Einleitung

> La compacité est presque metaphysique.
>
> *Jean Leray (1937)*

> The progress of mathematics may be viewed as progress from the infinite to the finite.
>
> *Gian Carlo Rota (1983)*

Ziel dieses Buches ist es, einige Aspekte der Analysis in normierten linearen Räumen vorzustellen. Während man sich in den Analysis-Grundvorlesungen auf den reellen normierten linearen Raum $\mathbb{R}$ (und manchmal auch sein komplexes Analogon $\mathbb{C}$) beschränkt, betrachtet man in der sogenannten Höheren Analysis auch unendlichdimensionale Räume (meist über $\mathbb{R}$), etwa den Raum $C[0,1]$ der reellwertigen stetigen Funktionen auf $[0,1]$ mit der Maximumsnorm. Hierbei stellt man fest, dass endlichdimensionale Räume X einige bemerkenswerte Eigenschaften haben, die in unendlichdimensionalen Räumen nicht mehr gelten, also die „Endlichdimensionalität" gewissermassen charakterisieren:

- Die Einheitskugel $K(X) = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ ist kompakt.
- Die Einheitssphäre $S(X) = \{x \in X : \|x\| = 1\}$ ist kompakt.
- Jede abgeschlossene beschränkte Menge $M \subset X$ ist kompakt.
- Jede beschränkte Folge in X hat eine konvergente Teilfolge.
- Alle Normen auf X sind äquivalent.
- Jeder lineare Operator $A\colon X \to X$ ist beschränkt.
- Jeder beschränkte lineare Operator ist kompakt.
- Jede stetige Abbildung $f\colon K(X) \to K(X)$ hat einen Fixpunkt.
- Die Einheitssphäre $S(X)$ ist nicht Retrakt der Einheitskugel $K(X)$.
- Die Einheitssphäre $S(X)$ ist nicht zusammenziehbar.
- Jede stetige Abbildung $g\colon K(X) \to X \setminus \{\theta\}$ hat einen positiven Eigenwert.

Beispielsweise ist also im Raum $C[0,1]$ – wie in jedem unendlichdimensionalen Raum – *keine* dieser Eigenschaften erfüllt, d. h. es gibt in diesem Raum nichtkompakte abgeschlossene und beschränkte Teilmengen, beschränkte Folgen ohne konvergente Teilfolge, nichtäquivalente Normen, unbeschränkte lineare Operatoren und Funktionale, nichtkompakte beschränkte lineare Operatoren, stetige Abbildungen auf der Einheitskugel ohne Fixpunkte, und stetige nullstellenfreie Abbildungen auf der Einheitskugel ohne positive Eigenwerte. Hierbei handelt es sich nicht nur um reine Existenzaussagen, sondern man kann alle diese Objekte tatsächlich explizit konstruieren. In diesem Sinn sind unendlichdimensionale Räume also erheblich „komplizierter" als endlichdimensionale. Man kann auch sagen, dass sie sich unserer Anschauung entziehen: Beispielsweise widerspricht die Existenz einer Abbildung, die eine Kugel auf ihren Rand abbildet, ohne „Löcher aufzureißen", drastisch unserer geometrischen Intuition.

Trotzdem kann man auch in unendlichdimensionalen Räumen die oben angegebenen Eigenschaften in gewissem Sinn „wiedergewinnen", wenn man zusätzliche Voraussetzungen ins Spiel bringt. Das „Zauberwort" heißt hier: *Kompaktheit*! Es ist wohl kaum übertrieben zu sagen, dass der Begriff der Kompaktheit (vielleicht neben dem des Grenzwerts) einer der wichtigsten Begriffe der gesamten Analysis ist. Schon an der recht umständlichen Definition („aus jeder offenen Überdeckung kann man eine endliche Teilüberdeckung auswählen") sieht man, worin die tiefe Idee der Kompaktheit besteht, nämlich *im Übergang von unendlich vielen Objekten zu endlich vielen, die dasselbe leisten*. In diesem Sinn sind die obenstehenden Zitate zu verstehen. Trotz ihrer scheinbaren Kompliziertheit erweist sich die Definition der Kompaktheit als äußerst glücklich: Sie ist einerseits allgemein genug, um ein fundamentales Werkzeug für eine große Klasse von Problemen bereitzustellen, und anderseits eng genug, um viele wichtige Aussagen zu liefern, die aus ihr folgen. Demzufolge wird die Kompaktheit auch eines der zentralen Themen dieses Buches sein, aber natürlich nicht das einzige.

Das Buch besteht aus 14 Kapiteln, die man in zwei etwa gleichgroße Gruppen einteilen kann, nämlich einen *linearen Teil* und einen *nichtlinearen Teil*. Der lineare Teil umfasst die ersten 8 Kapitel. Im ersten Kapitel stellen wir eine Liste von *Beispielen normierter linearer Räume* zusammen, die wir im folgenden benötigen. Die Definition und äquivalente Beschreibungen *kompakter Mengen* werden im zweiten Kapitel gegeben; hier führen wir auch sogenannte *Nichtkompaktheitsmaße* ein, ein offenbar weitgehend unbekanntes, aber sehr nützliches Hilfsmittel der Analysis.

Wie oben bemerkt, werden durch die Äquivalenz von Kompaktheit einerseits und Abgeschlossenheit und Beschränktheit andererseits (Satz von Heine-Borel) gerade die endlichdimensionalen normierten linearen Räume charakterisiert. In einem unendlichdimensionalen Raum sind kompakte Mengen zwar auch stets abgeschlossen und beschränkt, müssen aber zusätzlich noch eine weitere Eigenschaft haben. Dies führt zu sogenannten *Kompaktheitskriterien*, die wir im dritten Kapitel vorstellen.

Die anschließenden drei Kapiteln sind *beschränkten linearen Operatoren* zwischen normierten Räumen gewidmet. Im vierten Kapitel diskutieren wir einen der zentralen Sätze für solche Operatoren, nämlich den *Satz von der beschränkten Inversen*, der in äquivalenter Form oft auch als *Satz von der offenen Abbildung* oder *Satz vom abgeschlossenen Graphen* behandelt wird. *Kompakte Operatoren* sind Gegenstand des fünften Kapitels. Im sechsten Kapitel betrachten wir ausführlich zwei besonders wichtige Klassen linearer Operatoren, nämlich *Matrixoperatoren* zwischen Folgenräumen und *Integraloperatoren* zwischen Funktionenräumen; insbesondere geben wir hinreichende Bedingungen für die Kompaktheit solcher Operatoren, die manchmal auch notwendig sind. Viele kompakte Operatoren, die in Beispielen auftreten, kommen aus einer dieser beiden Klassen.

Im siebten Kapitel diskutieren wir die *Fredholm-Alternative*, die eine der elegantesten Existenz- und Eindeutigkeitsaussagen für gewisse Klassen linearer Gleichungen darstellt. Insbesondere zeigt die Fredholm-Alternative, dass „kompakte Störungen" der Identität sehr ähnliche Eigenschaften wie Matrizen in endlichdimensionalen Räumen haben. Was dies für konkrete Probleme bringt, illustrieren wir im achten Kapitel, einerseits anhand von *Volterraschen Integralgleichungen* und *Anfangswertproblemen*, andererseits anhand von *Fredholmschen Integralgleichungen* und *Randwertproblemen*.

Der nichtlineare Teil umfasst die letzten 6 Kapitel des Buches. Wie beginnen im neunten Kapitel mit einigen *Beispielen nichtlinearer Operatoren*. Für nichtlineare Operatoren ist vieles anders als bei linearen Operatoren; beispielsweise kann ein nichtlinearer Operator beschränkt und unstetig sein, oder unbeschränkt und stetig. Das zehnte Kapitel ist dem einfachsten Fixpunktprinzip gewidmet, der im allgemeinen schon in den Analysis-Grundvorlesungen behandelt wird, nämlich dem *Banachschen Fixpunktsatz*. Der ganz andere *Brouwersche Fixpunktsatz*, der in der eindimensionalen Version fast trivial (nämlich einfach der bekannte Zwischenwertsatz) ist, sich in höheren Dimensionen aber als hochgradig nichttrivial erweist, wird im elften Kapitel behandelt. In unendlichdimensionalen Räumen ist dieser Satz falsch; man kann ihn dort aber – eben durch eine zusätzliche Kompaktheitsvoraussetzung – als *Schauderschen Fixpunktsatz* sozusagen „wiedergewinnen", was wir im zwölften Kapitel tun werden.

Ein weniger bekanntes, aber höchst nützliches relativ neues Fixpunktprinzip ist der *Darbosche Fixpunktsatz*, welcher grob gesprochen einen einheitlichen Zugang zum Banachschen und Schauderschen Fixpunktsatz liefert und im dreizehnten Kapitel besprochen wird. Schließlich wenden wir alle diese Prinzipien im vierzehnten Kapitel auf konkrete nichtlineare Probleme an; hierbei wird ein weiteres Fixpunktprinzip eine wichtige Rolle spielen, nämlich der *Borsuksche Fixpunktsatz*, den man mit gewisser Berechtigung als eine Art „nichtlineares Analogon" zur Fredholm-Alternative aus dem siebten Kapitel ansehen kann.

Manche Hilfsmittel, die wir zugunsten des roten Fadens nicht in in den Text mit aufgenommen haben, sind in einem Anhang zusammengestellt. Hierzu gehören einige der oben erwähnten *Kriterien für Endlichdimensionalität*, der berühmte *Bairesche Kategoriensatz* (der alle im vierten Kapitel bewiesenen „Fundamentalsätze" über lineare Operatoren als Folgerungen impliziert), einige Fakten über *Basen in Banachräumen*, der klassische *Approximationssatz von Stone und Weierstraß* und der *Urysonsche Fortsetzungssatz*.

Wir haben uns bemüht, die wichtigsten im Buch benutzten Begriffe vorher sorgfältig zu definieren und durch eine Vielzahl von Beispielen zu erläutern, bevor wir damit arbeiten. Beim Leser setzen wir nur Grundkenntnisse in Analysis (Folgen und Reihen, Stetigkeit, Differenzierbarkeit, Riemann-Integral), Linearer Algebra (Vektorräume, lineare

Abbildungen, Matrizen), Maßtheorie (messbare Mengen und Funktionen, Nullmengen, Lebesgue-Integral, Konvergenzsätze), und mengentheoretischer Topologie (Abgeschlossenheit und Offenheit, Kompaktheit) voraus. Daher sollte das Buch allen Mathematikstudenten etwa ab dem vierten Semester zugänglich sein.

Dieses Buch ist in der Tat als „Brücke“ zwischen den Vorlesungen des Grundstudiums und denen des Hauptstudiums gedacht. Es kann als elementare Einführung sowohl in die Lineare als auch in die Nichtlineare Funktionalanalysis dienen, und es ist als vorlesungsbegleitende Lektüre ebenso geeignet wie als Grundlage zum Selbststudium. Es soll nicht den Besuch einer Vorlesung über Topologie, Funktionalanalysis, oder Differentialgleichungen ersetzen, sondern allenfalls ergänzen. Im Gegenteil: Nähme der Leser neben diesem keines der hervorragenden Werke etwa über Funktionalanalysis oder Nichtlineare Analysis mehr zur Hand, so hätte dieses Buch seinen Zweck verfehlt.

Schon beim flüchtigen Lesen dürfte die Vielzahl von *Beispielen* auffallen, die wir zur Veranschaulichung der abstrakten Begriffe und Ergebnisse aufgenommen haben. Wir sind der Meinung, dass man viele mathematische Ideen – vor allem, wenn sie kompliziert sind – am besten anhand eines Beispiels erklären kann; der mathematische Kern wird dann ziemlich oft „von selbst“ sichtbar. Hierbei ist es *nicht* hilfreich, das Ergebnis