3-7910-2402-7 Deutsch, Quantitative Portfoliosteuerung

1

Einleitung

Investitionsentscheidungen sind schwierig. Streng genommen sind sie nur verlässlich machbar, wenn man in die Zukunft sehen könnte. Aber dies ist - ohne Insider-Information - *prinzipiell nicht möglich.* Und das war sie auch schon, die wichtigste Erkenntnis zum Thema Investitionen und Portfoliomanagement. Wir wiederholen sie noch einmal:

Man kann nicht in die Zukunft sehen.

Für diese Erkenntnis braucht es keine komplizierte Mathematik oder ausgefeilte Datenverarbeitung, sondern es genügt der so genannte "gesunde Menschenverstand". Deshalb steht sie auch gleich am Anfang dieses Buches. Ist dies nun ein Grund zur Verzweiflung? Ganz im Gegenteil: *Wenn* man in die Zukunft sehen könnte, *das* wäre ein Grund zur Verzweiflung! Zum Beispiel würde dann niemand mehr an den Finanzmärkten investieren, es wäre ja viel einfacher z. B. Lotto zu spielen. Doch Lotto gäbe es dann auch nicht, bzw. wenn es Lotto gäbe, würde jeder auf die richtigen Zahlen setzen. Deshalb müsste der Gewinn bei 6 Richtigen auf alle Lotto-Spieler verteilt werden, wodurch jeder gerade wieder seinen Einsatz zurück erhielte, abzüglich der anteiligen Kosten, die der Betrieb der Lotto-Organisation nun mal verursacht. Am Ende würde also jeder (etwas) weniger zurückerhalten, als er investiert hat. Wir kommen somit zu der Erkenntnis: Wenn man in die Zukunft sehen könnte, würde man beim Lotto-Spielen mit Sicherheit Verlust machen.

Ähnlich verhält es sich mit allen anderen Investitionsalternativen, ja mit so gut wie allen Aspekten unseres Lebens, wenn man es nur logisch zu Ende denkt. Nichts würde funktionieren, wenn man in die Zukunft sehen könnte. Da wir aber nicht in die Zukunft sehen können, können z. B. beim Lotto wenigsten einige Wenige gewinnen und *alle* haben die *Chance* auf einen Gewinn.

Was schließen wir nun daraus? Da wir sowieso nicht in die Zukunft sehen können, brauchen wir uns bei (Investitions-)entscheidungen nicht anzustrengen und können rein zufällig agieren? Ganz bestimmt nicht! Denn nicht alles ist - wie Lotto - ein Glücksspiel.

Es kommt darauf an, *zum Zeitpunkt der Entscheidung* das Richtige zu tun, also die aus heutiger (*nicht* aus zukünftiger) Sicht optimale Entscheidung zu treffen.

Als Beispiel hierfür diene die Entscheidung, ob man eine Berufsunfähigkeitsversicherung abschließt oder nicht. Steht man per heute vor dieser Entscheidung, wägt man die Kosten einer solchen Versicherung gegen das Risiko ab, also gegen den potentiellen Verlust (d. h. den Einfluss auf das eigene Leben und eventuell auch auf das Leben anderer), den eine Berufsunfähigkeit verursacht, und gegen die Wahrscheinlichkeit, mit der dieser Verlust eintritt. Je nachdem wie groß dieses Risiko ist (z. B. wie viele Familienmitglieder von der Berufsfähigkeit abhängen und wie hoch die Hypothek auf das Eigenheim ist), kann es aus heutiger Sicht eindeutig die besserer Entscheidung sein, eine solche Versicherung abzuschließen. Wenn man dann 30 Jahre später als Rentner weiß, dass man sein ganzes Leben lang nie berufsunfähig wurde und man also das Geld für diese Versicherung hätte sparen können, so war es *trotzdem* damals die richtige Entscheidung. Dieses Beispiel führt zu einem sehr wichtigen Punkt, nämlich:

Das Auffinden der per heute optimalen Entscheidungen hat sehr viel mit *Risikomanagement* zu tun.

Dies gilt auch und gerade für Investitionen, die - im Gegensatz zu Ausgaben für den Verbrauch - nur dafür getätigt werden, aus ihnen Erträge zu generieren. Sie sind Risikomanagement in Reinkultur. Denn bei einer Investition ist Geld streng genommen nicht der Einsatz, sondern nur das Transportmedium. Investiert man Geld z. B. in ein Aktienportfolio, so ist dieses Geld nicht "weg" wie z. B., wenn man es für ein Verbrauchsgut wie Orangensaft ausgibt (und diesen dann austrinkt). Vielmehr kann man das Geld auch wieder aus dem Portfolio "herausholen". Allerdings besteht das *Risiko*, dass man nicht mehr das gesamte Geld zurück erhält (weil die Aktien gefallen sind). Was man daher *netto* investiert, ist nur dieses *Risiko*. Das ist der fundamentale Unterschied zwischen Investitionsgütern und Verbrauchsgütern (der leider in der Literatur normalerweise so nicht ausgedrückt wird):

Verbrauchsgüter kosten Geld, Investitionsgüter kosten *Risiko*.

Dass Risiko zu quantifizieren schwieriger ist als Geld zu zählen, ist sicher ein Grund dafür, dass diese fundamentale Tatsache in der Vergangenheit etwas unbeleuchtet blieb. Bestimmt man aber nicht das Risiko einer Investition, macht man schon den ersten schweren Fehler bei der Entscheidungsfindung.

Ein Portfolio besteht aus Investitionsgütern (englisch *Assets*), nicht aus Verbrauchsgütern. Denn der Portfoliomanager investiert in diese Assets nicht, um sie zu verbrauchen, sondern um Erträge aus ihnen zu generieren. Hierfür nimmt er ein gewisses Risiko in Kauf. Das ist sein Einsatz. Ohne Einsatz kein Ertrag. In dieser Sichtweise ist es klar, dass rein aufgrund von erwarteten Erträgen (ohne Risiko-Information) *keine* guten Investitionsentscheidungen möglich sind, da man den Einsatz nicht kennt. Und ein Spiel, bei dem man seinen Einsatz nicht kennt, kann man (auf Dauer) nicht gewinnen. Unabdingbar beim Portfoliomanagement ist daher eine genaue Quantifizierung der eingegangenen Risiken. Nur dann können durch bewusste, wohlüberlegte Übernahme dieser Risiken Erträge erwartet werden. Diese Übernahmen von Risiken sind die oben erwähnten Entscheidungen. Das Beste, was man von solchen Entscheidungen erwarten kann, ist, dass sie *zum Zeitpunkt der Entscheidung* (d. h. unter Einbeziehung aller zu diesem Zeitpunkt zur Verfügung stehenden Information) richtig sind.

In diesem Buch wird gezeigt, wie man mit rein quantitativen Methoden, also durch mathematisch-statistische Analysen von an den Finanzmärkten erhältlicher Information und Anwendung bestimmter Modelle, zu solchen Entscheidungen kommt. Diese Entscheidungen sind richtig, solange die angewendeten Modelle gelten und solange die verwendete Information richtig und vollständig ist. Hat man mehr (oder andere) Information, ergeben sich natürlich auch andere Entscheidungen. In vielen Fällen sind die hier vorgestellten Modelle aber weiterhin anwendbar. Stehen z. B. aus der Fundamentalanalyse andere Renditeschätzungen zur Verfügung als die aus den historischen Kurszeitreihen, so können trotzdem alle hier vorgestellten Optimierungsmethoden weiterhin angewendet werden, indem einfach die Renditeschätzungen aus der Fundamentalanalyse anstelle der historischen Renditen verwendet werden.

Der Aufbau des Buches ist wie folgt: In Teil I werden die grundsätzlichen Marktparameter eingeführt, welche die Ursachen für Preise und Risiken von Finanzinstrumenten sind. Hierbei handelt es sich im Wesentlichen um Kurse von Aktien, Rohstoffen, Devisen, etc. und natürlich um die Zinsen. Für diese Grundrisiken, oft auch *Risikofaktoren* genannt, wird ein stochastisches Modell vorgestellt, das sowohl die zufälligen als auch die deterministischen Aspekte der Risikofaktoren beschreiben kann, der so genannte *Random Walk*, bzw. seine Verallgemeinerung - der *Ito-Prozess*. Dieses Modell enthält statistische Parameter wie Drift, Volatilität und Korrelation. Diese Parameter werden vorgestellt und es werden einige Möglichkeiten aufgezeigt, sie zu bestimmen, z. B. durch historische Zeitreihenanalyse.

Teil II beschäftigt sich ausführlich mit dem Einsatz, den man bei jeder Investition erbringen muss, also mit dem Risiko. Moderne Methoden der Risikoquantifizierung und des Risikomanagements, wie der "*Value at Risk*" oder die so genannten "*Greeks*" werden vorgestellt.

Teil III schließlich ist der Kern dieses Buches. Nachdem in den vorherigen Teilen dargelegt wurde, wie die für eine richtige Entscheidung notwendige Information (hauptsächlich bzgl. Rendite- und Risiko) ermittelt werden kann, befasst sich Teil III mit der Entscheidungsfindung selbst, also mit dem eigentlichen Portfoliomanagement und der quantitativen Portfoliooptimierung. Hierbei geht es darum, soviel erwartete Rendite wie möglich für das eingegangene Risiko (den Einsatz) zu generieren. Richtige Handelsentscheidungen sind solche, die dieses Verhältnis aus erwarteter Rendite und eingegangenem Risiko maximieren. Das Wort "*erwartet*" ist hier sehr wichtig. Die Rendite ist nämlich - trotz aller Mathematik und Technik - keineswegs sicher (ansonsten wäre das Risiko ja auch Null), denn wie schon gesagt: Man kann nicht in die Zukunft sehen.

2

Marktparameter und Risikofaktoren

Risikofaktoren sind die Parameter der Finanzmärkte, welche die Preise der gehandelten Finanzinstrumente bestimmen. Solche Marktparameter sind z. B. Devisen-, Rohstoff- und Aktienkurse und natürlich die Zinsen. Durch die Schwankungen dieser Marktparameter werden Wertschwankungen der Finanzinstrumente induziert. Ein typisches Beispiel hierfür ist, dass der Preis eines Rentenpapiers (englisch *Bond*) von den Zinsen abhängt. In diesem Beispiel ist also der Bond das Finanzinstrument und die Zinsen sind die Risikofaktoren. Die für ein Finanzinstrumentes - bzw. ein Portfolio aus Finanzinstrumenten - relevanten Risikofaktoren sind also die Marktparameter (Zinsen, Devisen-, Rohstoff-, Aktienkurse), deren Änderungen eine Wertänderung des Finanzinstruments bzw. Portfolios bewirken. Das sind bei einem gegebenen Finanzinstrument bzw. Portfolio bei weitem nicht immer alle Marktparameter. Zum Beispiel wird der Wert einer fünfjährigen festverzinslichen Bundesanleihe nicht durch den aktuellen Goldkurs bestimmt. Ein erster Schritt im Risikomanagement ist also zunächst, die für ein gegebenes Finanzinstrument bzw. Portfolio relevanten Risikofaktoren zu identifizieren.

2.1 Preisrisiken

Der einfachste und in der Praxis des Portfoliomanagements durchaus häufig vorkommende Fall, ist, dass ein Portfolio direkt aus den Risikofaktoren selbst besteht, man also nicht zwischen Risikofaktor und Finanzinstrument unterscheiden muss. Ein typisches Beispiel für eine solche Situation ist ein Aktienportfolio, wenn die Kurse der beteiligten Aktien direkt als Risikofaktoren aufgefasst werden (und nicht aus anderen Größen abgeleitet werden). Abb. 2.1 zeigt beispielhaft die Kursentwicklung eines solchen Risikofaktors über den Zeitraum von Anfang 1992 bis Ende 2004. Abb. 2.2 zeigt den gleichen Risikofaktor über einen deutlich kürzeren Zeitraum. Deutlich ist zu erkennen, dass die Kursentwicklung auf allen Zeitskalen eine *zufällige* Komponente enthält, also nicht vorhersehbar ist und daher *Risiko* enthält. Um ein solches zufälliges Verhalten zu modellieren, bedient man sich der Erkenntnisse eines sehr ausgereiften

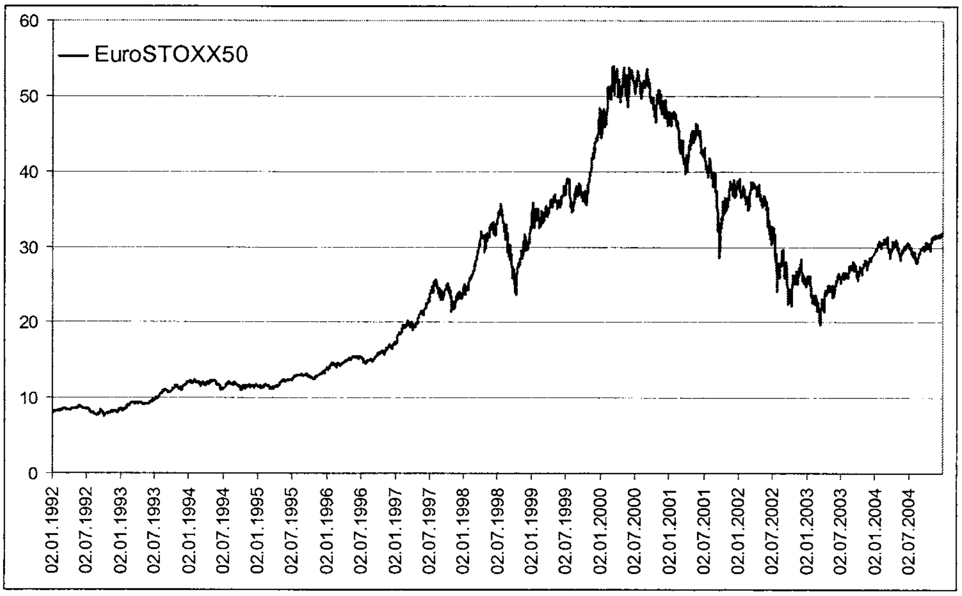

Abbildung 2.1: Kursentwicklung des EuroSTOXX50 über den Zeitraum von Anfang 1992 bis Ende 2004. Grafik "LONG HISTORY" des Excel-Workbooks HISTORICALPRICESSERIES.XLS auf der beiliegenden CD-ROM.

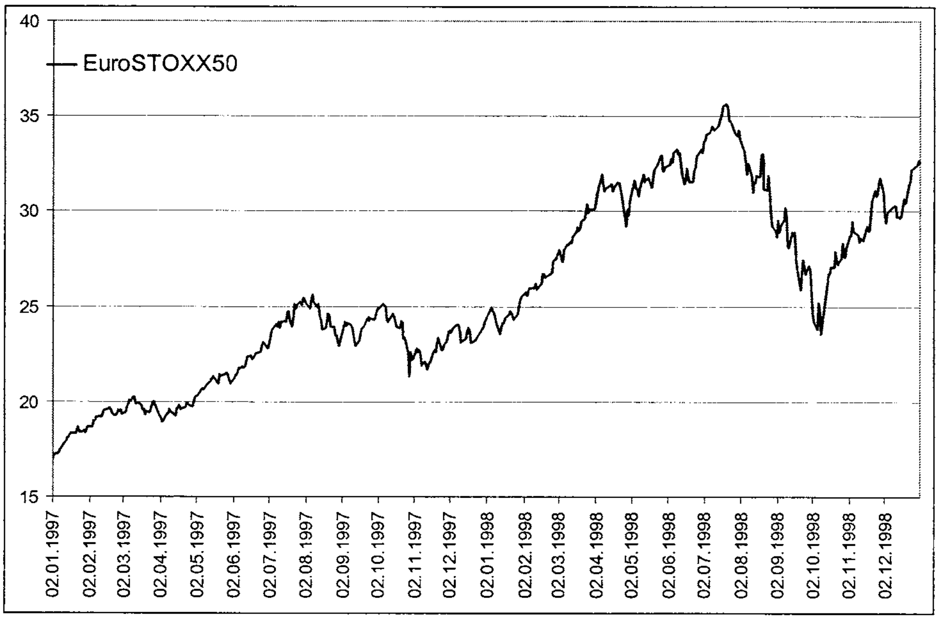

Abbildung 2.2: Kursentwicklung des EuroSTOXX50 in den Jahren 1997 und 1998. Grafik "2 YEARS" des Excel-Workbooks HISTORICALPRICESSERIES.XLS auf der beiliegenden CD-ROM.

und umfangreichen Teilgebietes der Mathematik, der so genannten *Stochastik*. Ganz allgemein heißt dort eine Zufallsgröße $z(t)$, deren Wert sich im Laufe der Zeit t zufällig ändert, *stochastischer Prozess*. Hat der Prozess die Eigenschaft, dass nur der momentane Wert Einfluss auf den nächsten hat, nicht aber der Weg, auf dem der momentane Wert erreicht wurde, so spricht man von einem *Markov-Prozess*. Unter der Annahme, dass der jetzige Wert eines Risikofaktor, wie z. B. der Kurs einer Aktie oder ein Zinssatz, alle aus der historischen Kursentwicklung ableitbaren Informationen enthält (so genannte *schwache Markteffizienz*), folgt, dass der nächste Kurs nur vom jetzigen und von äußeren Einflüssen, wie z. B. der Politik, nicht aber von früheren Kursen abhängt, und dass deshalb Kursentwicklungen Markov-Prozesse sind.

2.1.1 Relative Preisänderungen als Brown'sche Bewegung

Um nun zu einem Modell für den Markov-Prozess $S(t)$ der zeitlichen Entwicklung zum Beispiel eines Aktienkurse zu kommen, nimmt man an, dass die relative (also prozentuale) Änderung $dS(t)/S(t)$ des Kurses sich aus einer Zufallskomponente und einer deterministischen Komponente zusammensetzt. Um genau zu sein, wird statt der relativen Änderung die Änderung $d\ln(S(t))$ des *Logarithmus* des Kurse benutzt, was für kleine Änderungen näherungsweise gleich der prozentualen Kursänderung ist, siehe Gl. 3.13 weiter unten.

Für die deterministische Komponente nimmt man an, dass sie *direkt* proportional zur vergangenen Zeit dt ist. Der Proportionalitätsfaktor heißt *Drift* und wird üblicherweise mit dem Buchstaben μ abgekürzt.

Die Zufallskomponente wird dadurch modelliert, dass die relative Kursänderung als so genannter *Random Walk* aufgefasst wird, wobei die *Anzahl* der Random Walk-Schritte proportional zur vergangenen Zeit dt ist. Der entsprechende Proportionalitätsfaktor heißt *Volatilität* und wird üblicherweise mit dem Buchstaben σ abgekürzt. Dieses Modell für die Zufallskomponente ist sehr ähnlich zu einem berühmten und sehr gut erforschten Prozess, der an vielen Stellen in den Naturwissenschaften auftaucht, dem so genannten *Wiener-Prozess*. Dieser beschreibt z. B. in der Physik u.a. die so genannte *Brown'sche Molekularbewegung* (englisch: *Brownian Motion*). Ein solcher Wiener-Prozess ändert sich im Laufe eines Zeitintervalls dt um einen Betrag dW. Diese zufälligen Änderungen dW sind normalverteilt mit Mittelwert Null und einer Varianz, die gleich der Zeit ist, die während einer solchen Änderung vergangen ist, also gleich dt:

$$dW \sim X\sqrt{dt} \quad \text{mit} \quad X \sim \mathrm{N}(0,1) \tag{2.1}$$

Die Notation $\mathrm{N}(x, y)$ bezeichnet (wie überall in diesem Buch) die *Normalverteilung* mit Mittelwert x und Varianz y. Das heißt $\mathrm{N}(0,1)$ bezeichnet die *Standard*normalverteilung[1]. Das Zeichen „$\sim$“ ist in diesem Zusammenhang zu lesen wie „ist verteilt wie“. Gl. 2.1 bedeutet also in Worten: „dW ist verteilt wie $\sqrt{dt}$ mal eine Zufallszahl X. Diese Zufallszahl X wiederum ist verteilt gemäß der Standardnormalverteilung".

Die Summe aus diesen beiden Komponenten (deterministische und zufällige) bildet

[1] Die Normalverteilung und die Standardnormalverteilung werden ausführlich in Abschnitt A.3 dargestellt.

Zufallsvariable	$x = \ln\left(\frac{S(t+dt)}{S(t)}\right)$	$x = \frac{S(t+dt)}{S(t)}$
Verteilung	**Normalverteilung**	**Lognormalverteilung**
Dichte	$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 dt}} e^{-\frac{(x-\mu dt)^2}{2\sigma^2 dt}}$	$\frac{1}{x\sqrt{2\pi\sigma^2 dt}} e^{-\frac{(\ln(x)-\mu dt)^2}{2\sigma^2 dt}}$
$\mathbf{P(x \leq a)}$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 dt}} \int_{-\infty}^{a} e^{-\frac{(x-\mu dt)^2}{2\sigma^2 dt}} dx$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 dt}} \int_{-\infty}^{\ln(a)} e^{-\frac{(x-\mu dt)^2}{2\sigma^2 dt}} dx$
Erwartungswert	μdt	$e^{(\mu+\sigma^2/2)dt}$
Varianz	$\sigma^2 dt$	$e^{2\mu dt}(e^{2\sigma^2 dt} - e^{\sigma^2 dt})$

Tabelle 2.1: Statistische Eigenschaften des Logarithmus eines Risikofaktors und des Risikofaktors selbst.

nun den Modell-Prozess für die relativen (bzw. logarithmischen) Kursänderungen:

$$d\ln[S(t)] = \mu dt + \sigma dW \tag{2.2}$$

Da außer dem vom Zufall unabhängigen Teil μdt nichts weiter zum (normalverteilten) Random Walk hinzukam, ist $d\ln(S(t))$ ebenfalls normalverteilt; und zwar mit Varianz $\sigma^2 dt$ und Erwartungswert μdt. Eine Größe, deren Logarithmus normalverteilt ist, heißt *lognormalverteilt*. Der Kurs $S(t)$ ist also lognormalverteilt. Die wesentlichen statistischen Eigenschaften von $\ln(S)$ und S sind in Tabelle 2.1 zusammengefasst, siehe hierzu auch Anhang A. In Abbildung 2.3 sind die Dichten und die kumulierten Wahrscheinlichkeiten sowohl der Normal- als auch der Lognormalverteilung für $\mu dt = 0$ und $\sigma\sqrt{dt} = 1$ aufgetragen.

Solche Random Walk-Modelle lassen sich natürlich dahingehend erweitern, dass nicht-konstante Drifts und Volatilitäten zugelassen werden. Wird die Volatilität σ durch die Varianz ausgedrückt und die Drift ganz allgemein als Funktion sowohl der Zeit als auch des Kurses geschrieben, lautet die Gl. 2.2 entsprechende Verallgemeinerung:

$$\begin{aligned} d\ln(S(t)) &= \mu(S(t), t)dt + X\sqrt{\mathrm{var}[d\ln(S(t))]} \\ &\text{mit } X \sim \mathrm{N}(0,1) \end{aligned} \tag{2.3}$$

Dies ist der Ausgangspunkt für allgemeinere stochastische Modelle für Marktparameter wie z. B. Zinsen.

2.1.2 Der Preisprozess für den Risikofaktor

Wie oben dargestellt, ist die Volatilität eines Risikofaktors die Standardabweichung der *logarithmischen* Kursänderungen. Für Portfolio- und Risikomanagement ist aber durchaus auch das *absolute* Risiko relevant, also der *Geldbetrag* eines möglichen Verlustes. Hierfür ist letztendlich die Änderung des Kurses selbst anzugeben, nicht die seines Logarithmus. Weiterhin sind in der Regel die funktionalen Beziehungen (z. B. die Sensitivitäten) zwischen dem Preis eines Finanzinstruments und dem Kurs seines Risikofaktors S gegeben, nicht zwischen Finanzinstrument und Logarithmus des Kurses. Es ist also aus vielen Gründen notwendig, die logarithmischen Änderungen $d\ln(S(t))$ in absolute Kursänderungen $dS(t)$ umzurechnen.

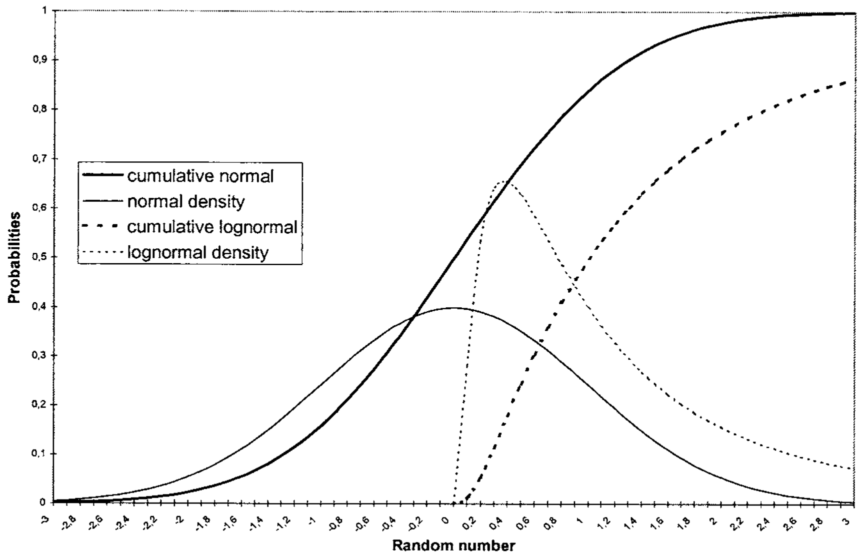

Abbildung 2.3: Die Verteilungen aus Tabelle 2.1 mit $\mu dt = 0$ und $\sigma\sqrt{dt} = 1$. Mit diesen Parametern hat die Normalverteilung Erwartungswert 0 und Varianz 1, die Lognormalverteilung hingegen Erwartungswert $\sqrt{e} \approx 1,65$ und Varianz $e^2 - e \approx 4,67$.

Mit Hilfe des im Anhang vorgestellten Lemma von Ito, Gl. C.3, erhält man aus dem Prozess der logarithmischen Kursänderungen Gl. 2.2 direkt den Prozess für den Kurs selbst. Hierfür wählen wir als stochastische Variable[2] $y = \ln(S(t))$ und als Funktion dieser Variablen $f(y,t) = e^{y(t)}$. Der ursprüngliche Prozess $y(t) = \ln(S(t))$ ist gemäß Gl. 2.2 $dy(t) = \mu dt + \sigma\, dW$. Die benötigten Ableitungen von f können leicht berechnet werden. Ito's Lemma liefert dann für diese spezielle Funktion f

$$f(y,t) = e^y \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial y} = f \ , \quad \frac{\partial f}{\partial t} = 0 \, , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f$$
$$df(y,t) = \left(f(y,t)\mu + \frac{1}{2}\sigma^2 f(y,t) \right) dt + f(y,t)\,\sigma\, dW$$

Wegen $S(t) = e^{\ln(S(t))} = e^{y(t)} = f(y,t)$ ergibt sich nun sofort die gesuchte absolute Kursänderung dS:

$$dS(t) = S(t)\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right) dt + S(t)\sigma\, dW \tag{2.4}$$

Oft wird in der Literatur ein anderer Weg als der hier vorgestellte gegangen. Und zwar wird zuerst ein Random Walk-Modell für den Kurs $dS(t)$ (und nicht für dessen

[2] Wir benutzen hier statt S einen anderen Buchstaben für die stochastische Variable, um Verwirrung aufgrund der Notation zu vermeiden.

Logarithmus) aufgeschrieben und danach über Ito's Lemma das Modell für $d\ln(S(t))$ entwickelt. Man schreibt dann zunächst

$$dS(t) = S(t)\widetilde{\mu}\, dt + S(t)\sigma\, dW \tag{2.5}$$

und erhält mittels Ito's Lemma[3]

$$d\ln(S(t)) = (\widetilde{\mu} - \frac{\sigma^2}{2})\, dt + \sigma\, dW \tag{2.6}$$

Dies entspricht den Gleichungen Gl. 2.4 und Gl.2.2 unserer Herleitung, mit etwas anderer Drift.

$$\widetilde{\mu} = \mu + \frac{\sigma^2}{2} \tag{2.7}$$

Die Modellierung ist also exakt die gleiche, außer dass der Driftparameter etwas anders interpretiert werden muss. Siehe hierzu Gln. 2.12 und 2.14 weiter unten.

Gl. 2.4 beschreibt die *infinitesimalen* Änderungen von S über "unendlich kleine" Zeitspannen dt, bestimmt also das *Differential* von S. Es handelt sich um eine *Differentialgleichung.* Da diese mit dW eine stochastische Komponente enthält, spricht man von einer *stochastischen* Differentialgleichung, oft abgekürzt als *SDGL* bzw. englisch *SPDE (stochastic partial differential equation).*

2.1.3 Der Preisprozess über endliche Zeitspannen

Mit Hilfe des allgemeinen Diffusionsprozesses Gl. C.1 und Ito's Lemma lässt sich aus Gl. 2.4 für *infinitesimale* Änderungen von S die Gleichung für *endliche* Änderungen von S über eine *endliche* Zeitspanne δt (z. B. δt = ein Tag, 10 Tage, ein Monat, etc.) herleiten, also die SDGL lösen. Hierzu benutzen wir den einfachen Prozess

$$dy(t) = dW(t) = 0 \cdot dt + 1 \cdot dW(t)$$

Dies entspricht dem Prozess C.1 in Ito's Lemma mit $a\,(y,t) = 0$ und $b(y,t) = 1$. Nun konstruieren wir eine Funktion S dieser stochastischen Variablen y gemäß

$$S(y,t) := S_0 \exp\left(\mu t + \sigma y\right)$$

wobei $y(t) = W(t)$ der Wert des Wiener-Prozesses zur Zeit t ist und S_0 ein (zunächst) beliebiger Faktor. Gemäß Ito's Lemma folgt S dem Prozess:

$$\begin{aligned} dS &= \left[\underbrace{\frac{\partial S}{\partial y}}_{\sigma S} \cdot 0 + \underbrace{\frac{\partial S}{\partial t}}_{\mu S} + \frac{1}{2} \cdot 1^2 \underbrace{\frac{\partial^2 S}{\partial y^2}}_{\sigma^2 S}\right] dt + \underbrace{\frac{\partial S}{\partial y}}_{\sigma S} 1 \cdot dW \\ &= (\mu + \frac{\sigma^2}{2}) S\, dt + \sigma S\, dW \end{aligned}$$

[3]Gleichung C.3 mit $f(S,t) = \ln(S(t))$

Das entspricht genau dem Prozess Gl. 2.4. Das heißt das so konstruierte S erfüllt die stochastische Differentialgleichung Gl. 2.4, ist also eine Lösung dieser SDGL. Durch einfaches Umbenennen $t \to t + \delta t$ erhält man

$$\begin{aligned} S(t+\delta t) &= S_0 \exp(\mu t + \mu\delta t + \sigma y(t+\delta t)) \\ &= S_0 \exp(\mu\delta t + \sigma W(t+\delta t)) \\ &= S_0 \exp(\sigma W(t) + \mu\delta t + \sigma\delta W) \end{aligned}$$

wobei im zweiten Schritt das sich auf die Zeit t beziehende $\exp(\mu t)$ in den (immer noch beliebigen Faktor) S_0 absorbiert wurde und im dritten Schritt für die Änderung der Brown'sche Bewegung die Abkürzung

$$\delta W := W(t+\delta t) - W(t) \Longrightarrow \delta W \sim N(0,\delta t) \tag{2.8}$$

eingeführt wurde. Der Term $\sigma W(t)$ im Exponenten bezieht sich nur auf die (schon bekannte) Zeit t. Er kann ebenfalls in den noch frei wählbaren Vorfaktor S_0 absorbiert werden, also

$$S(t+\delta t) = S_0 \exp(\mu\delta t + \sigma\delta W)$$

Nun wird S_0 so gewählt, dass im Limes gilt: $S(t+\delta t) \stackrel{\delta t\to 0}{=} S(t)$. Das entspricht der Anfangsbedingung für die Lösung der SDGL. Dadurch wird die der Gl. 2.4 entsprechende Änderung von S über endliche Zeitspannen δt schließlich:

$$S(t+\delta t) = S(t)\exp(\mu\delta t + \sigma\delta W) \quad \text{mit} \quad \delta W \sim \mathrm{N}(0,\delta t) \tag{2.9}$$

Analog ergibt sich die der Gl. 2.5 entsprechende Änderung von S über endliche Zeitspannen δt zu:

$$S(t+\delta t) = S(t)\exp\left((\widetilde{\mu} - \frac{\sigma^2}{2})\delta t + \sigma\delta W\right) \quad \text{mit} \quad \delta W \sim \mathrm{N}(0,\delta t) \tag{2.10}$$

2.2 Zinsrisiken

Die konsistente Verbindung von *Zins*risikofaktoren zu den durch sie verursachten Wertveränderungen von Finanzinstrumenten geschieht dadurch, dass die Finanzinstrumente so weit wie möglich in *Cash Flows* zerlegt werden. Diesem Ansatz liegt die Philosophie zugrunde, dass jedes Instrument seinem Halter genau so viel Wert ist, wie die abgezinsten erwarteten zukünftigen Geldflüsse. Die Zerlegung in erwartete zukünftige Cash Flows kann i.d.R. so weit getrieben werden, bis die *Höhe* dieser Cash Flows nicht mehr explizit von den Zinsen abhängt[4]. Das *Zins*risiko eines Instruments besteht dann darin, dass bei sich ändernden Zinsen die erwarteten zukünftigen Cash Flows mit entsprechend geänderten Zinssätzen abzuzinsen sind, und sich dadurch der *Barwert* per aktueller Valuta verändert. Auf die *Höhe* der zukünftigen Cash Flows haben andere Risikofaktoren durchaus Einfluss. Darin liegen die Währungs- und sonstigen Preisrisiken des Instrumentes.

[4] Bei Zins*optionen* geht dies allerdings nur, wenn die Zinsabhängigkeit des Optionspreises linear genähert wird.