

Wolfgang Polifke  
Jan Kopitz

# Wärmeübertragung

Grundlagen,  
analytische und numerische Methoden



---

ein Imprint von Pearson Education  
München • Boston • San Francisco • Harlow, England  
Don Mills, Ontario • Sydney • Mexico City  
Madrid • Amsterdam

# Stationäre Wärmeleitung

3.1 Einfache Geometrien .....	52
3.2 Wärmedurchgang und Péclet-Gleichungen ..	58
3.3 Wärmeleitung mit Wärmequellen .....	67
3.4 Zweidimensionale Wärmeleitung (Formfaktoren) .....	71

3

ÜBERBLICK

In diesem Kapitel werden Methoden zur Behandlung von Problemen der stationären Wärmeleitung vorgestellt. Dabei stellt sich in einem wärmeleitenden Medium bei zeitlich unveränderlichen thermischen Randbedingungen nach Abklingen anfänglicher Transienten ein konstanter Wärmestrom bzw. eine konstante Temperaturverteilung ein. Der Speicherterm  $\rho c \partial T / \partial t$  der Fourier'schen Differentialgleichung (2.16) fällt somit weg, und bei konstanter Wärmeleitfähigkeit  $\lambda$  vereinfacht sich (2.16) wie folgt:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\dot{\omega}}{\lambda} = 0. \quad (3.1)$$

In Abschnitt 3.1 wird gezeigt, wie diese partielle Differentialgleichung für quasi-eindimensionale Geometrien vereinfacht und direkt integriert werden kann, um z. B. Temperaturprofile  $T(x)$  und Wärmeströme  $\dot{q}(x)$  zu bestimmen. Bei der Darstellung und Diskussion der Lösungen machen wir Gebrauch von *dimensionslosen Variablen* und von *Analogien* zur Elektrotechnik. Dies sind wichtige Begriffe bzw. Methoden, die uns im Weiteren häufig begegnen werden.

Aufbauend auf den elementaren quasi-1D-Lösungen der Wärmeleitung wird in Abschnitt 3.2 der *Wärmedurchgang* diskutiert, d. h. die Wärmeübertragung zwischen strömenden Fluiden durch eine Trennwand. Wie sich eine homogene Wärmequelle  $\dot{\omega}$  auf die Verteilungen der Temperatur und des Wärmeflusses auswirkt, wird in Abschnitt 3.3 erläutert. Am Ende dieses Kapitels wird eine Rechenmethode vorgestellt, mithilfe derer sich auch zweidimensionale Probleme der Wärmeleitung einfach bearbeiten lassen.

## 3.1 Einfache Geometrien

Selbst bei praxisnahen Fragestellungen kann die vorgegebene Geometrie häufig näherungsweise als eine ebene, unendlich ausgedehnte Platte betrachtet werden, oder sie weist eine zylindrische bzw. sphärische Symmetrie auf. Die Verteilungen von Temperatur  $T$  und Wärmestromdichte  $\dot{q}$  hängen dann nur von einer Ortskoordinate  $x$  (bzw.  $r$ ) ab, man spricht von *quasi-eindimensionalen* Geometrien. Innere Wärmequellen sollen vorerst nicht berücksichtigt werden,  $\dot{\omega} = 0$ , die Fourier'sche Differentialgleichung (3.1) vereinfacht sich somit zur *Laplace'schen Differentialgleichung*

$$\frac{d^2 T}{dr^2} + \frac{n}{r} \frac{dT}{dr} = 0. \quad (3.2)$$

Wie man durch Vergleich mit Gln. (2.17), (2.24) und (2.25) sieht, gilt:

- $n = 0$  für eine ebene Geometrie (man spricht von Wärmeleitung „in der Platte“),
- $n = 1$  für eine zylindrische Geometrie ohne Abhängigkeit vom Azimutwinkel (Wärmeleitung „im Zylinder“ bzw. im Zylindermantel) und
- $n = 2$  für eine Geometrie mit sphärischer Symmetrie (Wärmeleitung „in der Kugel“ bzw. in der Kugelschale).

### 3.1.1 Stationäre Wärmeleitung in der Platte

Wir betrachten eine ebene Platte der Dicke  $s$  mit Oberflächentemperaturen  $T_{W1}$ ,  $T_{W2}$ , siehe Abb. 3.1. Die Temperaturverteilung in der Platte hängt im Rahmen einer sta-

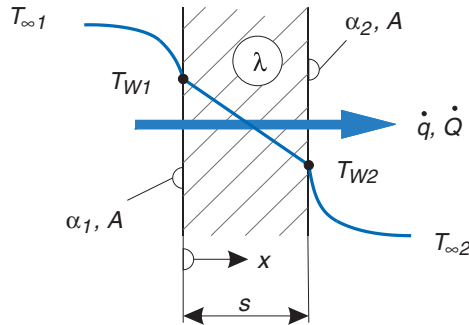


Abbildung 3.1: Ebene Platte der Dicke  $s$  mit Oberflächentemperaturen  $T_{W1}$ ,  $T_{W2}$  und beidseitigem Wärmeübergang

tionären, quasi-eindimensionalen Betrachtung nur von der Ortskoordinate  $x$  ab, im Bereich  $0 \leq x \leq s$  gilt gemäß (3.2)

$$\frac{d^2 T}{dx^2} = 0.$$

Dies lässt sich sofort integrieren:

$$\frac{dT}{dx} = C_1 \quad (\dot{q}_x = \text{const.}),$$

$$T(x) = C_1 x + C_2 \quad (\text{linearer Temperaturverlauf}).$$

Wenn die Wandtemperaturen  $T_{W1}$ ,  $T_{W2}$  bekannt sind (Randbedingungen der ersten Art), können die Integrationskonstanten  $C_1$ ,  $C_2$  sofort bestimmt werden:

$$T(0) = T_{W1} \Rightarrow C_2 = T_{W1},$$

$$T(s) = T_{W2} \Rightarrow C_1 = \frac{T_{W2} - T_{W1}}{s}.$$

Somit liegt in der Platte ein lineares Temperaturprofil sowie konstanter Wärmefluss bzw. Wärmestrom vor:

$$T(x) = T_{W1} + (T_{W2} - T_{W1}) \frac{x}{s}, \quad (3.3)$$

$$\dot{q}_x = -\lambda \frac{dT}{dx} = \frac{\lambda}{s} (T_{W1} - T_{W2}), \quad (3.4)$$

$$\dot{Q} = A \dot{q}_x = A \frac{\lambda}{s} (T_{W1} - T_{W2}). \quad (3.5)$$

Dieses Ergebnis (3.5) liegt als empirischer Sachverhalt der Herleitung des Fourier'schen Gesetzes zu Grunde (siehe Abschnitt 2.1) und ist auch im Rahmen einer Energiebetrachtung unmittelbar einsichtig: Im stationären Fall ist die Temperatur zeitlich konstant, Wärme kann nirgendwo eingespeichert werden. Daraus folgt aber, dass der

Wärmestrom  $\dot{Q}$ , der an der heißen Seite in die Platte eintritt, an der kalten Seite die Platte wieder verlassen muß und auch innerhalb der Platte keine Variation möglich ist,  $\dot{Q}(x) = \text{const.}$  Da die Fläche, über die sich der gesamte Wärmestrom verteilt, bei der ebenen Geometrie nicht vom Ort  $x$  abhängt, muss die Wärmestromdichte  $\dot{q} = \dot{Q}/A$  ebenfalls konstant sein.

### 3.1.2 Stationäre Wärmeleitung im Zylinder

Nun soll die stationäre Wärmeleitung in der Wand eines langen Rohres der Länge  $l$  mit Innenradius  $r_1$  und Außenradius  $r_2$ ,  $l \gg r_2$  untersucht werden. Im Rahmen einer quasi-1D-Näherung betrachtet man dazu eine Zylinderschale wie in Abb. 3.2 skizziert. Die Laplace-Gleichung (3.2) lässt sich für eine zylindrische Geometrie ( $n = 1$ ) wie folgt schreiben:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dT}{dr} \right) = 0.$$

Mithilfe der Kettenregel kann dies leicht überprüft werden. Für die Lösung  $T(r)$  muss gelten

$$r \frac{dT}{dr} = \text{const.}, \quad \text{bzw.} \quad dT \sim \frac{1}{r} dr,$$

und damit

$$T(r) = C_1 \ln(r) + C_2.$$

Der Wärmefluss  $\dot{q}_r$  im Zylindermantel variiert mit  $1/r$ , das Temperaturprofil ist logarithmisch. Die Integrationskonstanten  $C_1, C_2$  werden bei bekannten Wandtemperaturen wieder über die thermischen Randbedingungen bestimmt,

$$T(r_1) = T_{W1},$$

$$T(r_2) = T_{W2}.$$

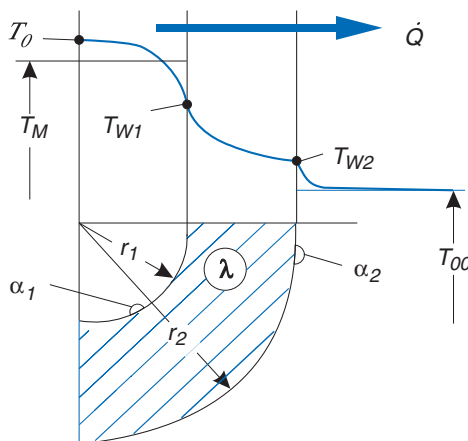


Abbildung 3.2: Zylinder- bzw. Kugelschale mit Oberflächentemperaturen  $T_{W1}, T_{W2}$  und beidseitigem Wärmeübergang

Das Ergebnis für den Verlauf von Temperatur und Wärmefluss bzw. -strom im Zylindermantel lautet

$$T(r) = T_{W1} + (T_{W2} - T_{W1}) \frac{\ln(r/r_1)}{\ln(r_2/r_1)}, \quad (3.6)$$

$$\dot{q}_r(r) = -\lambda \left. \frac{dT}{dr} \right|_r = \frac{\lambda}{r} \frac{T_{W1} - T_{W2}}{\ln(r_2/r_1)}, \quad (3.7)$$

$$\dot{Q} = \dot{q}_r(r) 2\pi r l = \frac{2\pi\lambda l}{\ln(r_2/r_1)} (T_{W1} - T_{W2}). \quad (3.8)$$

(Die Schreibweise  $\dots|_r$  soll andeuten, dass die Ableitung  $dT/dr$  an der Position  $r$  ausgewertet wird.)

Wie bei der Platte ist der Wärmestrom  $\dot{Q}$  vom Radius unabhängig – dies ist im stationären Fall ja allein auf Grund der Energieerhaltung einsichtig. Der Wärmefluss  $\dot{q}_r(r)$  hingegen nimmt nach außen hin mit  $1/r$  ab, da im Zylinder die für den Wärmetransport zur Verfügung stehende Fläche  $2\pi r l$  linear mit dem Radius zunimmt.

### 3.1.3 Stationäre Wärmeleitung in der Kugelschale

Analog zur vorherigen Ableitung findet man für die Kugelschale, dass Temperatur und Wärmestromdichte mit  $1/r$  bzw.  $1/r^2$  abfallen, während der Wärmestrom wiederum vom Radius unabhängig ist:

$$T(r) = T_{W1} + (T_{W2} - T_{W1}) \left( \frac{\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1}}{\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}} \right), \quad (3.9)$$

$$\dot{q}(r) = -\lambda \left. \frac{dT}{dr} \right|_r = \frac{\lambda}{r^2} \frac{T_{W1} - T_{W2}}{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}}, \quad (3.10)$$

$$\dot{Q} = \dot{q}(r) 4\pi r^2 = \frac{4\pi\lambda (T_{W1} - T_{W2})}{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}}. \quad (3.11)$$

### 3.1.4 Wärmeleitwiderstand

Im ersten Kapitel wurde kurz das Ohm'sche Gesetz  $\vec{i} = -\sigma \nabla \phi$  als Beispiel eines Transportgesetzes der Form *Fluss = Transportkoeffizient × Potentialgefälle* erwähnt. In der Zwischenzeit haben wir das Fourier'sche Gesetz der Wärmeleitung  $\vec{q} = -\lambda \nabla T$  kennen gelernt, welches von der gleichen Form ist. Die Analogie zwischen Wärme- und Ladungstransport kann man weiterentwickeln: Für das Ohm'sche Gesetz ist auch

die Form

$$I = \frac{U}{R}$$

bekannt. Hier ist  $I$  die Stromstärke durch einen elektrischen Leiter mit Widerstand  $R$  und  $U$  die anliegende Spannung bzw. Potentialdifferenz  $U = \phi_2 - \phi_1$ . Der Vergleich mit Gl. (3.5) für den Wärmestrom in der Platte zeigt, dass man analog formulieren kann

$$\dot{Q} = \frac{T_{W1} - T_{W2}}{R_\lambda} \quad (3.12)$$

mit einem Wärmeleitwiderstand  $R_\lambda$ .

### Definition Wärmeleitwiderstand

$$R_\lambda \equiv \frac{s}{\lambda A} \quad \left( \text{Einheit } \frac{\text{W}}{\text{K}} \right) \quad (3.13)$$

Es ist dabei physikalisch einsichtig, dass der Wärmeleitwiderstand mit der Plattendicke  $s$  zunimmt, während er mit der Wärmeleitfähigkeit  $\lambda$  und der Plattenquerschnittsfläche  $A$  abnimmt. Für Zylinder und Kugel findet man analog

$$R_\lambda \equiv \frac{1}{\lambda 2\pi l} \ln \left( \frac{r_2}{r_1} \right) \quad \text{für einen Zylindermantel der Länge } l, \quad (3.14)$$

$$R_\lambda \equiv \frac{1}{\lambda 4\pi} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \quad \text{für eine Kugelschale.} \quad (3.15)$$

Innen- und Außenradius sind hier jeweils mit  $r_1$  und  $r_2$  bezeichnet. Auch hier ist der Wärmeleitwiderstand einerseits vom Stoffwert  $\lambda$ , andererseits von der Geometrie abhängig.

Analogien zwischen Wärme- und Ladungstransport werden uns im Folgenden noch häufig begegnen.

### 3.1.5 Alternative Herleitung aus einer Wärmestrombilanz

Die Ergebnisse für den Gesamtwärmestrom in den einfachen Geometrien (Platte, Zylinder und Kugel) wurden in den letzten Abschnitten durch Integration der Fourier'schen Differentialgleichung bestimmt. Alternativ kann der thermische Widerstand z. B. der Zylinderschale direkt aus einer Wärmestrombilanz berechnet werden:

Im stationären Zustand und bei Abwesenheit von Wärmequellen folgt aus der Energieerhaltung, dass der gesamte Wärmestrom, der durch den Zylindermantel tritt nicht von der Ortskoordinate  $r$  abhängt:

$$\dot{Q}(r_1) = \dot{Q}(r) = \dot{Q}(r_2), \quad r_1 \leq r \leq r_2.$$

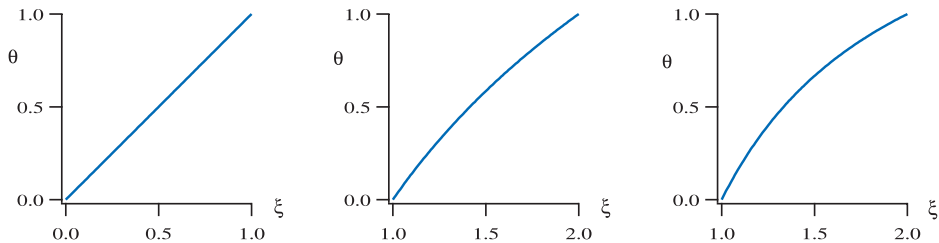


Abbildung 3.3: Temperaturprofile bei stationärer Wärmeleitung in Platte (links), Zylinder (Mitte) und Kugel (rechts) in dimensionsloser Darstellung (mit  $\xi_2 = 2$  für Zylinder bzw. Kugel)

Dabei gilt nach Fourier

$$\dot{Q}(r) = A \dot{q} = -2\pi r l \lambda \frac{dT}{dr}.$$

Integration dieser Beziehung von  $r_1$  nach  $r_2$  liefert

$$\int_{r_1}^{r_2} \frac{\dot{Q}}{r} dr = -2\pi l \lambda \int_{r_1}^{r_2} \frac{dT}{dr} dr = -2\pi l \lambda \int_{T_{W1}}^{T_{W2}} dT.$$

Da der konstante Wärmestrom  $\dot{Q}$  vor das Integral gezogen werden kann, erhält man

$$\dot{Q} = \frac{2\pi l \lambda}{\ln(r_2/r_1)} (T_{W1} - T_{W2}).$$

Das Inverse des Bruches auf der rechten Seite ist gerade der thermische Widerstand  $R_\lambda$  der Zylinderschale, siehe Gl. (3.14) – *q.e.d.*

Analog kann man für Zylinder oder Platte vorgehen. Leider ist die direkte Anwendung der Wärmestrombilanzen nicht immer möglich – z. B. wenn innere Wärmequellen vorliegen – bzw. nicht immer einfacher als die (analytische oder numerische) Lösung der Fourier'schen Differentialgleichung.

### 3.1.6 Dimensionslose Variablen

Die Einführung sog. *entdimensionierter* oder *dimensionsloser* Variablen gestattet eine besonders kompakte Notation und eine allgemeingültige graphische Darstellung von Ergebnissen. Wir stellen dies beispielhaft anhand der in den letzten Abschnitten bestimmten Temperaturprofile für Platte, Zylinder und Kugel dar.

Bei stationärer Wärmeleitung in einer Platte mit vorgegebenen Wandtemperaturen ist die Dicke  $s$  der Platte offensichtlich ein charakteristisches Längenmaß der Geometrie, während die Differenz  $T_{W2} - T_{W1}$  der Wandtemperaturen ein charakteristisches Maß für das treibende Potentialgefälle ist. Damit liegen die folgenden Definitionen einer *dimensionslosen* (auch *entdimensionierten*) Temperatur  $\theta$  bzw. Ortskoordinate  $\xi$  nahe:

$$\theta \equiv \frac{T(x) - T_{W1}}{T_{W2} - T_{W1}},$$

$$\xi \equiv \frac{x}{s}.$$



Mit diesen Größen schreibt sich das oben berechnete Temperaturprofil  $T(x)$  in einer Platte der Dicke  $s$  – siehe Gl. (3.3) – wie folgt:

$$\theta(\xi) = \xi .$$

Dabei gelten – egal ob  $T_{W2} < T_{W1}$  oder umgekehrt – die Randbedingungen  $\theta(0) = 0$  und  $\theta(1) = 1$ .

Ganz ähnlich findet man mit  $\xi \equiv r/r_1$  und  $\xi_2 \equiv r_2/r_1$  für den Zylinder

$$\theta(\xi) = \frac{\ln(\xi)}{\ln(\xi_2)} ,$$

während für die Kugel gilt:

$$\theta(\xi) = \frac{\frac{1}{\xi} - 1}{\frac{1}{\xi_2} - 1} .$$

Im Folgenden werden wir die dimensionslose Darstellung von Differentialgleichungen und ihrer Lösungen sowie dimensionslose *Kennzahlen* noch ausführlich diskutieren.

## 3.2 Wärmedurchgang und Péclet-Gleichungen

### Definition Wärmedurchgang

Wärmeübertragung durch mehrere Schichten unterschiedlichen Materials bezeichnet man als *Wärmedurchgang*.

- Eine typische Konfiguration ist die Wärmeübertragung zwischen zwei Fluiden, die durch eine Wand voneinander getrennt sind.
- Die Trennwand kann aus mehreren Schichten unterschiedlichen Materials aufgebaut sein, die Temperaturverteilungen in den einzelnen Schichten genügen jeweils Gl. (3.2). Die Lösungen für die stationäre Wärmeleitung in Platte, Zylinder oder Kugel dienen als Bausteine, mit denen eine Gesamtlösung konstruiert wird.
- Meist hat man es mit strömenden Fluiden zu tun; dann gilt für den Wärmeübergang zwischen den Fluiden und der Trennwand der Newton'sche Ansatz, Gl. (1.1).

### Beispiel 3.2.1

#### Heizungsrohr

Wir betrachten den Wärmedurchgang an einem Heizungsrohr mit einem Isolationsmantel aus Schaumstoff. An der Rohrrinnenwand liegt Wärmeübergang aufgrund von Zwangskonvektion vor, an der Außenwand freie Konvektion. Wärmeleitung ist in der Rohrwand selbst und im Isolationsmantel zu berücksichtigen.

## Beispiel 3.2.2

**Isolierglas**

Ein Isolierglas ist ein Glaselement, das aus zwei oder mehreren Scheiben besteht. Diese Scheibenkombination wird auf Abstand gehalten und im Randbereich luftdicht verklebt, so dass zwischen den Scheiben eine Luftschicht eingeschlossen ist.

Bei einer solchen Konfiguration sind die folgenden Übertragungsmechanismen zu unterscheiden: 1) konvektiver Wärmeübergang vom Innenraum an das Glas (freie Konvektion), 2) Wärmeleitung im Glas, 3) Wärmeleitung in der Luftschicht zwischen den Gläsern, 4) Wärmeleitung im Glas, 5) konvektiver Wärmeübergang an die Umgebung (freie Konvektion bei Windstille oder Zwangskonvektion).

Das Isolationsvermögen ist wesentlich der eingeschlossenen Luftschicht zuzuschreiben. Innerhalb gewisser Grenzen (nicht mehr als 20 mm) ist durch eine Vergrößerung des Scheibenabstandes eine Verringerung von Wärmeverlusten zu erzielen.

Notabene: Bei der Wärmeübertragung zwischen Glas und Luftspalt spielt der konvektive Wärmeübergang keine Rolle, da man davon ausgeht, dass die eingeschlossene Luft in Ruhe ist.

In Erweiterung der schon angesprochenen Analogien zur Elektrotechnik werden die *Péclet-Gleichungen* für ebene, zylindrische und sphärische Geometrien hergeleitet. Die Anwendungen der Péclet-Gleichungen sind vielfältig, z. B. Gebäudeisolation, die Auslegung von Wärmeübertragern (Kühlanlagen, Dampferzeuger) und die Kühlung von elektronischen Bauteilen oder Kernbrennelementen.

**3.2.1 Péclet-Gleichung für die Platte**

Wir nehmen noch einmal Bezug auf Abb. 3.1, wollen nun aber nicht wie oben annehmen, dass die Wandtemperaturen  $T_{W1}$ ,  $T_{W2}$  unmittelbar bekannt sind. Stattdessen diskutieren wir den Fall, dass – wie in Abb. 3.1 schon angedeutet – konvektiver Wärmeübergang mit Temperaturen  $T_{\infty 1}$  (links) und  $T_{\infty 2}$  (rechts) vorliegt (Randbedingungen der dritten Art). Die in Abschnitt 3.1.1 gefundene Lösung (3.3) für das Temperaturprofil in der Platte muss deshalb auf die äußeren (bekannten) Randbedingungen  $T_{\infty 1}$ ,  $T_{\infty 2}$  „abgestützt“ werden. Dabei macht man sich zunutze, dass aufgrund der Energieerhaltung im stationären Zustand der Wärmestrom  $\dot{Q}$  in der Wand gleich den über die Oberfläche zu- und abströmenden Wärmeströmen sein muss. Damit gilt nach Newton bzw. Fourier:

$$\dot{Q} = \alpha_1 A (T_{\infty 1} - T_{W1}) = A \frac{\lambda}{s} (T_{W1} - T_{W2}) = \alpha_2 A (T_{W2} - T_{\infty 2}) .$$

Die unbekanntenen Wandtemperaturen können nun eliminiert werden, indem man schreibt

$$T_{\infty 1} - T_{\infty 2} = \underbrace{T_{\infty 1} - T_{W1}}_{\frac{\dot{Q}}{\alpha_1 A}} + \underbrace{T_{W1} - T_{W2}}_{\frac{\dot{Q} s}{\lambda A}} + \underbrace{T_{W2} - T_{\infty 2}}_{\frac{\dot{Q}}{\alpha_2 A}} .$$

Der Faktor  $\dot{Q}$  kommt in allen Termen auf der rechten Seite vor und man findet sofort:

### Péclet-Gleichung für die Platte

$$\dot{Q} = \frac{T_{\infty 1} - T_{\infty 2}}{\frac{1}{\alpha_1 A} + \frac{s}{\lambda A} + \frac{1}{\alpha_2 A}} = \frac{T_{\infty 1} - T_{\infty 2}}{R_{\alpha 1} + R_{\lambda} + R_{\alpha 2}} = \frac{T_{\infty 1} - T_{\infty 2}}{R_{ges}}. \quad (3.16)$$

Diese nach Péclet, einem Zeitgenossen Fouriers, benannte Formel verdeutlicht die Tatsache, dass in Analogie zur Elektrotechnik beim Wärmedurchgang eine „Reihenschaltung“ thermischer Widerstände vorliegt, wobei sich der Gesamtwiderstand als Summe der Einzelwiderstände ergibt. In Anlehnung an den Wärmeleitwiderstand  $R_{\lambda}$  (siehe Gl. (3.13) in Abschnitt 3.1.4) definiert man dabei den Wärmeübergangswiderstand wie folgt:

$$R_{\alpha} \equiv \frac{1}{\alpha A}. \quad (3.17)$$

Im Rahmen der Analogiebetrachtung leuchtet die folgende Beobachtung sofort ein: Der „Temperaturabfall“ über eines der in Reihe geschalteten Widerstandsglieder verhält sich zum gesamten Temperaturunterschied  $T_{\infty 1} - T_{\infty 2}$  wie der entsprechende Wert des thermischen Widerstands zum Gesamtwiderstand. Wenn also z. B.  $R_{\lambda}$  im Vergleich zu den Wärmeübergangswiderständen  $R_{\alpha_i}$  besonders groß ist, ist auch  $T_{W1} - T_{W2}$  entsprechend groß.

Bitte beachten Sie:

- Häufig, insbesondere bei Gebäudehüllen, sind mehrere Materialschichten  $j = 1, \dots, N$  zu berücksichtigen, was in obiger Formel durch Austausch des mittleren Terms im Nenner gegen

$$\sum_{j=1}^N R_{\lambda j} = \frac{1}{A} \sum_{j=1}^N \left( \frac{s}{\lambda} \right)_j$$

erreicht wird.

- Beim hier diskutierten Wärmedurchgang durch eine Platte mit beidseitigem Wärmeübergang liegt eine Reihenschaltung von thermischen Widerständen vor. Es sind durchaus Konfigurationen vorstellbar, die als Parallelschaltung von Wärmeleit- oder Wärmeübergangswiderständen interpretiert und entsprechend behandelt werden können. Beispiele wie die Überlagerung von Wärmeleitung und -strahlung werden in späteren Kapiteln sowie in den Übungsaufgaben vorgestellt.
- Während z. B. bei schlecht wärmeleitenden Baustoffen kein *Kontaktwiderstand* zwischen den einzelnen Schichten infolge von (dünnen) Luftspalten zu berücksichtigen ist, müssen z. B. bei Kernbrennelementen die Spalte zwischen Zirkalloy-Hülle und Uranzylinder mit dem sehr gut wärmeleitenden Gas Helium verpresst werden, um den nicht mehr zu vernachlässigenden Kontaktwiderstand möglichst klein zu halten.
- Im Labor oder in der Elektrotechnik wird oftmals Wärmeleitpaste verwendet, um den Kontaktwiderstand zwischen Bauelementen zu verringern.

### 3.2.2 Wärmedurchgangskoeffizient ( $k$ -Wert)

Bei der Wärmedämmung von Gebäuden findet üblicherweise der „ $k$ -Wert“ Verwendung.

#### Definition Wärmedurchgangskoeffizient

$$k \equiv \frac{1}{\frac{1}{\alpha_i} + \sum_{j=1}^N \left(\frac{s}{\lambda}\right)_j + \frac{1}{\alpha_a}} \quad \left(\text{Einheit } \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}}\right). \quad (3.18)$$

Indizes  $i$ : innen,  $a$ : außen.

Damit schreibt man für den gesamten Wärmestrom einfach

$$\dot{Q} = kA (T_{\infty 1} - T_{\infty 2}). \quad (3.19)$$

Vollwärmeschutz verlangt  $k < 0,4 \text{ W}/(\text{m}^2 \text{K})$ . Normwerte für die Wärmebedarfsberechnung von Gebäuden sind  $T_i = 20 \text{ }^\circ\text{C}$ ;  $T_a = -15 \text{ }^\circ\text{C}$ ;  $\alpha_i = 6\text{--}8 \text{ W}/(\text{m}^2 \text{K})$ ;  $\alpha_a = 15 \text{ W}/(\text{m}^2 \text{K})$ .

### 3.2.3 Graphische Lösung für den Wärmedurchgang

Bei einer Reihenschaltung von  $N$  thermischen Widerständen<sup>1</sup> gilt

$$\dot{Q} = \frac{\Delta T_{ges}}{R_{ges}}$$

für den gesamten Temperaturabfall  $\Delta T_{ges}$  über den Gesamtwiderstand  $R_{ges} = R_1 + R_2 + \dots + R_N$  und genauso

$$\dot{Q} = \frac{\Delta T_n}{R_n}$$

für den Temperaturabfall  $\Delta T_n$  über den  $n$ -ten Widerstand. Folglich ist der Potentialabfall pro Widerstand, bezogen auf die treibende Temperaturdifferenz  $\Delta T_{ges}$ , proportional zum Anteil des Einzelwiderstandes am Gesamtwiderstand,

$$\frac{\Delta T_n}{\Delta T_{ges}} = \frac{R_n}{R_{ges}}. \quad (3.20)$$

Aus dieser Beobachtung kann man ein einfaches graphisches Verfahren zur Lösung oder Diskussion von Problemen des Wärmedurchgangs bei ebener Geometrie ableiten, siehe Abb. 3.4. Dazu skizziert man die Platte so, dass ihre Dicke dem Wärmeleitwiderstand  $s/\lambda$  entspricht. Dann trägt man die Temperaturniveaus  $T_{\infty,1}$  und  $T_{\infty,2}$  ein

<sup>1</sup> Natürlich gilt dies in Analogie auch für Ohm'sche Widerstände.

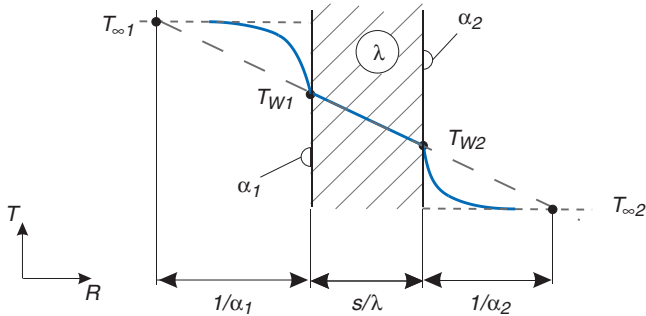


Abbildung 3.4: Zur graphischen Lösung des Wärmedurchgangs bei der ebenen Platte

und bestimmt darauf maßstäblich zwei Punkte jeweils im Abstand  $1/\alpha_i$  (entsprechend dem Wärmeübergangswiderstand) von der Plattenoberfläche. Verbindet man schließlich diese beiden Punkte durch eine Gerade (— — in der Skizze), so ergeben die Schnittpunkte mit den Stirnflächen der Platte die Wandtemperaturen  $T_{W1}$  und  $T_{W2}$ . Innerhalb der Platte entspricht die Verbindungsgerade der Temperaturverteilung, außerhalb der Platte ist dies, wie in der Abbildung angedeutet, nicht so, da dort Konvektion und Wärmeleitung die Temperaturverteilung bestimmen (siehe Kapitel 10).

### 3.2.4 Péclet-Gleichung für den Zylinder

Die Péclet-Gleichung für den Zylinder beschreibt den Wärmetransport durch die Wand eines durchströmten Rohres. Ausgehend von Gl. (3.14) argumentiert man wie im Abschnitt 3.2.1 für die Platte, allerdings ist in den Newton'schen Wärmeübergangsansatz eine „adiabate Mischtemperatur“  $T_m$  einzusetzen:

$$\dot{Q} = \alpha_1 2\pi r_1 l (T_m - T_{W1}) = \alpha_2 2\pi r_2 l (T_{W2} - T_\infty).$$

Was unter der Mischtemperatur zu verstehen ist, wird in Abschnitt 7.2 genauer erläutert, vorläufig halten wir lediglich fest, dass sie eine effektive, über den Rohrquerschnitt gemittelte Temperatur darstellt, deren Wert zwischen der Achsentemperatur  $T(r=0)$  und der Wandtemperatur  $T_{W1}$  liegt.

#### Péclet-Gleichung für den Zylinder

$$\dot{Q} = \frac{2\pi l (T_m - T_\infty)}{\frac{1}{\alpha_1 r_1} + \frac{1}{\lambda} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) + \frac{1}{\alpha_2 r_2}} = \frac{T_m - T_\infty}{R_{\alpha,1} + R_\lambda + R_{\alpha,2}}. \quad (3.21)$$

- Die thermischen Widerstände für den Zylinder sind dabei wie folgt definiert:

$$R_\lambda = \frac{1}{2\pi l \lambda} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right), \quad R_{\alpha,j} = \frac{1}{2\pi l \alpha_j r_j}, \quad j = 1, 2.$$

Bei mehreren Schichten ist der zentrale Nennerterm wie bei der Platte durch eine Summe zu ersetzen.

- Für dünnwandige Rohre mit Radienverhältnissen  $r_2/r_1 < 1,4$  nähert man durch Taylor-Reihenentwicklung mit einem Fehler kleiner 1%

$$\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) \approx 2 \frac{r_2 - r_1}{r_2 + r_1},$$

was dem Wärmeleitwiderstand einer Platte der Dicke  $s = r_2 - r_1$  mit Fläche  $A = 2\pi l(r_2 + r_1)/2$  entspricht.

### 3.2.5 Péclet-Gleichung für die Kugelschale

Nach dem mittlerweile bekannten Muster beschreibt man auch den Wärmedurchgang bei einer Kugelschale.

#### Péclet-Gleichung für die Kugelschale

$$\dot{Q} = \frac{4\pi (T_{\infty 1} - T_{\infty 2})}{\frac{1}{\alpha_1 r_1^2} + \frac{1}{\lambda} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) + \frac{1}{\alpha_2 r_2^2}}, \quad (3.22)$$

wobei  $T_{\infty 1}$  die Temperatur des Fluids im Kugelbehälter ist.

Bildet man analog zur Platte die Wärmedurchgangszahl  $k$  für Zylinder oder Kugel, so ist immer anzugeben, auf welche Fläche sich die Durchgangszahl bezieht. Dies wird ersichtlich durch

$$\dot{Q}(r_i) = k_i A_i (T_W - T_{\infty}) = k_a A_a (T_W - T_{\infty}) = \dot{Q}(r_a). \quad (3.23)$$

Da die äußere Mantelfläche  $A_a = 4\pi r_a^2$  einer Kugelschale größer ist als die innere,  $A_i = 4\pi r_i^2$ , muss gelten  $k_a < k_i$ . Analoges gilt für den Zylinder.

### 3.2.6 Sonderfälle

#### Extrem dicke Körper

Für die drei eben behandelten einfachen Körper Platte, Zylinder und Kugel soll der Grenzfall extrem großer Dicke untersucht werden, und zwar unter Vernachlässigung der Übergangswiderstände  $\alpha_1 \rightarrow \infty$ ,  $\alpha_2 \rightarrow \infty$  und damit  $T_{W2} \rightarrow T_{\infty 2}$  sowie  $T_{W1} \rightarrow T_{\infty 1}$  bzw.  $T_{W1} \rightarrow T_m$ .

- Platte:

$$\dot{Q} = \frac{\lambda A}{s} (T_{\infty 1} - T_{\infty 2}).$$

für  $s \rightarrow \infty$  geht  $\dot{Q} \rightarrow 0$ ,  $R_\lambda \rightarrow \infty$ .

- Hohlzylinder:

$$\dot{Q} = \frac{2\pi l \lambda}{\ln(r_2/r_1)} (T_m - T_{\infty 2})$$

für  $r_2 \rightarrow \infty$  geht  $\dot{Q} \rightarrow 0$ ,  $R_\lambda \rightarrow \infty$ . Da  $\ln(x)$  schwächer als jede andere Funktion gegen Unendlich geht, nimmt  $\dot{Q}$  allerdings nur sehr langsam auf 0 ab.

■ Hohlkugel:

$$\dot{Q} = \frac{4\pi\lambda}{1/r_1 - 1/r_2} (T_{\infty 1} - T_{\infty 2}) .$$

Für  $r_2 \rightarrow \infty$  folgt  $\dot{Q} = 4\pi\lambda r_1 (T_{W1} - T_{W2})$ . Demnach wird in den dreidimensional unendlichen Raum ein endlicher Wärmestrom ausgespeichert. Dies gilt auch für ellipsoid- oder scheibenförmige Hohlräume.

Ein Lebewesen wie die „Made im Speck“ muss folglich auch im dicksten Schinken nicht an Überhitzung eingehen, sofern es seine biologisch bedingte Wärmeproduktion  $\dot{Q}$  so begrenzt, so dass mit  $T_{W1} = T_{\text{Made}}$  und  $T_{W2} = T_{\text{Schinken}}$  gilt:

$$T_{\text{Made}} = T_{\text{Schinken}} + \frac{\dot{Q}}{4\pi\lambda r_1} < 37^\circ\text{C} .$$

### Kritischer Radius

„Viel hilft viel“ ist eine Grundregel des Maschinenbaus – die allerdings nicht immer richtig ist, wie das (scheinbare) Paradoxon des kritischen Radius zeigt:

Wir betrachten ein durchströmtes Rohr – also z. B. eine Warmwasserleitung –, das außen mit einem Mantel an Isolationsmaterial versehen ist. Man würde doch erwarten, dass sich der Wärmedurchgang – also die Wärmeverluste an die kalte Umgebung – mit zunehmender Dicke des Isolationsmantels in jedem Fall verringern sollte. Dem ist aber nicht so, wie sich mithilfe der Péclet-Gleichung für den Zylinder leicht zeigen lässt.

Vereinfachend, jedoch nicht einschränkend, kann  $\alpha_1 \rightarrow \infty$  angenommen werden (was bei durchströmten, wärmedämmten Rohren auch meist der Fall ist), d. h., der innere Wärmeübergangswiderstand wird vernachlässigt. Vernachlässigt wird auch die Wandstärke und damit der Wärmeleitwiderstand des Rohres selbst, so dass wir uns auf das Wechselspiel zwischen dem Wärmeleitwiderstand des Isolationsmaterials und dem äußeren Wärmeübergangswiderstand konzentrieren können.

Für den Zylinder gilt dann mit Gl. (3.21):

$$\dot{Q} = \frac{2\pi l (T_m - T_\infty)}{\frac{1}{\lambda} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) + \frac{1}{\alpha_2 r_2}} .$$

Konstant bleiben sollen  $\alpha_2$ ,  $\lambda$ ,  $r_1$ ,  $l$  und  $\Delta T$ ; zu variieren ist der Außenradius  $r_2$ .

Mit der Einführung dimensionsloser Variablen

$$\varrho = \frac{r_2}{r_1} \left( \frac{\text{Außenradius}}{\text{Innenradius}} \right) , \quad (3.24)$$

$$\text{Bi} = \frac{\alpha_2 r_1}{\lambda} \left( \frac{\text{Wärmeleitwiderstand}}{\text{Wärmeübergangswiderstand}} \right) , \quad (3.25)$$

$$\Phi = \frac{\dot{Q}}{\alpha_2 2\pi r_1 l (T_m - T_\infty)} \left( \frac{\text{Wärmestrom}}{\text{Wärmestrom ohne Isolation}} \right) , \quad (3.26)$$

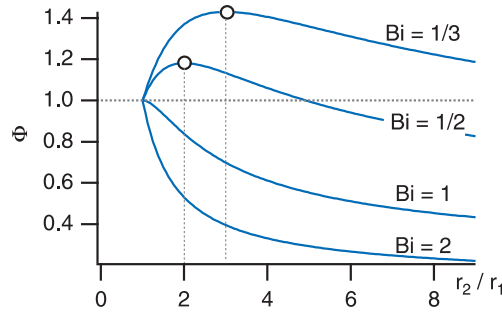


Abbildung 3.5: Zum kritischen Radius: Wärmedurchgangscharakteristik des Hohlzylinders, d. h. entdimensionierte Wärmeverlustrate  $\Phi$  als Funktion des Radienverhältnisses  $\varrho = r_2/r_1$ . Maximaler Wärmestrom  $\circ$  jeweils am kritischen Radius  $\varrho_{crit}$

vereinfacht sich die obige Beziehung zu

$$\Phi = \frac{1}{\text{Bi} \ln(\varrho) + \frac{1}{\varrho}}. \quad (3.27)$$

Abbildung 3.5 zeigt den dimensionslosen Wärmestrom  $\Phi$  als Funktion des Außenradius  $\varrho$  für verschiedene Werte des Parameters  $\text{Bi}$ . In der Tat sehen wir, dass für  $\text{Bi} < 1$  ein Maximum der Wärmeverluste bei einem kritischen Außenradius  $\varrho_{crit}$  erreicht wird bzw. die Isolationsschicht erst eine gewisse Mindestdicke annehmen muss, damit die Wärmeverluste geringer sind als beim nackten Rohr.

Dieses Ergebnis lässt sich so überprüfen: Ein Extremum des dimensionslosen Wärmestromes  $\Phi$  findet man durch Nullsetzen der ersten Ableitung:

$$\frac{d\Phi}{d\varrho} = \frac{1 - \text{Bi} \varrho}{(1 + \text{Bi} \varrho \ln \varrho)^2}, \quad (3.28)$$

$$\frac{d\Phi}{d\varrho} = 0 \Leftrightarrow \varrho = \frac{1}{\text{Bi}}. \quad (3.29)$$

Ein Extremum findet sich also bei  $r_2/r_1 = 1/\text{Bi}$  oder  $r_2 = \lambda/\alpha_2$ . Für die zweite Ableitung am Extremum findet man

$$\left. \frac{d^2\Phi}{d\varrho^2} \right|_{\varrho = 1/\text{Bi}} = -\frac{\text{Bi}}{\left(1 + \ln \frac{1}{\text{Bi}}\right)^2} < 0.$$

Es liegt also in der Tat ein Maximum des Wärmestromes vor. Dieses Maximum liegt jedoch nur dann im physikalisch realisierbaren Bereich  $\varrho = r_2/r_1 \geq 1$ , wenn  $\text{Bi} \leq 1$  gilt.

Folglich kann ein Maximum des Wärmestromes am kritischen Radius  $\varrho_{crit} = 1/\text{Bi}$  auftreten, wenn der Innenradius  $r_1$  und der äußere Wärmeübergangskoeffizient  $\alpha_2$  klein, die Wärmeleitfähigkeit  $\lambda$  hingegen eher hoch sind. Dies ist wie folgt zu interpretieren: Beim Zylinder (wie auch bei der Kugel, s.u.) erhöht sich mit dem Radius  $r_2$



zwar die hemmende Wirkung des Isolationsmantels und damit auch  $R_\lambda$ , jedoch nimmt auch die für den äußeren Wärmeübergang zur Verfügung stehende Fläche  $2\pi r_2 l$  zu – somit *verringert* sich der Wärmeübergangswiderstand  $R_{\alpha 2}$ . Solange  $R_{\alpha 2}$  den gesamten thermischen Widerstand  $R = R_\lambda + R_{\alpha 2}$  dominiert, kann sich dieser mit zunehmendem  $q$  verringern.

### Beispiel 3.2.3

## Elektrokabel

Wir betrachten ein Elektrokabel mit Drahtdurchmesser  $r = 2$  mm, PVC Isolation mit  $\lambda = 0,15$  W/m-K, Wärmeübergangskoeffizient  $\alpha_2 = 15$  W/m<sup>2</sup>-K und damit  $Bi = 0,2$ . Der maximale Wärmestrom tritt auf bei einem Gesamtradius  $r_2 = 10$  mm und wir dürfen beruhigt schließen, dass selbst ein dicker Isoliermantel die Abfuhr der Joule'schen Verlustwärme begünstigt.

Für die Hohlkugel liefert die analoge Ableitung für das Extremum

$$\frac{r_2}{r_1} = \frac{2}{Bi} \quad \text{oder} \quad r_2 = \frac{2\lambda}{\alpha_2},$$

während für die Platte gilt, dass mehr Isolationsmaterial wirklich in jedem Fall besser isoliert.

### 3.2.7 Kennzahl von Biot

Die in Gl. (3.25) eingeführte *Biot-Zahl*  $Bi$  [–], benannt nach Jean-Baptiste Biot, einem Zeitgenossen Fouriers, ist die erste einer Reihe von *dimensionslosen Kennzahlen*, die wir in diesem Buch kennen lernen werden. Kennzahlen, gebildet als eine dimensionsfreie Kombination von charakteristischen Einflussgrößen oder Stoffwerten, sind von großem Nutzen, um z. B. Wärmetransport- und Strömungsvorgänge qualitativ und quantitativ zu charakterisieren.

Viele Kennzahlen lassen sich anschaulich als Verhältnis von zwei physikalischen Effekten interpretieren. So ist die Biot-Zahl als Verhältnis des Wärmeleitwiderstandes (Wärmeleitung durch einen Körper) zum Wärmeübergangswiderstand (Wärmetransport von der Oberfläche des Körpers zum umgebenden Fluid) zu verstehen,

$$Bi \sim \frac{R_\lambda}{R_\alpha}.$$

Im Licht dieser Interpretation wird auch klar, warum der Parameter  $Bi$  entscheidet, ob ein Maximum des Wärmestromes  $\Phi$  bei einem kritischen Radius  $q_{crit} > 1$  überhaupt realisiert werden kann (konkret war die Forderung  $Bi < 1$ ).

Wie noch gezeigt wird, spielt die Biot-Zahl nicht nur beim Wärmedurchgang, sondern auch bei Problemen der Wärmeleitung mit Quellen (siehe Abschnitt 3.3) oder bei der instationären Wärmeleitung (siehe Kapitel 4 und 14) eine wichtige Rolle. Weitere wesentliche Anmerkungen zu den Kennzahlen finden sich in Kapitel 12.

**Definition Biot-Zahl**

Bei Wärmeleitung in einem Körper der Ausdehnung  $L$  mit Wärmeleitfähigkeit  $\lambda$  und Randbedingung der dritten Art definiert man eine Biot-Zahl

$$\text{Bi} \equiv \frac{\alpha L}{\lambda}, \quad (3.30)$$

die als Verhältnis des Wärmeleit- zum Wärmeübergangswiderstand interpretiert werden kann.

### 3.3 Wärmeleitung mit Wärmequellen

Wir haben in den ersten Abschnitten dieses Kapitels stationäre Lösungen der Fourier'schen bzw. Laplace'schen Differentialgleichung ohne innere Wärmequellen diskutiert. Dabei fließt in den betrachteten Gebieten ein zeitlich konstanter Wärmestrom, dessen Quellen und Senken außerhalb der betrachteten Bereiche liegen. Nun wollen wir den Fall betrachten, dass im Körper Wärme freigesetzt und durch Wärmeleitung abgeführt wird. Bei Aufgaben dieser Art gilt es, die Temperaturverteilung zu bestimmen, die sich in Abhängigkeit von der Stärke und der räumlichen Verteilung der Wärmequellendichte einstellt. Wir beschränken uns wieder auf die drei quasi-eindimensionalen Geometrien Platte, Zylinder und Kugel. Im stationären Fall reduziert sich die Fourier'sche Differentialgleichung (siehe Gl. (2.17)) mit inneren Wärmequellen zur *Poisson-Gleichung*. Diese lautet in quasi-eindimensionaler Form – vgl. mit Gl. (3.2) – für Platte, Zylinder, resp. Kugel ( $n = 0, 1, 2$ ):

$$\frac{d^2 T}{dr^2} + \frac{n}{r} \frac{dT}{dr} + \frac{\omega}{\lambda} = 0. \quad (3.31)$$

#### 3.3.1 Konstante Wärmequellendichte

Grundsätzlich kann die Wärmequellendichte  $\omega$  vom Ort, von der Zeit und von der Temperatur abhängen – z. B. wenn Wärme durch chemische Reaktionen freigesetzt wird. Wir gehen allerdings in diesem Abschnitt davon aus, dass die Wärmequellendichte  $\omega$  eine Konstante ist<sup>2</sup>.

Die folgenden Randbedingungen sind in der Praxis häufig relevant:

- Symmetrie (bei der Platte auch Adiabasie) bei  $r = 0$ :

$$\left. \frac{dT}{dr} \right|_0 = 0.$$

<sup>2</sup> Ein Beispiel mit räumlich variabler Wärmequellendichte und variabler Außentemperatur wird in Abschnitt 7.3 diskutiert.

- Randbedingung der dritten Art bei  $r = R$ :

$$-\lambda \left. \frac{dT}{dr} \right|_{r=R} = \alpha(T_W - T_\infty).$$

In diesem Fall werden Differentialgleichung und Randbedingungen für alle drei Geometrien durch ein Polynom zweiten Grades, d. h. eine parabolische Temperaturverteilung, erfüllt. Dies zeigt man mit dem Ansatz

$$T(r) = a + br + cr^2.$$

Damit lautet die quasi-eindimensionale Poisson-Gleichung (3.31):

$$2c + \frac{n}{r}(b + 2cr) + \frac{\dot{\omega}}{\lambda} = 0.$$

Aus der Randbedingung bei  $r = 0$  folgt  $b = 0$ , und aus der Differentialgleichung bestimmt man den Koeffizienten  $c$ :

$$\begin{aligned} 2c(1+n) + \frac{\dot{\omega}}{\lambda} &= 0 \\ \Rightarrow c &= -\frac{\dot{\omega}}{2\lambda(1+n)}. \end{aligned}$$

der Randbedingungen bei  $r = R$  gilt für den Koeffizienten  $a$

$$\begin{aligned} -2c\lambda R &= \alpha(a + cR^2 - T_\infty) \\ \Rightarrow a &= -2c\lambda \frac{R}{\alpha} - cR^2 + T_\infty. \end{aligned}$$

Zusammenfassung:

### Stationäre Wärmeleitung mit konstanter Wärmequellendichte $\dot{\omega}$

Temperaturverteilung im Körper ( $0 \leq r \leq R$ ):

$$T(r) = T_\infty + \frac{\dot{\omega}R^2}{2\lambda(n+1)} \left( 1 + \frac{2\lambda}{\alpha R} - \left(\frac{r}{R}\right)^2 \right). \quad (3.32)$$

Für den Wärmefluss an der Außenwand gilt

$$\dot{q}(R) = -\lambda \left( \frac{dT}{dr} \right)_R = \frac{\dot{\omega}R}{n+1} \quad (3.33)$$

mit  $n = 0, 1, 2$  für Platte, Zylinder bzw. Kugel.

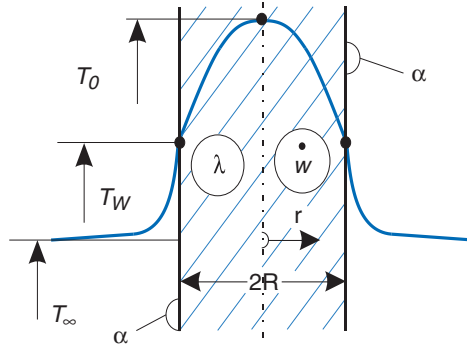


Abbildung 3.6: Symmetrische Temperaturverteilung in den drei einfachen Körpern (Platte, Zylinder, Kugel) bei konstanter Wärmequellendichte

### Beispiel 3.3.1

## Maximaltemperatur Mikroprozessor

Im Beispiel 1.4.1 wurde die Oberflächentemperatur  $T_W$  eines konvektiv gekühlten Mikroprozessors mit 15 W thermischer Leistung bei einem Wärmeübergangskoeffizienten von  $150 \text{ W/m}^2\text{-K}$  zu  $74^\circ\text{C}$  abgeschätzt. Nun wollen wir überlegen, ob die Temperaturen im Inneren des Prozessors einen maximal zulässigen Wert von  $80^\circ\text{C}$  überschreiten können.

Die folgenden vereinfachenden Annahmen werden gemacht:

- quaderförmige Geometrie mit Oberfläche  $A = 0,002 \text{ m}^2$  und Dicke  $R = 3 \text{ mm}$
- rückseitig adiabate Montage des Chips
- homogene Wärmequellendichte  $\dot{\omega}$
- konstante Wärmeleitfähigkeit  $\lambda = 2 \text{ W/m-K}$

Für die Wärmequellendichte gilt

$$\dot{\omega} = \frac{\dot{Q}}{AR} = 2,5 \times 10^6 \frac{\text{W}}{\text{m}^3}.$$

Die Maximaltemperatur wird an der adiabaten Rückwand  $r = 0$  erreicht und für  $n = 0$  (ebene Geometrie) berechnet man mit Gl. (3.32):

$$T_{max} = T(0) = T_\infty + \frac{\dot{\omega}R^2}{2\lambda} \left( 1 + \frac{2\lambda}{\alpha R} \right) = 79,6^\circ\text{C}.$$

Damit kommt man der zulässigen Maximaltemperatur schon gefährlich nahe.

### 3.3.2 Dimensionslose Darstellung der Lösung

Mit den Definitionen

$$\xi \equiv \frac{r}{R},$$

$$\theta \equiv \frac{T - T_\infty}{\dot{\omega} R^2 / \lambda},$$

$$\text{Bi} \equiv \frac{\alpha R}{\lambda}$$

lässt sich das Temperaturprofil (3.32) kompakt in dimensionsfreier Form darstellen:

$$\theta(\xi) = \frac{1}{2(n+1)} \left( 1 + \frac{2}{\text{Bi}} - \xi^2 \right), \quad 0 \leq \xi \leq 1. \quad (3.34)$$

Im Zentrum bzw. an der Oberfläche des Körpers gilt:

$$\theta(0) = \frac{1}{2(n+1)} \left( 1 + \frac{2}{\text{Bi}} \right) \quad \text{und} \quad \theta(1) = \frac{1}{2(n+1)} \frac{2}{\text{Bi}}.$$

Qualitativ sind die Temperaturverhältnisse für große bzw. kleine Werte der Biot-Zahl  $\text{Bi}$  in Abb. 3.7 dargestellt. Wir haben oben schon erläutert, dass die Biot-Zahl als Verhältnis des Wärmeleitwiderstandes (im Körper) zum Wärmeübergangswiderstand (vom Körper an die Umgebung) zu interpretieren ist. Man sieht also, dass bei kleiner Biot-Zahl der Temperaturabfall „über den Wärmeleitwiderstand“  $R_\lambda$ , also vom Inneren zur Oberfläche des Körpers, vergleichsweise klein ist, während umgekehrt bei großer Biot-Zahl der Transportwiderstand  $R_\alpha$  und so auch die Temperaturdifferenz zwischen Körperoberfläche und Umgebung klein ist. Eine ähnliche Beobachtung in Analogie zum Spannungsabfall an elektrischen Widerständen haben wir schon bei den Péclet-Gleichungen diskutiert.

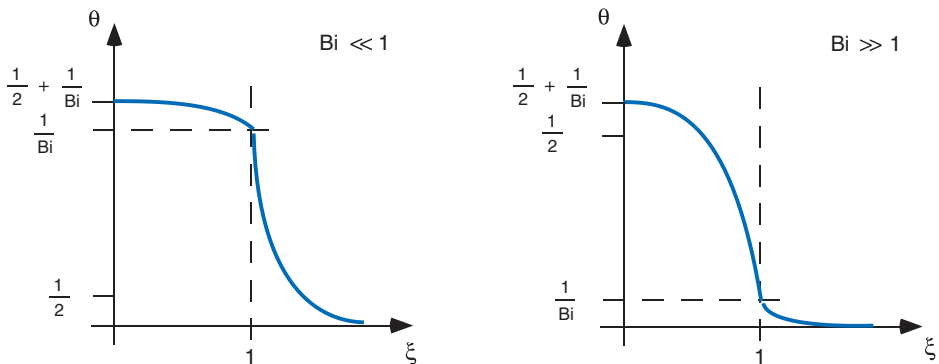


Abbildung 3.7: Wärmeleitung in einer Platte mit konstanter Wärmequellendichte und Randbedingung der dritten Art: qualitative Darstellung der Temperaturverhältnisse für kleine und große Biot-Zahlen

## Beispiel 3.3.2

**Maximaltemperatur Mikroprozessor (2)**

Wir betrachten noch einmal den konvektiv gekühlten Mikroprozessor, der in Kapitel 1.4 erstmals vorgestellt wurde. Wie im Beispiel 3.3.1 gezeigt, kommt man bei einem Wärmeübergangskoeffizienten von  $150 \text{ W/m}^2\text{-K}$  der maximal zulässigen Temperatur  $T = 80 \text{ °C}$  schon bedenklich nahe. Darf man bei den vorliegenden Verhältnissen noch eine merkliche Temperaturabsenkung erwarten, wenn der Wärmeübergangskoeffizient z. B. durch einen leistungsfähigeren Ventilator erhöht wird?

Um dies zu beurteilen, bestimmen wir zuerst die Biot-Zahl für die betrachtete Konfiguration:

$$\text{Bi} = \frac{\alpha R}{\lambda} = \frac{150 \cdot 0,003}{2} = 0,225 .$$

Da  $\text{Bi} \sim R_\lambda/R_\alpha$  dürfen wir daraus schließen, dass bei einem Wärmeübergangskoeffizienten von  $150 \text{ W/m}^2\text{-K}$  der konvektive Wärmeübergang den gesamten Wärmetransport dominiert und deshalb eine Erhöhung von  $\alpha$  sehr wohl zu einer deutlichen Absenkung der Temperatur auch im Inneren der CPU führen sollte (vgl. hierzu auch das „Paradoxon“ des kritischen Radius, siehe Abschnitt 3.2.6). Allerdings nimmt die relative Temperaturüberhöhung zwischen Oberfläche und Rückwand, die man definieren kann als

$$\frac{T(0) - T(R)}{T(R)} = \frac{(1/2 + 1/\text{Bi}) - 1/\text{Bi}}{1/\text{Bi}} = \frac{\text{Bi}}{2} ,$$

mit der höheren Biot-Zahl bereits etwas zu.

Bei einem Wert  $\alpha = 200 \text{ W/m}^2\text{-K}$  ergibt sich z. B. eine Wandtemperatur  $T(R) = 61,5 \text{ °C}$ , eine Maximaltemperatur  $T(r = 0) = 67,1 \text{ °C}$  und eine Biot-Zahl  $\text{Bi} = 0,3$ .

**3.4 Zweidimensionale Wärmeleitung (Formfaktoren)**

Wie in Abschnitt 3.1 gezeigt, fließt zwischen den Berandungsflächen von Platte, Zylinder und Kugel mit Temperaturen  $T_{W1}$  bzw.  $T_{W2}$  ein Wärmestrom  $\dot{Q}$  der sich gemäß

$$\dot{Q} = \frac{T_{W1} - T_{W2}}{R_\lambda}$$

berechnen lässt. Die Wärmeleitwiderstände  $R_\lambda$  für Platte, Zylinder und Kugel sind dabei jeweils umgekehrt proportional zur Wärmeleitfähigkeit  $\lambda$  des Mediums und hängen ansonsten nur von der Geometrie ab. Dies legt die folgende Schreibweise nahe:

$$\dot{Q} = \lambda S (T_{W1} - T_{W2}) \quad (3.35)$$

mit einem *Formkoeffizienten*  $S$  (*shape factor*, Einheit [m]).

Für die einfachen Körper findet man durch Vergleich mit den Ergebnissen des Abschnitts 3.1 :

$$S = \frac{A}{s} \quad \text{für die Platte,}$$

$$S = \frac{2\pi l}{\ln(r_2/r_1)} \quad \text{für den Zylindermantel und}$$

$$S = \frac{4\pi}{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}} \quad \text{für die Kugelschale .}$$

Beziehungen gemäß Gl. (3.35) zwischen Wärmestrom, Wärmeleitfähigkeit, Temperaturdifferenz und Form des Körpers lassen sich auch für andere Geometrien und insbesondere prismatische Körper herleiten.

Voraussetzung ist, dass

- 1 der Querschnitt des wärmeleitenden Körpers einen ebenen, einfach zusammenhängenden, ansonsten aber beliebig geformten Bereich bildet (siehe Abbildungen 3.8–3.12)
- 2 bei ansonsten adiabaten Oberflächen an der Berandung auf zwei getrennten Abschnitten die Temperaturen  $T_{W1}$  und  $T_{W2}$  aufgeprägt sind.

Die Wärme fließt dabei ausgehend von einem Abschnitt der Berandung mit konstanter Temperatur  $T_{W1}$  durch den Körper hin zum zweiten Abschnitt mit konstanter Oberflächentemperatur  $T_{W2}$ . Die Wärmestromdichte  $\dot{q}$  im Körper ist dabei im Allgemeinen nicht homogen oder isotrop.

Für den Zylindermantel kann man wie für alle prismatischen Körper („Profilstangen“) alternativ einen längenbezogenen, dimensionslosen Formkoeffizienten (auch *Formfaktor* genannt) einführen:

$$S_L \equiv \frac{S}{l} \quad (\text{Einheit [-]}) ,$$

so dass man schreiben kann:

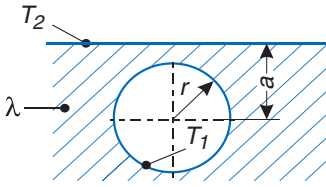
$$\dot{Q} = \lambda l S_L \Delta T .$$

### Beispiel 3.4.1

## Unterirdisch verlegtes Fernheizungsrohr

Ein isoliertes Fernheizungsrohr mit Gesamtdurchmesser  $d = 0,4 \text{ m}$  ist in einer Tiefe von  $h = 1,2 \text{ m}$  verlegt. Für den Formfaktor gilt nach Abb. 3.8:

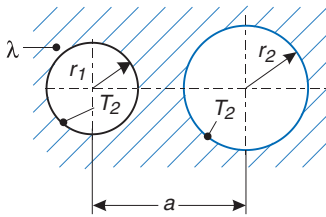
$$S_L = \frac{2\pi}{\ln\left(\frac{h}{d/2} + \sqrt{\frac{h^2}{(d/2)^2} - 1}\right)} = 2,54 .$$



$$S_L = \frac{2\pi}{\ln\left(\frac{a}{r} + \sqrt{\frac{a^2}{r^2} - 1}\right)},$$

$$S_L \approx \frac{2\pi}{\ln(2a/r)} \quad \text{für } \frac{a}{r} > 5.$$

Abbildung 3.8: Rohr im halbbunendlichen Bereich

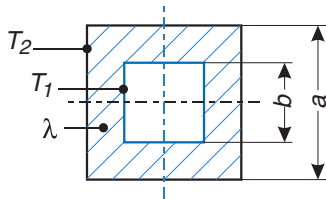


$$S_L = \frac{2\pi}{\ln\left(u + \sqrt{u^2 - 1}\right)},$$

mit

$$u \equiv \frac{a^2 - r_1^2 - r_2^2}{2r_1r_2}.$$

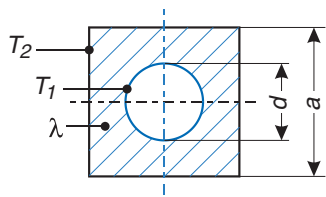
Abbildung 3.9: Zwei Rohre im unendlichen Bereich



$$\frac{a}{b} > 1,4 : S_L \approx \frac{2\pi}{0,93 \ln(a/b) - 0,0502}$$

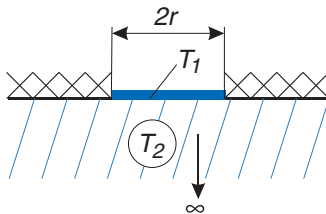
$$\frac{a}{b} < 1,4 : S_L \approx \frac{2\pi}{0,785 \ln(a/b)}$$

Abbildung 3.10: Schacht (innen und außen quadratisch)



$$S_L \approx \frac{2\pi}{\ln(1,08 a/d)}.$$

Abbildung 3.11: Schacht (innen kreisförmig)



$$S = 4r. \quad (\text{dreidimensional})$$

Abbildung 3.12: Scheibe auf halbbunendlichem Körper



Für die Wärmeleitfähigkeit des Erdreichs darf man  $\lambda = 0,6 \text{ W/m-K}$  annehmen. Bei einer langen Frostperiode mit Oberflächentemperatur  $T_2 \approx -15^\circ\text{C}$  und einer Temperatur  $T_1$  am äußeren Rand der Rohrisolation von  $5^\circ\text{C}$  berechnet man den Verlustwärmestrom pro Meter Rohrlänge wie folgt:

$$\frac{\dot{Q}}{l} = \lambda S_L \Delta T = 0,6 \cdot 2,54 \cdot (5 + 15) = 30,4 \frac{\text{W}}{\text{m}} .$$

Abbildungen 3.10, 3.11, 3.8 und 3.9 zeigen (längenbezogene) Formkoeffizienten  $S_L$  für komplizierte prismatische Körper (zweidimensional) mit zwei isothermen Berandungen. Abbildung 3.12 gibt den Formkoeffizienten  $S$  für eine Kreisscheibe mit der Temperatur  $T_1$  an, die Wärme an einen sehr großen Körper mit Temperatur  $T_2$  überträgt.

- Weitere Formfaktoren finden sich in den ARBEITSUNTERLAGEN und der Fachliteratur [17, 1, 39].
- Die Formkoeffizienten ruhen auf soliden mathematischen Grundlagen. Es wurde bereits in Abschnitt 3.1 erwähnt, dass sich die stationäre Fourier'sche Differentialgleichung für isotrope, homogene Körper mit temperaturunabhängiger Wärmeleitfähigkeit ohne innere Wärmequellen zur „Potenzialgleichung“ (*Laplace-Gleichung*) vereinfacht. In cartesischen Koordinaten für zwei Dimensionen lautet diese

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 . \quad (3.36)$$

Die enge Beziehung dieser Gleichung zur Funktionentheorie einer komplexen Variablen ermöglicht exakte analytische Lösungen, die den Formkoeffizienten zu Grunde liegen. Es gibt übrigens ganz ähnliche Ergebnisse für die Elektrostatik und Elektrotechnik.

- Interessant ist der Vergleich der  $S$ -Werte für eine isotherme halbkugelförmige (napfförmige) Vertiefung im halbenendlich ausgedehnten Raum (Erdboden) mit dem entsprechenden Wert für die Kreisscheibe auf dem Halbraum.

Aus obiger Beziehung folgt:

$$S_{\text{Halbkugel}} = 2\pi r .$$

Abbildung 3.12 entnimmt man:

$$S_{\text{Kreisscheibe}} = 4 r_1 .$$

Demnach erhöht eine isotherme halbkugelförmige Vertiefung den in den Halbraum eingetragenen Wärmestrom um 57% gegenüber einer isothermen Kreisscheibe.

## Z U S A M M E N F A S S U N G

- Die *Péclet-Gleichungen* kombinieren elementare Lösungen für die stationäre Wärmeleitung in einfachen, quasi-1D-Geometrien (Platte, Zylinder, Kugel). So kann der *Wärmedurchgang* (inkl. des zugehörigen Koeffizienten  $k$ ) durch mehrere Schichten unterschiedlichen Materials bzw. über die Grenzschichten des konvektiven Wärmeübergangs hinweg berechnet werden. Dies entspricht einer Reihenschaltung von Wärmeübertragungswiderständen.

- Die Energieerhaltung – bereits bei der Herleitung der Fourier'schen DGL benötigt – findet häufig explizit Anwendung bei der Lösung von Wärmetransportproblemen (in diesem Kapitel: Abstützen auf äußere Randbedingungen, alternative Herleitung der Péclet-Gleichung aus einer Wärmestrombilanz).
- Dimensionslose (oder „bezogene“) Größen erlauben oft eine besonders kompakte und übersichtliche Darstellung von Ergebnissen.
- Bei konstanter Wärmequellendichte und Randbedingungen der dritten Art ergibt sich für Platte, Zylinder und Kugel jeweils ein parabolisches Temperaturprofil.
- Die Biot-Zahl

$$\text{Bi} \equiv \frac{\alpha R}{\lambda} \sim \frac{\text{Wärmeleitwiderstand}}{\text{Wärmeübergangswiderstand}}$$

wurde als die erste einer Reihe von wichtigen *Kennzahlen* (dimensionsfreie Kombinationen von Einflussgrößen) eingeführt. Sie spielt beim (scheinbaren) Paradoxon des kritischen Radius beim Wärmedurchgang eine wichtige Rolle und ist ein qualitatives Maß für die relative Überhöhung des Temperaturprofils im Körper bei der Wärmeleitung mit Quellen.

- *Formkoeffizienten* bzw. *Formfaktoren* erlauben die Berechnung von Wärmeströmen in einfachen (quasi-)zweidimensionalen Geometrien, typischerweise sog. prismatische Körper.

## Z U S A M M E N F A S S U N G

### eXerzities

### Richtig oder falsch?

- Wenn man die Wärmebilanz eines Einfamilienhauses aufstellt, so ist der Kühlschrank in der Küche aufgrund des Wärmedurchgangs bei nicht-idealer Isolation insgesamt als eine Wärmesenke (= negative Wärmequelle) zu betrachten.
- In einem homogen-isotropen Körper zeigt im stationären Zustand das Temperaturprofil zwischen ebenen, parallelen Isothermenflächen einen exponentiellen Abfall.
- Weil die Mantelfläche einer Zylinderschale proportional zu ihrem Radius zunimmt, muss im stationären Fall (ohne Wärmequellen) die radiale Wärmestromdichte indirekt proportional zum Radius abnehmen, so dass sich ein logarithmischer Temperaturverlauf ergibt.
- Die Diskussion des kritischen Radius beim Zylinder hat gezeigt, dass mehr Isolationsmaterial, z.B. um ein Heizungsrohr, nicht immer zu reduzierten Wärmeverlusten führt. Dies lässt sich anschaulich wie folgt erklären: Vergrößert man die Dicke des Isolationsmantels, so erhöht man den Wärmeleitwiderstand, verringert aber den Wärmeübergangswiderstand, da die für den konvektiven Wärmeübergang zur Verfügung stehende Mantelfläche ebenfalls zunimmt. Da Wärmeleit- und Wärmeübergangswiderstand in Reihe geschaltet

sind, ist eine Verringerung des Gesamtwiderstandes möglich – unter der Voraussetzung, dass der Wärmeübergang den Gesamtwiderstand dominiert.

- Der  $k$ -Wert ist gleich dem Inversen des soeben angesprochenen Gesamtwiderstandes der Wärmeübertragung.
- Es sind auch Konfigurationen denkbar, die einer Parallelschaltung von Wärmeleitwiderständen entsprechen.
- Die Biot-Zahl  $Bi \equiv \alpha/\lambda$  ist das (entdimensionierte) Verhältnis des Wärmeleit zum Wärmeübergangswiderstand.
- Das Anbringen von Isolationsmaterial an einem Rohr lohnt sich bei einer Biot-Zahl  $Bi < 1$  nur, wenn der äußere Radius  $r_2$  des Isolationsmaterials größer ist als der kritische Radius  $r_c = r_1/Bi$ .
- Voraussetzung für die Anwendbarkeit der Formfaktoren ist eine jeweils einheitliche Temperatur auf den verschiedenen Berandungsflächen.

#### Wärmeleitung mit konstanter Wärmequellendichte:

Eine dünne, ebene Platte (einseitig adiabatisch, Dicke  $R$ ), ein langer Zylinder und eine Kugel (jeweils Durchmesser  $R$ ) aus dem gleichen Material sind vom selben Fluid mit konstanter Temperatur  $T_\infty$  über- bzw. umströmt. Die jeweiligen Wärmeübergangskoeffizienten  $\alpha$  sind als unendlich groß zu betrachten.

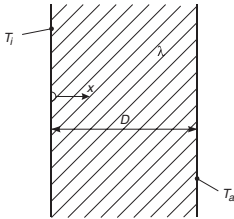
- Das Temperaturmaximum (bezüglich  $T_\infty$ ) beträgt im Zylinder das Doppelte desjenigen in der Kugel.
- Das Temperaturmaximum beträgt in der Kugel nur ein Drittel desjenigen in der Platte.
- Das Temperaturmaximum bezüglich  $T_\infty$  ist im Zylinder größer als in der Platte, da die Mantelfläche einer koaxialen Zylinderschale mit dem Radius linear zunimmt und somit die Wärme aus den äußeren Bereichen besser abgeführt werden kann.

## Übungsaufgaben

**1** In Abschnitt 3.2.3 wurde eine graphische Methode zur Diskussion des Wärmeübergangs an der ebenen Platte vorgestellt.

- Überlegen Sie was passiert, wenn einer der Wärmeübergangskoeffizienten sehr groß wird, z. B.  $\alpha_1 \rightarrow \infty$ . Welchem Typ Randbedingung entspricht dies?
- Wie kann man Probleme mit einer Randbedingung der zweiten Art an einer Oberfläche (z. B. Wärmestromdichte  $\dot{q}_1$  gegeben) mit dem graphischen Verfahren lösen?
- Wie muss man dieses Verfahren anpassen, um es auch für den Zylinder oder die Kugel einsetzen zu können?

2



Trapper John baut sich in Kanada eine Blockhütte. Ohne irgendwelche architektonischen Ambitionen fügt er einen Quader mit Seitenlängen von 3 bzw. 4 m und Höhe 2 m zusammen. Die Wände der Dicke  $D = 20$  cm sind aus Holz.

Nun versucht Trapper John abzuschätzen, wie viel Brennholz er braucht, um durch den Winter zu kommen. Er überlegt, dass er – abgehärtet, wie er ist – bei einer Wand- bzw. Decken-temperatur  $T_i = 10$  °C noch halbwegs komfortabel wohnen

kann. Für die Außenseite der Hütte geht er von einer mittleren Temperatur  $T_a = -15$  °C aus. Wie viel Raummeter Brennholz braucht Trapper John bei diesen Verhältnissen pro Monat?

Rechnen Sie vereinfachend mit richtungs- und temperaturunabhängiger Wärmeleitfähigkeit  $\lambda = 0,17$  W/m-K der Wand (Seitenwände und Dach der Hütte werden gleich behandelt, Wärmeverluste durch den Boden werden vernachlässigt, Fenster und Tür werden nicht weiter berücksichtigt).

- Skizzieren Sie als Erstes das Temperaturprofil in der Wand.
- Leiten Sie anhand einer thermischen Energiebilanz an einem differentiellen Element eine Differentialgleichung für die Temperatur  $T(x)$  her (1-D-Betrachtung,  $0 < x < D$ ).
- Lösen Sie die Differentialgleichung allgemein, bestimmen Sie die Konstanten mithilfe der Randbedingungen. Überprüfen Sie das Ergebnis der ersten Teilaufgabe.
- Wie groß ist die Wärmestromdichte durch die Wand?
- Wie groß ist der gesamte Wärmeleitwiderstand  $R_\lambda$  der Hütte? Welche Gesamtheizleistung  $P$  wird benötigt, um das angestrebte Temperaturniveau aufrecht zu erhalten?
- Wie viele Raummeter (rm) Brennholz werden pro Monat benötigt? Legen Sie dabei einen Heizwert von 1800 kWh/rm für Brennholz und einen Wirkungsgrad von 50% für Trapper Johns Kanonenofen zu Grunde.

3 Trapper John hat nicht berücksichtigt, dass aufgrund des Wärmeübergangswiderstandes zwischen Raumluft und Innenseite der Wände bzw. Decke die Raumtemperatur  $T_{\infty,i}$  etwas über der Wandtemperatur  $T_i$  liegen wird.

- Bestimmen Sie bei ansonsten unveränderten Bedingungen diesen Temperaturunterschied bei einem Wärmeübergangskoeffizienten  $\alpha_i = 5$  W/m<sup>2</sup>-K.
- Welche weiteren Wärmetransportmechanismen können noch zu Trapper Johns Wohlbefinden beitragen?

4 Leider stellt Trapper John bald fest, dass das Flachdach der Hütte nicht ganz wasserdicht ist. Das ständige Tropfen von der Decke hört erst auf, als starker Frost kommt und die Oberseite des Daches bei Temperaturen  $T_a < 0$  gefriert.

Mit dem ersten starken Schneefall bemerkt Trapper John erfreut, dass er weniger Brennholz braucht, um die Hütte warm zu halten, weil die dicke Schneedecke auf dem Dach mit der geringen Wärmeleitfähigkeit  $\lambda = 0,05$  als zusätzliche Isolation wirkt.

- Bestimmen Sie mit der in Kapitel 3.2.3 vorgestellten graphischen Methode die Temperaturen in Dach und Schneedecke. Für die Wärmeübergangskoeffizienten gelte  $\alpha_i = 5$  W/m<sup>2</sup>-K,  $\alpha_a = 20$  W/m<sup>2</sup>-K. Die Schneedecke ist 40 cm dick, für die Raum- und Umgebungstemperaturen gelte  $T_{\infty,i} = 12$  °C und  $T_{\infty,a} = -20$  °C.

- Wie groß ist die Wärmedurchgangszahl ( $k$ -Wert) des schneebedeckten Daches bei diesen Bedingungen? Zum Vergleich: Wie groß ist der  $k$ -Wert des Daches ohne Schnee?
- Ab welcher Dicke der Schneedecke muss Trapper John damit rechnen, dass das Dach über die gesamte Dicke auftaut und wieder Schmelzwasser von der Decke tropft?

- 5 Bei quasi-eindimensionaler stationärer Wärmeleitung in einer Kugel gilt für die Wärmestromdichte in radialer Richtung  $\dot{q}(r) \sim 1/r^2$  (warum?). Zeigen Sie, dass deshalb  $T(r) \sim 1/r$  und somit

$$T(r) = \frac{C_1}{r} + C_2$$

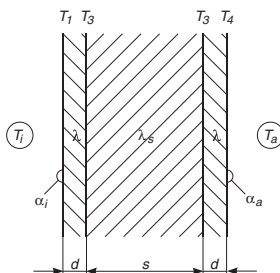
eine Lösung der Fourier- bzw. Laplace-Gleichung (3.2) bei sphärischer Symmetrie darstellt. Bestimmen Sie für eine Kugelschale mit Wandtemperaturen  $T_{W1}$  und  $T_{W2}$  die Konstanten  $C_1$  und  $C_2$  aus den Randbedingungen.

- 6 Leiten Sie ähnlich wie in Abschnitt 3.1.5 anhand einer globalen Bilanz für den Wärmestrom  $\dot{Q}$  die Ergebnisse der Gln. (3.13) und (3.15) für den Wärmeleitwiderstand einer Platte bzw. einer Kugel her.

- 7 Durch ein langes Stromkabel mit Kupferkern (Querschnittsfläche  $A$ ) und PVC-Isolationsmantel der Dicke  $h = r_2 - r_1$  fließt ein elektrischer Strom der Stärke  $I$ . Ohm'sche Verluste bei elektrischer Leitfähigkeit  $\sigma$  setzen im Kupfer Wärme frei, die über die Oberfläche des Kabels bei einem Übergangskoeffizienten  $\alpha$  an die Umgebung abgegeben wird. Die Wärmeleitfähigkeiten  $\lambda_K$  und  $\lambda_{PVC}$  seien temperaturunabhängig.

Stellen Sie dar, wie man in Abhängigkeit von den gegebenen Größen die Temperatur an der Achse des Drahtes im stationären Zustand bestimmen kann. Über welche Kontrollvolumina bilanzieren Sie? Wie lauten die Differentialgleichungen für die Temperatur im Kupferkern bzw. im Isolationsmantel? Welche sind die Koppelbedingungen an der Grenzfläche zwischen Kupferkern und Isolationsmantel?

8



Eine Gebäudewand besteht aus zwei Platten (Dicke  $d$ , Fläche  $A$ , Wärmeleitfähigkeit  $\lambda$ ). Der Zwischenraum (Abstand  $s$ ) ist zur Erzielung einer guten Isolierwirkung mit PU-Schaum ausgeschäumt (Wärmeleitfähigkeit  $\lambda_s$ ). Der Wärmeübergangskoeffizient  $\alpha_i$  aufgrund freier Konvektion im Gehäuseinneren und der Wärmeübergangskoeffizient  $\alpha_a$  aufgrund erzwungener Konvektion an der Außenseite sowie Innen- und Außentemperatur sind bekannt.

- Geben Sie den Wärmestrom  $\dot{Q}$  durch die Wand als Funktion der Temperaturdifferenz ( $T_i - T_a$ ) an, dabei sei  $T_i > T_a$ .
- Zeichnen Sie das Blockschaltbild der Wärmeleit- und Wärmeübergangswiderstände.
- Bestimmen Sie einen Wärmedurchgangskoeffizienten  $k$  [ $\text{W}/\text{m}^2\text{-K}$ ], so dass der gesamte Wärmestrom gemäß  $\dot{Q} = k \cdot A_K(T_i - T_a)$  einfach berechnet werden kann.

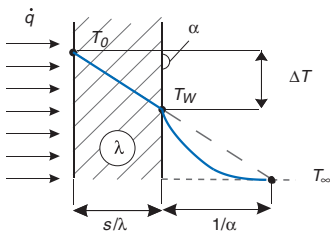
- 9 Warum sind viele Isolationsmaterialien (z. B. Styropor und Glaswolle) porös? Welchem Ersatzschaltbild von Wärmetransportwiderständen entspricht ein solches Material?

- 10 Eine 10 mm starke Platte aus Eisen und eine 20 mm starke Aluminiumplatte werden aufeinander gelegt, wobei zwischen beiden ein Luftspalt von 1/100 mm verbleibt.

- Berechnen Sie den Wärmetransportwiderstand  $R_{ges}$  dieses „Sandwich“. Begründen Sie, warum dabei konvektiver Wärmeübergang zwischen Metall und Luft im Spalt nicht berücksichtigt werden muss.
- Mittels Wärmeleitpaste (mit Leitfähigkeit  $\lambda \rightarrow \infty$ ) wird der Luftspalt eliminiert. Wie groß ist der gesamte Wärmetransportwiderstand  $R_{ges}$  nun?
- Wärmeleitfähigkeiten  $\lambda$ :

Eisen	15	W/m-K
Aluminium	240	W/m-K
Luft	0,026	W/m-K

11

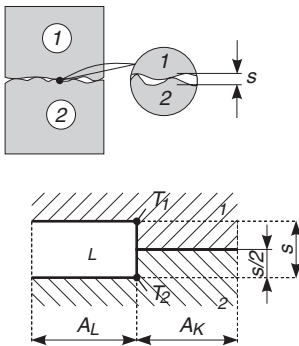


In Kapitel 3.2.3 wurde eine Methode vorgestellt, um den Wärmedurchgang bei Randbedingungen der dritten Art graphisch zu analysieren. Überlegen Sie, wie diese Methode anzupassen ist, wenn wie in der Skizze gezeigt, auf der linken Seite ein konstanter Wärmefluss aufgeprägt wird (RB der zweiten Art).

Wie ist der Temperaturunterschied  $\Delta T$  zwischen linker und rechter Plattenoberfläche maßstäblich zu bestimmen, um die Wandtemperatur  $T_W$  abschätzen zu können?

Die folgenden Einflussgrößen seien bekannt:  $\alpha$ ,  $\lambda$ ,  $\dot{q}$ ,  $s$  und  $T_\infty$ .

12



Der Kontaktwiderstand zwischen zwei sich berührenden Festkörpern soll mit einem einfachen Modell abgeschätzt werden. Dazu werden die Verhältnisse in dem mikroskopisch kleinen Kontaktbereich idealisiert.

Es wird angenommen, dass im Kontaktbereich mit einem mittleren Abstand  $s$  sich auf der Fläche  $A_K$  die Materialien direkt berühren und auf der Fläche  $A_L$  die beiden Körper durch eine Luftschicht getrennt sind.

Die Wärmeleitfähigkeiten der Festkörper  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  sowie der Luft  $\lambda_L$  sind bekannt. An der Kontaktstelle herrschen die Temperaturen  $T_1$  und  $T_2$ .

- Welcher Wärmestrom wird jeweils durch die Fläche  $A_L$  bzw.  $A_K$  übertragen?
- Welcher Wärmestrom wird insgesamt durch die Kontaktfläche  $A = A_L + A_K$  übertragen?
- Bestimmen Sie einen sog. *Kontaktkoeffizienten*  $k_c$  [W/m<sup>2</sup>-K], so dass der Gesamtwärmestrom gemäß

$$\dot{Q} = k_c \cdot A(T_1 - T_2)$$

einfach berechnet werden kann.