

## 6 Elektrodynamik: Grundlagen

Elektrische und magnetische Felder sind in dynamischen (zeitabhängigen) Situationen gekoppelt. Die Tatsache, dass ein zeitlich veränderliches Magnetfeld ein zeitlich veränderliches elektrisches Feld und ein zeitlich veränderliches elektrisches Feld ein zeitlich veränderliches Magnetfeld induziert, wird in den Maxwellgleichungen erfasst. In einer stationären Situation, die durch

$$\frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \mathbf{0} \quad \text{und} \quad \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \mathbf{0}$$

charakterisiert ist, separieren die Maxwellgleichungen in die bisher diskutierten Sätze von Differentialgleichungen für die stationären Felder.

Die Aufbereitung der Maxwellgleichungen beginnt mit der Diskussion der experimentellen Grundlage der Elektrodynamik, dem Induktionsgesetz (Kap. 6.1). Eine Variante dieses Gesetzes entspricht letztlich einer der vier Maxwellgleichungen, die in Kap. 6.2, auf der Basis einer Argumentation, die auf J.C. Maxwell zurückgeht, zusammengestellt werden. Der physikalische Gehalt dieser Gleichungen wird in zwei (nicht eigens markierten) Abschnitten vorgestellt. Die homogenen oder freien Maxwellgleichungen (zuständig für Raumgebiete, in denen keine Quellen wie zeitlich veränderliche Ladungen und Ströme vorhanden sind) entsprechen Wellengleichungen. Deren Lösung beschreibt die Ausbreitung von elektromagnetischen Wellen (Kap. 6.3). Die Lösung der inhomogenen oder vollständigen Maxwellgleichungen ist für die Frage nach der Erzeugung von elektromagnetischen Wellen durch zeitlich veränderliche Ladungen und Ströme, dem Senderproblem, gefragt. Als Voraussetzung wird in Kap. 6.4 der Energie- und der Impulssatz der Elektrodynamik diskutiert. Die elektromagnetischen Felder transportieren Energie und Impuls. Eine ökonomische Formulierung des Senderproblems erfordert die Betrachtung von elektromagnetischen Potentialen (Kap. 6.5), die zur Lösung der inhomogenen Wellengleichung (Kap. 6.6) herangezogen werden. Anwendungen der Elektrodynamik, wie z.B. die Diskussion von optischen Problemen oder die Formulierung der Wirkungsweise eines Transformators, etc. findet man in Kap. 7.

## 6.1 Induktionsgesetze

Die Induktionsgesetze, die ab 1831 von Michael Faraday untersucht wurden, haben wesentlich zur Begründung der Elektrodynamik beigetragen. Die Elektrodynamik selbst wurde, nach einigen Vorarbeiten über die Erkenntnisse Faraday's, von James Clark Maxwell<sup>1</sup> erarbeitet.

In dem folgenden Abschnitt werden die Induktionsgesetze erläutert, die die Erzeugung eines zeitabhängigen elektrischen Feldes durch ein zeitlich veränderliches Magnetfeld beschreiben. Ausgehend von den experimentellen Ergebnissen, wird mit Hilfe des Feldbegriffes eine abstraktere Fassung gewonnen. Ein Aspekt, der bei der Induktion auftritt, ist die Rückwirkung des elektrischen Feldes auf das erzeugende Magnetfeld, der sich in der Selbstinduktion von Stromschleifen oder von Spulen äußert.

### 6.1.1 Varianten des Faradayschen Gesetzes

Die Grundexperimente zur Induktion lassen sich in der folgenden Weise zusammenfassen: Ein Magnetfeld greift durch eine Stromschleife (Abb. 6.1a). Ändert sich das Magnetfeld in der Zeit, so findet man, dass in der Schleife ein zeitabhängiger Strom induziert wird

$$\mathbf{B}(t) \longrightarrow i_{\text{Schleife}}(t).$$

Die Änderung des Magnetfeldes kann man entweder erreichen, indem man einen Permanentmagneten bewegt oder das Magnetfeld einer Spule über den Spulenstrom variiert. Als Varianten kann man die Schleife auch in einem inhomogenen Magnetfeld bewegen, sie in einem (homogenen) Magnetfeld drehen oder die Form der Schleife mit der Zeit ändern. Man beobachtet bei allen Varianten ebenfalls einen induzierten Strom in der Schleife.

Die Vielfalt der Möglichkeiten kann man zusammenfassen, wenn man den magnetischen Fluss durch die Schleife betrachtet

$$\phi_B(t) = \iint_F \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{d}\mathbf{f}.$$

In jedem der Fälle wird der magnetische Fluss geändert, und zwar indem man das Feld  $\mathbf{B}$ , die Schleifenfläche  $F$  oder den Winkel zwischen dem Feld  $\mathbf{B}$  und dem infinitesimalen Flächenelement  $\mathbf{d}\mathbf{f}$  variiert. Man kann das Ergebnis der Induktionsversuche somit in der Form schreiben

$$i_{\text{ind}}(t) = -k' \frac{d}{dt} \phi_B(t) \quad (k' > 0). \quad (6.1)$$

Das Vorzeichen auf der rechten Seite entspricht der **Lenzschen Regel**. Diese besagt: Die in dem Induktionsprozess erzeugten Ströme sind so gerichtet, dass ihr Magnetfeld sich der Änderung des induzierenden Feldes widersetzt.

<sup>1</sup> 1865 in dem Werk 'Dynamical Theory of the Electromagnetic Field', beziehungsweise zusammenfassend in dem 1873 erschienenen 'Treatise on Electricity and Magnetism'.

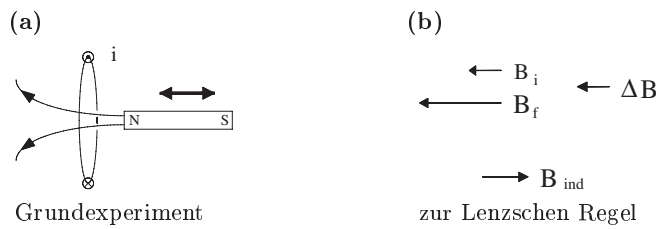


Abb. 6.1. Induktionsgesetze

Hinter dieser Regel steht der Energiesatz. Bewegt man z.B. den Nordpol eines Permanentmagneten auf eine ebene Schleife zu, so zeigt die Magnetfeldänderung (gemäß Abb. 6.1a) nach links. Das Magnetfeld des induzierten Stromes  $\mathbf{B}_{\text{ind}}$  muss dann nach rechts zeigen und der Strom muss in der ange deuteten Weise fließen (Abb. 6.1b). Wäre das induzierte Feld  $\mathbf{B}_{\text{ind}}$  ein Vektor in der entgegengesetzten Richtung, so würde der Magnet bei dem minimalsten Anstoß in die Schleife gezogen. Man würde mechanische Energie ohne Kostenaufwand gewinnen.

Um die Proportionalitätskonstante  $k'$  zu diskutieren, geht man mit Ohm's Gesetz (S. 160, (5.7)) von dem induzierten Strom zu einer Aussage über die induzierte Spannung über

$$U_{\text{ind}}(t) = R i_{\text{ind}}(t) = -(k'R) \frac{d}{dt} \phi_B(t)$$

oder

$$U_{\text{ind}}(t) = -k_{\text{ind}} \frac{d}{dt} \phi_B(t) \quad (\text{Faradaygesetz, erste Fassung}) . \quad (6.2)$$

Dies ist die Form des **Faradayschen Gesetzes**, die in der praktischen Anwendung nützlich ist. Die induzierte Spannung könnte man messen, indem man die Schleife öffnet und ein Voltmeter anschließt. Zur Festlegung der Konstanten  $k_{\text{ind}}$  ist eine kurze Dimensionsbetrachtung ausreichend<sup>2</sup>. Im SI System gewinnt man wegen

$$[U] = \left[ \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{C} \cdot \text{s}^2} \right] \quad \text{und} \quad [\phi_B] = \left[ \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{C} \cdot \text{s}} \right]$$

die Aussage  $k_{\text{ind,SI}} = 1$ . Im CGS System ergibt sich mit

$$[U] = \left[ \frac{\text{g}^{1/2} \cdot \text{cm}^{1/2}}{\text{s}} \right] \quad \text{und} \quad [\phi_B] = \left[ \frac{\text{g}^{1/2} \cdot \text{cm}^{3/2}}{\text{s}} \right]$$

für die Maßeinheit der Konstanten  $[k_{\text{ind,CGS}}] = \text{s/cm}$ . Es ist deswegen nicht verwunderlich (siehe auch S. 236), dass die Konstante den Wert

<sup>2</sup> Eine vollständigere Begründung für die Wahl der Konstanten findet man in Anh. A.

$k_{\text{ind,CGS}} = 1/c$  hat. Man findet somit, dass die Konstante  $k_{\text{ind}}$  mit der in Kap. 5.2 eingeführten Konstante  $k_f$  identisch ist

$$k_{\text{ind}} \equiv k_f .$$

Die praktische Form des Faradaygesetzes ist eine der Grundlagen der Elektrotechnik. Einige Anwendungen werden in dem folgenden Kapitel (Kap. 7.1.1 und 7.1.2) vorgestellt.

Eine Form des Faradayschen Gesetzes, die für die theoretische Diskussion angemessener ist, erhält man, indem man die induzierte Spannung durch ein Kurvenintegral über ein elektrisches Feld darstellt

$$U_{\text{ind}}(t) = \oint_K \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{r} .$$

Diese Gleichung besagt, dass dieses elektrische Feld nicht wirbelfrei ist. Es bewirkt den Ladungstransport, der zu dem Induktionsstrom führt. Die theoretisch nützlichere Form des Induktionsgesetzes (6.2) lautet

$$\oint_K \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{r} = -k_f \frac{d}{dt} \iint_{F(K)} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{f} . \quad (6.3)$$

Das Kurvenintegral ist über den Rand der Fläche zu nehmen, über der der Fluss geändert wird. Die Orientierungen der Vektoren  $d\mathbf{r}$  und  $d\mathbf{f}$  sind nach der üblichen Absprache (Rechte Handregel) aufeinander abgestimmt (Abb. 6.2). Um die Variante (6.3) des Faradaygesetzes weiter zu diskutieren, abstrahiert man von dieser immer noch an der Praxis orientierten Form in der folgenden Weise. Man bemerkt, dass auch ohne die Drähte, in denen das induzierte Wirbelfeld sich durch Stromfluss bemerkbar macht, diese Gleichung gültig ist. Das Oberflächenintegral ist dann über eine beliebige Fläche mit einem *festen* Rand  $K$  zu nehmen. Somit wirkt die Zeitableitung nur auf das  $\mathbf{B}$ -Feld und man kann die rechte Seite dieser Gleichung umschreiben

$$\oint_K \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{r} = -k_f \iint_{F(K)} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{f} .$$

Formt man noch das Kurvenintegral mit dem Satz von Stokes um, so folgt

$$\iint_{F(K)} \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{f} = -k_f \iint_{F(K)} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{f} .$$

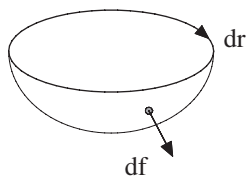


Abb. 6.2. Zum Faradaygesetz, 2. Fassung

Mit dem Argument, dass  $F(K)$  bei festem Rand beliebig wählbar ist, erhält man eine *differentielle Form* des Faradayschen Gesetzes

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -k_f \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \quad (\text{Faradaygesetz, zweite Fassung}) . \quad (6.4)$$

Diese Gleichung beschreibt den Sachverhalt: Ein zeitlich veränderliches  $\mathbf{B}$ -Feld erzeugt ein elektrisches Wirbelfeld. Für stationäre Magnetfelder erhält man wieder Wirbelfreiheit

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \mathbf{0} \quad \longrightarrow \quad \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{0} .$$

Die Frage, ob diese Abstraktion korrekt ist, muss jedoch überprüft werden. Die einfachen Induktionsexperimente mit Stromschleifen lassen diese Interpretation zu, beweisen sie jedoch nicht eindeutig. Die Korrektheit der Abstraktion ergibt sich im Endeffekt durch den Erfolg der Maxwellgleichungen. Vor einer detaillierteren Diskussion dieses vollständigen Satzes von Grundgleichungen der Elektrodynamik sind, auf der Basis der praktischen Form des Faradayschen Gesetzes, noch einige Bemerkungen zu dem Begriff der Selbstinduktion zu notieren.

### 6.1.2 Selbst- und Wechselinduktion

Ein Ringstrom  $i$  erzeugt ein Magnetfeld  $\mathbf{B}$ , das durch die Ringfläche  $F$  selbst greift (Abb. 6.3). Ändert sich der Strom mit der Zeit, so ändert sich auch das Magnetfeld mit der Zeit und das zeitlich veränderliche Magnetfeld wirkt per Induktion auf den Ringstrom zurück. Man bezeichnet diesen Effekt als **Selbstinduktion**.

Um die Situation quantitativ zu fassen, berechnet man den magnetischen Fluss durch die Fläche  $F$ , indem man das von  $i$  erzeugte Magnetfeld mit der stationären Biot-Savart Formel (5.18) ansetzt, wobei über den (genügend dünnen) Ring, oder allgemein eine Schleife  $K$ , zu integrieren ist

$$\phi_B(t) = \iint_F \mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{d}\mathbf{f} = \left\{ k_m \iint_F \oint_K \frac{\mathbf{d}\mathbf{r}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \cdot \mathbf{d}\mathbf{f} \right\} i(t) = \gamma i(t) .$$

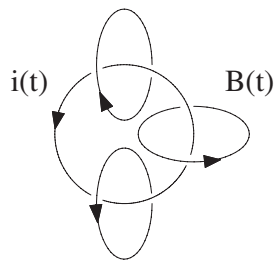


Abb. 6.3. Selbstinduktion

Die Konstante  $\gamma$  ist im Prinzip berechenbar, sie hängt nur von der Geometrie der Schleife ab. Befindet sich die Schleife in einem magnetisierbaren Material, so ist der Fluss  $\phi_B$  im Fall der einfachsten Materialgleichung durch  $(\mu \phi_B)$  zu ersetzen.

Eine einfachere Darstellung der Situation gewinnt man, wenn man das Magnetfeld durch das Vektorpotential ersetzt<sup>3</sup>. Es folgt dann mit dem Satz von Stokes

$$\phi_B(t) = \iint_F \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{f} = \iint_F (\nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)) \cdot d\mathbf{f} = \oint_K \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{r}$$

und mit der Biot-Savartformel (5.27) für das Vektorpotential die Relation

$$\phi_B(t) = k_m \oint_K \oint_{K'} \frac{d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} i(t) = \gamma i(t).$$

Geht man mit dieser Formel in das Faradaygesetz (6.2) ein, so folgt

$$U_{\text{ind}}(t) = -k_f \frac{d\phi_B(t)}{dt} = -\gamma k_f \frac{d}{dt} i(t) = -L \frac{d}{dt} i(t). \quad (6.5)$$

Die konstante Größe  $L$ , die wahlweise durch

$$L = k_f k_m \iint_F \oint_K \frac{d\mathbf{r}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \cdot d\mathbf{f} = k_f k_m \oint_K \oint_{K'} \frac{d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (6.6)$$

gegeben ist, bezeichnet man als den **Selbstinduktionskoeffizienten**, oder kurz die Selbstinduktion. Die Einheiten in den beiden Maßsystemen sind

$$[L]_{\text{CGS}} = \frac{\text{statvolt}}{\text{statamp/s}} = \frac{\text{s}^2}{\text{cm}}.$$

Im SI System gilt eine entsprechende Aussage und es ist

$$[L]_{\text{SI}} = \frac{\text{V}}{\text{A/s}} = 1 \text{ Henry}.$$

Der Umrechnungsfaktor ist (in guter Näherung)

$$[L]_{\text{SI}} = \frac{1}{9} \cdot 10^{11} [L]_{\text{CGS}}.$$

Hat man  $n$  Stromschleifen mit den Strömen  $i_1(t), i_2(t), \dots$ , so erzeugen diese Ströme in der  $k$ -ten Schleife einen Fluss

$$\phi_k(t) = \iint_{F(k)} \sum_{l=1}^n [\mathbf{B}_l(\mathbf{r}_l, t) \cdot d\mathbf{f}_k] = \oint_{K(k)} \sum_{l=1}^n [\mathbf{A}_l(\mathbf{r}_l, t) \cdot d\mathbf{r}_k].$$

Jede Stromschleife ist dem Fluss jeder anderen Stromschleife ausgesetzt. Für dünne Stromschleifen kann man wiederum die Biot-Savartform benutzen

<sup>3</sup> In Kap. 6.2 wird gezeigt, dass die dynamische Erweiterung der stationären Relation  $\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r})$  die Gleichung  $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$  ist.

$$\phi_k(t) = \sum_{l=1}^n k_m \oint_{K(l)} \oint_{K(k)} \frac{\mathbf{dr}_l \cdot \mathbf{dr}_k}{|\mathbf{r}_l - \mathbf{r}_k|} i_l(t),$$

so dass sich mit dem Induktionsgesetz für die in der  $k$ -ten Schleife induzierte Spannung die Aussage

$$U_k(t) = - \sum_{l=1}^n L_{kl} \frac{di_l(t)}{dt} \quad (6.7)$$

ergibt. Die Größen  $L_{kk}$  entsprechen der oben diskutierten Selbstinduktion. Die Größen  $L_{kl}$  ( $l \neq k$ ) bezeichnet man als **Wechsel-** oder **Gegeninduktionskoeffizienten**. Sie sind (einfache Materialgleichung im gesamten Raum vorausgesetzt) durch

$$L_{kl} = \mu k_f k_m \oint_{K(l)} \oint_{K(k)} \frac{\mathbf{dr}_l \cdot \mathbf{dr}_k}{|\mathbf{r}_l - \mathbf{r}_k|} \quad (6.8)$$

zu berechnen. Offensichtlich gilt  $L_{kl} = L_{lk}$ . Die Berechnung der Wechselinduktion bereitet keine prinzipiellen Schwierigkeiten, da der Nenner in dieser Formel nicht singular wird, falls die Schleifen wohl getrennt sind. Für die Berechnung der Selbstinduktion ist wegen der auftretenden Singularität Vorsicht oder ein alternatives Vorgehen geboten. Benutzt man z.B. die Näherungsformel für den Betrag des homogenen Feldes innerhalb eines Solenoids (siehe Kap. 5.2) mit  $N$  Windungen, der Länge  $l$ , dem Querschnitt  $F$  und einem magnetisierten Kern

$$\mathbf{B} = \frac{4\pi\mu k_m N}{l} i(t),$$

so erhält man wegen  $\phi(t) = B(t)F$  und  $U_{\text{ind}}(t) = -Nk_f \dot{\phi}(t)$  die Selbstinduktion

$$L = \frac{4\pi\mu F}{l} k_f k_m N^2. \quad (6.9)$$

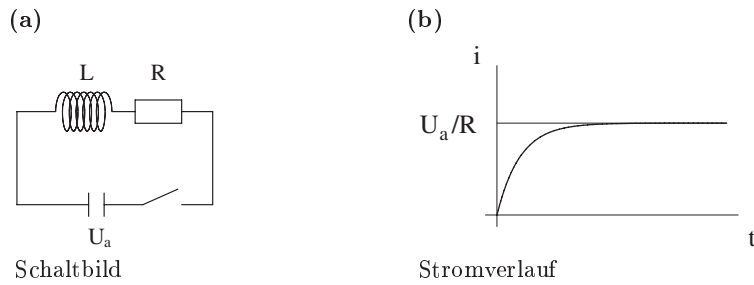
Die Selbstinduktion führt zu Verzögerungseffekten beim Ein- und Ausschalten von Stromkreisen. Für einen Stromkreis aus einer Spule ( $L$ ) und einem Widerstand ( $R$ ) (Abb. 6.4a) gilt die Aussage

$$U_W = Ri = U_a + U_{\text{ind}}.$$

Die Spannung  $U_W$  an dem Widerstand entspricht der Summe der angelegten Spannung  $U_a$  und der Spulenspannung  $U_{\text{ind}}$ . Daraus ergibt sich die Differentialgleichung des Stromkreises

$$L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) = U_a(t). \quad (6.10)$$

Ist  $U_a = \text{const.}$  (entsprechend einer gut geladenen Batterie) und gilt für den Einschaltvorgang die Anfangsbedingung  $i(0) = 0$ , so lautet die Lösung dieser einfachen linearen Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten



**Abb. 6.4.** Einschaltvorgang an einem  $L$ - $R$  Stromkreis

$$i(t) = \frac{U_a}{R} \left( 1 - e^{-(R/L)t} \right). \quad (6.11)$$

Hier wird der Verzögerungseffekt deutlich. Der Strom  $U_a/R$  wird erst nach einer Zeitverzögerung erreicht, die durch das Verhältnis  $R/L$  bestimmt ist (Abb. 6.4b). Von Interesse ist auch der Grenzfall  $R \rightarrow 0$ . In diesem Fall ist

$$i(t) = \frac{U_a}{R} \left( 1 - 1 + \frac{R}{L}t + O(R^2) \right) \xrightarrow{R \rightarrow 0} \frac{U_a}{L}t.$$

Der Strom wächst unbegrenzt. Dieses Ergebnis begründet eine der Regeln im physikalischen Praktikum: SchlieÙe nie ein Gerät ohne einen (oder mit einem geringen) inneren Widerstand an eine Spannungsquelle an. Die Eigenschaften von weiteren Wechselstromkreisen werden in den Aufgaben besprochen.

## 6.2 Die Maxwell'schen Gleichungen

Es ist nützlich, mit einer Zusammenstellung der Feldgleichungen für den stationären Fall zu beginnen. Anschließend ist die Frage zu beantworten, welche Modifikationen im Fall von zeitlich veränderlichen Situationen notwendig sind. Für die stationäre elektromagnetische Welt wurden die folgenden Gleichungen diskutiert:

- (1) Das Coulombgesetz in Gaußform

$$\operatorname{div} \mathbf{D}(\mathbf{r}) = 4\pi k_d \rho_w(\mathbf{r}) \quad \nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}) = 4\pi k_d \rho_w(\mathbf{r}).$$

Die dielektrische Verschiebung  $\mathbf{D}$  wird durch die Verteilung der wahren Ladungen bestimmt.

- (2) Das Ampèresche Gesetz

$$\operatorname{rot} \mathbf{H}(\mathbf{r}) = 4\pi k_h \mathbf{j}_w(\mathbf{r}) \quad \nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) = 4\pi k_h \mathbf{j}_w(\mathbf{r}).$$

Die magnetische Feldstärke  $\mathbf{H}$  wird durch die wahren (stationären) Ströme bestimmt.



$$(3) \quad \operatorname{rot} \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{0} \quad \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{0} .$$

Das stationäre elektrische Feld  $\mathbf{E}$  ist wirbelfrei. Es kann durch ein Skalarpotential dargestellt werden.

$$(4) \quad \operatorname{div} \mathbf{B}(\mathbf{r}) = 0 \quad \nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) = 0 .$$

Die magnetische Induktion  $\mathbf{B}$  ist quellenfrei. Es gibt keine magnetischen Ladungen.

Neben den Feldgleichungen ist noch ein Satz von Gleichungen, der die realen, makroskopischen Felder  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{B}$  mit den Hilfsfeldern  $\mathbf{D}$  und  $\mathbf{H}$  verknüpft, zu betrachten

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}) = \frac{k_d}{k_e} \mathbf{E}(\mathbf{r}) + 4\pi k_d \mathbf{P}(\mathbf{r})$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{k_m}{k_h} \mathbf{H}(\mathbf{r}) + 4\pi \frac{k_m}{k_f} \mathbf{M}(\mathbf{r}) .$$

Diese Aussagen sind brauchbar, wenn man mit einem (simplen oder realistischen) Modell die Polarisation oder die Magnetisierung (d.h. die Respons des Materials) berechnet hat. In der Praxis ersetzt man diese mikroskopischen Relationen meist durch die empirischen Materialgleichungen (einfache Form)

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}) = \varepsilon \frac{k_d}{k_e} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mu \frac{k_m}{k_h} \mathbf{H}(\mathbf{r}) .$$

Hinzu kommt die Aussage, z.B. in der differentiellen Form des Ohmschen Gesetzes, dass ein elektrisches Feld einen Stromfluss (z.B. in Leitern oder in einem Plasma) bedingen kann

$$\mathbf{j}_w(\mathbf{r}) = \sigma \mathbf{E}(\mathbf{r}) .$$

Im stationären Fall sind elektrische und magnetische Effekte nur über den Stromfluss gekoppelt

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) = 4\pi k_h \sigma \mathbf{E}(\mathbf{r}) . \quad (6.12)$$

Diese Gleichung ergibt sich, wenn man das Ohmsche Gesetz in das Ampèresche Gesetz einsetzt. Im dynamischen Fall liegt eine zusätzliche Kopplung von magnetischen und elektrischen Feldern vor: Ein zeitabhängiges Magnetfeld erzeugt ein elektrisches Feld. Diese Aussage wird durch das Induktionsgesetz ausgedrückt

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -k_f \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) .$$

Das Induktionsgesetz ist eine Erweiterung der Aussage über die Wirbelfreiheit des elektrischen Feldes, der Aussage (3) über stationäre Felder.

Die Frage lautet somit: Wie sind die Aussagen (1),(2) und (4) zu modifizieren, wenn zeitabhängige Phänomene vorliegen?

(1') Die einfachste Modifikation des Coulombgesetzes wäre

$$\nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = 4\pi k_d \rho_w(\mathbf{r}, t). \quad (6.13)$$

Anstelle der stationären Ladungsverteilung liegt eine zeitlich veränderliche Ladungsverteilung vor. Als Beispiel könnte man an eine homogen geladene Kugel denken, die bewegt wird. Man erhält dann, entsprechend der obigen Gleichung, ein zeitlich veränderliches  $\mathbf{D}$ -Feld. Auf der anderen Seite stellt eine bewegte Ladung im Allgemeinen einen Strom  $i(t)$  dar. Dieser verursacht ein Magnetfeld. Für die Beschreibung der Erzeugung von Magnetfeldern ist jedoch das Ampèresche Gesetz zuständig. Wenn man also zunächst einmal hofft, dass die einfachste Modifikation des Coulombgesetzes ausreicht, fällt die Hauptlast der Diskussion auf das

(2') Ampèresche Gesetz. Die einfachste Modifikation wäre

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = 4\pi k_h \mathbf{j}_w(\mathbf{r}, t).$$

Diese Modifikation ist jedoch, wie das folgende einfache Argument zeigt, nicht ausreichend. Bildet man die Divergenz dieser Gleichung

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)) = 4\pi k_h \nabla \cdot \mathbf{j}_w(\mathbf{r}, t),$$

so findet man: Die linke Seite verschwindet, denn für jedes differenzierbare Vektorfeld ist

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)) = 0.$$

Die rechte Seite ist wegen der Kontinuitätsgleichung ungleich Null

$$\nabla \cdot \mathbf{j}_w(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial \rho_w(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \neq 0.$$

Das Ampèresche Gesetz (2) ist nur im stationären Fall ( $\partial \rho_w / \partial t = 0$ ) eine konsistente Aussage. Die einfachste dynamische Erweiterung ist nicht mit der Forderung nach Ladungserhaltung verträglich.

Ein Ausweg aus dem Dilemma wurde 1865 von J.C. Maxwell vorgeschlagen. Maxwells Argument kann man in der folgenden Weise zusammenfassen: Die Kontinuitätsgleichung kann man mit dem (einfach erweiterten) Coulombgesetz (6.13) in der folgenden Form kombinieren

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla \cdot \mathbf{j}_w(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial \rho_w(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \nabla \cdot \mathbf{j}_w(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{4\pi k_d} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}, t)) \\ &= \nabla \cdot \left( \mathbf{j}_w(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{4\pi k_d} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) \right) = 0. \end{aligned}$$

Ersetzt man nun in dem Ampèreschen Gesetz die Stromdichte durch den Ausdruck in der Klammer, so gewinnt man eine konsistente Gleichung

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = 4\pi k_h \left( \mathbf{j}_w(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{4\pi k_d} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) \right). \quad (6.14)$$

Bei Divergenzbildung ergeben die linke wie die rechte Seite Null. Im stationären Fall ( $\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) \rightarrow \mathbf{D}(\mathbf{r})$ ) geht diese Gleichung in das alte Ampèresche Gesetz über. Der zusätzliche Term beinhaltet die Aussage: Nicht nur die Stromdichte, sondern auch ein elektrisches Feld, das im freien Raum mit der Zeit variiert, kann ein magnetisches Wirbelfeld erzeugen. Definiert man die **Verschiebungsstromdichte**  $\mathbf{j}_v$

$$\mathbf{j}_v(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi k_d} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D}(\mathbf{r}, t), \quad (6.15)$$

so gilt

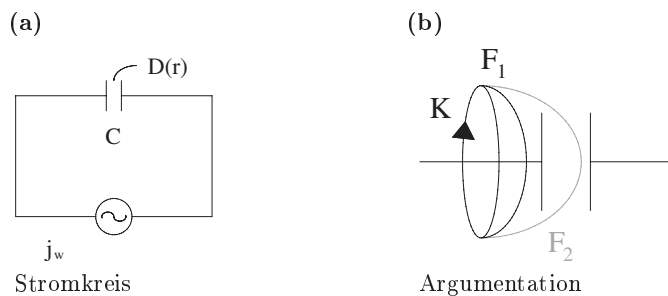
$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = 4\pi k_h (\mathbf{j}_w(\mathbf{r}, t) + \mathbf{j}_v(\mathbf{r}, t)). \quad (6.16)$$

Es ist nützlich (da es ein Kernpunkt der Argumentation darstellt), den Übergang von der stationären zu der dynamischen Ampèreschen Gleichung noch einmal auf eine anschaulichere (aber äquivalente) Weise zu vollziehen. Man betrachtet dazu einen Stromkreis aus einer Wechselstromquelle und einer Kapazität  $C$  (Abb. 6.5a). In dem Draht fließt ein Wechselstrom, den man durch eine Stromdichte  $\mathbf{j}_w(\mathbf{r}, t)$  darstellen kann. Die Kondensatorplatten werden periodisch umgeladen. In dem Zwischenraum existiert ein zeitlich veränderliches  $\mathbf{D}$ -Feld. Man betrachtet nun die Integralform des einfach erweiterten Ampèreschen Gesetzes

$$\oint_K \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{r} = 4\pi k_h \iint_{F(K)} \mathbf{j}_w(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{f},$$

wobei die Kurve  $K$  die Zuleitung zu den Platten umschließen soll (Abb. 6.5b). Die Wahl der Fläche  $F(K)$  ist nach dem Stokeschen Theorem beliebig, solange sie  $K$  als Randkurve hat. Wählt man die Fläche  $F_1$ , durch die die Zuleitung stößt, so ist alles in Ordnung

$$\iint_{F_1} \mathbf{j}_w(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{f} \neq 0.$$



**Abb. 6.5.** Maxwells Verschiebungsstrom

Wenn man jedoch die mathematisch gleichwertige Fläche  $F_2$  benutzt, die zwischen den Kondensatorplatten verläuft, so ist

$$\iint_{F_2} \mathbf{j}_w(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{f} = 0.$$

Der von Maxwell vorgeschlagene Verschiebungsstrom bringt die Angelegenheit in Ordnung. Man kann, im Sinn dieser praktischen Variante, den Maxwell'schen Verschiebungsstrom als eine Abstraktion von dem tatsächlichen Stromfluss auf den Verschiebungsstrom, der durch das elektrische Feld zwischen Platten erzeugt wird, auffassen.

Die Konsequenzen dieser Modifikationen sind weitreichend. Ein Wechselstrom in einem Leiter, der durch ein elektrisches Wechselfeld erzeugt wird, ergibt nach dem (erweiterten) Ampèreschen Gesetz ein zeitlich veränderliches Magnetfeld. Dieses erzeugt nach dem Faradaygesetz ein zeitlich veränderliches elektrisches Wirbelfeld. Dieses erzeugt nach dem erweiterten Ampèreschen Gesetz ein weiteres  $\mathbf{B}$ -Feld etc. Diese Kette von zeitlich veränderlichen  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{B}$ -Feldern, die sich in Raum und Zeit ausbreitet, nennt man eine **elektromagnetische Welle** (Abb. 6.6).

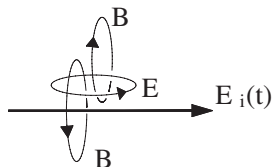


Abb. 6.6. Andeutung einer elektromagnetischen Welle

In den Jahren 1887/88 konnte H. Hertz den experimentellen Nachweis erbringen, dass die Maxwell'sche Theorie korrekt ist. Die Ausbreitung und Erzeugung von elektromagnetischer Strahlung wird durch die einfache Erweiterung des Coulombgesetzes und die von Maxwell vorgeschlagene Erweiterung des Ampèreschen Gesetzes korrekt beschrieben.

Die Quellenfreiheit des  $\mathbf{B}$ -Feldes (Aussage (4)) bleibt auch im dynamischen Fall erhalten. Auch in der Elektrodynamik existieren keine magnetischen Monopole.

Die zusätzlichen Aussagen über die Materialresponse sind unter Umständen ebenfalls zu modifizieren. Man kann sich vorstellen, dass die Polarisation eines Materials der Variation des anregenden Feldes nicht folgen kann, oder dass sie auf bestimmte Frequenzen besonders gut anspricht.

Die Grundgleichungen der Elektrodynamik, die **Maxwellgleichungen** lauten somit

(1) Coulombgesetz $\nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = 4\pi k_d \rho_w(\mathbf{r}, t)$	(6.17)
(2) Ampèregesetz $\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = 4\pi k_h \mathbf{j}_w(\mathbf{r}, t) + \frac{k_h}{k_d} \frac{\partial \mathbf{D}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}$	
(3) Faradaygesetz $\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -k_f \frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}$	
(4) Magnetische Quellen $\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0.$	

Dieser Satz von acht Differentialgleichung geht in dem stationären Grenzfall (alle Größen sind zeitunabhängig) in die Gleichungen über, die unter der Überschrift Elektro- und Magnetostatik diskutiert wurden. Im CGS System lauten diese Gleichungen

$$\nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = 4\pi \rho_w(\mathbf{r}, t) \quad \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \quad (6.18)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad \nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_w(\mathbf{r}, t),$$

im SI System entsprechend<sup>4</sup>

$$\nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \rho_w(\mathbf{r}, t) \quad \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \quad (6.19)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad \nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial \mathbf{D}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \mathbf{j}_w(\mathbf{r}, t).$$

Die Aufstellung der Maxwellgleichungen in diesem Abschnitt ist einigermaßen heuristisch. Eine Bestätigung der Korrektheit auf der Basis der Relativitätstheorie wird in Kap. 8 vorgestellt. Eine Auswahl von Anwendungen, die illustriert, dass alle Aussagen über klassische elektromagnetische Erscheinungen in den Maxwellgleichungen enthalten sind, wird in Kap. 7 betrachtet. In dem nächsten Abschnitt wird zunächst die Grundlösung der *freien* Maxwellgleichungen (in dem Raumgebiet von Interesse existieren keine wahren Ladungen und Ströme), die elektromagnetischen Wellen, vorgestellt.

<sup>4</sup> In einigen Lehrbüchern, die das SI System benutzen, werden die Größen  $\mathbf{D}_n = \varepsilon_0 \mathbf{D}$  und  $\mathbf{H}_n = \mathbf{H} / \mu_0$  eingeführt.

### 6.3 Elektromagnetische Wellen

In diesem Abschnitt sollen die folgenden Fragen beantwortet werden:

- (1) Wie charakterisiert man Wellenphänomene?
- (2) Inwieweit beinhalten Maxwells Gleichungen Wellenerscheinungen?
- (3) Was kann man sich unter einer elektromagnetischen Welle vorstellen?

#### 6.3.1 Wellengleichungen

Zur Beantwortung der ersten Frage ist es am einfachsten, auf die Wellengleichung der elastischen Saite zurückzugreifen, die in Band 1, Kap. 6.1.4 diskutiert wurde.

**6.3.1.1 Die Wellengleichung in einer Raumdimension.** Die Auslenkung  $y$  einer Saite aus der Ruhelage  $y = 0$  ändert sich mit der Position  $x$  und der Zeit  $t$ . Die Funktion  $y(x, t)$  wird durch die partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (6.20)$$

charakterisiert. Dabei enthält der Parameter

$$v = \sqrt{\frac{\tau}{\rho}}$$

den Koeffizienten der harmonischen Rückstellkraft  $\tau$  und die lineare Dichte des Materials  $\rho$ . Man bezeichnet diese Differentialgleichung als eine **eindimensionale Wellengleichung**. Die Aufgabe lautet: Löse diese Differentialgleichung bei vorgegebenen Rand- und Anfangsbedingungen. Der Lösungsprozess ist im Wesentlichen der gleiche wie für die Poisson- oder Laplacegleichung. Zur Bestimmung von Partikulärlösungen macht man einen Separationsansatz

$$y(x, t) = G(x)H(t) .$$

Einsetzen in die Differentialgleichung und sortieren ergibt

$$v^2 \frac{G''(x)}{G(x)} = \frac{\ddot{H}(t)}{H(t)} = -\omega^2 .$$

Die benötigte Separationskonstante bezeichnet man zweckmäßigerweise mit  $-\omega^2$ . Man erhält dann die gewöhnlichen Differentialgleichungen<sup>5</sup>

$$\ddot{H}(t) + \omega^2 H(t) = 0$$

$$G''(x) + k^2 G(x) = 0 \quad \left( k^2 = \frac{\omega^2}{v^2} \right) .$$

<sup>5</sup> Die hier und weiterhin benutzte Größe  $k$  ist nicht mit den indizierten Proportionalitätskonstanten, die durch die Maßsysteme festgelegt sind, identisch.

Für jeden Wert von  $\omega$  existieren für diese Oszillorgleichungen die Fundamentallösungen

$$H(t) = \{e^{i\omega t}, e^{-i\omega t}\} \quad G(x) = \{e^{ikx}, e^{-ikx}\} .$$

Für die Funktion  $y(x, t)$  sind somit vier Grundfunktionen

$$y(x, t) = \{\exp(\pm ikx \pm i\omega t)\}$$

möglich. Soll die Lösung eine Messgröße (z.B. die Auslenkung) beschreiben, so muss sie reell sein. Für reelle Werte von  $\omega$ , kann man alternativ die Grundfunktionen

$$y(x, t) = \{\cos k(x \pm vt), \sin k(x \pm vt)\}$$

benutzen. Man verwendet jedoch meist, aus Gründen der Einfachheit, die komplexe Form mit der Verabredung, dass nur der Realteil physikalische Bedeutung hat.

Zur Interpretation der Grundlösungen kann man eine der reellen Funktionen

$$y = a \sin(kx + \omega t) \quad (a \text{ reell})$$

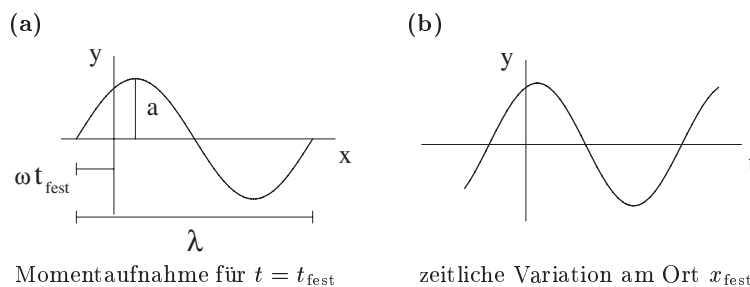
genauer betrachten. Eine Momentaufnahme ( $t_{\text{fest}}$ ) entspricht einer Sinuskurve mit der Amplitude  $a$ , der Phase  $\omega t_{\text{fest}}$  und der Wellenlänge  $\lambda = 2\pi/k$  (Abb. 6.7a). Die Größe  $k$  bezeichnet man als **Wellenzahl**

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad [k] = \text{Länge}^{-1} . \quad (6.21)$$

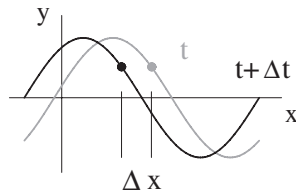
Diese Zahl gibt an, wie viele Wellen der Wellenlänge  $\lambda$  in das Standardintervall  $2\pi$  passen.

Als Funktion der Zeit ändert sich der Ausschlag an einem festen Ort ebenfalls sinusförmig (Abb. 6.7b). Die Oszillation in der Zeit wird durch die Frequenz

$$f = \frac{\omega}{2\pi} \quad (6.22)$$



**Abb. 6.7.** Eindimensionale ebene Wellen



**Abb. 6.8.** Zur Definition der Ausbreitungsgeschwindigkeit

charakterisiert. Aus der Definition  $\omega = kv$  folgt dann

$$2\pi f = \frac{2\pi}{\lambda}v \quad \text{oder} \quad f\lambda = v. \quad (6.23)$$

Die Konstante  $v$  entspricht der Ausbreitungsgeschwindigkeit der harmonischen Welle. Dies kann man folgendermaßen einsehen: Betrachtet man eine Auslenkung zur Zeit  $t$  und zur Zeit  $t + \Delta t$  (Abb. 6.8)

$$y(x, t) = a \sin(kx \pm \omega t)$$

$$y(x + \Delta x, t + \Delta t) = a \sin(k(x + \Delta x) \pm \omega(t + \Delta t)),$$

so haben die Wellenfunktionen den gleichen Wert, falls  $k\Delta x \pm \omega\Delta t = 0$  ist. In der Zeit  $\Delta t > 0$  verschiebt sich das gesamte Bild um den Beitrag  $\Delta x$ . Es folgt dann

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = v = \mp \frac{\omega}{k}.$$

Eine Welle, die sich nach 'links' bewegt, ist durch eine negative Ausbreitungsgeschwindigkeit charakterisiert. Die vier Grundlösungen beschreiben **monochromatische Wellen**, d.h. Wellen, die durch eine bestimmte Wellenlänge und Frequenz charakterisiert werden. Die vier Grundtypen unterscheiden sich durch

$\sin(kx + \omega t)$       Sinus-/Kosinus-Wellen, die sich mit der  
 $\cos(kx + \omega t)$       Geschwindigkeit  $v$  nach links bewegen,

$\sin(kx - \omega t)$       entsprechend mit Bewegung nach rechts.  
 $\cos(kx - \omega t)$

Die Wellengleichung ist linear. Die allgemeine Lösung (mit vorgegebener Ausbreitungsgeschwindigkeit, da  $v$  als Parameter in der Differentialgleichung auftritt), ergibt sich durch Superposition der Partikulärlösungen. In reeller Form also

$$y(x, t) = \int_0^\infty \left\{ a(k) \sin[k(x + vt)] + b(k) \cos[k(x + vt)] \right. \\ \left. + c(k) \sin[k(x - vt)] + d(k) \cos[k(x - vt)] \right\} dk.$$



Man kann auch den Wellenzahlbereich  $[-\infty, \infty]$  benutzen. So entspricht z.B. der Ansatz für nach links laufende Wellen

$$y_L(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} dk \left\{ a_1(k) \sin [k(x + vt)] + b_1(k) \cos [k(x + vt)] \right\}$$

wegen

$$y_L(x, t) = \int_0^{\infty} dk \left\{ (a_1(k) - a_1(-k)) \sin [k(x + vt)] + (b_1(k) + b_1(-k)) \cos [k(x + vt)] \right\}$$

dem vorherigen. Der Ansatz mit dem Wellenzahlbereich  $[-\infty, \infty]$  erweist sich oft als zweckmäßiger.

In der komplexen Form kann man etwas kompakter

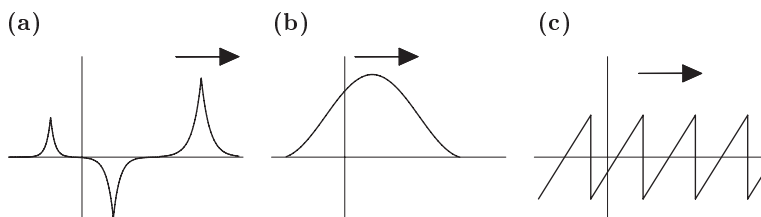
$$y(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ A(k) e^{ik(x+vt)} + B(k) e^{ik(x-vt)} \right\} dk \quad (6.24)$$

schreiben. Die zwei komplexen Entwicklungskoeffizienten  $A, B$ , entsprechen, für jeden Wert von  $k$ , vier reellen Integrationskonstanten. Aus mathematischer Sicht stellen diese Überlagerungen von monochromatischen Wellen Fourierintegrale dar. Mittels Fourierintegration kann man (fast) jede Wellenform darstellen. So erhält man z.B. für

- $A = 0$  und  $B \neq 0$  nach rechts laufende Wellenformen wie z.B. wandernde Wellenpulse (Abb. 6.9a), wandernde Wellenpakete (Abb. 6.9b) oder wandernde Sägezähne (Abb. 6.9c).

Einige weitere, direkte Beispiele sollen die expliziten Möglichkeiten andeuten.

- Ist  $A = 0$  und  $B(k) = B \delta(k - k_0)$  mit  $y = B e^{ik_0(x-vt)}$ , so liegt eine nach rechts laufende, monochromatische Kosinuswelle vor, falls  $B$  reell ist.
- Für  $A = 0$  und  $B(k) = B_1 \delta(k - k_1) + B_2 \delta(k - k_2)$  hat man eine Überlagerung von zwei monochromatischen Wellen.



**Abb. 6.9.** Diverse Wellenformen

- Die Vorgabe  $B(k) = 1/(2\pi)$  ergibt mit der Darstellung der  $\delta$ -Funktion (Math.Kap. 1.4)  $y(x, t) = \delta(x - vt)$ , also einen unendlich hohen und unendlich scharf lokalisierten Wellenimpuls.
- Hat man  $A \neq 0$  während  $B = 0$  ist, so findet man mit den entsprechenden Gewichten in dem Fourierintegral nach links laufende Wellenformen.
- Für  $A \neq 0$  und  $B \neq 0$  kann man auch stehende Wellen erhalten. So ist z.B. für  $A = B = \delta(k - k_0)$

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(y(x, t)) &= \operatorname{Re} [e^{ik_0x} (e^{i\omega_0t} + e^{-i\omega_0t})] \\ &= (2 \cos \omega_0t) \cos k_0x \quad (\omega_0 = k_0v) . \end{aligned}$$

Man erhält eine stehende Kosinuskurve, deren ‘Amplitude’ mit dem Kosinusetz in der Zeit variiert (Abb. 6.10a).

Für physikalische Probleme wird durch die Vorgabe von Anfangs- und Randbedingungen eine spezielle Lösung der Wellengleichung festgelegt. Man unterscheidet die folgenden Problemstellungen:

(a) **Rand-Anfangswertprobleme.** Hier ist die Vorgabe

$$y(a, t) = y_a \quad y(b, t) = y_b$$

für alle  $t$ . Ein typisches Problem dieser Art ist die eingespannte Saite mit  $y_a = y_b = 0$ . In diesem Fall muss die Wellenform in ein vorgegebenes Intervall  $[a, b]$  passen (Abb. 6.10b).

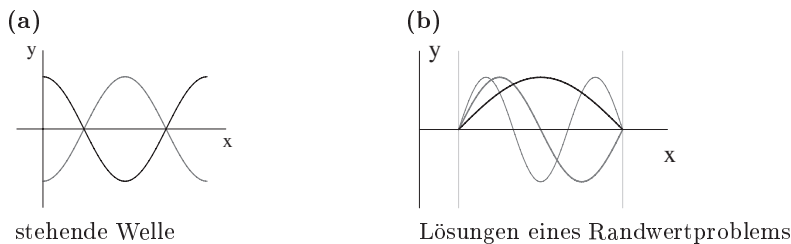
Dies ist nur für bestimmte Wellenzahlen  $k_n$  ( $n = 0, 1, \dots$ ) möglich. Man spricht dann von **Eigenwerten** der Randwertaufgabe

$$y(x, t) = \sum_n [A_n e^{ik_n(x+vt)} + B_n e^{ik_n(x-vt)}] . \tag{6.25}$$

Das Fourierintegral geht in diesem Fall in eine Fourierreihe über. Die endgültige Wellenform in dem Grundintervall wird erst durch die weitere Vorgabe

$$y(x, 0) = f(x) \quad \left. \frac{\partial}{\partial t} y(x, t) \right|_{t=0} = g(x)$$

(für alle  $x$ , in  $[a, b]$ ) eindeutig festgelegt.



**Abb. 6.10.** Konzepte der Wellenmechanik

- (b) **Anfangswertprobleme.** In diesem Fall ist die Welle nicht auf ein endliches Intervall beschränkt, sondern kann über den gesamten Raumbereich laufen. Die Vorgabe

$$y(x, 0) = f(x) \quad \left. \frac{\partial}{\partial t} y(x, t) \right|_{t=0} = g(x)$$

(für alle  $x$ ) legt die Koeffizienten des allgemeinen Fourierintegrals fest. Dies bedeutet: Gibt man die anfängliche Form des Wellenzuges und seine anfängliche Zeitvariation vor, so beschreibt die Wellengleichung die weitere, zeitlich-räumliche (eindimensionale) Entwicklung des Wellenzuges eindeutig.

Die Diskussion der Wellengleichung lässt sich auf höhere Raumdimensionen erweitern.

**6.3.1.2 Die Wellengleichung in zwei Raumdimensionen.** Die zweidimensionale Wellengleichung hat die Form

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \psi(x, y, t) - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi(x, y, t)}{\partial t^2} = 0. \quad (6.26)$$

Die Funktion  $\psi$  beschreibt eine beliebige, skalare Größe, die sich über der  $x$ - $y$  Ebene mit der Zeit ändert. Ist insbesondere  $\psi$  die  $z$ -Koordinate, so beschreibt die Differentialgleichung Auslenkungen über der  $x$ - $y$  Ebene (z.B. eine schwingende Membran oder Wasserwellen), doch kann man sich auch abstraktere Situationen vorstellen. Die Größe  $\psi$  kann z.B. eine Flächendichte sein.

Die allgemeine Lösung der zweidimensionalen Wellengleichung erhält man ebenfalls durch Bestimmung von Partikulärlösungen und deren Superposition. Die Details zu der Berechnung von Partikulärlösungen folgt dem Standardmuster. Da es in diesem Fall drei unabhängige Variable gibt, benötigt man zwei Separationskonstanten. Charakterisiert man die Position eines Punktes in der Ebene mit  $\mathbf{r} = (x, y)$  und fasst die Separationskonstanten in dem Wellenzahlvektor  $\mathbf{k} = (k_x, k_y)$  zusammen, so lauten die Partikulärlösungen

$$\psi_{\text{part}}(\mathbf{r}, t) = e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \pm \omega t)}$$

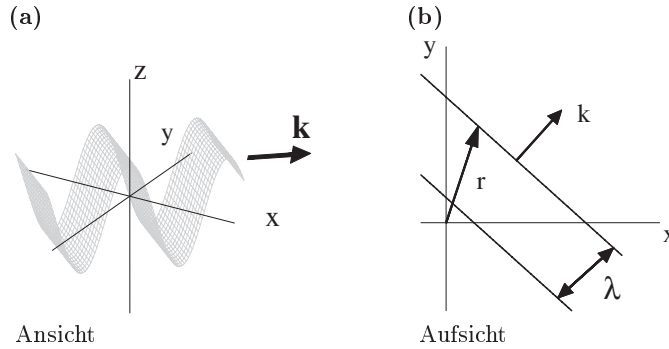
mit

$$\omega = vk = v \sqrt{k_x^2 + k_y^2}. \quad (6.27)$$

Man bezeichnet diese Lösungen als (zweidimensionale) ebene Wellen. Der Realteil der Lösung beschreibt die physikalische Messgröße, so z.B.

$$\begin{aligned} \psi_{\text{phys.}}(\mathbf{r}, t) &= \text{Re} \left[ A e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \pm \omega t)} \right] \\ &= (\text{Re } A) \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \pm \omega t) - (\text{Im } A) \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \pm \omega t) . \end{aligned}$$

Die Veranschaulichung der zweidimensionalen Wellenlösung beruht auf dem Argument: Alle Punkte, für die das Skalarprodukt  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$  für eine Zeit  $t$  den gleichen Wert hat, haben den gleichen Ausschlag  $\psi$ . Das Skalarprodukt (Projektion) gibt an, dass alle Punkte auf einer Geraden senkrecht zu dem Vektor  $\mathbf{k}$  eine Wellenfront bilden (siehe Abb. 6.11). Der Abstand von zwei aufeinander folgenden Wellenbergen oder Wellentälern ist die Wellenlänge  $\lambda$  (Abb. 6.11b).



**Abb. 6.11.** Zweidimensionale ebene Wellen

Man kann sich eine zweidimensionale, ebene Welle als ein riesiges, sinus- (oder kosinus-) förmiges Stück Wellblech vorstellen, das sich mit der Geschwindigkeit  $v = \omega/k$  in Richtung von  $\mathbf{k}$  (Minuszeichen im Argument der Exponentialfunktion) oder gegen die Richtung von  $\mathbf{k}$  (Pluszeichen) bewegt. Der Vektor  $\mathbf{k}$  beschreibt also die ‘Ausbreitungsrichtung’ der Welle. Sein Betrag ist mit der Wellenlänge verknüpft

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{[k_x^2 + k_y^2]^{1/2}}. \quad (6.28)$$

Für die zweidimensionale ebene Welle gilt (wie im eindimensionalen Fall) die Relation

$$\omega = 2\pi f \quad \lambda = \frac{2\pi}{k} \quad \longrightarrow \quad v = \frac{\omega}{k} = \lambda \cdot f.$$

Die allgemeine Lösung der zweidimensionalen Wellengleichung erhält man durch doppelte Fourierintegration

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{r}, t) = & \int_{-\infty}^{\infty} dk_x \int_{-\infty}^{\infty} dk_y \left[ A(k_x, k_y) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \omega(k)t)} \right. \\ & \left. + B(k_x, k_y) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega(k)t)} \right] \quad \left( \omega(k) = v \sqrt{k_x^2 + k_y^2} \right). \end{aligned} \quad (6.29)$$

Das Fourierintegral stellt wieder eine Vielzahl von Wellenformen dar. So kann man z.B. in eine Wasserfläche eine Spitze einmal oder periodisch eintauchen.

Man erhält dann entweder einen zweidimensionalen Wellenimpuls oder Ringwellen, die sich kreisförmig ausbreiten. Man kann eine Wasseroberfläche auch mit beliebig geformten Objekten in aperiodischer Weise stören, etc.

Die Amplitudenfunktionen sind entweder durch Anfangs-Randbedingungen (z.B. bei einer Trommel) oder durch Anfangsbedingungen festzulegen. Für den Fall des Anfangswertproblems benötigt man die Vorgabe

$$\psi(\mathbf{r}, 0) = f(\mathbf{r}), \quad \left. \frac{d\psi(\mathbf{r}, t)}{dt} \right|_{t=0} = g(\mathbf{r}) \quad \text{für alle } \mathbf{r}.$$

**6.3.1.3 Die Wellengleichung in drei Raumdimensionen.** Die Diskussion der dreidimensionalen Wellengleichung

$$\Delta\psi(x, y, z, t) - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi(x, y, z, t) = 0 \quad (6.30)$$

verläuft analog. Die Partikulärlösungen, die ebenen Wellenlösungen, unterscheiden sich formal nicht von dem zweidimensionalen Fall

$$\psi_{\text{part.}}(\mathbf{r}, t) = e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \pm \omega t)}.$$

In diesem Fall gibt es jedoch drei Separationskonstanten, die man in dem Wellenzahlvektor

$$\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)$$

zusammenfassen kann. Es gelten die Relationen

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}, \quad k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}, \quad \omega = 2\pi f \quad \longrightarrow \quad v = \frac{\omega}{k} = \lambda \cdot f.$$

Zur Veranschaulichung der dreidimensionalen ebenen Wellen ist das Folgende zu bemerken: Alle Vektoren  $\mathbf{r}$ , deren Endpunkte in einer Ebene senkrecht zu dem Wellenvektor  $\mathbf{k}$  liegen, haben für die gleiche Zeit den gleichen 'Schwingungszustand'. Als konkretes Beispiel könnte man sich vorstellen, dass die Wellenfunktion  $\psi$  die Dichte des Mediums beschreibt. Alle Punkte in einer Ebene senkrecht zu  $\mathbf{k}$  haben für die gleiche Zeit die gleiche Dichte. Die Punkte gleicher Dichte verschieben sich mit der Geschwindigkeit  $\mathbf{v}$  in der Zeit in oder gegen die Richtung von  $\mathbf{k}$ .

Die allgemeine Lösung ist nunmehr ein dreidimensionales Fourierintegral

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \iiint d^3k \left[ A(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \omega(k)t)} + B(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega(k)t)} \right]. \quad (6.31)$$

Spezielle Lösungen sind bei den Anfangswertproblemen, wie im Fall der zweidimensionalen Wellengleichung, durch

$$\psi(\mathbf{r}, 0) = f(\mathbf{r}) \quad \left. \frac{d\psi(\mathbf{r}, t)}{dt} \right|_{t=0} = g(\mathbf{r}) \quad \text{für alle } \mathbf{r}$$

eindeutig festgelegt. Zum Beweis dieser Aussage kann man sich auf die folgende Darstellung der dreidimensionalen  $\delta$ -Funktion berufen (Math.Kap. 1.4)

$$\delta(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d^3r .$$

Multipliziert man

$$\psi(\mathbf{r}, 0) = f(\mathbf{r}) = \iiint d^3k [A(\mathbf{k})e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + B(\mathbf{k})e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}]$$

mit  $e^{-i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}}$  und integriert über den gesamten Raum, so folgt

$$\iiint f(\mathbf{r})e^{-i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}} d^3r = \iiint d^3r \iiint d^3k e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\cdot\mathbf{r}} (A(\mathbf{k}) + B(\mathbf{k})) .$$

Die Raumintegration auf der rechten Seite ergibt (bis auf einen Faktor) eine  $\delta$ -Funktion. Integration über die Wellenzahl liefert dann

$$A(\mathbf{k}') + B(\mathbf{k}') = \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint f(\mathbf{r})e^{-i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}} d^3r .$$

Die Vorgabe der Ableitung liefert entsprechend

$$i\omega(\mathbf{k}')(A(\mathbf{k}') - B(\mathbf{k}')) = \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint g(\mathbf{r})e^{-i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}} d^3r .$$

Aus diesen beiden Sätzen von Gleichungen kann man (falls die Integrale auf der rechten Seite berechnet sind) die Funktionen  $A(\mathbf{k})$  und  $B(\mathbf{k})$  bestimmen.

### 6.3.2 Wellenlösungen der Maxwellgleichungen

Die Frage lautet hier: Inwieweit beschreiben die Maxwellgleichungen Wellenphänomene? Die Antwort beinhaltet zwei Aspekte. Zum einen stellt sich die Frage nach der Erzeugung von elektromagnetischen Wellen, dem Senderproblem, das in dem Abschnitt Kap. 7.3 aufgegriffen wird. Zum zweiten ist die Frage nach der Ausbreitung solcher Wellen, wenn sie einmal erzeugt sind, zu diskutieren.

Um die Ausbreitung zu diskutieren, kann man sich einen großen Materialblock vorstellen, in dem

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \varepsilon \frac{k_d}{k_e} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mu \frac{k_m}{k_h} \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$$

gilt. In dem Materialblock befindet sich ein Sender, der elektromagnetische Wellen erzeugt. In dem Material sind *außerhalb* des Senders keine wahren Ladungen vorhanden und es fließen keine wahren Ströme

$$\rho_w(\mathbf{r}, t) = 0 \quad \mathbf{j}_w(\mathbf{r}, t) = \mathbf{0} .$$

Unter diesen Bedingungen lauten die (freien) Maxwellgleichungen für die realen Felder

$$\nabla \mathbf{B} \cdot (\mathbf{r}, t) = \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (6.32)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -k_f \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}(\mathbf{r}, t) \quad (6.33)$$

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \varepsilon \mu \frac{k_m}{k_e} \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}. \quad (6.34)$$

In (6.32) und (6.34) wurden die (einfachen) Materialgleichungen benutzt. Um zu Wellengleichungen für die Felder zu gelangen, muss man die folgenden Umformungen vornehmen:

Schritt 1: Bilde die Rotation der letzten Gleichung

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)) = \varepsilon \mu \frac{k_m}{k_e} \nabla \times \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t),$$

benutze zur Auflösung der doppelten Rotation die Relation

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)) - \Delta \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = -\Delta \mathbf{B}(\mathbf{r}, t),$$

bzw. in anderer Schreibweise

$$\text{rot}(\text{rot } \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)) = \text{grad}(\text{div } \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)) - \Delta \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = -\Delta \mathbf{B}(\mathbf{r}, t).$$

Man erhält nach Vertauschung der Reihenfolge der Zeit- und der Ortsdifferentiation auf der rechten Seite

$$\Delta \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) + \varepsilon \mu \frac{k_m}{k_e} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)) = 0.$$

Schritt 2: Setze in diese Gleichung das Induktionsgesetz für  $\nabla \times \mathbf{E}$  ein. Dies ergibt

$$\Delta \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) - \varepsilon \mu \frac{k_m k_f}{k_e} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{0}. \quad (6.35)$$

Man erhält einen Satz von Wellengleichungen für die drei Komponenten des  $\mathbf{B}$ -Feldes, z.B. für die  $x$ -Komponente

$$\Delta B_x(\mathbf{r}, t) - \varepsilon \mu \frac{k_m k_f}{k_e} \frac{\partial^2}{\partial t^2} B_x(\mathbf{r}, t) = 0.$$

Führt man die entsprechenden Schritte, beginnend mit der Gleichung (6.33) für  $\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ , aus, so findet man eine analoge Wellengleichung für das  $\mathbf{E}$ -Feld

$$\Delta \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) - \varepsilon \mu \frac{k_m k_f}{k_e} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{0}. \quad (6.36)$$

Die zwei (vektoriellen) Sätze von Wellengleichungen beschreiben die Ausbreitung der Komponenten von  $\mathbf{E}$ - und  $\mathbf{B}$ -Feldern in dem Material. Die Wellenform, die sich ausbreitet, hängt von dem noch zu diskutierenden Produktionsmechanismus ab. Den Wellengleichungen kann man jedoch ohne Rechnung entnehmen, dass sich die (ebenen)  $\mathbf{E}$ -Vektorwellen und die (ebenen)  $\mathbf{B}$ -Vektorwellen mit der gleichen Geschwindigkeit

$$v = \left[ \frac{k_e}{\varepsilon \mu k_m k_f} \right]^{1/2} \quad (6.37)$$

ausbreiten.

Ein experimenteller Befund lautet: Im Vakuum mit  $\varepsilon = \mu = 1$  ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit aller elektromagnetischen Wellen gleich der Lichtgeschwindigkeit  $c$ . Dies bedeutet, dass die Kombination  $[k_e/(k_m k_f)]^{1/2}$  der drei Konstanten den Wert  $c$  ergeben muss

$$\left[ \frac{k_e}{k_m k_f} \right]_{\text{CGS}}^{1/2} = \left[ \frac{k_e}{k_m k_f} \right]_{\text{SI}}^{1/2} = c. \quad (6.38)$$

Im CGS System mit  $k_e = 1$  und  $k_m = k_f = 1/c$  ist dies direkt einsichtig. Im SI System findet man mit  $k_e = 1/(4\pi\varepsilon_0)$ ,  $k_m = \mu_0/(4\pi)$  und  $k_f = 1$  die Relation

$$v_{\text{SI}}(\text{Vakuum}) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}. \quad (6.39)$$

Setzt man die Zahlenwerte für diese Größen

$$\varepsilon_0 = 8.85418... \cdot 10^{-12} \left[ \frac{\text{C}^2 \cdot \text{s}^2}{\text{kg} \cdot \text{m}^3} \right] \quad \mu_0 = 1.25663... \cdot 10^{-6} \left[ \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{C}^2} \right]$$

ein, so findet man in der Tat  $v_{\text{SI}}(\text{Vakuum}) = c = 2.997925... \cdot 10^8$  m/s. Für alle Materialien ist  $\varepsilon \mu > 1$ , so dass (unabhängig vom Maßsystem) die Aussage gilt

$$v(\text{Materie}) = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon \mu}} < v(\text{Vakuum}) = c.$$

In den Maxwellgleichungen sind die zwei Vektorfelder  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{B}$  verknüpft, in den Wellengleichungen ist diese Kopplung nicht mehr ersichtlich. Man muss somit im Auge behalten, dass man die Wellengleichungen aus den Maxwellgleichungen gewinnen kann, aber umgekehrt die Maxwellgleichungen nicht mehr aus den Wellengleichungen rekonstruieren kann. Dies bedeutet, dass in den Maxwellgleichungen zusätzliche Information enthalten ist. Diese Zusatzinformation bestimmt den eigentlichen Charakter der elektromagnetischen Wellen.

### 6.3.3 Elektromagnetische Wellen

Die einfachste Wellenform, die man als Lösung der Wellengleichungen erwarten kann, sind monochromatische ebene Wellen. Liefert der Sender eine solche Wellenform, so kann man die Fundamentallösung der sechs Wellengleichungen (6.35) und (6.36) in dem Gebiet außerhalb des Senders in der folgenden Form zusammenfassen<sup>6</sup>

<sup>6</sup> Die angedeuteten monochromatischen Wellen treten nur auf, wenn ein monochromatischer Sender vorliegt. Ein Sender, der mit der Frequenz  $f$  schwingt,



$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{B}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \quad (6.40)$$

$$\omega = vk = \sqrt{\frac{k_e}{k_f k_m} \frac{k}{\sqrt{\varepsilon \mu}}} = \frac{ck}{\sqrt{\varepsilon \mu}}. \quad (6.41)$$

Diese Gleichungen beschreiben die Situation, dass sich die Wellen in Richtung des Wellenzahlvektors ausbreiten. Die Diskussion für die entgegengesetzte Ausbreitungsrichtung würde ganz analog verlaufen. Zur Beschreibung der Amplituden der ebenen Wellen benötigt man im Allgemeinen sechs komplexe Größen  $E_x, E_y, E_z, B_x, B_y, B_z$ . Man kann sich jedoch auf den Ansatz

$$\mathbf{E}_0 = E_0 \mathbf{e}_1 \quad \mathbf{B}_0 = B_0 \mathbf{e}_2$$

(jeweils eine komplexe Zahl multipliziert mit einem reellen Einheitsvektor) beschränken, da im Endeffekt nur der Realteil der Wellenfunktionen von physikalischer Bedeutung ist. Um die zusätzliche Information, die in den Maxwellgleichungen enthalten ist, herauszuarbeiten, geht man mit der Lösung (6.40) in die Maxwellgleichungen ein. Dabei sind folgende 'Rechenregeln' für die Anwendung des Nablaoperators und der Zeitableitung auf eine ebene Welle nützlich

$$\nabla e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \pm \omega t)} = i\mathbf{k} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \pm \omega t)}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \pm \omega t)} = \pm i\omega e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \pm \omega t)}.$$

Man erhält dann

(a) aus den Divergenzgleichungen (6.32)

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad \longrightarrow \quad i(\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{k}) E_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} = 0 \quad \longrightarrow \quad (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{k}) = 0$$

und entsprechend

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad \longrightarrow \quad (\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{k}) = 0.$$

Die Feldvektoren stehen senkrecht auf der Ausbreitungsrichtung. Die ebene elektromagnetische Welle ist eine **transversale Welle**.

(b) aus den Rotationsgleichungen (6.33, 6.34)

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + k_f \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0$$

$$\longrightarrow \quad i[(\mathbf{k} \times \mathbf{e}_1) E_0 - \omega k_f \mathbf{e}_2 B_0] e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} = \mathbf{0}$$

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) - \varepsilon \mu \frac{k_m}{k_e} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 0$$

---

erzeugt eine Welle mit der Wellenlänge  $\lambda = v/f$ , bzw.  $c/f$  im Vakuum. Die Abstrahlung ist jedoch nicht eben, sondern hat eine andere Geometrie (siehe Kap. 7.3). Blendet man jedoch einen 'Strahl' aus, so erhält man eine gute Näherung an eine ebene Welle. Es wird nur eine Ausbreitungsrichtung in Richtung des Wellenzahlvektors berücksichtigt.

$$\longrightarrow \quad i \left[ (\mathbf{k} \times \mathbf{e}_2) B_0 + \varepsilon \mu \frac{\omega k_m}{k_e} \mathbf{e}_1 E_0 \right] e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} = \mathbf{0} .$$

Das Ergebnis sind zwei Vektorgleichungen (die Ausdrücke in den Klammern ergeben einen Nullvektor), deren Auflösung eine Relation zwischen den drei Vektoren  $\mathbf{e}_1$ ,  $\mathbf{e}_2$  und  $\mathbf{k}$

$$\mathbf{e}_2 = \frac{1}{k} (\mathbf{k} \times \mathbf{e}_1) ,$$

sowie eine Relation zwischen den Amplituden

$$B_0 = \frac{\sqrt{\varepsilon \mu}}{c k_f} E_0$$

ergibt. (Diese Aussage und weitere Details, einschließlich Animationen, zu den ebenen elektromagnetischen Wellen werden in [⊙ D.tail 6.1](#) ausführlicher behandelt.)

Die zusätzliche Information aus den Maxwellgleichungen kann letztlich in der folgenden Form zusammengefasst werden

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{k} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (6.42)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{\sqrt{\varepsilon \mu}}{c k k_f} (\mathbf{k} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)) = \frac{1}{\omega k_f} (\mathbf{k} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)) . \quad (6.43)$$

Die drei Vektoren  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{k}$ , und  $\mathbf{E}$  bilden (in jedem Raumpunkt und zu jeder Zeit) ein Dreibein mit einer Orientierung, so dass sie (in der angegebenen Reihenfolge) ein Rechtssystem bilden. Die Amplituden der Felder sind verkoppelt. Im Vakuum sind die Amplituden gleich, in einem Medium ist  $|\mathbf{B}| > |\mathbf{E}|$ .

Um die elektromagnetischen Wellen im Detail zu diskutieren, muss man zu der reellen Form übergehen. Man wählt zweckmäßigerweise die  $z$ -Richtung als Ausbreitungsrichtung

$$\mathbf{k} = (0, 0, k) .$$

Das elektrische Feld hat dann die komplexe Form

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \left( E_x e^{i(kz - \omega t)}, E_y e^{i(kz - \omega t)}, 0 \right) .$$

Schreibt man die komplexen Amplituden in der Form reeller Betrag mal Phase

$$E_x = \tilde{E}_x e^{i\alpha_x} \quad E_y = \tilde{E}_y e^{i\alpha_y} \quad (\tilde{E}, \alpha \text{ reell}) ,$$

so findet man

$$\mathbf{E}_{\text{reell}}(\mathbf{r}, t) = \left\{ \tilde{E}_x \cos(kz - \omega t + \alpha_x), \tilde{E}_y \cos(kz - \omega t + \alpha_y), 0 \right\} . \quad (6.44)$$

Der reelle Anteil des  $\mathbf{B}$ -Feldes hat dann entsprechend der Relation (6.43) die Form

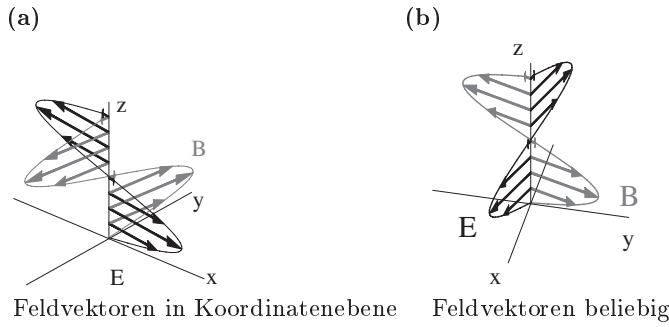


Abb. 6.12. Linear polarisierte ebene Wellen (Ausbreitung in  $z$ -Richtung)

$$\mathbf{B}_{\text{reell}}(\mathbf{r}, t) = \frac{k}{\omega k_f} \left\{ -\tilde{E}_y \cos(kz - \omega t + \alpha_y), \right. \\ \left. \tilde{E}_x \cos(kz - \omega t + \alpha_x), 0 \right\}. \tag{6.45}$$

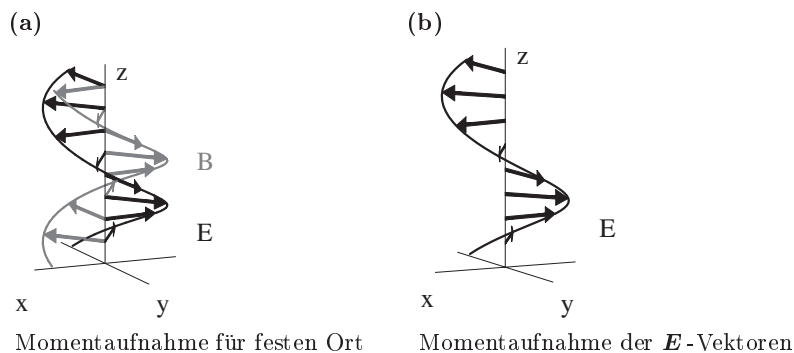
Zur Veranschaulichung der elektromagnetischen Wellen kann man einige Spezialfälle betrachten:

- (i) Es ist  $\tilde{E}_y = 0$ . Dies ist der Fall einer **linear polarisierten** ebenen Welle. Der  $\mathbf{E}$ -Vektor schwingt in der  $x$ - $z$  Ebene. Der  $\mathbf{B}$ -Vektor entsprechend senkrecht dazu in der  $y$ - $z$  Ebene (Abb. 6.12a). Man muss sich dann noch vorstellen, dass sich dieses Bild für jede Gerade parallel zur  $z$ -Achse wiederholt und dass sich das gesamte Gebilde mit der Geschwindigkeit  $v$  in der Richtung der  $z$ -Achse bewegt.
- (ii) Für  $\tilde{E}_x \neq \tilde{E}_y \neq 0$  und  $\alpha_x = \alpha_y$  erhält man ebenfalls eine linear polarisierte ebene Welle, nur schwingt der  $\mathbf{E}$ -Vektor (und entsprechend der  $\mathbf{B}$ -Vektor) parallel zu Ebenen deren Neigung durch  $\tilde{E}_x/\tilde{E}_y$  gegeben ist (Abb. 6.12b).
- (iii) Für  $\alpha_y = \alpha_x \pm \pi/2$  und  $\tilde{E}_x = \tilde{E}_y = \tilde{E}$  folgt für den  $\mathbf{E}$ -Vektor

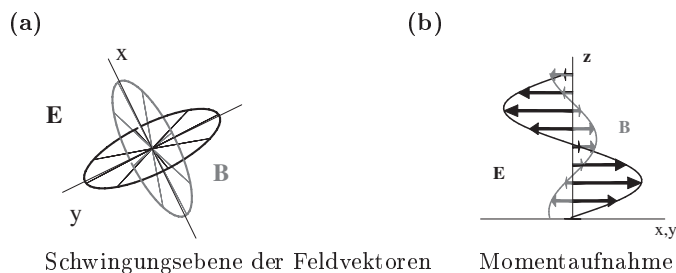
$$\mathbf{E}_{\text{reell}}(\mathbf{r}, t) = \left\{ \tilde{E} \cos(kz - \omega t + \alpha_x), \pm \tilde{E} \sin(kz - \omega t + \alpha_x), 0 \right\}.$$

Für eine feste Position  $z$  entspricht dies der Parameterdarstellung eines Kreises. Der Endpunkt des  $\mathbf{E}$ -Vektors läuft in jedem Punkt einer Ebene mit  $z = \text{const.}$  auf einem Kreis um. Diese Welle ist eine **zirkular polarisierte** ebene Welle (Abb. 6.13a).

Für das positive/negative Vorzeichen von  $\pi/2$  ist der Umlaufsinn (gesehen gegen die  $z$ -Richtung), wie in (Abb. 6.13a) angedeutet gegen/in die Uhrzeigerichtung. Man unterscheidet also links und rechts zirkular polarisierte ebene Wellen. Eine Momentaufnahme der Spitzen der  $\mathbf{E}$ -Vektoren entlang der  $z$ -Achse ergäbe eine Schraubenlinie. Diese windet sich mit der Geschwindigkeit  $v$  in die  $z$ -Richtung (Abb. 6.13b). Das  $\mathbf{B}$ -Feld wird



**Abb. 6.13.** Zirkular polarisierte elektromagnetische Welle



**Abb. 6.14.** Elliptisch polarisierte elektromagnetische Welle

- durch eine entsprechende, dazu orthogonale Schraubenlinie charakterisiert.
- (iv) Ist  $\tilde{E}_x \neq \tilde{E}_y$  und  $\alpha_x \neq \alpha_y$ , so hat man eine **elliptisch polarisierte** ebene Welle. Für einen gegebenen Punkt beschreibt der Endpunkt des  $\mathbf{E}$ -Vektors eine Ellipse. Im allgemeinen Fall ist die Ellipse um den Winkel  $(\alpha_x - \alpha_y)/2$  gegen die  $x$ -Koordinatenachse gedreht (Abb. 6.14a). Es ist eine Übung in höherer darstellender Geometrie, die entsprechenden Momentaufnahmen der Wellenbilder zu zeichnen (Abb. 6.14b).

Je nach Frequenz der (monochromatischen) Sender existiert ein breites Spektrum von monochromatischen elektromagnetischen Wellen. Die Wellenlängenbereiche im Vakuum (in der Praxis Luft mit  $\epsilon\mu \approx 1$ ) entsprechen

$\lambda = 10^6 - 10^{-1}$ cm	Radiobereich, UKW, Mikrowellen $\implies$ makroskopische Sender
$\lambda = 10^{-2} - 10^{-4}$ cm	infrarotes (IR) Licht (Wärmestrahlen)
$\lambda \approx 10^{-4}$ cm	sichtbares Licht
$\lambda = 10^{-5} - 10^{-6}$ cm	ultraviolettes (UV) Licht
$\lambda = 10^{-6} - 10^{-10}$ cm	Röntgenstrahlen $\implies$ atomare Sender
$\lambda = 10^{-9} - 10^{-11}$ cm	$\gamma$ -Strahlen $\implies$ nukleare Sender, Elementarprozesse.

Das Verhältnis von Lichtgeschwindigkeit (im Vakuum) zu Ausbreitungsgeschwindigkeit im Medium

$$\frac{c}{v} = \sqrt{\varepsilon\mu} = n \quad (6.46)$$

bezeichnet man in der Optik als den **Brechungsindex** des Mediums. Diese Definition des Brechungsindex nennt man auch **Maxwells Relation**. Sie verknüpft optische Eigenschaften mit den Materialeigenschaften. Die Beziehung (6.46) ist jedoch mit Vorsicht zu betrachten. Für das Beispiel des destillierten Wassers findet man die Werte

$$\mu \approx 1 \quad \varepsilon \approx 80 .$$

Daraus ergibt sich ein Brechungsindex von  $n(\text{H}_2\text{O}) \approx 8.9$ . Dieser Brechungsindex ist in der Tat für Radiowellen gültig. Im Bereich des sichtbaren Lichtes findet man jedoch  $n(\text{H}_2\text{O}, \lambda \approx 10^{-4}\text{cm}) \approx 1.33$ . Der Unterschied zeigt die beachtliche Frequenzabhängigkeit der Materialkonstanten auf

$$\varepsilon = \varepsilon(f) \quad \mu = \mu(f) \quad \longrightarrow \quad n = n(f) .$$

Ein qualitatives Verständnis der Frequenzabhängigkeit ist nicht schwierig: Polarisation entsteht durch Ladungsverschiebung im Atom. Wenn die Ladungen auf eine höhere, anregende Frequenz ansprechen sollen, können sich durchaus andere Situationen ergeben als im stationären Fall. Die quantitative Berechnung der Frequenzabhängigkeit der Materialkonstanten ist hingegen keine einfache Angelegenheit<sup>7</sup>. Man bezeichnet die Frequenzabhängigkeit der Materialkonstanten als **Dispersion**, benutzt die Bezeichnung jedoch auch für deren Konsequenzen. Eine direkte Konsequenz (die aus anderer Sicht in der Quantenmechanik interessieren wird) ist das Auseinanderlaufen von Wellenpaketen in einem Medium, das hier kurz erläutert werden soll.

<sup>7</sup> Interessenten finden Details in N. Ashcroft and D. Mermin, 'Solid State Physics' (Saunders Publications, Philadelphia, 1976)

Im Vakuum gilt

$$v = c \quad \text{bzw.} \quad \omega(k) = ck .$$

Jede monochromatische Welle hat die gleiche Ausbreitungsgeschwindigkeit. Konstruiert man durch Superposition von ebenen Wellen mit verschiedenen Wellenzahlen ein ‘Wellenpaket’, so bewegt sich das Gesamtpaket im Vakuum mit der gleichen Geschwindigkeit  $c$  wie jede der Fourierkomponenten, ohne seine Form zu ändern.

In einem dispersiven Medium gilt hingegen

$$v = v(k) = \frac{c}{n(k)} \quad \text{bzw.} \quad \omega(k) = v(k)k .$$

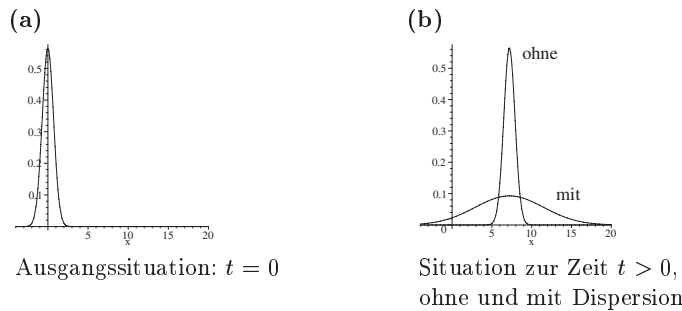
Die Funktion  $\omega(k)$  ist im Allgemeinen keine lineare Funktion in  $k$ . In einem laufenden Wellenpaket breiten sich nun die Fourierkomponenten verschieden schnell aus. Die Folge ist:

- Das Paket läuft auseinander.
- Das ‘Zentrum des Wellenpaketes’ bewegt sich mit einer anderen Geschwindigkeit als die Geschwindigkeit, mit der sich die Komponente mit der mittleren Frequenz des Paketes bewegt.

Diese Möglichkeiten sind in Abb. 6.15a,b für ein spezielles eindimensionales Wellenpaket, das Gaußpaket, illustriert (siehe  $\odot$  D.tail 6.2 für eine ausführliche Diskussion aller notwendigen Rechenschritte). Dieses Wellenpaket wird durch die Fourierentwicklung

$$\Psi(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{-k^2/4a^2} e^{i(kx - \omega(k)t)}$$

dargestellt, wobei die Kreisfrequenz  $\omega(k)$  entweder gleich  $\omega_1(k) = ct$  (nicht-dispersives Paket) oder gleich  $\omega_2(k) = ct + ht^2$  (dispersives Paket) gesetzt wird. Da das Resultat der Integration für das dispersive Paket eine etwas



**Abb. 6.15.** Dispersion von Wellenpaketen (Gaußpaket)

involvierte komplexe Form hat, ist in den Abbildungen anstatt des Realteils der Wellenfunktion die Größe

$$|\Psi(x, t)|^2 = \Psi^*(x, t) \Psi(x, t)$$

aufgetragen. Für das nichtdispersive Gaußpaket ergibt die angedeutete Integration

$$|\Psi_1(x, t)|^2 = \frac{a^2}{\pi} e^{-2a^2(x-ct)^2}.$$

Der Parameter  $a$  reguliert die Breite des Paketes. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit des Maximums ist  $v_1 = c$ .

Im Fall des dispersiven Gaußpaketes erhält man

$$|\Psi_2(x, t)|^2 = \frac{a^2}{\pi [1 + 16a^4 h^2 t^2]^{1/2}} \exp \left[ -2a^2 \frac{(x-ct)^2}{[1 + 16a^4 h^2 t^2]} \right].$$

Das Maximum dieses Paketes breitet sich immer noch mit der Geschwindigkeit  $c$  aus, doch bedingt der zeitabhängige Vorfaktor und die zusätzliche Zeitabhängigkeit in dem Exponenten das Auseinanderfließen (bei Wahrung der Größe der Fläche unter den Kurven).

Um die üblichen Begriffe anzudeuten, die bei der Diskussion der Dispersion eine Rolle spielen, falls keine vollanalytische Behandlung möglich ist, kann man ebenfalls ein skalares Wellenpaket in einer Raumdimension

$$\Psi(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} dk A(k) e^{i(kx - \omega(k)t)}$$

heranziehen. Der Mittelwert der Wellenzahlen dieses Paketes ist

$$k_0 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} k A(k) dk}{\int_{-\infty}^{\infty} A(k) dk}.$$

Die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Komponente  $k_0$  des Wellenpaketes bezeichnet man als die **Phasengeschwindigkeit**

$$v_{Ph}(k_0) = \frac{\omega(k_0)}{k_0} = \frac{c}{n(k_0)}. \quad (6.47)$$

Diese unterscheidet sich im Allgemeinen von der Geschwindigkeit des Schwerpunktes des Paketes, der **Gruppengeschwindigkeit**  $v_{Gr}(k_0)$ . Die Entwicklung des Argumentes der Exponentialfunktion um die Stelle  $k_0$

$$kx - \omega(k)t = k_0 x + (k - k_0)x + \omega(k_0)t + \left. \frac{d\omega(k)}{dk} \right|_{k=k_0} (k - k_0)t + \dots$$

führt auf eine Faktorisierung der Wellenfunktion in eine ebene Welle mit der Wellenzahl  $k_0$  und einem Anteil, der durch die Gewichtsfunktion  $A(k)$  bestimmt wird und der die eigentliche Wellengruppe beschreibt. Es ist

$$\Psi(x, t) \approx e^{i(k_0 x - \omega(k_0)t)} \int_{-\infty}^{\infty} dq A(q + k_0) \exp \left[ iq \left( x - \left. \frac{d\omega(k)}{dk} \right|_{k=k_0} t \right) \right],$$

wobei die Variable  $q$  durch  $q = k - k_0$  definiert ist. Das Paket als Ganzes bewegt sich (falls diese Näherung angemessen ist) mit der Geschwindigkeit

$$v_{Gr}(k_0) = \left. \frac{d\omega(k)}{dk} \right|_{k=k_0} \quad (6.48)$$

(vergleiche die Argumentation auf S. 228). Im Vakuum mit einer linearen Relation zwischen  $\omega$  und der Wellenzahl sind die beiden Geschwindigkeiten gleich

$$v_{Ph}(\text{Vakuum}) = \frac{ck_0}{k_0} = c \quad v_{Gr}(\text{Vakuum}) = \left. \frac{d(ck)}{dk} \right|_{k=k_0} = c.$$

## 6.4 Energie und Impuls des elektromagnetischen Feldes

Mechanische Wellen (z.B. Wasserwellen) transportieren Energie. Man könnte diese Behauptung durch ein einfaches Experiment überprüfen, indem man sich einer stärkeren Brandung aussetzt (empfehlenswert sind die Südostküste von Australien oder Hawaii). Auch elektromagnetische Wellen transportieren Energie und haben einen Impuls. Diese Aussagen kann man mit theoretischen Mitteln anhand der Maxwellgleichungen nachweisen.

### 6.4.1 Energietransport durch elektromagnetische Wellen

Ausgangspunkt für die Betrachtung des Energiesatzes sind die Gleichungen

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -k_f \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$$

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = 4\pi k_h \mathbf{j}_w(\mathbf{r}, t) + \frac{k_h}{k_d} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D}(\mathbf{r}, t).$$

Man multipliziert die erste Gleichung skalar mit  $\mathbf{H}$ , die zweite skalar mit  $\mathbf{E}$  und subtrahiert die beiden resultierenden Gleichungen voneinander

$$\begin{aligned} & \mathbf{H} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) - \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) \\ &= - \left( k_f \mathbf{H} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} + \frac{k_h}{k_d} \mathbf{E} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D} \right) - 4\pi k_h \mathbf{j}_w \cdot \mathbf{E}. \end{aligned}$$

Der physikalische Gehalt der einzelnen Terme in dieser Gleichung kann nach einer Umschreibung verdeutlicht werden.

- Für die linke Seite benutzt man (Anh. B.2)

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \mathbf{H} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) - \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{H}).$$

- Den Term mit der Zeitableitung schreibt man in der Form

$$k_f \mathbf{H} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} + \frac{k_m}{k_e} \mathbf{E} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left( k_f \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} + \frac{k_h}{k_d} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} \right)$$