gezeigte Prozedur für die geradlinige Bewegung eines Massenpunktes im Schwerkraftfeld der Erde durchgeführt.

Z U S A M M E N F A S S U N G

- **Arbeit einer Kraft** Eine Kraft leistet Arbeit, wenn sie entlang ihrer Wirkungslinie verschoben wird. Ist die Kraft ortsabhängig, dann gilt $W = \int F ds$. Grafisch wird die Arbeit durch die Fläche unter dem F - s -Diagramm repräsentiert. Bei einer konstanten Kraft und der Verschiebung Δs in Richtung der Kraft gilt $W = F\Delta s$.

Ein typisches Beispiel dafür ist die Arbeit des Gewichts, $W = G\Delta y$. Hier ist Δy die vertikale Verschiebung.

Eine Federkraft $F = cs$ hängt von der Dehnung bzw. Stauchung s der Feder ab. Diese Arbeit wird durch Integration bestimmt und beträgt $W = \frac{1}{2}cs^2$.

- **Arbeitssatz** Wird das Newton'sche Grundgesetz in (tangentialer) Bewegungsrichtung, $\sum F_t = ma_t$, mit der kinematischen Gleichung $a_t ds = v dv$ verknüpft, so erhalten wir den Arbeitssatz:

$$T_1 + \sum W_{1-2} = T_2$$

Die kinetische Anfangsenergie $T_1 = \frac{1}{2}mv_1^2$ eines Massenpunktes plus der Arbeit $\sum W_{1-2}$ aller realen Kräfte auf ihn, während er sich von der Anfangslage zur Endlage bewegt, ist gleich der kinetischen Energie $T_2 = \frac{1}{2}mv_2^2$ des Massenpunktes in der Endlage.

Mit dem Arbeitssatz kann man Aufgaben lösen, in denen die Geschwindigkeit eines Körpers unter der Einwirkung von Kräften als Funktion des Weges gesucht ist. Zur Anwendung sollte ein Freikörperbild gezeichnet werden, um die Kräfte zu erkennen, die Arbeit leisten.

- **Leistung und Wirkungsgrad** Leistung ist Arbeit pro Zeit und wird definiert als $P = dW/dt$, d.h. $P = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$. Zur Anwendung muss die Kraft \mathbf{F} und die Geschwindigkeit \mathbf{v} ihres Angriffspunktes bekannt sein. Der Wirkungsgrad gibt das Verhältnis von zugeführter und abgeführter Energie an. Aufgrund von Reibungsverlusten ist er immer kleiner 1.

- **Energieerhaltung** Eine konservative Kraft leistet eine von ihrer Bahnkurve unabhängige Arbeit. Zwei Beispiele dafür sind die Gewichtskraft und die Federkraft. Reibung ist eine nichtkonservative Kraft, denn die Arbeit hängt von der Länge der Bahn ab. Je länger die zurückgelegte Wegstrecke ist, desto mehr Arbeit wird geleistet. Die Arbeit einer konservativen Kraft kann durch die zugehörige potenzielle Energie ausgedrückt werden, die von einer Referenzlage abhängt. Für das Gewicht beträgt sie $V_G = Gy$ und ist positiv oberhalb eines gewählten Nullniveaus. Für eine Feder ist sie $V_F = \frac{1}{2}cx^2$, wenn man annimmt, dass x bei unverformter Feder verschwindet. Sie ist immer positiv.

Bei konservativen Systemen besteht die mechanische Energie aus kinetischer Energie T , potenzieller Energie des Gewichts und potenzieller Federenergie. Gemäß dem Energieerhaltungssatz ist diese Summe konstant und hat an beliebigen Punkten der Bahn den gleichen Wert, d.h. es gilt

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2 = E$$

Wird die Bewegung eines Massenpunktes nur von Gewichtskraft- und Federkräften hervorgerufen, dann können mit Hilfe des Energieerhaltungssatzes Aufgaben gelöst werden, bei denen die Geschwindigkeit als Funktion des Weges bestimmt werden soll.

Z U S A M M E N F A S S U N G

Aufgaben zu 3.1 bis 3.3

Lösungen finden Sie in *Anhang D*.

3.1 Eine Frau mit der Masse m steht in einem Aufzug, der aus dem Stand mit a nach unten beschleunigt. Bestimmen Sie die Arbeit, die ihr Gewicht leistet, und die Arbeit der Normalkraft vom Boden auf die Frau, wenn der Aufzug eine Strecke d zurücklegt. Erklären Sie, warum die Arbeit dieser Kräfte unterschiedlich ist.

Gegeben: $m = 70 \text{ kg}$, $a = 4 \text{ m/s}^2$, $d = 6 \text{ m}$

3.2 Das Auto mit der Masse m fährt anfänglich mit der Geschwindigkeit v_0 . Welche Strecke muss das Auto mit der Kraft F angetrieben werden, damit es die höhere Geschwindigkeit v_1 erreicht? Vernachlässigen Sie Reibung und Masse der Räder.

Gegeben: $m = 2000 \text{ kg}$, $v_0 = 2 \text{ m/s}$, $v_1 = 5 \text{ m/s}$,
 $F = 4 \text{ kN}$, $\alpha = 10^\circ$, $\beta = 20^\circ$

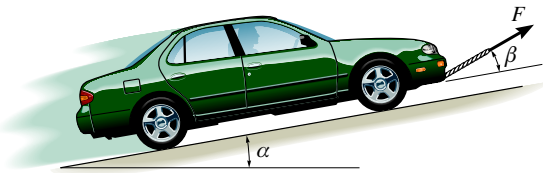


Abbildung A 3.2

3.3 An der Kiste mit der Masse m greift die nach Betrag und Richtung konstante Kraft F an. In der Lage $s = s_1$ bewegt sich die Kiste mit der Geschwindigkeit v_1 nach rechts. Wie groß ist die Geschwindigkeit bei $s = s_2$? Der Gleitreibungskoeffizient μ_g zwischen Kiste und Boden ist gegeben.

Gegeben: $m = 20 \text{ kg}$, $v_1 = 8 \text{ m/s}$, $s_1 = 15 \text{ m}$,
 $s_2 = 25 \text{ m}$, $F = 100 \text{ N}$, $\mu_g = 0,25$, $\alpha = 30^\circ$

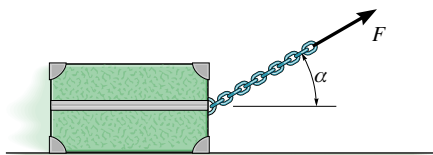


Abbildung A 3.3

***3.4** Mit der Luftfeder A werden die Unterlage B und auch das Spanngewicht C des Transportbandes D geschützt, falls das Band reißt. Die Kraft in der Feder als Funktion der Längenänderung ist grafisch dargestellt. Bestimmen Sie für die angegebenen Werte die maximale Verformung der Feder, wenn das Transportband reißt. Vernachlässigen Sie die Massen der Rolle und des Bandes.

Gegeben: $G = 500 \text{ N}$, $d = 0,3 \text{ m}$, $F = ks^2$,
 $k = 2(10^6) \text{ N/m}^2$

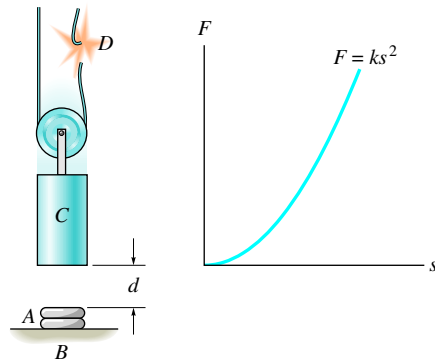


Abbildung A 3.4

3.5 Der glatte Kolben mit dem Gewicht G wird gegen eine Reihe von Tellerfedern gedrückt, die um s zusammengedrückt werden. Die Kraft der zusammengedrückten Federn auf den Kolben ist F . Bestimmen Sie die Geschwindigkeit des Kolbens, nachdem er keinen Kontakt mehr mit den Federn hat. Vernachlässigen Sie die Reibung.

Gegeben: $G = 200 \text{ N}$, $s = 0,01 \text{ m}$, $F = bs^{1/3}$,
 $b = 51 \text{ N/m}^{1/3}$

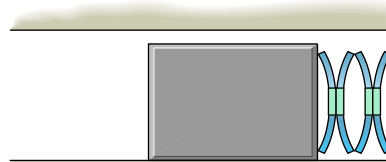


Abbildung A 3.5

3.6 Ein Projektil der Masse m wird aus einem Gewehrlauf der Länge l abgefeuert; dabei verändert sich die Triebkraft auf das Projektil im Lauf gemäß dem dargestellten Kurvenverlauf. Bestimmen sie die Projektilgeschwindigkeit an der Mündung. Vernachlässigen Sie Reibung im Lauf und nehmen Sie an, dass der Lauf horizontal gerichtet ist.

Gegeben: $m = 7 \text{ kg}$, $l = 2 \text{ m}$

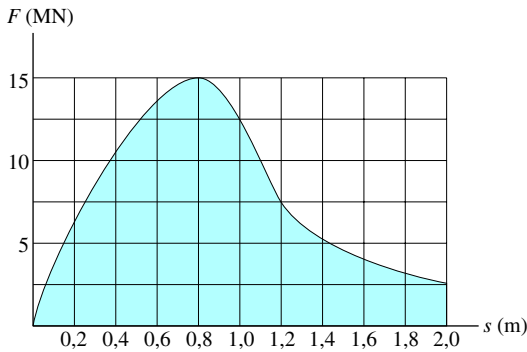


Abbildung A 3.6

3.7 Für die Konstruktion des Puffers B am Eisenbahnwagon der Masse m ist eine nichtlineare Feder mit der dargestellten Last-Verformungs-Kurve erforderlich. Wählen Sie den Wert k der Federkennlinie, bei dem die maximale Federauslenkung d nicht überschritten wird, wenn der Waggon mit der Geschwindigkeit v auf den Prellbock auffährt. Vernachlässigen Sie die Masse der Waggonräder.

Gegeben: $m = 5000 \text{ kg}$, $d = 0,2 \text{ m}$, $v = 4 \text{ m/s}$

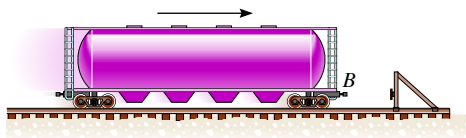
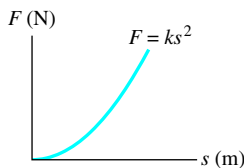


Abbildung A 3.7

***3.8** An der Kiste der Masse m greifen zwei Kräfte an. Bestimmen Sie die Strecke, die sie aus der Ruhe beginnend gleitend zurücklegt, bis sie die Geschwindigkeit v erreicht. Der Gleitreibungskoeffizient μ_g zwischen Kiste und Gleitfläche ist gegeben.

Gegeben: $m = 100 \text{ kg}$, $v = 6 \text{ m/s}$, $F_1 = 800 \text{ N}$, $F_2 = 100 \text{ N}$, $\mu_g = 0,2$, $\alpha = 30^\circ$, $\tan \beta = 3/4$

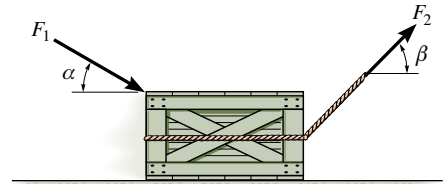


Abbildung A 3.8

3.9 Der Kleinlaster fährt mit der Geschwindigkeit v_1 , als der Fahrer die Bremse betätigt. Der Laster rutscht noch die Strecke d , bevor er zum Stehen kommt. Wie weit rutscht er nach der Bremsbetätigung bei einer höheren Fahrgeschwindigkeit v_2 , wenn er die Bremse in gleicher Weise betätigt?

Gegeben: $v_1 = 40 \text{ km/h}$, $v_2 = 80 \text{ km/h}$, $d = 3 \text{ m}$



Abbildung A 3.9

3.10 Ein Ball vernachlässigbarer Größe mit der Masse m wird mit einer Spannvorrichtung auf die vertikale kreisrunde Bahn geschossen. Die Spannvorrichtung bewirkt, dass die Feder bei $s = 0$ um d gestaucht bleibt. Wie weit (s_1) muss die Feder mit der Federkonstanten c zurückgezogen und dann losgelassen werden, damit der Ball bei $\theta = \theta_1$ die Bahn verlässt?

Gegeben: $m = 0,5 \text{ kg}$, $d = 0,08 \text{ m}$, $\theta_1 = 135^\circ$, $r = 1,5 \text{ m}$, $c = 500 \text{ N/m}$

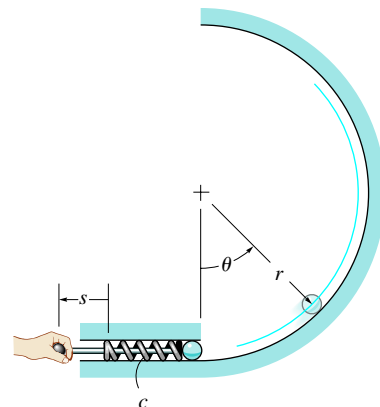


Abbildung A 3.10

■ **3.11** Die Kraft F konstanter Richtung greift am Klotz der Masse m an. Ihre Größe ändert sich mit der Position s des Klotzes. Bestimmen Sie, wie weit sich der Klotz bewegt hat, um die Geschwindigkeit v_1 zu erreichen. Bei $s = 0$ beträgt die Geschwindigkeit des Klotzes v_0 nach rechts. Der Koeffizient der Gleitreibung μ_g zwischen Klotz und Unterlage ist gegeben.

Gegeben: $m = 20 \text{ kg}$, $v_0 = 2 \text{ m/s}$, $v_1 = 5 \text{ m/s}$,
 $\mu_g = 0,3$, $\tan \alpha = 3/4$, $k = 50 \text{ N/m}^2$

***3.12** Die Kraft F konstanter Richtung greift am Klotz mit der Masse m an. Ihre Größe ändert sich mit der Position s des Klotzes. Bestimmen Sie die Geschwindigkeit des Klotzes nach Zurücklegen der Strecke s_1 . Bei $s = 0$ beträgt die Geschwindigkeit des Klotzes v_0 nach rechts. Der Koeffizient der Gleitreibung μ_g zwischen Klotz und Gleitfläche ist gegeben.

Gegeben: $m = 20 \text{ kg}$, $v_0 = 2 \text{ m/s}$, $s_1 = 3 \text{ m}$, $\mu_g = 0,3$,
 $\tan \alpha = 3/4$, $k = 50 \text{ N/m}^2$

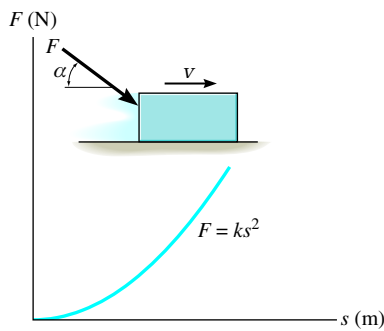


Abbildung A 3.11/3.12

3.13 Wie bei der Herleitung dargelegt, gilt der Arbeitssatz für Beobachter in einem *beliebigen* Inertialsystem. Zeigen Sie, dass dies gilt. Betrachten Sie dazu eine Masse m , die auf einer glatten Oberfläche ruht und an der eine horizontale Kraft F angreift. Befindet sich ein Beobachter A in einem *ortsfesten* System x , bestimmen Sie die Endgeschwindigkeit des Klotzes für die Anfangsgeschwindigkeit v_0 , nachdem er die Strecke s , jeweils nach rechts gerichtet und bezüglich des ortsfesten Systems gemessen, zurückgelegt hat. Vergleichen Sie das Ergebnis mit dem des Beobachters B , dessen x' -Achse sich mit konstanter Geschwindigkeit v' relativ zu A nach rechts bewegt. *Hinweis:* Die Strecke, welche die Masse für den Beobachter B zurücklegt, muss zuerst berechnet werden; dann kann der Arbeitssatz angewendet werden.

Gegeben: $m = 10 \text{ kg}$, $F = 6 \text{ N}$, $v_0 = 5 \text{ m/s}$, $s = 10 \text{ m}$,
 $v' = 2 \text{ m/s}$

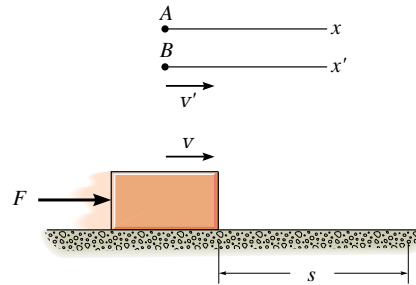


Abbildung A 3.13

3.14 Bestimmen Sie die Geschwindigkeit der Masse m_A nach Loslassen aus der Ruhe und nachdem sie sich um die Strecke s entlang der Ebene nach unten bewegt hat. Der Körper B hat die Masse m_B . Der Koeffizient der Gleitreibung μ_g zwischen Masse A und schiefer Ebene ist gegeben. Wie groß ist die Zugkraft im Seil?

Gegeben: $m_A = 20 \text{ kg}$, $m_B = 10 \text{ kg}$, $s = 2 \text{ m}$, $\mu_g = 0,2$,
 $\alpha = 60^\circ$

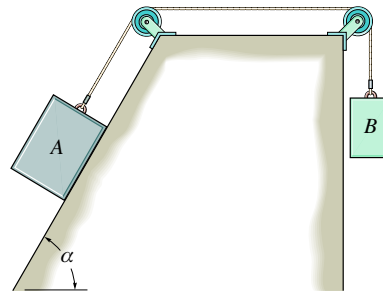


Abbildung A 3.14

3.15 Klotz A hat das Gewicht G_A und Klotz B das Gewicht G_B . Wie groß ist die Geschwindigkeit von Klotz A , nachdem er aus der Ruhe beginnend die Strecke s_A zurückgelegt hat? Vernachlässigen Sie die Reibung und die Masse von Seilen und Rollen.

Gegeben: $G_A = 600 \text{ N}$, $G_B = 100 \text{ N}$, $s_A = 1 \text{ m}$,
 $\tan \alpha = 3/4$

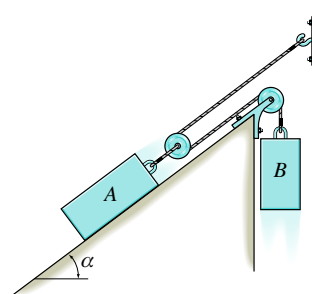


Abbildung A 3.15

***3.16** Der glatte Zylinder mit dem Gewicht G wird gegen eine Reihe von Tellerfedern gedrückt, die um s zusammengedrückt werden. Die Kraft der Feder auf den Zylinder ist $F(s)$. Bestimmen Sie die Geschwindigkeit des Zylinders nach Loslassen gerade in dem Moment, wenn er den Kontakt mit den masselosen Federn wieder verliert, d.h. bei $s = 0$.

Gegeben: $G = 200 \text{ N}$, $s = 0,01 \text{ m}$, $F = bs^{1/3}$,
 $b = 1710 \text{ N/m}^{1/3}$

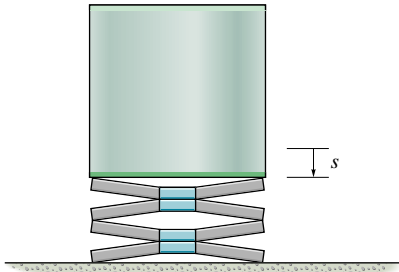


Abbildung A 3.16

3.17 Die Hülse der Masse m befindet sich auf dem glatten Rundstab. Zwei Federn, die an der Hülse befestigt sind, stützen sich gegen die äußere Berandung ab und halten die Hülse ihrer Mittellage. Dabei haben die Federn die ungedehnte Länge l_0 . Die Hülse wird um s_1 verschoben und aus der Ruhe losgelassen. Wie groß ist ihre Geschwindigkeit bei der Rückkehr zur Position $s = 0$?

Gegeben: $m = 20 \text{ kg}$, $l_0 = 1 \text{ m}$, $c = 50 \text{ N/m}$,
 $c' = 100 \text{ N/m}$, $s_1 = 0,5 \text{ m}$, $b = 0,25 \text{ m}$

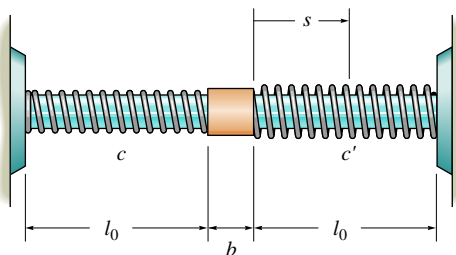


Abbildung A 3.17

3.18 Ermitteln Sie die Höhe h auf der Bahn D , die der Achterbahnwagen der Masse m erreicht, nachdem er in B mit einer Geschwindigkeit gestartet wurde, die gerade für den Überschlag in C ausreichend ist, ohne dass der Wagen aus den Schienen springt. Der Krümmungsradius ρ_C in C ist gegeben.

Gegeben: $m = 200 \text{ kg}$, $h_C = 35 \text{ m}$, $\rho_C = 25 \text{ m}$

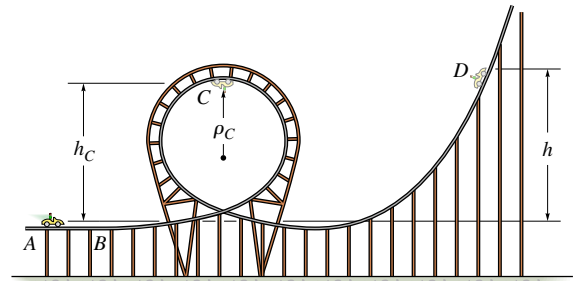


Abbildung A 3.18

3.19 Am Klotz der Masse m greift die Kraft F konstanter Richtung an, ihr Betrag ist eine Funktion des Weges. Bei $s = s_1$ bewegt sich der Klotz gerade mit v_1 nach links. Ermitteln Sie die Geschwindigkeit für $s = s_2$. Der Gleitreibungskoeffizient zwischen Klotz und Unterlage ist μ_g .

Gegeben: $m = 2 \text{ kg}$, $F = F_0/(1 + s/s_0)$, $F_0 = 300 \text{ N}$,
 $s_0 = 1 \text{ m}$, $s_1 = 4 \text{ m}$, $v_1 = 8 \text{ m/s}$, $s_2 = 12 \text{ m}$, $\mu_g = 0,25$,
 $\alpha = 30^\circ$

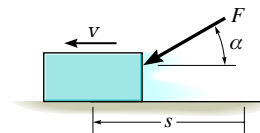


Abbildung A 3.19

***3.20** Die Bewegung eines Lasters wird mittels einer Fahrbahn aus losen Steinen AB und einer Reihe von Aufpralltonnen BC gebremst. Experimentell wird der Fahrwiderstand R pro Rad bestimmt. Die Widerstandskraft F der Aufpralltonnen ist grafisch dargestellt. Bestimmen Sie die Strecke x des Lasters mit dem Gewicht G , die er nach dem Kontakt mit den Aufpralltonnen noch zurücklegt, wenn er sich mit der Geschwindigkeit v dem Beginn der Schlechtwegstrecke A nähert. Vernachlässigen Sie die Größe des Lasters.

Gegeben: $G = 22,5 \text{ kN}$, $s = 10 \text{ m}$, $v = 12 \text{ m/s}$,
 $R = 800 \text{ N}$, $F = bx^3$, $b = 1,25(10^6) \text{ N/m}^3$

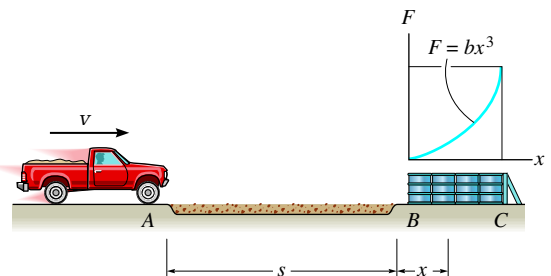


Abbildung A 3.20

3.21 Der Aufprallschutz einer Leitplanke besteht aus einer Gruppe von Tonnen mit einer Füllung aus dämpfendem Material. Die Widerstandskraft F des Aufprallschutzes wird in Abhängigkeit von der Eindringtiefe des Fahrzeugs gemessen. Bestimmen Sie, wie tief ein Auto mit dem Gewicht G in die Leitplanke eindringt. Beim Auftreffen auf die Leitplanke fährt das Auto mit der Geschwindigkeit v .

Gegeben: $G = 20 \text{ kN}$, $v = 11 \text{ m/s}$

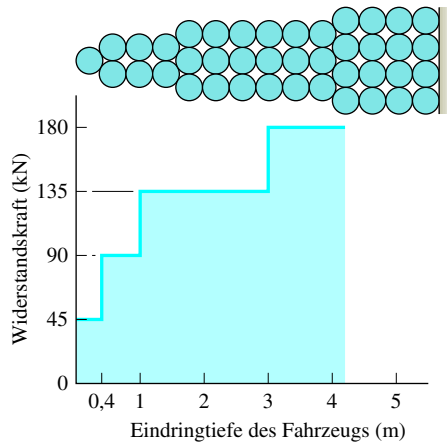


Abbildung A 3.21

3.22 Die Gewichte G_A und G_B der beiden Klötze A und B und der Gleitreibungskoeffizient μ_g zwischen schiefer Ebene und Klotz A sind gegeben. Bestimmen Sie die Geschwindigkeit von A nach Zurücklegen der Strecke s aus der Ruhe. Vernachlässigen Sie die Masse der Seile und der Rollen.

Gegeben: $G_A = 600 \text{ N}$, $G_B = 100 \text{ N}$, $s = 1 \text{ m}$,
 $\alpha = \tan^{-1} 3/4$, $\mu_g = 0,2$

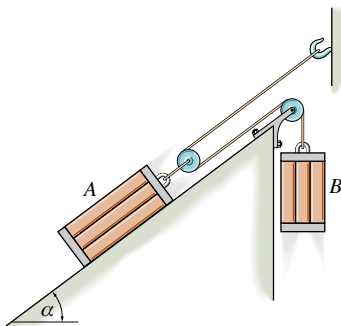


Abbildung A 3.22

3.23 Pakete mit dem Gewicht G werden mit der Geschwindigkeit v_A zur Rutsche transportiert. Bestimmen Sie ihre Geschwindigkeit in den Punkten B und C . Vernachlässigen Sie die Reibung und die Größe der Pakete.

Gegeben: $G = 250 \text{ N}$, $v_A = 0,9 \text{ m/s}$, $r = 1,5 \text{ m}$, $\alpha = 30^\circ$

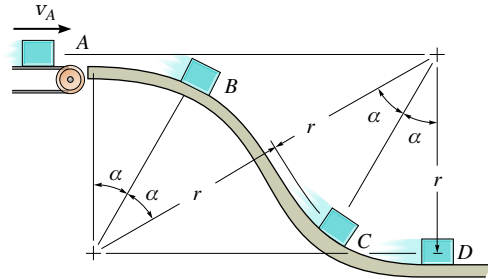


Abbildung A 3.23

***3.24** Der Stahlblock mit der Masse m wird mit der Geschwindigkeit v nach links transportiert, als er auf eine ineinander gebettete Federanordnung auftrifft. Bestimmen Sie die maximale Auslenkung jeder Feder, die zum Anhalten des Stahlblocks erforderlich ist.

Gegeben: $m = 1800 \text{ kg}$, $v = 0,5 \text{ m/s}$, $c_A = 5 \text{ kN/m}$,
 $c_B = 3 \text{ kN/m}$, $l_{0A} = 0,5 \text{ m}$, $l_{0B} = 0,45 \text{ m}$

3.25 Der Stahlblock mit der Masse m wird mit der Geschwindigkeit v nach links transportiert, als er auf eine ineinander gebettete Federanordnung auftrifft. Bestimmen Sie für die gegebene Federkonstante c_A die erforderliche Federkonstante c_B der inneren Feder, sodass der Stahlblock an der Stelle anhält, wenn sich die Vorderseite C im Abstand d von der Wand befindet.

Gegeben: $m = 1800 \text{ kg}$, $v = 0,5 \text{ m/s}$, $c_A = 5 \text{ kN/m}$,
 $l_{0A} = 0,5 \text{ m}$, $l_{0B} = 0,45 \text{ m}$, $d = 0,3 \text{ m}$

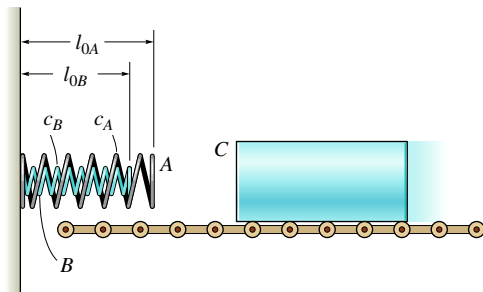


Abbildung A 3.24/3.25

3.26 Der Klotz A hat das Gewicht G_A und Klotz B das Gewicht G_B . Bestimmen Sie die Strecke, die A zurücklegt, bis er aus der Ruhe die Geschwindigkeit v erreicht. Wie groß ist dann die Zugkraft im Seil, das A hält? Vernachlässigen Sie die Masse von Seil und Rollen.

Gegeben: $G_A = 600 \text{ N}$, $G_B = 100 \text{ N}$, $v = 2 \text{ m/s}$

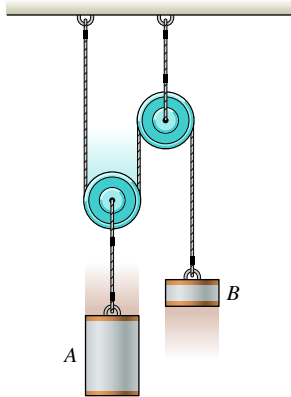


Abbildung A 3.26

3.27 Der Klotz mit dem Gewicht G hat auf der halben Strecke zwischen den Federn A und B die Anfangsgeschwindigkeit v_0 . Nach Auftreffen auf Feder B prallt er zurück und bewegt sich auf der horizontalen Ebene in Richtung Feder A usw. Der Gleitreibungskoeffizient μ_g zwischen Ebene und Klotz ist gegeben. Bestimmen Sie die Gesamtstrecke, die der Klotz zurücklegt, bevor er zur Ruhe kommt.

Gegeben: $G = 250 \text{ N}$, $v_0 = 5 \text{ m/s}$, $c_A = 100 \text{ N/m}$, $c_B = 600 \text{ N/m}$, $l = 1,2 \text{ m}$, $\mu_g = 0,4$

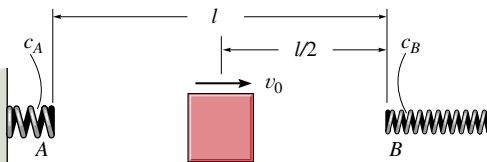


Abbildung A 3.27

***3.28** Der Ziegelstein mit dem Gewicht G gleitet ein glattes Dach herunter und erreicht bei A die Geschwindigkeit v . Wie groß sind die Geschwindigkeit des Steins, unmittelbar bevor er in B die Dachfläche verlässt, der Abstand d des Auftreffpunktes von der Wand und die Geschwindigkeit, mit der er auf dem Boden auftrifft.

Gegeben: $G = 20 \text{ N}$, $v = 2 \text{ m/s}$, $a = 12 \text{ m}$, $\tan \alpha = 3/4$

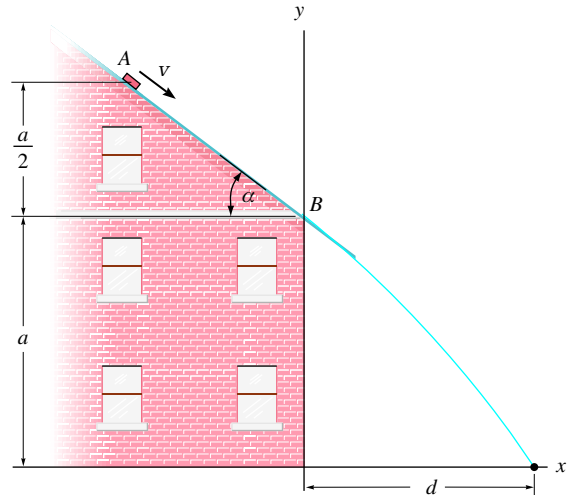


Abbildung A 3.28

3.29 Achterbahnen sind so konstruiert, dass die Fahrgäste maximal das 3,5fache ihres Gewichtes als Normalkraft in Richtung ihres Sitzes erfahren. Der Wagen hat am Scheitelpunkt die Geschwindigkeit v . Bestimmen Sie den kleinsten Krümmungsradius ρ der Bahn an ihrem tiefsten Punkt. Vernachlässigen Sie die Reibung.

Gegeben: $v = 1 \text{ m/s}$, $h_1 = 24 \text{ m}$, $h_2 = 2 \text{ m}$

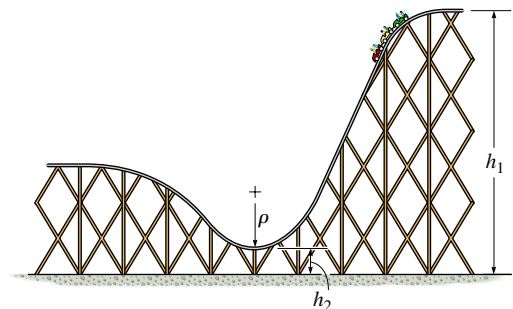


Abbildung A 3.29

3.30 Die Katapultvorrichtung treibt den Körper A der Masse m auf glatter Bahn nach rechts. Dazu wird mit dem Kolben P die Rolle an der Rundstange BC schnell nach links gezogen. Der Kolben bringt auf die Rundstange BC die konstante Kraft F auf, und diese bewegt sich um s . Bestimmen Sie die Geschwindigkeit des Körpers A , der aus der Ruhe die Bewegung beginnt. Vernachlässigen Sie die Masse von Rollen, Seil, Kolben und Rundstange BC .

Gegeben: $m = 10 \text{ kg}$, $F = 20 \text{ kN}$, $s = 0,2 \text{ m}$

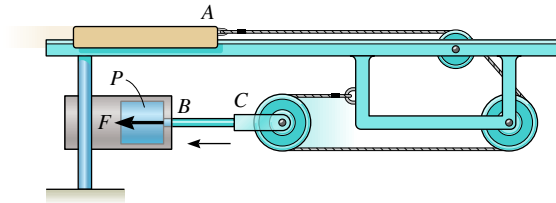


Abbildung A 3.30

3.31 Die Hülse der Masse m gleitet auf dem glatten Rundstab. Zwei Federn, die an der Hülse befestigt sind, stützen sich gegen die äußere Berandung ab und halten die Hülse in ihrer Mittellage. Dabei haben die Federn die ungedehnte Länge l_0 . Die Hülse hat bei $s = 0$ die Geschwindigkeit v_0 nach rechts. Wie groß ist die maximale Zusammendrückung der Federn aufgrund der Hin- und Herbewegung der Hülse?

Gegeben: $m = 20 \text{ kg}$, $l_0 = 1 \text{ m}$, $c_A = 50 \text{ N/m}$, $c_B = 100 \text{ N/m}$, $v_0 = 2 \text{ m/s}$, $d = 0,25 \text{ m}$

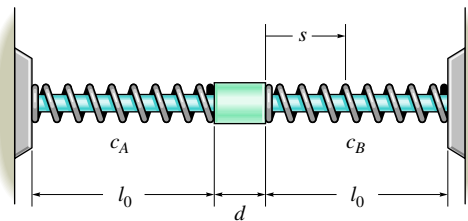


Abbildung A 3.31

***3.32** Der Radfahrer fährt nach links und hat bei Erreichen des Punktes A die Geschwindigkeit v_A . Dann lässt er sich den gekrümmten Abhang hochrollen. Bestimmen Sie die Normalkraft, die er auf die Straße in B ausübt. Die Masse m von Rad und Fahrer ist gegeben. Vernachlässigen Sie die Reibung, die Masse der Räder und die Größe des Fahrrades.

Gegeben: $m = 75 \text{ kg}$, $v_A = 8 \text{ m/s}$, $x_A = 4 \text{ m}$, $y_C = 4 \text{ m}$, $\alpha = 45^\circ$

3.33 Der Radfahrer fährt nach links und hat bei Erreichen des Punktes A die Geschwindigkeit v_A . Dann lässt er sich den gekrümmten Abhang hochrollen. Bestimmen Sie die Höhe, die der Fahrer erreicht. Wie groß sind die Normalkraft auf die Straße in diesem Punkt und seine Beschleunigung? Die Masse m von Rad und Fahrer ist gegeben. Vernachlässigen Sie die Reibung, die Masse der Räder und die Größe des Fahrrades.

Gegeben: $m = 75 \text{ kg}$, $v_A = 4 \text{ m/s}$, $x_A = 4 \text{ m}$, $y_C = 4 \text{ m}$, $\alpha = 45^\circ$

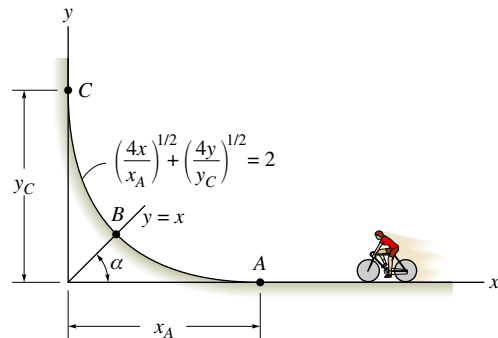


Abbildung A 3.32/3.33

3.34 Die Kiste A mit dem Gewicht G rutscht aus der Ruhe die glatte Rampe herunter und auf die Ladefläche eines Wagens. Dieser ist befestigt und kann sich nicht bewegen. Bestimmen Sie den Abstand s des Wagenendes bis zum Punkt, an dem die Kiste zur Ruhe kommt. Der Gleitreibungskoeffizient μ_g zwischen Wagen und Kiste ist gegeben.

Gegeben: $G = 300 \text{ N}$, $\mu_g = 0,6$, $l = 5 \text{ m}$, $h = 2 \text{ m}$

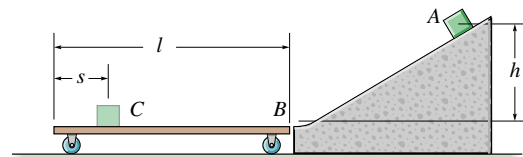


Abbildung A 3.34

3.35 Der Mann am Fenster A möchte einen Sack B der Masse m auf den Boden werfen. Dazu bewegt er ihn an einem masselosen Seil der Länge l aus der Ruhe in B zum Punkt C hinunter und lässt dann dort unter dem Winkel $\theta = \theta_1$ das Seil los. Ermitteln Sie die Geschwindigkeit, mit der der Sack auf dem Boden auftritt und die Strecke R .

Gegeben: $m = 30 \text{ kg}$, $l = 8 \text{ m}$, $h = 16 \text{ m}$, $\theta_1 = 30^\circ$

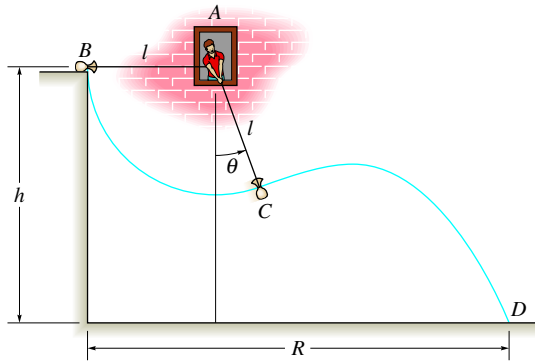


Abbildung A 3.35

***3.36** Ein Klotz B mit dem Gewicht G ruht in A ($\theta = 0$) auf der glatten halbzyklindrischen Oberfläche. Ein elastisches Seil mit der Federkonstanten c ist am Klotz B und an der Basis des Halbzylinders in Punkt C befestigt. Der Klotz wird dann losgelassen. Bestimmen Sie die ungedehnte Länge l_0 des Seiles, für die der Klotz bei einem Winkel $\theta = \theta_1$ die Oberfläche des Halbzylinders verlässt. Vernachlässigen Sie die Größe des Klotzes.

Gegeben: $G = 20 \text{ N}$, $\theta_1 = 45^\circ$, $r = 0,5 \text{ m}$, $c = 60 \text{ N/m}$

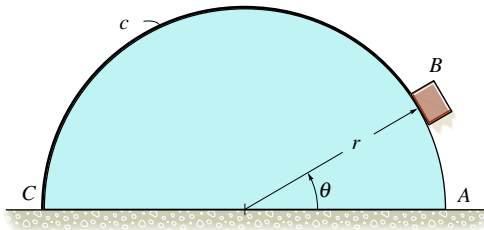


Abbildung A 3.36

3.37 Der Federpuffer stoppt die Bewegung des Klotzes mit dem Gewicht G , der mit der Geschwindigkeit v gegen ihn fährt. Wie dargestellt, wird die Bewegung der Feder von der Platte P und der Wand mittels undehnbarer Seile beschränkt und ihre vorgespannte Länge ist somit l . Die Federkonstante c der Feder ist gegeben. Bestimmen Sie die erforderliche ungedehnte Länge l_0 der Feder so, dass die Platte um nicht mehr als s verschoben wird, nachdem der Klotz dort auftrifft. Vernachlässigen Sie Reibung, die Masse der Platte und der Feder und den Energieverlust zwischen Platte und Klotz beim Zusammenstoß.

Gegeben: $G = 40 \text{ N}$, $l = 0,5 \text{ m}$, $d = 2 \text{ m}$,
 $c = 1500 \text{ N/m}$, $v = 3 \text{ m/s}$, $s = 0,1 \text{ m}$

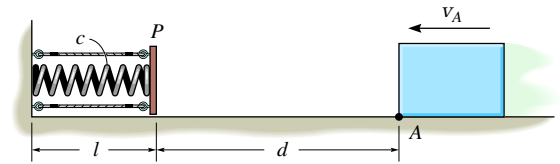


Abbildung A 3.37

3.38 Der Zylinder A hat die Masse m_A und der Zylinder B die Masse m_B . Bestimmen Sie die Geschwindigkeit v_A der Masse m_A nach Zurücklegen der Strecke s aus der Ruhe nach oben. Vernachlässigen Sie die Masse des Flaschenzugs. Gegeben: $m_A = 3 \text{ kg}$, $m_B = 8 \text{ kg}$, $s = 2 \text{ m}$

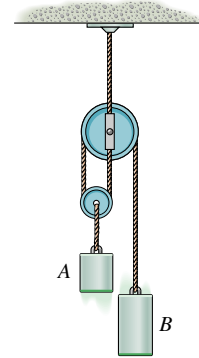


Abbildung A 3.38

3.39 Die Hülse der Masse m wird vom glatten Rundstab und den daran befestigten Federn in der Position $d = d_2$, in der die Federn unverformt sind, gehalten. Durch die Kraft F kommt die Hülse aus der Ruhe heraus in Bewegung. Bestimmen Sie die Geschwindigkeit der Hülse, nachdem eine Verschiebung der Hülse in die Position $d = d_1$ vorliegt.

Gegeben: $m = 20 \text{ kg}$, $d_1 = 0,3 \text{ m}$, $d_2 = 0,5 \text{ m}$,
 $F = 100 \text{ N}$, $c = 25 \text{ N/m}$, $c' = 15 \text{ N/m}$, $\alpha = 60^\circ$

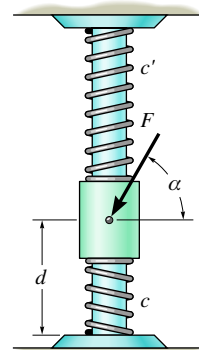


Abbildung A 3.39

***3.40** Der Skispringer fährt bei A aus dem Stand los und fährt die Schanze hinunter. Reibung und Luftwiderstand können vernachlässigt werden. Bestimmen Sie seine Geschwindigkeit v_B in Punkt B . Ermitteln Sie ebenfalls die Strecke s bis zum Punkt C , wo er landet. Er springt in B horizontal ab. Vernachlässigen Sie die Größe des Skispringers, der die Masse m hat.

Gegeben: $m = 70 \text{ kg}$, $h_A = 50 \text{ m}$, $h_B = 4 \text{ m}$, $\alpha = 30^\circ$

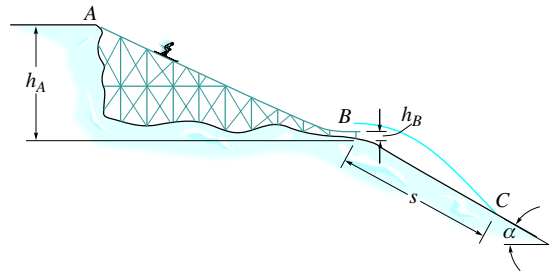


Abbildung A 3.40

Aufgaben zu 3.4

Lösungen finden Sie in *Anhang D*.

3.41 Der Dieselmotor eines Zuges der Masse m erhöht in der Zeit t die Zuggeschwindigkeit gleichmäßig auf der horizontalen Bahn aus dem Stand auf v_1 . Wie groß ist die mittlere abgegebene Leistung?

Gegeben: $m = 4 \cdot 10^5 \text{ kg}$, $v_1 = 10 \text{ m/s}$, $t = 100 \text{ s}$

3.42 Bestimmen Sie die notwendige zuzuführende Leistung eines Motors, der das Gewicht G mit konstanter Geschwindigkeit v anhebt. Der Wirkungsgrad η des Motors ist gegeben.

Gegeben: $G = 3000 \text{ N}$, $v = 2 \text{ m/s}$, $\eta = 0,65$

3.43 Eine elektrische Straßenbahn mit dem Gewicht G beschleunigt auf einer horizontalen geraden Straße aus dem Stand so, dass die Leistung immer P beträgt. Wie lange braucht die Straßenbahn, um die Geschwindigkeit v zu erreichen?

Gegeben: $G = 75 \text{ kN}$, $P = 75 \text{ kW}$, $v = 10 \text{ m/s}$

***3.44** Der Jeep mit dem Gewicht G hat einen Motor, der die Leistung P gleichmäßig auf *alle* Räder überträgt. Nehmen Sie an, dass die Räder nicht auf dem Boden rutschen, und ermitteln Sie den Winkel θ der maximalen Steigung, die der Jeep mit konstanter Geschwindigkeit v hinauffahren kann.

Gegeben: $G = 12,5 \text{ kN}$, $P = 75 \text{ kW}$, $v = 10 \text{ m/s}$

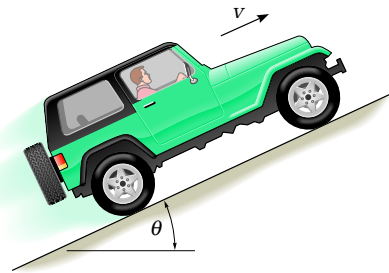


Abbildung A 3.44

3.45 Ein Auto der Masse m fährt mit konstanter Geschwindigkeit v die Steigung (Winkel θ) hinauf. Vernachlässigen Sie die mechanische Reibung und den Windwiderstand und ermitteln Sie die Leistung des Motors, der den Wirkungsgrad η hat.

Gegeben: $m = 2000 \text{ kg}$, $v = 100 \text{ km/h}$, $\theta = 7^\circ$, $\eta = 0,65$



Abbildung A 3.45

3.46 Ein beladener Lastwagen mit dem Gewicht G beschleunigt auf der Straße innerhalb der Zeit Δt gleichmäßig von v_1 auf v_2 . Der Reibwiderstand gegen die Bewegung beträgt R . Wie groß ist die notwendige Leistung, die auf die Räder übertragen werden muss?

Gegeben: $G = 80 \text{ kN}$, $R = 1625 \text{ N}$, $v_1 = 5 \text{ m/s}$,
 $v_2 = 10 \text{ m/s}$, $\Delta t = 4 \text{ s}$

3.47 Eine elektrische Straßenbahn mit dem Gewicht G beschleunigt auf einer horizontalen geraden Straße aus dem Stand so, dass die Leistung immer P beträgt. Welche Strecke legt sie zurück, bis sie die Geschwindigkeit v erreicht?

Gegeben: $G = 75 \text{ kN}$, $P = 75 \text{ kW}$, $v = 10 \text{ m/s}$

***3.48** Die Rolltreppe fährt mit konstanter Geschwindigkeit v . Die Höhe h und die Tiefe l der Stufen sind gegeben. Ermitteln Sie die Leistung P des Motors, die zum Heben einer mittleren Masse m pro Stufe erforderlich ist. Es gibt n Stufen.

Gegeben: $m = 150 \text{ kg}$, $v = 0,6 \text{ m/s}$, $n = 32$,
 $h = 125 \text{ mm}$, $l = 250 \text{ mm}$

3.49 Die Kiste mit dem Gewicht G beginnt die Bewegung aus dem Stand und erreicht in der Zeit $t = t_1$ die Geschwindigkeit $v = v_1$. Bestimmen Sie bei konstanter Beschleunigung die dem Motor zur Zeit $t = t_2$ zuzuführende Leistung. Der Motor hat den Wirkungsgrad η . Vernachlässigen Sie die Masse des Flaschenzuges.

Gegeben: $G = 250 \text{ N}$, $v_1 = 3 \text{ m/s}$, $t_1 = 4 \text{ s}$, $t_2 = 2 \text{ s}$,
 $\eta = 0,76$

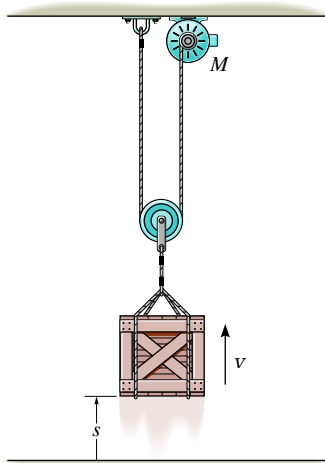


Abbildung A 3.49

3.50 Ein Auto der Masse m beschleunigt auf einer horizontalen geraden Straße aus dem Stand, sodass die Leistung immer konstant P ist. Welche Strecke muss das Auto zurücklegen, um die Geschwindigkeit v zu erreichen.

3.51 Zur Erklärung der großen Energieverluste eines Automobils betrachten Sie ein Auto mit dem Gewicht G , das mit der Geschwindigkeit v fährt. Durch einen Abbremsvorgang wird das Auto zum Stehen gebracht. Wie lange muss eine Glühbirne der Leistung P_G brennen, um die gleiche Energiemenge zu verbrauchen?

Gegeben: $G = 25 \text{ kN}$, $P_G = 100 \text{ W}$, $v = 56 \text{ km/h}$

***3.52** Ein Motor M hebt die Aufzugkabine der Masse m mit der konstanten Geschwindigkeit v_E und erhält die zugeführte elektrische Leistung P . Bestimmen Sie den Wirkungsgrad des Motors. Vernachlässigen Sie die Masse des Flaschenzuges.

Gegeben: $m = 500 \text{ kg}$, $P = 60 \text{ kW}$, $v_E = 8 \text{ m/s}$

3.53 Der Aufzug mit der Masse m fährt aus der Ruhe mit konstanter Beschleunigung a_0 nach oben. Ermitteln Sie die abgegebene Leistung des Motors M zum Zeitpunkt $t = t_1$. Vernachlässigen Sie die Masse des Flaschenzuges.

Gegeben: $m = 500 \text{ kg}$, $a_0 = 2 \text{ m/s}^2$, $t_1 = 3 \text{ s}$

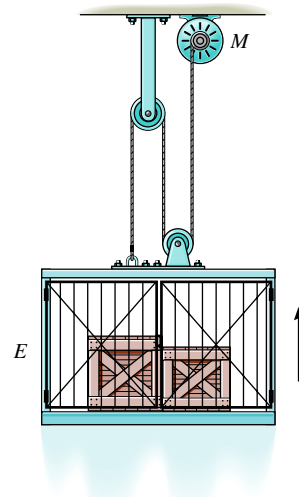


Abbildung A 3.53

3.54 Die Kiste der Masse m ruht auf einer horizontalen Unterlage, für die der Haft- (μ_h) und der Gleitreibungskoeffizient (μ_g) gegeben sind. Der Motor liefert die Seilkraft F . Bestimmen Sie die vom Motor abgeführte Leistung für $t = t_1$.
Gegeben: $m = 150 \text{ kg}$, $F = at^2 + b$, $a = 8 \text{ N/s}^2$,
 $b = 20 \text{ N}$, $t_1 = 5 \text{ s}$, $\mu_h = 0,3$, $\mu_g = 0,2$

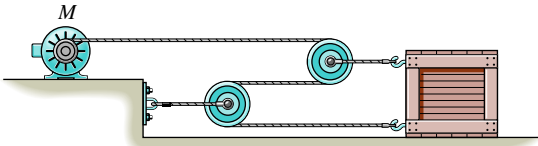


Abbildung A 3.54

3.55 Der Aufzug E hat mit Last die Gesamtmasse m_E und wird vom Motor und dem Gegengewicht C der Masse m_C mit der konstanten Geschwindigkeit v_E gehoben. Bestimmen Sie für den Wirkungsgrad η die dem Motor zuzuführende Energie.
Gegeben: $m_E = 400 \text{ kg}$, $m_C = 60 \text{ kg}$, $v_E = 4 \text{ m/s}$, $\eta = 0,6$

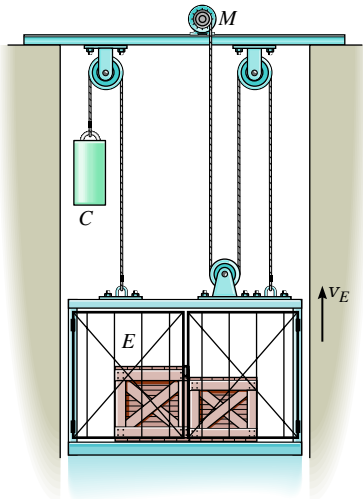


Abbildung A 3.55

***3.56** Die Kiste der Masse m wird mit dem Flaschenzug und dem Motor M aus der Ruhe die Schräge (Winkel α) hinaufgezogen. Die Kiste erreicht mit konstanter Beschleunigung nach der Strecke s die Geschwindigkeit v . Ermitteln Sie die dem Motor zuzuführende Leistung zu dieser Zeit. Vernachlässigen Sie die Reibung auf der Ebene. Der Wirkungsgrad η des Motors ist gegeben.

Gegeben: $m = 50 \text{ kg}$, $v = 4 \text{ m/s}$, $s = 8 \text{ m}$, $\eta = 0,74$,
 $\alpha = 30^\circ$

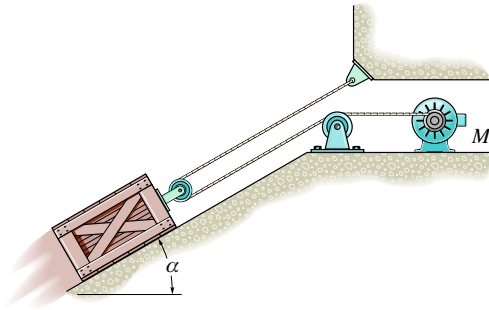


Abbildung A 3.56

3.57 Das Sportauto der Masse m fährt mit der Geschwindigkeit v , als der Fahrer mit a beschleunigt. Der Luftwiderstand auf den Wagen wird durch die Abhängigkeit $F_D(v)$ beschrieben. Berechnen Sie die zum Motor zuzuführende Leistung in diesem Moment. Der Wirkungsgrad η des Motors ist gegeben.

Gegeben: $m = 2300 \text{ kg}$, $v = 28 \text{ m/s}$, $a = 5 \text{ m/s}^2$,
 $F_D = bv^2$, $b = 0,3 \text{ N s}^2/\text{m}^2$, $\eta = 0,68$

3.58 Das Sportauto der Masse m fährt mit der Geschwindigkeit v , als der Fahrer mit a beschleunigt. Der Luftwiderstand auf den Wagen wird durch die Funktion $F_D(v)$ beschrieben. Berechnen Sie die dem Motor zuzuführende Leistung zur Zeit $t = t_1$. Der Wirkungsgrad η des Motors ist gegeben.

Gegeben: $m = 2300 \text{ kg}$, $a = 6 \text{ m/s}^2$, $F_D = bv$, $t_1 = 5 \text{ s}$,
 $\eta = 0,68$, $b = 10 \text{ N s/m}$

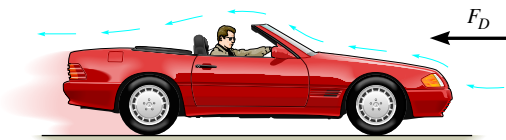


Abbildung A 3.57/3.58

3.59 Die Last G wird mit dem Flaschenzug und dem Motor M aus der Ruhelage um die Strecke s angehoben. Der Motor übt eine konstante Kraft F auf das Seil aus. Der Wirkungsgrad η des Motors ist gegeben. Welche Leistung muss dem Motor zugeführt werden?

Gegeben: $G = 250 \text{ N}$, $F = 150 \text{ N}$, $s = 3 \text{ m}$, $\eta = 0,76$

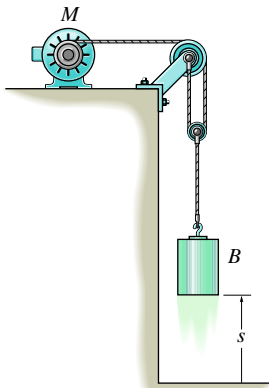


Abbildung A 3.59

***3.60** Der Raketenschlitten der Masse m fährt aus der Ruhe los und eine horizontale raue Bahn mit dem Gleitreibungskoeffizienten μ_g entlang. Der Motor liefert einen konstanten Schub T . Ermitteln Sie die abgegebene Leistung des Motors als Funktion der Zeit. Vernachlässigen Sie den Treibstoffverlust und den Luftwiderstand.

Gegeben: $m = 4000 \text{ kg}$, $T = 150 \text{ kN}$, $\mu_g = 0,20$

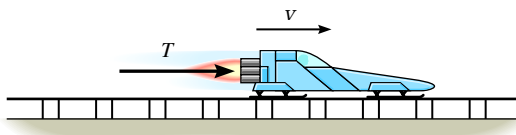


Abbildung A 3.60

3.61 Die Hülse mit dem Gewicht G wird aus der Ruhe durch Aufbringen einer konstanten Kraft F auf das Seil angehoben. Der Rundstab ist glatt. Bestimmen Sie die Leistung der Kraft bei $\theta = \theta_1$.

Gegeben: $G = 50 \text{ N}$, $F = 125 \text{ N}$, $\theta_1 = 60^\circ$, $a = 1,2 \text{ m}$, $b = 1 \text{ m}$

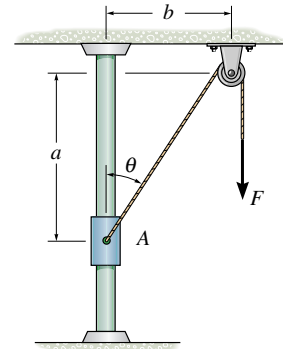


Abbildung A 3.61

3.62 Ein Sportler drückt gegen ein Sportgerät mit einer Kraft, die sich wie in der Abbildung oben dargestellt ändert. Die Geschwindigkeit seines Arms, die in die gleiche Richtung weist wie die Kraft, verändert sich mit der Zeit wie unten dargestellt. Bestimmen Sie die Leistung als Funktion der Zeit und die geleistete Arbeit bis zur Zeit $t = t_2$.

Gegeben: $F_1 = 800 \text{ N}$, $v_2 = 20 \text{ m/s}$, $t_1 = 0,2 \text{ s}$, $t_2 = 0,3 \text{ s}$

3.63 Ein Sportler drückt gegen ein Sportgerät mit einer Kraft, die sich wie in der Abbildung oben dargestellt ändert. Die Geschwindigkeit des Arms, die in die gleiche Richtung weist wie die Kraft, ändert sich mit der Zeit wie unten dargestellt. Bestimmen Sie die maximale Leistung im Zeitraum bis zu $t = t_2$.

Gegeben: $F_1 = 800 \text{ N}$, $v_2 = 20 \text{ m/s}$, $t_1 = 0,2 \text{ s}$, $t_2 = 0,3 \text{ s}$

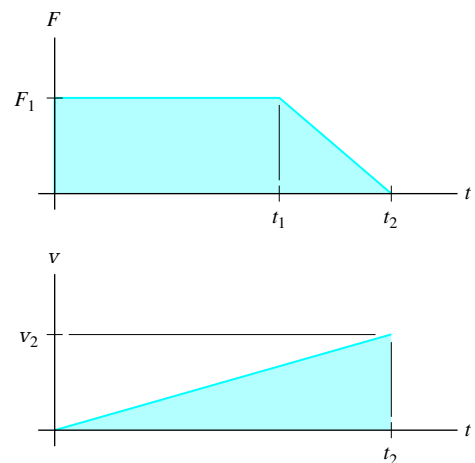


Abbildung A 3.62/3.63

Aufgaben zu 3.5 und 3.6

Lösungen finden Sie in *Anhang D*.

- *3.64** Lösen Sie Aufgabe 3.18 mit dem Energieerhaltungssatz.
3.65 Lösen Sie Aufgabe 3.15 mit dem Energieerhaltungssatz.
3.66 Lösen Sie Aufgabe 3.17 mit dem Energieerhaltungssatz.
3.67 Lösen Sie Aufgabe 3.31 mit dem Energieerhaltungssatz.
***3.68** Lösen Sie Aufgabe 3.36 mit dem Energieerhaltungssatz.
3.69 Lösen Sie Aufgabe 3.23 mit dem Energieerhaltungssatz.

3.70 Zwei Federn gleicher Länge sind ineinander parallel geschaltet und bilden ein Federbein. Dieses soll die Bewegung einer Masse m anhalten, die in der Höhe h über den Federn aus der Ruhe fallen gelassen wird. Die maximale Stauchung der Federn ist s_{max} . Bestimmen Sie die erforderliche Federkonstante c_B der inneren Feder für eine gegebene Federkonstante c_A der anderen Feder.

Gegeben: $m = 2 \text{ kg}$, $h = 0,5 \text{ m}$, $s_{max} = 0,2 \text{ m}$,
 $c_A = 400 \text{ N/m}$

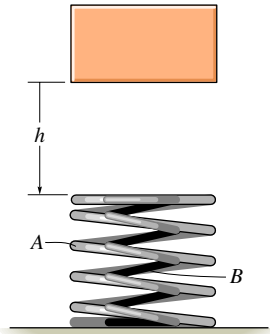


Abbildung A 3.70

3.71 Die Kiste mit dem Gewicht G gleitet aus der Ruhe von A reibungsfrei auf der glatten Rutsche AB . Bestimmen Sie die Geschwindigkeit, mit der sie den Endpunkt B erreicht. Die Koordinaten von A und B sind gegeben.

Gegeben: $G = 15 \text{ N}$, $A (2 \text{ m}; 0; 4 \text{ m})$, $B (0; 3,2 \text{ m}; 0)$

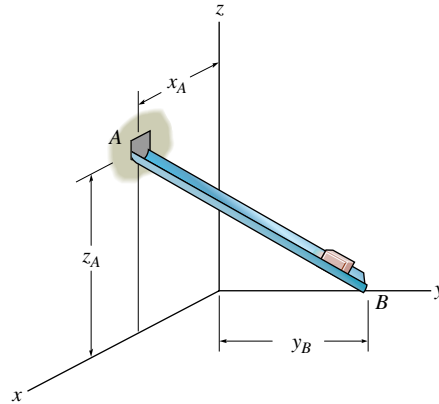


Abbildung A 3.71

***3.72** Das Mädchen der Masse m und dem Schwerpunkt in S schaukelt bis zur maximalen Höhe (Winkel θ_1). Bestimmen Sie die Kräfte in den vier Stützpfeuten, z.B. AB , für $\theta = 0$. Die Schaukel ist mittig zwischen den Pfosten aufgehängt.

Gegeben: $m = 40 \text{ kg}$, $\theta_1 = 60^\circ$, $\alpha = 30^\circ$, $l = 2 \text{ m}$

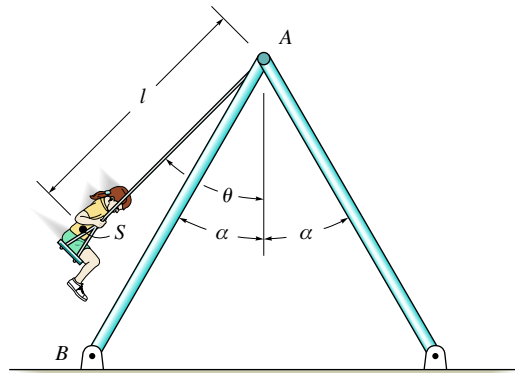


Abbildung A 3.72

3.73 Die Hülse mit dem Gewicht G wird nach unten gedrückt und staucht die Feder um s_1 , dann wird sie aus der Ruhe losgelassen ($h = 0$). Bestimmen Sie die Geschwindigkeit der Hülse, wenn sie eine Verschiebung in die Position $h = h_1$ erreicht hat. Die Feder ist nicht an der Hülse befestigt. Vernachlässigen Sie Reibung.

Gegeben: $G = 40 \text{ N}$, $s_1 = 1 \text{ m}$, $h_0 = 0$, $h_1 = 2 \text{ m}$,
 $c = 450 \text{ N/m}$

3.74 Die Hülse mit dem Gewicht G wird in der Höhe h_2 über der nicht gestauchten Feder aus der Ruhe losgelassen. Bestimmen Sie die Geschwindigkeit der Hülse während des Fallens bei einer Stauchung der Feder um s_2 .

Gegeben: $G = 40 \text{ N}$, $h_2 = 1 \text{ m}$, $s_2 = 0,1 \text{ m}$,
 $c = 450 \text{ N/m}$

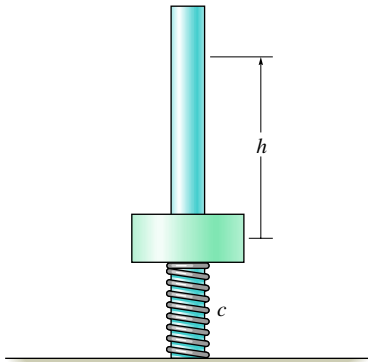


Abbildung A 3.73/3.74

3.75 Die Hülse der Masse m ist an einer Feder (Federkonstante c) der unverformten Länge l_0 befestigt und wird zum Punkt B gezogen und aus der Ruhe losgelassen. Bestimmen Sie die Geschwindigkeit der Hülse am Punkt A .

Gegeben: $m = 2 \text{ kg}$, $l_0 = 3 \text{ m}$, $a = 4 \text{ m}$, $c = 3 \text{ N/m}$

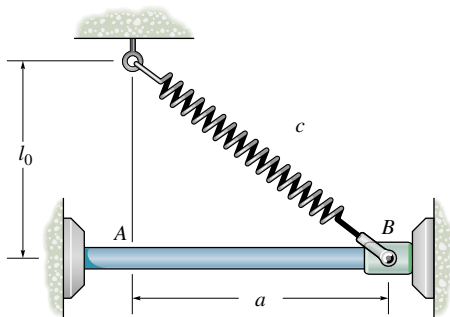


Abbildung A 3.75

***3.76** Die Hülse mit dem Gewicht G wird in A losgelassen und gleitet über die glatte Führung. Bestimmen Sie die Geschwindigkeit der Hülse unmittelbar vor dem Auftreffen im Befestigungspunkt B . Die ungedehnte Länge der Feder mit der Federkonstanten c beträgt l_0 .

Gegeben: $G = 25 \text{ N}$, $l_0 = 30 \text{ cm}$, $d = 25 \text{ cm}$,
 $r = 30 \text{ cm}$, $c = 4 \text{ N/cm}$

3.77 Die Hülse mit dem Gewicht G wird in A losgelassen und gleitet über die glatte Führung. Bestimmen Sie die Geschwindigkeit der Hülse, wenn sie Punkt C passiert und die Normalkraft der Hülse auf den Rundstab in diesem Punkt. Die ungedehnte Länge der Feder mit der Federkonstanten c beträgt l_0 und Punkt C ist der Übergang vom gekrümmten zum geraden Teil des Rundstabs.

Gegeben: $G = 25 \text{ N}$, $l_0 = 30 \text{ cm}$, $d = 25 \text{ cm}$,
 $r = 30 \text{ cm}$, $c = 4 \text{ N/cm}$

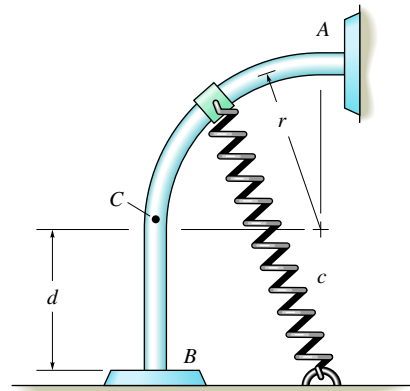


Abbildung A 3.76/3.77

3.78 Der Klotz mit dem Gewicht G erhält in A die Anfangsgeschwindigkeit v_A . Die Feder hat die ungedehnte Länge l_0 und die Federkonstante c . Bestimmen Sie die Geschwindigkeit des Klotzes nach der Wegstrecke s .

Gegeben: $G = 10 \text{ N}$, $v_A = 10 \text{ m/s}$, $l_0 = 1 \text{ m}$,
 $c = 1000 \text{ N/m}$, $s = 0,5 \text{ m}$

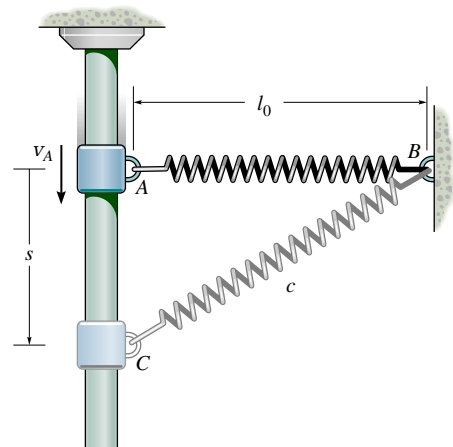


Abbildung A 3.78

3.79 Der Achterbahnwagen hat mit dem Fahrgast die Masse m und startet oben im Punkt A mit der Anfangsgeschwindigkeit v_A . Bestimmen Sie die minimale Höhe h des Scheitelpunktes, bei der der Wagen durch beide Loopings fährt, ohne die Bahn zu verlassen. Vernachlässigen Sie Reibung, die Masse der Räder und die Größe des Wagens. Wie groß ist die Normalkraft auf den Wagen in den Punkten B und C ?

Gegeben: $m = 800 \text{ kg}$, $v_A = 3 \text{ m/s}$, $r_B = 10 \text{ m}$, $r_C = 7 \text{ m}$

***3.80** Der Achterbahnwagen hat mit dem Fahrgast die Masse m und startet aus dem Stand oben im Punkt A . Bestimmen Sie die minimale Höhe h des Scheitelpunktes, bei der der Wagen durch beide Loopings fährt, ohne die Bahn zu verlassen. Vernachlässigen Sie die Reibung, die Masse der Räder und die Größe des Wagens. Wie groß ist die Normalkraft auf den Wagen in den Punkten B und C ?

Gegeben: $m = 800 \text{ kg}$, $r_B = 10 \text{ m}$, $r_C = 7 \text{ m}$

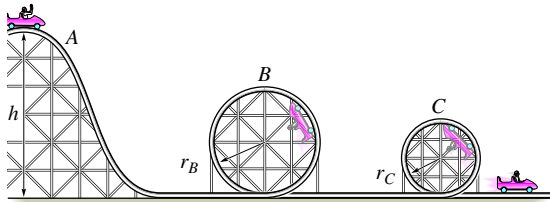


Abbildung A 3.79/3.80

3.81 Tarzan hat die Masse m und schwingt an einer Liane aus dem Stand vom Felsen. Die Länge l der Liane vom Ast A bis zum Schwerpunkt C ist gegeben. Bestimmen Sie seine Geschwindigkeit beim Auftreffen der Liane auf den Ast B . Mit welcher Kraft muss sich Tarzan gerade vor und gerade nach dem Auftreffen in B an der Liane festhalten?

Gegeben: $m = 100 \text{ kg}$, $l = 10 \text{ m}$, $a = 7 \text{ m}$, $\alpha = 45^\circ$

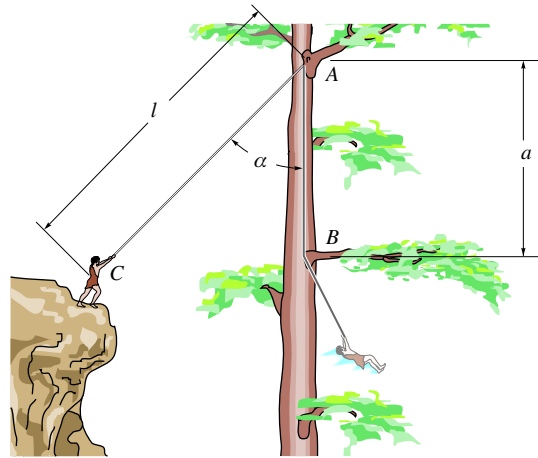


Abbildung A 3.81

3.82 Die Feder hat die Federkonstante c und die ungedehnte Länge l_0 . Sie ist an der glatten Hülse mit dem Gewicht G befestigt. Diese wird aus der Ruhe in A losgelassen. Bestimmen Sie die Geschwindigkeit der Hülse kurz vor dem Auftreffen auf das Ende der Rundstange in B . Vernachlässigen Sie die Größe der Hülse.

Gegeben: $c = 30 \text{ N/m}$, $l_0 = 1 \text{ m}$, $G = 25 \text{ N}$, $x_A = 0,5 \text{ m}$, $y_A = 2 \text{ m}$, $z_A = 3 \text{ m}$, $x_B = 0,5 \text{ m}$, $y_B = 1,5 \text{ m}$, $z_B = 1 \text{ m}$

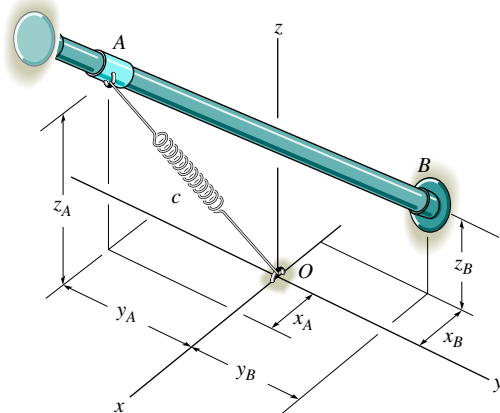


Abbildung A 3.82

3.83 Zwei Ingenieur-Studenten mit jeweils dem Gewicht G wollen aus dem Stand mit einem elastischen Bungee-Seil der Federkonstanten c von der Brücke springen. Sie wollen gerade die Wasseroberfläche des Flusses erreichen, wobei A , der am Seil befestigt ist, B in dem Augenblick loslässt, wenn die beiden das Wasser berühren. Bestimmen Sie die dafür erforderliche ungedehnte Länge des Seils und berechnen Sie die maximale Beschleunigung von Student A und seine maximale Höhe über dem Wasser nach dem Zurückfedern. Diskutieren Sie anhand Ihrer Ergebnisse die Durchführbarkeit dieses Vorhabens.

Gegeben: $G = 750 \text{ N}$, $c = 1200 \text{ N/m}$, $h = 40 \text{ m}$

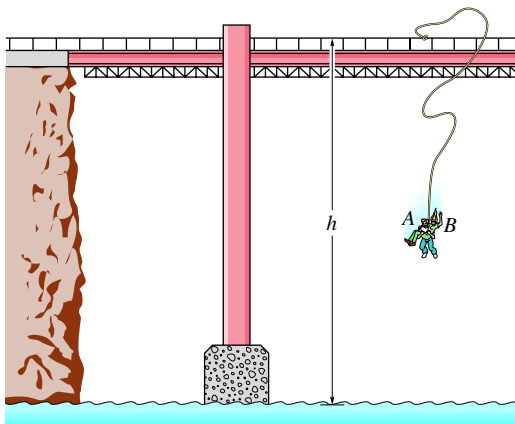


Abbildung A 3.83

***3.84** Zwei Federn gleicher Länge und der Federkonstanten c_A und c_B sind ineinander parallel geschaltet und bilden einen Stoßfänger. Eine Masse m fällt aus der Ruhelage in der Höhe h über den Federn. Bestimmen Sie deren Verformung in dem Moment, wenn die Masse ihre Bewegungsrichtung umkehrt.

Gegeben: $h = 0,6 \text{ m}$, $m = 2 \text{ kg}$, $c_A = 300 \text{ N/m}$, $c_B = 200 \text{ N/m}$

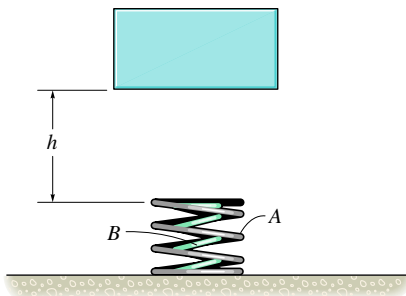


Abbildung A 3.84

3.85 Bei einer Jahrmaktraktion wird eine Gondel auf die Höhe h in A gehoben. Sie fällt aus der Ruhe entlang der parabolischen Bahn. Bestimmen Sie die Geschwindigkeit sowie die Normalkraft der Bahn auf die Gondel in der Höhe $y = y_1$. Die Gondel mit Passagieren hat ein Gesamtgewicht G . Vernachlässigen Sie Reibung und die Masse der Räder.

Gegeben: $h = 60 \text{ m}$, $G = 2,5 \text{ kN}$, $y_1 = 10 \text{ m}$, $a = 1/(130 \text{ m})$

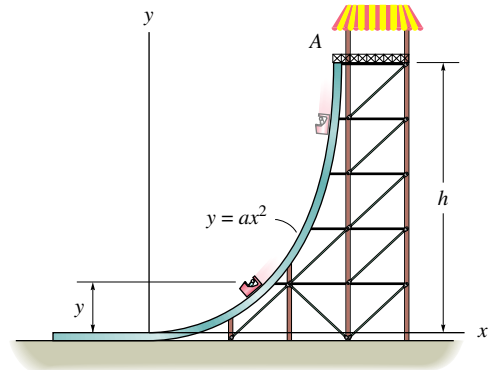


Abbildung A 3.85

3.86 Im Punkt A am Übergang von der schiefen Ebene zur kreisförmigen Bahn hat die Kiste der Masse m die Geschwindigkeit v_A . Bestimmen Sie den Winkel θ , bei dem sie die kreisförmige Bahn verlässt und den Abstand s , bei der sie in den Wagen fällt. Vernachlässigen Sie Reibung.

Gegeben: $r = 1,2 \text{ m}$, $m = 6 \text{ kg}$, $v_A = 2 \text{ m/s}$, $\alpha = 20^\circ$

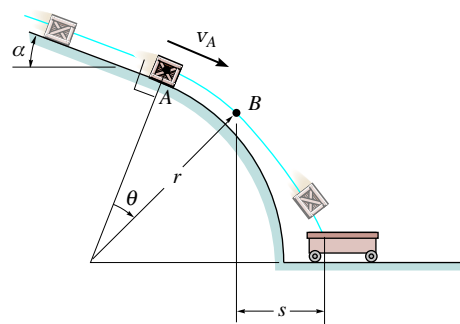


Abbildung A 3.86

3.87 Die Kiste mit dem Gewicht G hat die Geschwindigkeit v_A , als sie die glatte schiefe Ebene in A herunterzurutschen beginnt. Bestimmen Sie den Punkt $C(x_C, y_C)$, wo sie auf die untere schiefe Ebene auftrifft.

Gegeben: $h_A = 7,5$ m, $h_B = 15$ m, $G = 10$ N,
 $v_A = 2,5$ m/s, $\tan \alpha = 1/2$, $\tan \beta = 3/4$

***3.88** Die Kiste mit dem Gewicht G hat die Geschwindigkeit v_A , als sie die glatte schiefe Ebene in A herunterzurutschen beginnt. Bestimmen Sie die Geschwindigkeit kurz bevor sie in Punkt $C(x_C, y_C)$ auf die untere Ebene auftrifft und die Zeit, die sie für die Bewegung von A bis C benötigt.

Gegeben: $h_A = 7,5$ m, $h_B = 15$ m, $G = 10$ N,
 $v_A = 2,5$ m/s, $\tan \alpha = 1/2$, $\tan \beta = 3/4$, $x_C = 8,83$ m,
 $y_C = 4,416$ m

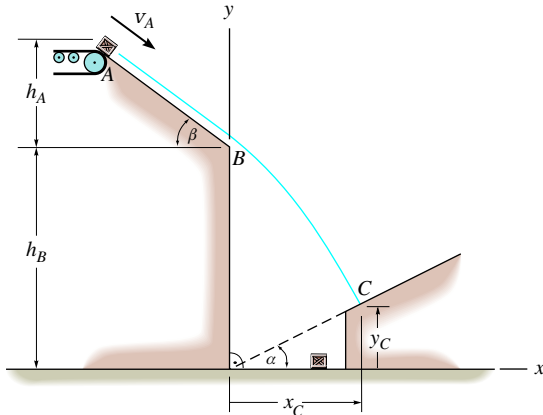


Abbildung A 3.87/3.88

3.89 Der Ball der Masse m und vernachlässigbarer Größe wird von Punkt A mit der Anfangsgeschwindigkeit v_A die glatte schiefe Ebene hinaufgeschossen. Bestimmen Sie den Abstand von C nach D , wo der Ball auf die horizontale Fläche auftrifft. Wie groß ist seine Geschwindigkeit beim Auftreffen?

Gegeben: $m = 2$ kg, $v_A = 10$ m/s, $a = 2$ m, $b = 1,5$ m

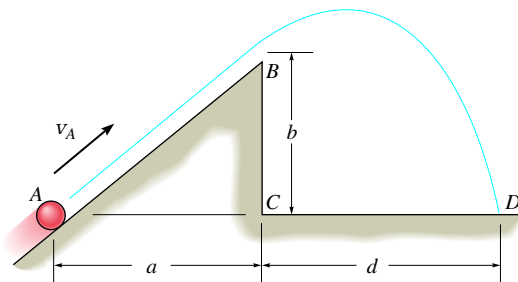


Abbildung A 3.89

3.90 Der Ball mit dem Gewicht G ist an einer Stange vernachlässigbarer Masse befestigt. Bei $\theta = 0$ wird er aus der Ruhe losgelassen. Bestimmen Sie den Winkel $\theta = \theta_1$, bei dem die Druckkraft in der Stange null wird.

Gegeben: $G = 75$ N, $l = 1$ m

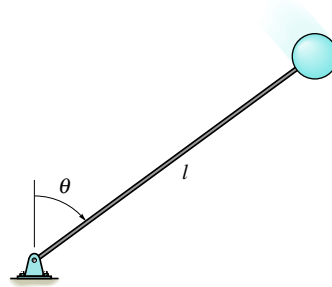


Abbildung A 3.90

3.91 Der Ball mit dem Gewicht G wird mittels der Federvorrichtung abgeschossen. Die Feder hat die Federkonstante c . Die vier Seile C und die Platte P halten die Feder um a gestaucht, wenn keine Last an der Platte wirkt. Die Platte wird um b aus dieser Ausgangslage zurückgedrückt, sodass die Feder weiter gestaucht wird. Dann wird sie dort ($s = 0$) mit dem Ball aus der Ruhe losgelassen. Bestimmen Sie die Geschwindigkeit des Balles, wenn er sich um $s = d$ die glatte schiefe Ebene hinaufbewegt hat.

Gegeben: $G = 5$ N, $c = 40$ N/cm, $a = 5$ cm,
 $b = 7,5$ cm, $d = 75$ cm, $\alpha = 30^\circ$

***3.92** Der Ball mit dem Gewicht G wird mittels der Federvorrichtung abgeschossen. Bestimmen Sie die minimale Federkonstante c , die erforderlich ist, den Ball die maximale Distanz d die Ebene hinaufzuschießen, wenn die vorgespannte Feder um b zurückgedrückt und der Ball aus der Ruhe losgelassen wird. Die vier Seile C und die Platte P halten die Feder um a gestaucht, wenn keine Last auf die Platte wirkt.

Gegeben: $G = 5$ N, $a = 5$ cm, $b = 7,5$ cm,
 $d = 75$ cm, $\alpha = 30^\circ$

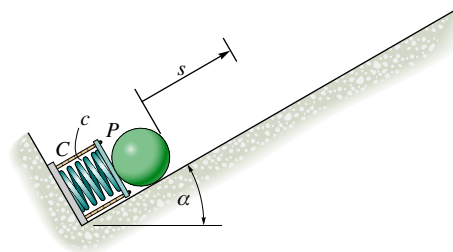


Abbildung A 3.91/3.92

3.93 Vier undeformbare Seile C sind an einer Platte P befestigt und drücken die Feder (Federkonstante c_1) der unverformten Länge l_{01} um s_0 zusammen, wenn sich *kein Gewicht* auf der Platte befindet. In diese vorgespannte Feder ist eine zweite Feder (Federkonstante c_2) mit der unverformten Länge l_{02} eingebettet. Der Klotz mit dem Gewicht G hat die Geschwindigkeit v , wenn er sich im Abstand d über der Platte befindet. Bestimmen Sie die maximale Stauchung der beiden Federn nach Auftreffen auf die Platte. Vernachlässigen Sie die Masse der Platte und der Federn und den Energieverlust beim Zusammenstoß.

Gegeben: $G = 50 \text{ N}$, $l_{01} = 0,4 \text{ m}$, $l_{02} = 0,2 \text{ m}$,
 $s_0 = 0,1 \text{ m}$, $d = 0,8 \text{ m}$, $v = 1,6 \text{ m/s}$, $c_1 = 60 \text{ N/cm}$,
 $c_2 = 100 \text{ N/cm}$

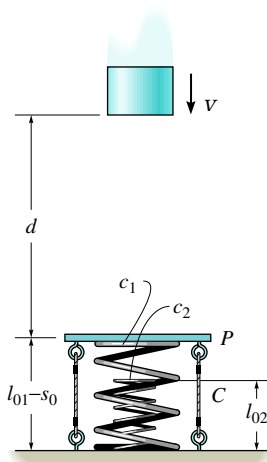


Abbildung A 3.93

3.94 Der Prellbock mit zwei Federn stoppt den Stahlblock mit dem Gewicht G im Hüttenwerk. Bestimmen Sie die maximale Auslenkung der Platte A durch den Block, der mit der Geschwindigkeit v auf den Prellbock auftrifft. Vernachlässigen Sie die Masse der Federn, der Rollen und der Platten A und B .

Gegeben: $G = 7500 \text{ N}$, $v = 3 \text{ m/s}$, $c_1 = 5000 \text{ N/m}$,
 $c_2 = 7500 \text{ N/m}$

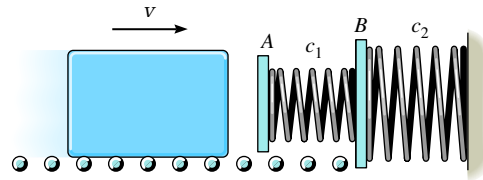


Abbildung A 3.94

***3.95** Zeigen Sie, dass für die Masse der Erde M_E das Gravitationspotenzial eines Körpers der Masse m , der sich im Abstand r vom Erdmittelpunkt befindet, $V_g = -c_G M_E m / r$ ist. Es gilt $F = -c_G (M_E m / r^2)$, Gleichung (2.1). Legen Sie das Nullniveau zur Berechnung in $r \rightarrow \infty$. Beweisen Sie, dass F eine konservative Kraft ist.

***3.96** Eine Rakete der Masse m wird vertikal von der Erdoberfläche abgeschossen, d.h. bei $r = r_1$. Nehmen Sie an, dass bei der Aufwärtsbewegung keine Masse verloren geht, und berechnen Sie die Arbeit, die sie gegen die Schwerkraft leisten muss, um die Höhe r_2 zu erreichen. Für die Schwerkraft gilt $F = -c_G (M_E m / r^2)$, Gleichung (2.1). M_E ist die Masse der Erde und r der Abstand der Rakete vom Erdmittelpunkt.

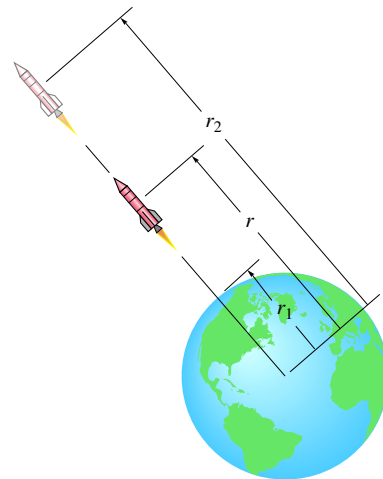


Abbildung A 3.96

Konstruktionsaufgaben

*3.1D Konstruktion eines Stoßfängers

Die Karosserie eines Autos soll von einem Stoßfänger mit Federn geschützt werden, der am Rahmen des Autos befestigt wird. Der Stoßfänger soll ein Auto mit dem Gewicht G und der Geschwindigkeit v zum Anhalten bringen, wobei die Federn um maximal s_{max} verformt werden. Erstellen Sie eine Zeichnung Ihrer Konstruktion und geben Sie darin die Einbaulagen und die Federkonstanten der Federn an. Zeichnen Sie die Last-Verformungs-Kurve des Stoßfängers bei einem direkten Aufprall auf eine starre Wand sowie das Abbremsen des Autos als Funktion der Federzusammendrückung.

Gegeben: $G = 17,5 \text{ kN}$, $v = 8 \text{ km/s}$, $s_{max} = 75 \text{ mm}$

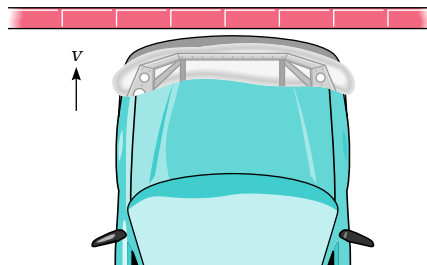


Abbildung A 3.1D

*3.2D Konstruktion eines Lastenaufzuges

Ein Lastenaufzug mit Last (maximales Gewicht G) soll aus der Ruhe um y angehoben und dann nach der Zeitspanne Δt anhalten. Ein Motor und eine Aufwickeltrommel können beliebig angebracht werden. Beim Heben und Senken darf die Beschleunigung a_{max} nicht überschritten werden. Konstruieren Sie ein Flaschenzug-System für den Aufzug und berechnen Sie die Materialkosten für Seile (K_{Seil}) und Rollen (K_{Rolle}). Erstellen Sie eine Zeichnung der Konstruktion und zeichnen Sie die erforderliche Leistungsabgabe des Motors sowie die Aufzugsgeschwindigkeit als Funktion der Höhenkoordinaten y .

Gegeben: $G = 2,5 \text{ kN}$, $y = 10 \text{ m}$, $\Delta t = 6 \text{ s}$,
 $a_{max} = 5 \text{ m/s}^2$, $h_A = 3,5 \text{ m}$, $h_1 = 10 \text{ m}$, $h_2 = 15 \text{ m}$,
 $K_{Seil} = 2,60 \text{ €/m}$, $K_{Rolle} = 3,50 \text{ €}$

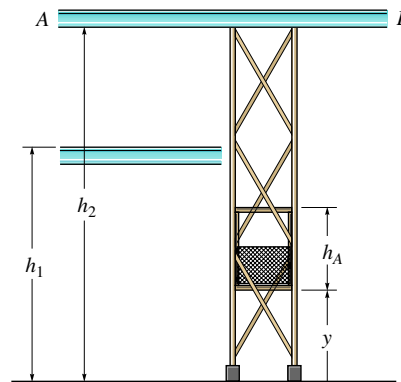


Abbildung A 3.2D



Zusätzliche Übungsaufgaben mit Lösungen finden Sie auf der Companion Website (CWS) unter www.pearson-studium.de