

**mb**  
maschinenbau

Russell C. Hibbeler

# Technische Mechanik 2

## Festigkeitslehre

5., überarbeitete und erweiterte Auflage

Übersetzung aus dem Amerikanischen:  
Nicoleta Radu-Jürgens, Frank Jürgens

Fachliche Betreuung und Erweiterungen:  
Jörg Wauer, Wolfgang Seemann

PEARSON  
Studium

---

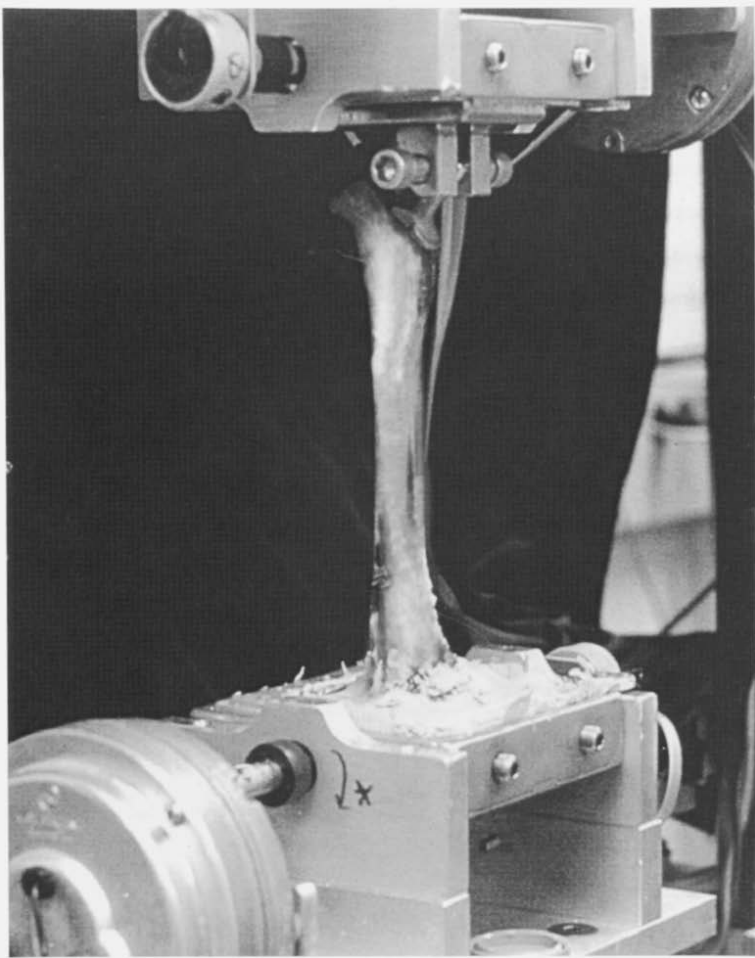
ein Imprint von Pearson Education  
München • Boston • San Francisco • Harlow, England  
Don Mills, Ontario • Sydney • Mexico City  
Madrid • Amsterdam

# Mechanische Materialeigenschaften

3

3.1 Zug- und Druckversuch .....	109
3.2 Spannungs-Dehnungs-Diagramm .....	111
3.3 Spannungs-Dehnungs-Verhalten von duktilen und spröden Materialien .....	115
3.4 Hooke'sches Gesetz .....	119
3.5 Formänderungsenergie .....	121
3.6 Querkontraktionszahl .....	128
3.7 Schubspannungs-Gleitungs-Diagramm .....	130
3.8 Werkstoffversagen aufgrund von Kriechen und Ermüdung .....	133

ÜBERBLICK



Die mechanischen Werkstoffeigenschaften müssen bekannt sein, so dass Ingenieure die in einem Material gemessene Verzerrung zur entsprechenden Spannung in Beziehung setzen können. Hier werden die mechanischen Eigenschaften von Knochen in einem Druckversuch ermittelt.

## Lernziele

Nachdem wir die grundlegenden Begriffe der Spannung und der Dehnung eingeführt haben, werden wir in diesem Kapitel zeigen, wie für ein bestimmtes Material die Spannung mit der Dehnung verknüpft werden kann und zwar mit Hilfe von experimentellen Methoden zur Bestimmung des Spannungs-Dehnungs-Diagramms. Das in diesem Diagramm beschriebene Verhalten wird danach für häufig im Ingenieurwesen verwendete Werkstoffe erörtert. Zudem werden mechanische Eigenschaften und andere Testverfahren diskutiert, die mit der Entwicklung der Festigkeitslehre in Beziehung stehen.

### 3.1 Zug- und Druckversuch

Die Festigkeit eines Materials hängt von seiner Fähigkeit ab, einer äußeren Belastung ohne bleibende Verformung oder Versagen zu widerstehen. Diese Eigenschaft ist vom Material selbst abhängig und muss durch Experimente bestimmt werden. Eines der wichtigsten Testverfahren, die in dieser Hinsicht durchgeführt werden, ist der **Zugversuch**. Obwohl viele wichtige mechanische Materialeigenschaften mit diesem Versuch ermittelt werden können, wird er vorrangig zur Ermittlung der Beziehung zwischen der mittleren Normalspannung und der mittleren Dehnung in vielen Konstruktionswerkstoffen wie Metallen, Keramiken, Polymeren und Verbundmaterialien eingesetzt. Für die Durchführung eines Zug- oder Druckversuchs wird eine Materialprobe in eine „Standard“-Form und -Größe gebracht. Vor dem Versuch bringt man zwei kleine Messmarken über der Länge des Probekörpers an. Diese Marken befinden sich in einem gewissen Abstand von den jeweiligen Enden des Probekörpers, denn die Spannungssituation ist an den Enden aufgrund der Einspannung in der Greifvorrichtung, wo die Kraft einwirkt, recht komplex. Es werden sowohl der Ausgangsquerschnitt  $A_0$  als auch die **Messstrecke**  $L_0$  zwischen den Markierungen der Probe gemessen. Ein Metall-Probekörper, der in einem Zugversuch eingesetzt wird, kann z.B. einen Ausgangsdurchmesser  $d_0 = 13$  mm und eine Messstrecke  $L_0 = 50$  mm haben, Abbildung 3.1. Damit eine Axiallast ohne Verbiegung der Probe einwirken kann, sind die Enden gewöhnlich in Kugelgelenken gelagert.

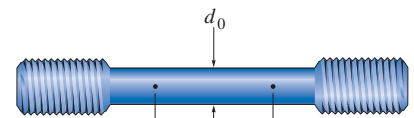
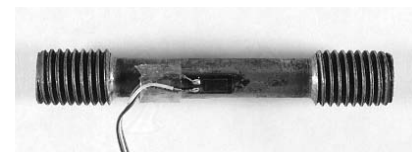


Abbildung 3.1



Typischer Stahl-Probekörper mit aufgeklebten Dehnmessstreifen

Es wird dann eine Versuchsanordnung, dargestellt in Abbildung 3.2, verwendet, um den Probekörper mit einer sehr langsamen, konstanten Rate zu strecken, bis der Zeitpunkt des Bruchs erreicht ist. Die Messvorrichtung zeigt die Last an, die für diese gleichmäßige Verlängerung notwendig ist.

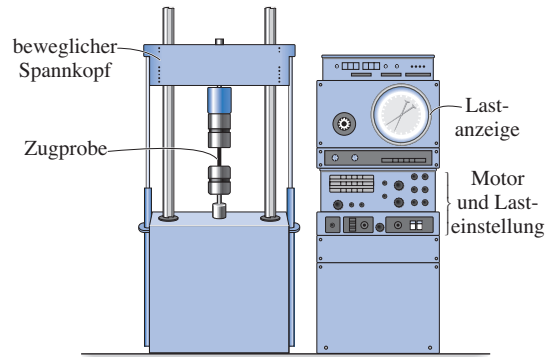
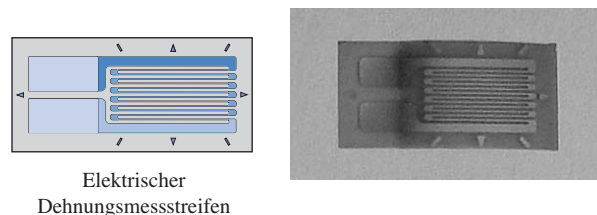


Abbildung 3.2

Während eines Messintervalls werden die Daten der momentan wirkenden Last  $P$  von der Anzeige abgelesen oder digital aufgezeichnet. Genauso kann die Längenänderung  $\delta = L - L_0$  zwischen den Messmarken des Probekörpers entweder mit Hilfe einer Schublehre oder einem mechanischen bzw. optischen Gerät, dem *Extensometer* oder *Dehnungsmesser*, gemessen werden. Dieser Wert  $\delta$  wird dann verwendet, um die mittlere Dehnung im Probekörper zu berechnen. Manchmal wird diese Messung allerdings gar nicht durchgeführt, denn es ist auch möglich, die Dehnung *direkt* mittels eines elektrischen *Dehnungsmessstreifens* zu ermitteln, der so aussieht, wie in Abbildung 3.3 dargestellt. Die Arbeitsweise basiert auf der Änderung des elektrischen Widerstandes eines sehr dünnen Drahtes oder eines Stückchens Metallfolie, wenn diese gedehnt werden. Wichtig ist dabei, dass der Messstreifen in der maßgebenden Richtung auf dem Probekörper möglichst fest aufgeklebt wird. Wenn der Kleber im Verhältnis zum Messstreifen sehr fest ist, dann ist der Messstreifen im Prinzip integraler Bestandteil des Probekörpers, so dass der Draht des Messstreifens und der Probekörper derselben Dehnung unterliegen. Durch die Messung des elektrischen Widerstands des Drahtes kann der Messstreifen so kalibriert werden, dass die Werte für die Dehnung direkt ablesbar sind.



Elektrischer  
Dehnungsmessstreifen

Abbildung 3.3

## 3.2 Spannungs-Dehnungs-Diagramm

Aus den Daten eines Zugversuchs ist es möglich, verschiedene Werte der Spannung und der damit in Zusammenhang stehenden Dehnung in dem Probekörper zu berechnen und die Ergebnisse grafisch darzustellen. Die resultierende Kurve wird *Spannungs-Dehnungs-Diagramm* genannt. Es gibt zwei Arten, wie man es gewöhnlich darstellt.

**Konventionelles Spannungs-Dehnungs-Diagramm** Mit Hilfe der aufgezeichneten Daten können wir die *Nominalspannung* durch Division der aufgebrachten Last  $P$  durch die *ursprüngliche* Querschnittsfläche  $A_0$  bestimmen. Bei dieser Rechnung wird angenommen, dass die Spannung über dem Querschnitt und im Bereich zwischen den Messpunkten konstant ist. Wir erhalten

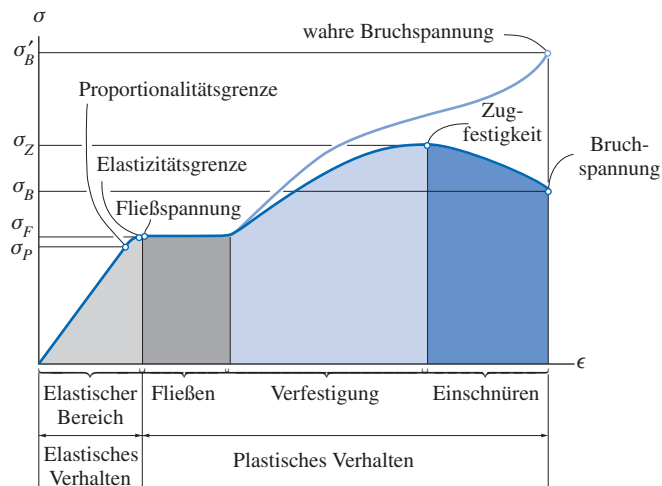
$$\sigma = \frac{P}{A_0} \quad (3.1)$$

Entsprechend wird die *Nominaldehnung* direkt aus den Messwerten des Dehnmessstreifens oder durch Division der Messlängenänderung  $\delta$  der Probe durch die Ausgangsmesslänge  $L_0$  gewonnen. Hier nimmt man an, dass die Dehnung im Bereich zwischen den Messpunkten konstant ist. Somit ist

$$\epsilon = \frac{\delta}{L_0} \quad (3.2)$$

Wenn man die korrespondierenden Werte für  $\sigma$  und  $\epsilon$  mit der Ordinate für die Spannung und der Abszisse für die Dehnung grafisch darstellt, wird die resultierende Kurve bzw. der Graph konventionelles *Spannungs-Dehnungs-Diagramm* genannt. Dieses Diagramm ist für das Ingenieurwesen von großer Bedeutung, denn es stellt ein geeignetes Hilfsmittel zur Verfügung, Daten über die Zug- oder Druckfestigkeit eines Materials *ohne* Berücksichtigung seiner Geometrie zu erhalten. Beachten Sie jedoch, dass keine zwei Spannungs-Dehnungs-Diagramme für ein einziges Material einander genau gleichen, denn die Ergebnisse sind abhängig von solchen Variablen wie Werkstoffzusammensetzung, mikroskopisch kleinen Unregelmäßigkeiten, Herstellungsmethode, Belastungsgrad, sowie der Temperatur während des Versuchszeitraumes.

Wir werden nun die Merkmale einer konventionellen Spannungs-Dehnungs-Kurve für Stahl diskutieren, einem häufig verwendeten Material zur Herstellung von Tragwerkteilen bzw. von Maschinenelementen. Unter Anwendung der oben beschriebenen Methode ist das charakteristische Spannungs-Dehnungs-Diagramm für einen Stahlprobekörper in Abbildung 3.4 dargestellt. Aus dieser Kurve können wir vier unterschiedliche Arten ablesen, wie sich das Material abhängig von der Größe der eingepprägten Dehnung verhält.



Konventionelles und wahres Spannungs-Dehnungs-Diagramm für duktiles Material (Stahl), nicht maßstabsgerecht

Abbildung 3.4

**Elastisches Verhalten.** Elastisches Verhalten eines Materials tritt auf, wenn die Dehnungen der Probe innerhalb des linken Bereichs, Abbildung 3.4, bleiben. Es ist ersichtlich, dass der Kurvenverlauf tatsächlich eine *Gerade* über fast den gesamten Bereich ist, so dass die Spannung dort *proportional* zur Dehnung ist. Mit anderen Worten, das Material ist *linear elastisch*. Die obere Spannungsgrenze für diesen linearen Zusammenhang wird Proportionalitätsgrenze  $\sigma_p$  genannt. Geht die Spannung leicht über die **Proportionalitätsgrenze** hinaus, dann reagiert das Material noch elastisch, allerdings krümmt sich die Kurve leicht und wird flacher, wie abgebildet. Das setzt sich fort, bis die Spannung die **Elastizitätsgrenze** erreicht. Bis zum Erreichen dieses Punktes geht der Probekörper wieder in seine Ausgangsform zurück, wenn die Belastung weggenommen wird. Die Elastizitätsgrenze wird für Stahl jedoch gewöhnlich selten ermittelt, denn diese befindet sich sehr nahe an der Proportionalitätsgrenze und ist deshalb eher schwer festzustellen.

**Fließen.** Eine leichte Steigerung der Spannung über die Elastizitätsgrenze hinaus führt zu Fehlern im Material und verursacht eine *bleibende Deformation*. Dieses Verhalten wird **Fließen** genannt und wird durch den zweiten schattierten Bereich der Kurve repräsentiert. Die Spannung, die das Fließen verursacht, wird **Fließgrenze** oder **Streckgrenze**  $\sigma_F$  genannt, die auftretende Deformation heißt **plastische oder bleibende Verformung**. Obwohl nicht in Abbildung 3.4 dargestellt, wird die Fließgrenze für kohlenstoffarme bzw. heiß gewalzte Stähle oft durch zwei Werte charakterisiert. Die **obere Fließgrenze** wird zuerst erreicht, gefolgt durch eine plötzliche Abnahme der Lastaufnahmekapazität bis zur **unteren Fließgrenze**. Ist dieser Punkt jedoch einmal erreicht, wird der Probekörper *ohne Erhöhung der Belastung* weiter gedehnt, siehe Abbildung 3.4. Beachten Sie, dass die Darstellung nicht maßstabsgerecht

ist. In einer realen Darstellung wären die induzierten Dehnungen aufgrund des Fließens 10- bis 40-mal größer gegenüber den erzeugten Dehnungen bis zur Elastizitätsgrenze. Dieser Zustand, in dem sich das Material dann befindet, wird als **ideal-plastisch** bezeichnet.

**Verfestigung.** Am Ende des Fließens kann die Last weiter erhöht werden. Dies führt zu einer Kurve, die beständig ansteigt, allerdings immer flacher wird, bis sie eine Maximalspannung erreicht, die als **Zugfestigkeit**  $\sigma_Z$  bezeichnet wird. Der Anstieg der Kurve in dieser Form wird Verfestigung genannt, in der Abbildung 3.4 als dritter Bereich erkennbar. Während der gesamten Versuchszeit, in der die Probe gestreckt wird, verkleinert sich die Querschnittsfläche. Diese Verkleinerung der Fläche geschieht ziemlich gleichmäßig, selbst bis zu dem Dehnungswert, der mit der Zugfestigkeit korrespondiert.

**Einschnürung.** Am Zugfestigkeitspunkt beginnt sich die Querschnittsfläche anstatt über ihre gesamte Länge in einem *lokalen* Bereich der Probe zu verkleinern. Dieses Phänomen wird durch Gleitebenen verursacht, die sich innerhalb des Materials ausbilden. Die tatsächlich erzeugten Dehnungen werden durch Schubspannungen verursacht (siehe Kapitel 10.7). Demzufolge bildet sich bei weiterer Streckung in diesem Bereich allmählich eine Einschnürung der Probe aus, siehe Abbildung 3.5a. Die kleinere Fläche kann nur eine beständig kleiner werdende Belastung aufnehmen, denn die Querschnittsfläche vermindert sich in diesem Bereich immer weiter. Somit verläuft die Kurve des Spannungs-Dehnungs-Diagramms zunehmend nach unten, bis die Probe bei der **Bruchspannung**  $\sigma_B$  bricht, siehe der ganz rechts liegende Bereich in Abbildung 3.4.

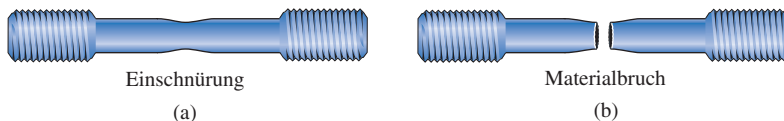


Abbildung 3.5



Typisches Einschnürmuster, das sich an diesem Stahlprobekörper kurz vor dem Bruch ausbildete.

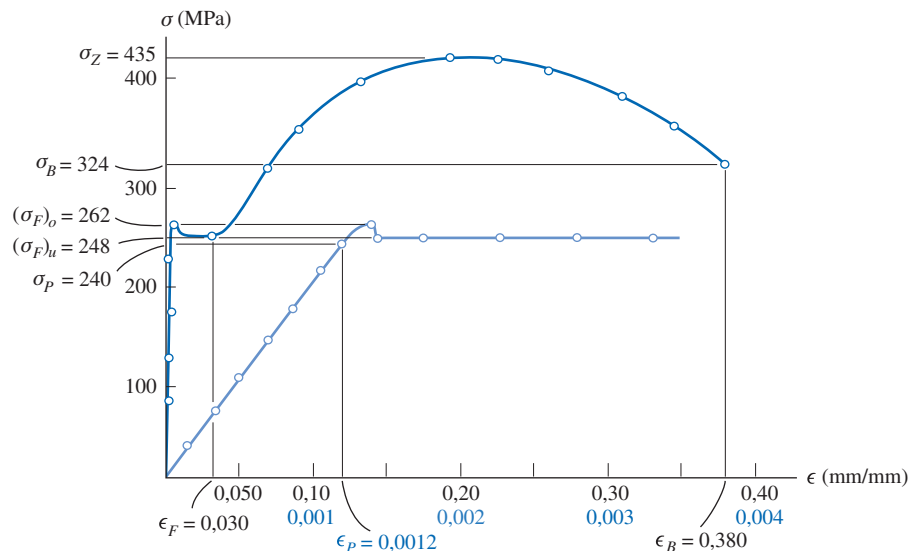
**Wahres Spannungs-Dehnungs-Diagramm** Anstatt zur Berechnung der (Bemessungs-) Spannung und Dehnung immer die *ursprüngliche* Querschnittsfläche und Länge des Probekörpers zu verwenden, hätten wir auch die *tatsächliche* Querschnittsfläche und Probekörperlänge in jedem *Messpunkt* nehmen können. Die aus diesen Messungen berechneten Werte der Spannung und Dehnung werden *wahre Spannung* und *wahre Dehnung* bezeichnet; die grafische Darstellung ihrer Abhängigkeit wird das **wahre Spannungs-Dehnungs-Diagramm** genannt. Wenn dieses Diagramm erstellt wird, hat es die in Abbildung 3.4 durch die dünnere Linie dargestellte Form. Beachten Sie, dass sowohl das konventionelle als auch das wahre  $\sigma$ - $\epsilon$ -Diagramm praktisch übereinander liegen, wenn die Dehnung klein ist. Die Unterschiede zwischen den Diagrammen werden erst im Bereich der Verfestigung sichtbar, in dem der Wert der Dehnung einen höheren Einfluss hat. Insbesondere gibt es eine starke Abweichung im Einschnür-Bereich. Hier ist aus dem konventionellen  $\sigma$ - $\epsilon$ -Diagramm erkennbar, dass die Probe *tatsächlich* eine *abnehmende Belastung* aufnimmt, denn  $A_0$  ist bei der Berechnung der Bemessungsspannung kon-



stant,  $\sigma = P/A_0$ . Wie dem wahren  $\sigma$ - $\epsilon$ -Diagramm zu entnehmen ist, nimmt die tatsächliche Fläche  $A$  innerhalb des Einschnürbereichs jedoch bis zum Bruch bei  $\sigma_B$  stärker ab als die Last, d.h. das Material erfährt eine *steigende Spannung*, denn  $\sigma = P/A$ .

Obwohl das wahre und das konventionelle Spannungs-Dehnungs-Diagramm unterschiedlich sind, erfolgt die Mehrzahl der konstruktiven Bemessungen innerhalb des elastischen Bereichs mit Hilfe des konventionellen Spannungs-Dehnungs-Diagramms, denn die Verformung des Materials ist dort im Allgemeinen nicht schwerwiegend. Vorausgesetzt, das Material ist wie die meisten Metalle „steif“, bleibt die Dehnung bis zur Elastizitätsgrenze klein. Der Fehler bei der Anwendung der konventionellen Werte von  $\sigma$  und  $\epsilon$  bleibt im Vergleich mit den wahren Werten sehr klein (ca. 0,1%). Das ist einer der Hauptgründe für die Anwendung des konventionellen Spannungs-Dehnungs-Diagramms.

Die erläuterten Konzepte können wie in Abbildung 3.6 zusammengefasst werden, die ein aktuelles konventionelles Spannungs-Dehnungs-Diagramm für eine unlegierte Stahlprobe zeigt. Zur Hervorhebung der Details wurde der elastische Bereich der Kurve in heller Farbe und in einem stark gespreizten Dehnungsmaßstab, auch in heller Farbe, dargestellt. Bei Beobachtung des Verhaltens wird unter steigender Last die Proportionalitätsgrenze bei  $\sigma_p = 240$  MPa erreicht, wobei  $\epsilon_p = 0,0012$  mm/mm ist. Diese wird gefolgt durch die obere Streckgrenze  $(\sigma_F)_o = 262$  MPa, dann unmittelbar durch die untere Streckgrenze  $(\sigma_F)_u = 248$  MPa. Das Ende des Fließens ist erreicht bei  $\epsilon_F = 0,030$  mm/mm, das ist das 25-fache der Dehnung an der Proportionalitätsgrenze! Weitergehend wird die Probe verfestigt, bis die Zugfestigkeit erreicht wird,  $\sigma_Z = 435$  MPa, dann beginnt die Einschnürphase bis zum Materialbruch bei  $\sigma_B = 324$  MPa. Die Dehnung  $\epsilon_B = 0,380$  mm/mm beim Bruch ist 317mal größer als  $\epsilon_p$ !



Spannungs-Dehnungs-Diagramm für unlegierten Stahl

Abbildung 3.6

### 3.3 Spannungs-Dehnungs-Verhalten von duktilen und spröden Materialien

Werkstoffe können abhängig von ihren Spannungs-Dehnungs-Eigenschaften entweder als duktil oder spröde klassifiziert werden.

**Zähe Materialien** Jedes Material, das vor seinem Bruch stark gedehnt werden kann, nennt man **zäh** oder **duktil**. Unlegierter Stahl ist, wie bereits erörtert, ein typisches derartiges Material. Ingenieure wählen für den Entwurf häufig duktile Werkstoffe aus, denn diese sind in der Lage, Stöße oder Energie zu absorbieren und wenn sie überlastet werden, zeigen sie gewöhnlich eine starke Deformation bevor sie endgültig versagen.

Eine Möglichkeit, die Zähigkeit eines Materials zu bestimmen, ist die Dokumentation seiner prozentualen Dehnung oder prozentualen Flächenverkleinerung zum Zeitpunkt des Bruchs. Die **prozentuale Dehnung** ist die Bruchdehnung der Probe, ausgedrückt in Prozent. Somit ergibt sich, wenn die Ausgangs-Messstreckenlänge der Probe  $L_0$  und die Länge zum Zeitpunkt des Bruchs  $L_B$  ist, die Beziehung

$$\text{prozentuale Dehnung} = \frac{L_B - L_0}{L_0} (100\%) \quad (3.3)$$

Wie in Abbildung 3.6 zu sehen, wäre dieser Wert für unlegierten Stahl 38% mit  $\epsilon_B = 0,380$ .

Die **prozentuale Verkleinerung der Fläche** ist eine andere Möglichkeit, die Duktilität zu charakterisieren. Sie ist als

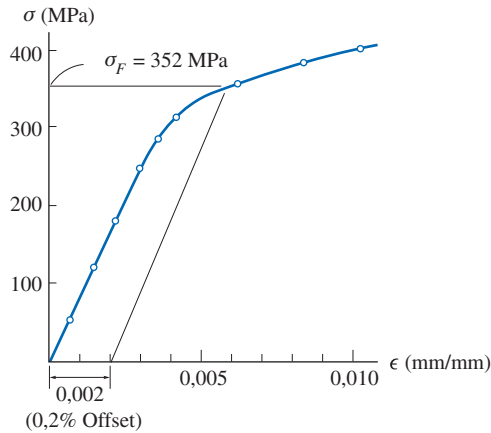
$$\text{prozentuale Flächenreduktion} = \frac{A_0 - A_B}{A_0} (100\%) \quad (3.4)$$

definiert.

Hierbei ist  $A_0$  die Ausgangs-Querschnittsfläche der Probe und  $A_B$  ist die Bruchfläche. Unlegierter Stahl hat typischerweise einen Wert von 60%.

Neben Stahl können auch andere Metalle, wie z.B. Messing, Molybdän, und Zink ähnlich duktilen Spannungs-Dehnungs-Verhalten aufweisen, wobei sie das elastische Spannungs-Dehnungs-Verhalten, Fließen bei konstanter Spannung, Verfestigung und schließlich die Einschnürungsphase bis zum Bruch durchlaufen. Allerdings tritt die Phase des ausgeprägten Fließens bei den meisten Metallen jenseits des elastischen Bereiches *nicht auf*. Ein Metall, für das dieses Verhalten zutrifft, ist Aluminium. Tatsächlich besitzt dieses Metall keine gut erkennbare Fließgrenze, und daher ist es üblich, eine **Fließfestigkeit** für Aluminium unter Nutzung einer grafischen Methode, der sog. **Offset-Methode**, festzulegen. Normalerweise wird eine 0,2%-Dehnung (0,002 mm/mm) zugrunde gelegt. Ab diesem Punkt der  $\epsilon$ -Achse wird eine Linie parallel zum linearen Kurvenverlauf des ursprünglichen Spannungs-Dehnungs-Diagramms eingezeichnet. Der Punkt, wo diese Linie die Kurve schneidet, definiert die Fließfestigkeit. Ein Beispiel dieses grafischen Verfahrens zur Bestimmung der Fließfestig-

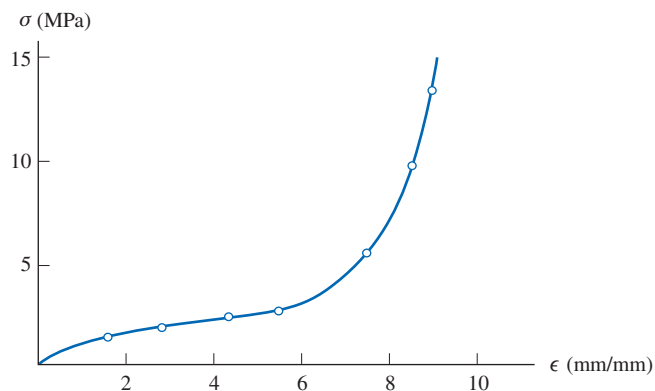
keit für eine Aluminiumlegierung zeigt Abbildung 3.7. Aus der Kurve ist zu entnehmen, dass die Fließfestigkeit  $\sigma_F = 352 \text{ MPa}$  beträgt.



Fließfestigkeit für eine Aluminiumlegierung

**Abbildung 3.7**

Beachten Sie, dass die Fließfestigkeit keine physikalische Eigenschaft des Materials ist, sondern die Spannung darstellt, die eine *festgelegte* bleibende Dehnung im Material verursacht. In diesem Lehrbuch werden wir jedoch annehmen, dass die Fließfestigkeit, die Elastizitätsgrenze und die Proportionalitätsgrenze alle *zusammenfallen*, es sei denn, dies wird ausdrücklich anders angegeben. Eine Ausnahme macht natürlicher Gummi, der tatsächlich keine Proportionalitätsgrenze aufweist, denn Spannung und Dehnung stehen in *keiner* linearen Beziehung miteinander, siehe Abbildung 3.8. Stattdessen zeigt das Material, das als Polymer bekannt ist, ein *nichtlineares elastisches Verhalten*.



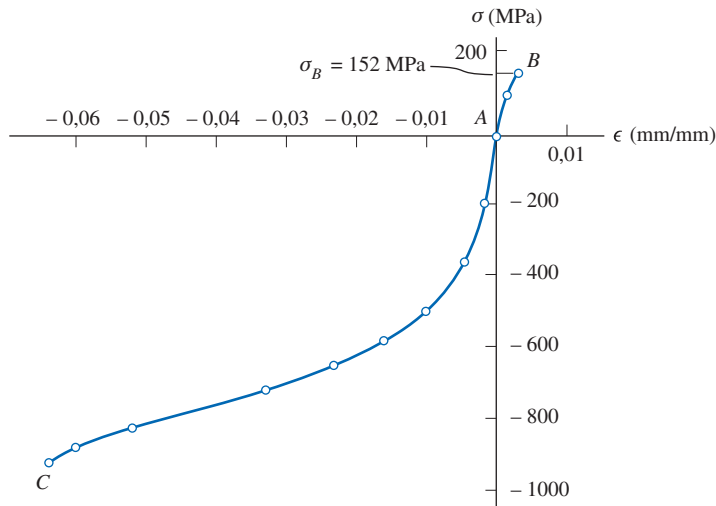
$\sigma$ - $\epsilon$ -Diagramm für Naturgummi

**Abbildung 3.8**

Holz ist ein Werkstoff, der sich häufig leicht duktil verhält, und somit wird er gewöhnlich nur für die Aufnahme von Lasten im elastischen Bereich ausgelegt. Die Festigkeitseigenschaften von Holz variieren von

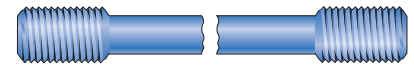
Typ zu Typ sehr stark und hängen zudem auch noch vom Feuchtigkeitsgehalt, dem Alter, der Größe und der Anordnung der Astknoten ab. Weil Holz ein Fasermaterial ist, unterscheiden sich seine Festigkeitseigenschaften sehr stark, wenn es entweder parallel oder senkrecht zur Maserung belastet wird. Besonders leicht splittert Holz, wenn es senkrecht zur Maserung auf Zug belastet wird. Deshalb belastet man Holzbauteile konsequenterweise gezielt auf Zug parallel zur Maserung.

**Spröde Materialien** Werkstoffe, die wenig oder kein Fließen vor dem Bruch aufweisen, werden als **spröde Materialien** bezeichnet. Ein Beispiel ist Grauguss, der bei Zugbeanspruchung ein Spannungs-Dehnungs-Diagramm hat, wie in Abbildung 3.9 durch den Anteil *AB* des Kurvenverlaufs dargestellt. Hier fand der Bruch bei  $\sigma_B = 152 \text{ MPa}$  statt, verursacht durch eine Störstelle oder einen mikroskopisch kleinen Riss, der sich dann sehr rasch über die gesamte Probe ausweitete, bis es zum vollständigen Bruch kam. Bei dieser Art des Versagens haben spröde Materialien demzufolge keine ausgeprägte zugverursachte Bruchspannung, denn das Auftreten der ersten Risse beginnt in der Probe eher zufällig. Dagegen kann eine mittlere Bruchspannung aus einer beobachteten Reihe von Versuchen allgemein angegeben werden. Ein typisches Versagensbild eines auf Zug beanspruchten Probekörpers stellt Abbildung 3.10a dar.



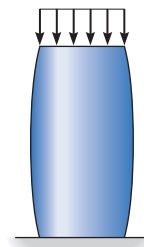
$\sigma$  -  $\epsilon$ -Diagramm für Grauguss

**Abbildung 3.9**



Versagen eines spröden Materials durch Zugbeanspruchung

(a)

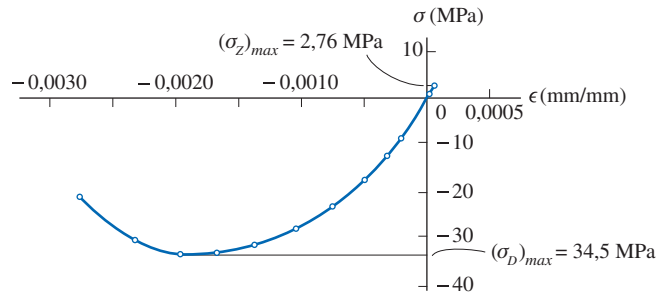


Druck verursacht ein Ausbauchen des Materials

(b)

**Abbildung 3.10**

Im Vergleich zum Verhalten bei Zugbeanspruchung zeigen spröde Materialien, wie z.B. Grauguss, einen wesentlich höheren Widerstand bei axialer Druckbeanspruchung, wie aus dem Bereich *AC* der Kurve ersichtlich ist, Abbildung 3.9. In diesem Fall neigen alle Risse oder Störstellen in der Probe dazu, sich zu schließen. Bei einer Belastungserhöhung baucht sich das Material allgemein aus und erhält bei einer Erhöhung der Dehnung das Aussehen eines Fasses, Abbildung 3.10b.



$\sigma$ - $\epsilon$ -Diagramm für eine typische Betonmischung

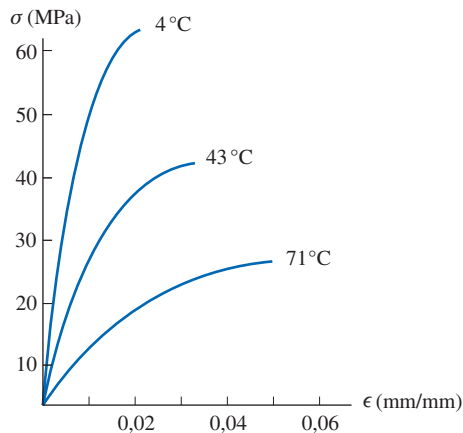
**Abbildung 3.11**

Genauso wie Grauguss wird Beton als sprödes Material klassifiziert, denn seine Festigkeit bei Zugbeanspruchung ist ebenfalls recht klein. Die charakteristischen Eigenschaften seines Spannungs-Dehnungs-Diagramms hängen hauptsächlich von der Betonmischung (Wasser, Sand, Kies, Zement), sowie von Zeit und Temperatur der Aushärtung ab. Ein typisches Beispiel eines „vollständigen“ Spannungs-Dehnungs-Diagramms für Beton zeigt Abbildung 3.11. Ersichtlich ist seine maximale Druckfestigkeit 12,5-mal größer als seine Zugfestigkeit:  $(\sigma_D)_{max} = 34,5$  MPa gegenüber  $(\sigma_Z)_{max} = 2,76$  MPa. Aus diesem Grund wird Beton bei der Auslegung zur Aufnahme von Zugspannungen fast immer mit Eisenstangen oder -stäben verstärkt.

Es kann allgemein festgehalten werden, dass die meisten Werkstoffe sowohl duktiles als auch sprödes Verhalten zeigen können. Zum Beispiel zeigt Stahl ein sprödes Verhalten, wenn er einen hohen Kohlenstoffanteil besitzt und er wird duktil, wenn der Kohlenstoffanteil niedrig ist. Zudem werden die Werkstoffe bei niedrigen Temperaturen härter und spröder, während sie bei einer Temperaturerhöhung weicher und duktiler werden. Dieser Effekt ist für einen bestimmten Kunststoff (Metacrylat) in Abbildung 3.12 dargestellt.



Stahl verliert bei Erwärmung rasch seine Festigkeit. Aus diesem Grund stellen Konstrukteure häufig die Forderung auf, dass Haupttragelemente aus Feuerschutzgründen isoliert werden.



$\sigma$ - $\epsilon$ -Diagramm für Metacrylat-Kunststoff

**Abbildung 3.12**

### 3.4 Hooke'sches Gesetz

Wie im vorigen Abschnitt erläutert, zeigen die Spannungs-Dehnungs-Diagramme für die meisten Materialien eine *lineare Abhängigkeit* zwischen Spannung und Dehnung innerhalb des elastischen Bereichs. Demzufolge verursacht eine Erhöhung der Spannung eine proportionale Steigerung der Dehnung. Diese Tatsache wurde 1676 durch Robert Hooke mit Hilfe von Federn entdeckt und ist als das *Hooke'sche* Gesetz bekannt. Das Hooke'sche Gesetz kann mathematisch wie folgt ausgedrückt werden:

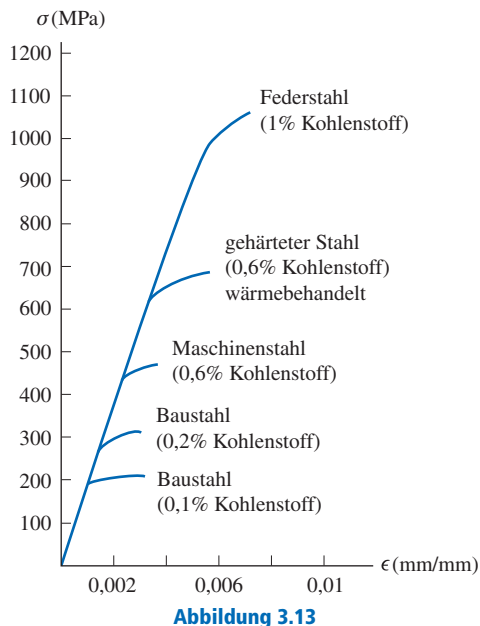
$$\sigma = E \epsilon \quad (3.5)$$

Hierbei repräsentiert  $E$  eine Proportionalitätskonstante, den **Elastizitätsmodul** (im Englischen auch **Young's Modulus** genannt, nach Thomas Young, der eine Berechnung der Konstanten 1807 veröffentlichte).

Gleichung (3.5) repräsentiert tatsächlich die Gesetzmäßigkeit des *linearen Startbereichs* des Spannungs-Dehnungs-Diagramms bis zur Proportionalitätsgrenze. Zudem repräsentiert der Elastizitätsmodul die *Steigung* der Kurve. Da die Dehnung dimensionslos ist, besitzt  $E$ , gemäß Gleichung (3.5), die Einheit einer Spannung, z.B. Pa oder N/m<sup>2</sup>. Als Berechnungsbeispiel sei hier das Spannungs-Dehnungs-Diagramm für Stahl angeführt, dargestellt in Abbildung 3.6. Hierbei sind  $\sigma_p = 240$  MPa und  $\epsilon_p = 0,0012$  mm/mm, so dass sich

$$E = \frac{\sigma_p}{\epsilon_p} = \frac{240 \text{ MPa}}{0,0012 \text{ mm/mm}} = 200 \text{ GPa}$$

ergibt.



Wie man in Abbildung 3.13 sieht, hängt die Proportionalitätsgrenze für eine spezielle Stahlsorte von deren Legierungsgehalt ab. Die meisten

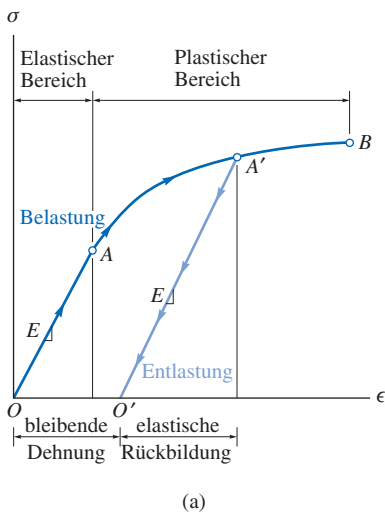
Stahlsorten, vom weichsten Walzstahl bis zum härtesten Werkzeugstahl, haben allerdings ungefähr denselben Elastizitätsmodul, allgemein angegeben mit  $E_{St} = 210 \text{ GPa}$ . Werte von  $E$  für andere Konstruktionswerkstoffe sind oft in ingenieurtechnischen Richtlinien und Nachschlagewerken tabelliert. Repräsentative Werte finden Sie auch auf der letzten Seite des Buches. Es sollte weiterhin beachtet werden, dass der Elastizitätsmodul eine mechanische Eigenschaft ist, welche die *Steifigkeit* eines Materials charakterisiert. Sehr steife Werkstoffe, wie z.B. Stahl, besitzen große  $E$ -Werte [ $E_{St} = 210 \text{ GPa}$ ], schwammige Materialien dagegen, wie z.B. Gummi, weisen niedrige Werte auf [ $E_G = 0,70 \text{ MPa}$ ].

Der Elastizitätsmodul ist eine der wichtigsten mechanischen Werkstoffgrößen, die bei der Formulierung von Gleichungen benutzt werden. Man muss sich allerdings immer bewusst sein, dass  $E$  nur dann angewendet werden kann, wenn das Material ein *linear-elastisches* Verhalten aufweist. Wenn die Spannung im Material größer als der Wert der Proportionalitätsgrenze ist, ergibt sich kein gerader Kurvenverlauf des Spannungs-Dehnungs-Diagramms mehr und Gleichung (3.5) ist nicht mehr gültig.

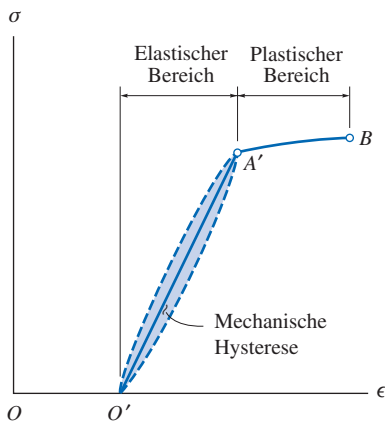
**Verfestigung** Wenn man einen Probekörper eines elastischen Materials, z.B. Stahl, bis in den *plastischen Bereich* hinein belastet und dann wieder entlastet, bildet sich die elastische Dehnung zurück, wenn das Material in seinen Gleichgewichtszustand zurückkehrt. Die plastische Dehnung bleibt jedoch erhalten und infolgedessen erfährt das Material eine bleibende Verformung. Zum Beispiel springt ein (plastisch) gebogener Draht (elastisch) etwas zurück, wenn die Belastung weggenommen wird. Er wird aber nicht vollständig in seinen Ausgangszustand zurückkehren. Dieses Verhalten kann man im Spannungs-Dehnungs-Diagramm anschaulich illustrieren, Abbildung 3.14a. Dabei wird die Probe über die Fließgrenze  $A$  hinaus bis zum Punkt  $A'$  belastet. Zur *elastischen* Streckung der Probe müssen zwischenatomare Kräfte überwunden werden. Dieselben Kräfte ziehen die Atome wieder zurück, wenn die Belastung endet, Abbildung 3.14a. Natürlich bleibt der Elastizitätsmodul  $E$  gleich groß und deshalb ist die Steigung der Strecke  $O'A'$  gleich derjenigen der Strecke  $OA$ .

Bringt man die Belastung erneut auf, dann werden die Atome in dem Material wieder soweit gegenseitig verschoben, bis das Fließen bei oder nahe von  $A'$  auftritt. Der Spannungs-Dehnungs-Verlauf setzt sich entlang derselben Route wie vorher fort, Abbildung 3.14b. Man sollte aber beachten, dass dieses neue Spannungs-Dehnungs-Diagramm, definiert durch  $O'A'B$ , jetzt eine *höhere* Fließgrenze hat ( $A'$ ), ein Ergebnis der Verfestigung. Mit anderen Worten, das Material besitzt jetzt einen größeren elastischen Bereich. Aber es ist *weniger duktil*, d.h. der plastische Bereich ist kleiner, als er im Ausgangszustand war.

In Wahrheit kann allerdings etwas Wärme oder Energie verloren gehen, wenn der Probekörper von  $A'$  ausgehend entlastet und dann wieder bis zum gleichen Spannungszustand belastet wird. Dadurch treten leicht veränderte Verformungspfade  $A'$  bis  $O'$  und  $O'$  bis  $A'$  während eines sorgfältig gemessenen Belastungszyklus auf. Diesen Sachverhalt stellen die gestrichelten Kurven in Abbildung 3.14b dar. Die gefärbte



(a)



(b)

Abbildung 3.14

Fläche zwischen den Kurven repräsentiert die Verlustenergie und wird **mechanische Hysterese** genannt. Sie ist immer dann wichtig, wenn Materialien ausgewählt worden sind, die als Dämpfer für vibrierende Tragwerkskomponenten oder mechanische Geräte dienen sollen, obwohl diese Effekte im weiteren nicht betrachtet werden.

### 3.5 Formänderungsenergie

Wird ein Werkstoff durch eine äußere Belastung verformt, dann neigt er dazu, *im Inneren* über das gesamte Volumen Energie zu speichern. Diese Energie steht mit der Dehnung in Beziehung und wird deshalb als **Formänderungsenergie** bezeichnet. Wenn zum Beispiel auf eine Zugversuchsprobe eine axiale Belastung einwirkt, dann herrscht in einem Volumenelement ein einachsiger Spannungszustand. Wird die Unterseite des Elements festgehalten und die Oberseite um  $\epsilon \Delta z$  nach oben verschoben, ergeben die Spannungen an Ober- und Unterseite jeweils eine Kraft  $\Delta N = \sigma \Delta A = \sigma (\Delta x \Delta y)$ . Per Definition wird die *Arbeit* aus dem Produkt von Kraft und Verschiebungsweg in Richtung der Kraft bestimmt. Die an dem Element durch die Kraft verrichtete Arbeit ist gleich der mittleren Größe der Kraft ( $\Delta F/2$ ) mal der Verschiebung  $\epsilon \Delta z$ , denn die Kraft steigt sich gleichmäßig von null bis zum Endwert  $\Delta F$ , wenn die Verschiebung  $\epsilon \Delta z$  erreicht ist. Diese „äußere Arbeit“ ist unter der Annahme, dass keine Energie in Form von Wärme verloren geht, gleich der „inneren Arbeit“ oder Formänderungsenergie, die in dem Element gespeichert wird. Somit ist die Formänderungsenergie  $\Delta U = (\Delta F/2) \epsilon \Delta z = (\sigma \Delta x \Delta y/2) \epsilon \Delta z$ . Weil das Volumen des Elements  $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$  ist, beträgt  $\Delta U = \sigma \epsilon \Delta V/2$ .

Es ist manchmal hilfreich, die Formänderungsenergie pro Volumeneinheit des Materials zu formulieren. Sie wird **Formänderungsenergie-dichte** genannt und kann als

$$u = \frac{\Delta U}{\Delta V} = \frac{1}{2} \sigma \epsilon \quad (3.6)$$

ausgedrückt werden.

Im Si-System ist die Einheit Joule pro Kubikmeter ( $\text{J}/\text{m}^3$ ). Da *linear elastisches* Verhalten vorausgesetzt wurde, gilt mit dem Hooke'schen Gesetz  $\sigma = E\epsilon$ . Damit können wir die Formänderungsenergie über die Spannung gemäß

$$u = \frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{E} \quad (3.7)$$

ausdrücken.

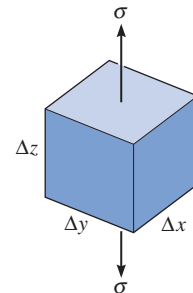


Abbildung 3.15



**Spezifische Verformungsarbeit bis zur Proportionalitätsgrenze** Für den besonderen Fall, dass die Spannung die Proportionalitätsgrenze erreicht, wird die Formänderungsenergie-dichte, wie in den Gleichungen (3.6) oder (3.7) berechnet, **spezifische Formänderungsenergie bis zur Proportionalitätsgrenze** genannt:

$$u_E = \frac{1}{2} \sigma_p \epsilon_p = \frac{1}{2} \frac{\sigma_p^2}{E} \quad (3.8)$$

Achten Sie in der Darstellung des Spannungs-Dehnungs-Diagramms, Abbildung 3.16a, darauf, dass  $u_E$  der gekennzeichneten *Dreiecksfläche* unter der Kurve entspricht. Physikalisch bedeutet die spezifische Formänderungsarbeit die Fähigkeit eines Werkstoffes, Energie ohne dauernden Schaden zu speichern.

**Spezifische Bruchenergie** Eine weitere wichtige Eigenschaft eines Materials ist seine Bruchenergie  $u_B$ . Diese Größe repräsentiert die gesamte Fläche unter der Kurve des Spannungs-Dehnungs-Diagramms, Abbildung 3.16b und repräsentiert somit die Formänderungsenergie-dichte des Materials unmittelbar, bevor es bricht. Diese Eigenschaft wird relevant, wenn man Bauteile auslegt, die spontan und zufällig überlastet werden. Materialien mit einer hohen spezifischen Bruchenergie verformen sich aufgrund einer Überlastung sehr stark. Allerdings sind diese Betrachtungen den Materialien mit einem niedrigen Wert von  $u_B$  vorzuziehen, denn diese Materialien können ohne Vorwarnung plötzlich versagen. Metalllegierungen können ihre Bruchenergie auch ändern. Beispielsweise zeigen die Spannungs-Dehnungs-Diagramme in Abbildung 3.17, wie sich durch Änderung des Kohlenstoffgehaltes in Stahl der Wert der beiden Kenngrößen ändern kann.

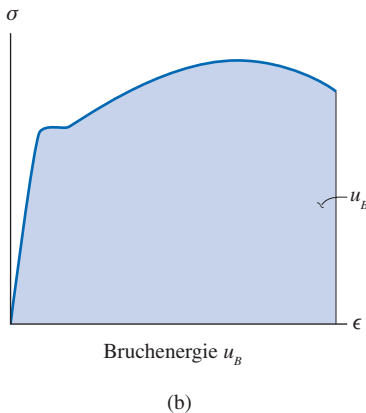
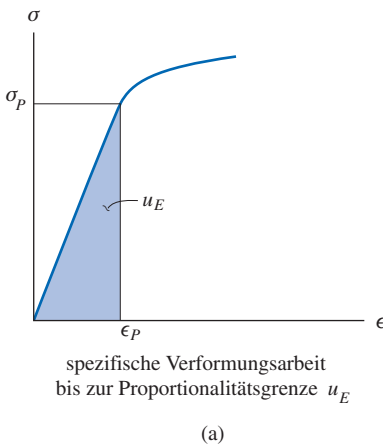


Abbildung 3.16

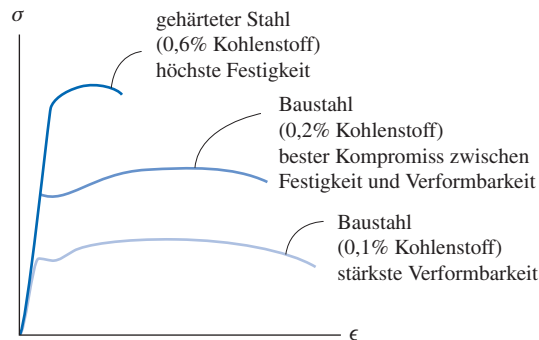
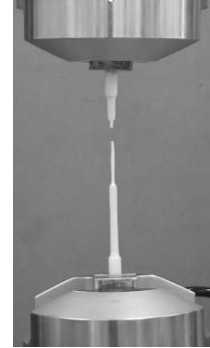


Abbildung 3.17

## Wichtige Punkte

- Das *konventionelle Spannungs-Dehnungs-Diagramm* ist im Ingenieurwesen wichtig, denn es stellt ein Hilfsmittel zur Verfügung, Daten über die Zug- bzw. Druckfestigkeit eines Materials zu erhalten, ohne dessen physikalische Größe oder Form zu berücksichtigen.
- Die *konventionellen Spannungen und Dehnungen* werden mit Hilfe der Ausgangsquerschnittsfläche und der ursprünglichen Messlänge der Probe berechnet.
- Ein zähes Material, wie zum Beispiel unlegierter Stahl, zeigt vier unterscheidbare Muster von Belastungsverhalten und zwar: *elastisches Verhalten, Fließen, Verfestigung und Einschnüren*.
- Ein Material ist *linear elastisch*, wenn die Spannung direkt proportional zur Dehnung innerhalb des elastischen Bereiches ist. Dies wird *Hooke'sches Gesetz* genannt; die Steigung der Kurve wird *Elastizitätsmodul  $E$*  bezeichnet.
- Wichtige Punkte auf der Kurve des Spannungs-Dehnungs-Diagramms sind die *Proportionalitätsgrenze, die Elastizitätsgrenze, die Fließ- bzw. Streckgrenze, die Zugfestigkeit* und die *Bruchspannung*.
- Die *Duktilität* eines Materials kann durch die *prozentuale Dehnung* oder die *prozentuale Flächenverkleinerung* des Probekörpers festgelegt werden.
- Besitzt ein Material keinen eindeutigen Fließpunkt, dann kann man eine *Fließfestigkeit* mit Hilfe einer grafischen Methode, der sog. *Offset-Methode*, festlegen.
- *Spröde Materialien*, wie z.B. Grauguss, zeigen ein sehr geringes oder gar kein Fließverhalten und zerbrechen abrupt.
- Die *Verfestigung* wird ausgenutzt, um einen höheren Fließpunkt für ein Material zu erhalten. Dies wird erreicht, indem man ein Material über die elastische Grenze hinaus dehnt und danach das Material entlastet. Der Elastizitätsmodul bleibt gleich, allerdings *vermindert sich* die Duktilität des Materials.
- Die *Formänderungsenergie* ist eine Energieform, die in einem Material aufgrund von Deformationen gespeichert wird. Die entsprechende Energie pro Volumeneinheit wird mit *Formänderungsenergie-dichte* bezeichnet. Bei der Messung bis zur Proportionalitätsgrenze bezieht man sich auf die so genannte *elastische Formänderungsenergie*, bei der Messung bis zur Bruchgrenze auf die *spezifische Bruchenergie*.



Diese Probe aus Nylon zeigt einen hohen Grad an Zähigkeit, wie man an der starken Einschnürung erkennen kann, die kurz vor dem Zerreißen auftrat.

## Beispiel 3.1



Ein Zugversuch für eine Stahlegierung ergibt das in Abbildung 3.18 dargestellte Spannungs-Dehnungs-Diagramm. Bestimmen Sie den Elastizitätsmodul und die Fließfestigkeit bei einer bleibenden Dehnung von 0,2%. Ermitteln Sie in der grafischen Darstellung die Zugfestigkeit und die Bruchspannung.

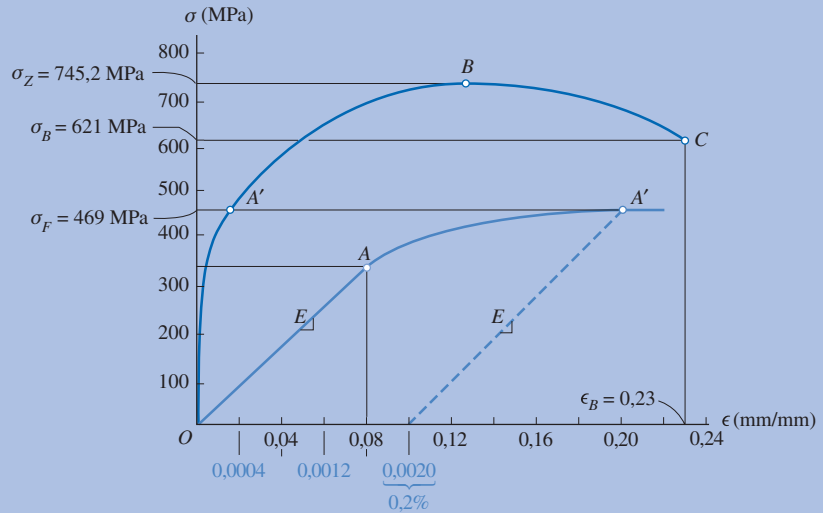


Abbildung 3.18

## Lösung

**Elastizitätsmodul** Wir müssen die *Steigung* des anfänglichen, linearen Verlaufs der Kurve berechnen. Mit Hilfe der vergrößerten, farblichen Darstellung der Kurve und des Maßstabs erstreckt sich diese Linie von Punkt  $O$  bis zu dem geschätzten Punkt  $A$ , der näherungsweise die Koordinaten  $(0,0016 \text{ mm/mm}; 345 \text{ MPa})$  besitzt. Demzufolge ist

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon} = \frac{345 \text{ MPa}}{0,0016 \text{ mm/mm}} = 215 \text{ GPa}$$

Beachten Sie, dass die Funktion der Geraden  $OA$  somit  $\sigma = 215(10^9) \text{ Pa } \epsilon$  ist.

**Fließfestigkeit** Für eine bleibende Dehnung von 0,2% beginnen wir bei einer Dehnung von 0,2% oder  $0,0020 \text{ mm/mm}$  und verlängern grafisch eine (gestrichelte) Linie parallel zu  $OA$ , bis sie die  $\sigma$ - $\epsilon$ -Kurve bei  $A'$  schneidet. Die Fließfestigkeit ist ungefähr

$$\sigma_F = 469 \text{ MPa}$$

**Zugfestigkeit** Diese ist durch den höchsten Punkt der  $\sigma$ - $\epsilon$ -Kurve, Punkt  $B$  in Abbildung 3.18, definiert:

$$\sigma_Z = 745,2 \text{ MPa}$$

**Bruchspannung** Wenn man den Probekörper bis zum Maximum von  $\epsilon_B = 0,23 \text{ mm/mm}$  dehnt, dann bricht er am Punkt  $C$ . Somit ist

$$\sigma_B = 621 \text{ MPa.}$$

**Beispiel 3.2**

Das Spannungs-Dehnungs-Diagramm für eine Aluminiumlegierung, die zur Herstellung von Flugzeugteilen verwendet wird, ist in Abbildung 3.19 dargestellt. Bestimmen Sie die in der Probe auftretende bleibende Dehnung bei Entlastung, wenn diese Probe einer Spannung  $\sigma_B$  ausgesetzt wird. Bestimmen Sie auch die spezifische Formänderungsenergie vor und nach Einwirken der Belastung.

$$\sigma_A = 450 \text{ MPa}, \sigma_B = 600 \text{ MPa}, \epsilon_A = 0,006 \text{ mm/mm}, \epsilon_{OD} = 0,023 \text{ mm/mm}$$

**Lösung**

**Bleibende Dehnung** Wird die Probe der Belastung ausgesetzt, dann wird sie bis zum Punkt  $B$  auf dem  $\sigma$ - $\epsilon$ -Diagramm verfestigt, Abbildung 3.19. Die Dehnung beträgt in diesem Punkt  $\epsilon_{OD} \approx 0,023 \text{ mm/mm}$ . Bei Entlastung verhält sich das Material gemäß dem Verlauf der geraden Linie  $BC$ , parallel zu  $OA$ . Weil beide Geraden die gleiche Steigung haben, kann die Dehnung im Punkt  $C$  analytisch bestimmt werden. Die Steigung der Geraden  $OA$  ist der Elastizitätsmodul, d.h.

$$E = \frac{\sigma_A}{\epsilon_A} = \frac{450 \text{ MPa}}{0,006 \text{ mm/mm}} = 75,0 \text{ GPa}$$

Aus dem Dreieck  $CBD$  erhalten wir

$$E = \frac{\sigma_B}{\epsilon_{CD}} \quad \epsilon_{CD} = \frac{\sigma_B}{E} = \frac{600(10^6) \text{ Pa}}{75(10^9) \text{ Pa}} = 0,008 \text{ mm/mm}$$

Diese Dehnung repräsentiert den Betrag der zurück gewonnenen elastischen Dehnung. Die bleibende Dehnung,  $\epsilon_{OC}$  ist demzufolge

$$\epsilon_{OC} = \epsilon_{OD} - \epsilon_{CD} = 0,023 \text{ mm/mm} - 0,008 \text{ mm/mm} = 0,015 \text{ mm/mm}$$

*Hinweis:* Wenn die Messmarken im Ausgangszustand 50 mm auseinander waren, dann haben diese Markierungen *nach der Entlastung* einen Abstand von  $50 \text{ mm} + (0,015)(50 \text{ mm}) = 50,75 \text{ mm}$ .

**Spezifische Formänderungsenergie bis zur Proportionalitätsgrenze**

Durch Anwendung der Gleichung (3.8) erhalten wir<sup>1</sup>

$$\begin{aligned} (u_E)_{\text{Start}} &= \frac{1}{2} \sigma_{P1} \epsilon_{P1} = \frac{1}{2} \sigma_A \epsilon_A = \frac{1}{2} (450 \text{ MPa}) (0,006 \text{ mm/mm}) \\ &= 1,35 \text{ MJ/m}^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (u_E)_{\text{Ende}} &= \frac{1}{2} \sigma_{P2} \epsilon_{P2} = \frac{1}{2} \sigma_B \epsilon_{CD} = \frac{1}{2} (600 \text{ MPa}) (0,008 \text{ mm/mm}) \\ &= 2,40 \text{ MJ/m}^3 \end{aligned}$$

Im Vergleich hat der Effekt der Verfestigung des Materials eine Erhöhung der spezifischen Formänderungsenergie verursacht. Beachten Sie jedoch, dass die spezifische Zähigkeitsenergie für das Material vermindert wurde, denn die Fläche unterhalb der Ausgangskurve  $OABF$  ist größer als die Fläche unter der Kurve  $CBF$ .

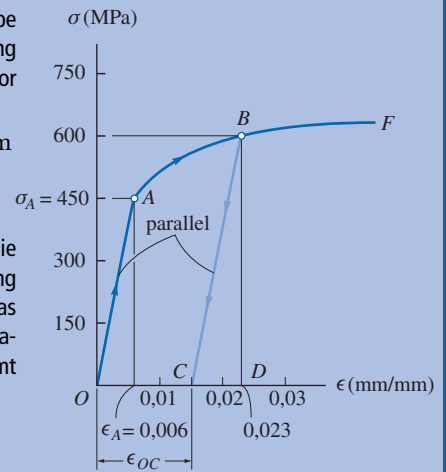


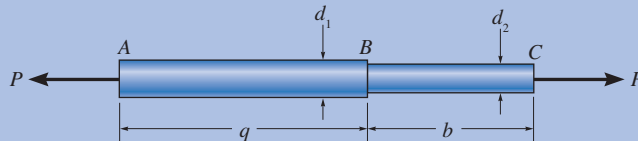
Abbildung 3.19

<sup>1</sup> Die Arbeit wird im SI-System in Joule angegeben, wobei  $1 \text{ J} = 1 \text{ Nm}$  ist.

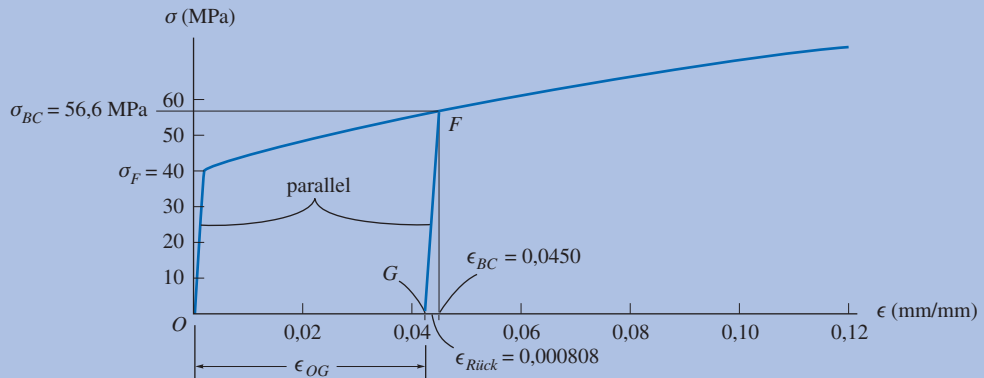
## Beispiel 3.3

Eine Aluminiumwelle, dargestellt in Abbildung 3.20a, hat einen kreisförmigen Querschnitt und ist einer axialen Last  $P$  ausgesetzt. Bestimmen Sie näherungsweise die Verlängerung der Welle unter Verwendung des Spannungs-Dehnungs-Diagramms in Abbildung 3.20b, wenn die Last aufgebracht wird. Wie groß ist die bleibende Dehnung der Welle nach der Entlastung?

$P = 10 \text{ kN}$ ,  $E_{Al} = 70 \text{ GPa}$ ,  $a = 600 \text{ mm}$ ,  $b = 400 \text{ mm}$ ,  $d_1 = 20 \text{ mm}$ ,  $d_2 = 15 \text{ mm}$



(a)



(b)

Abbildung 3.20

## Lösung

Für die Berechnung werden wir die lokalen Deformationen am Punkt des Lastangriffs vernachlässigen, gleichfalls dort, wo die Querschnittsflächen der Welle sich plötzlich ändern (diese Effekte werden in den *Abschnitten 4.1 und 4.7* diskutiert). Über den mittleren Bereich beider Segmente sind die Normalspannung und die Dehnung gleichmäßig. Für die Verformungsanalyse der Welle müssen wir die Dehnung ermitteln. Dies geschieht zuerst durch die Berechnung der Spannung, danach nutzen wir das Spannungs-Dehnungs-Diagramm, um die Dehnung zu erhalten. Die Normalspannung innerhalb eines jeden Segmentes ist

$$\sigma_{AB} = \frac{P}{A_1} = \frac{4P}{\pi d_1^2} = \frac{4 \cdot 10(10^3) \text{ N}}{\pi (0,02 \text{ m})^2} = 31,83 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{BC} = \frac{P}{A_2} = \frac{4P}{\pi d_2^2} = \frac{4 \cdot 10(10^3) \text{ N}}{\pi (0,015 \text{ m})^2} = 56,59 \text{ MPa}$$

Aus dem Spannungs-Dehnungs-Diagramm kann man entnehmen, dass das Material im Bereich  $AB$  elastisch gedehnt wird, denn  $\sigma_F = 40 \text{ MPa} > \sigma_{AB} = 31,83 \text{ MPa}$ . Mit Hilfe des Hooke'schen Gesetzes ist

$$\epsilon_{AB} = \frac{\sigma_{AB}}{E_{Al}} = \frac{31,83(10^6 \text{ Pa})}{70(10^9 \text{ Pa})} = 0,0004547 \text{ mm/mm}$$

Das Material wird innerhalb des Bereichs  $BC$  plastisch gedehnt, denn  $\sigma_F = 40 \text{ MPa} < 56,59 \text{ MPa}$ . Aus der Kurve kann man sehen, dass sich für  $\sigma_{BC} = 56,59 \text{ MPa}$  eine Dehnung

$$\epsilon_{BC} = 0,0450 \text{ mm/mm}$$

ergibt.

Die Verlängerung der Welle ist demzufolge näherungsweise

$$\delta = \sum \epsilon L = \epsilon_{AB} a + \epsilon_{BC} b$$

$$\delta = 0,0004547 (600 \text{ mm}) + 0,045 (400 \text{ mm}) = 18,3 \text{ mm}$$

Bei Wegnahme der Last  $P$  erreicht das Segment  $AB$  wieder seine ursprüngliche Länge. Warum? Andererseits wird sich das Material im Segment  $BC$  entlang der Strecke  $FG$  elastisch entspannen, Abbildung 3.20b. Da die Steigung von  $FG$  unverändert  $E_{Al}$  ist, wird die elastische Dehnungsreduktion

$$\epsilon_{Rück} = \frac{\sigma_{BC}}{E_{Al}} = \frac{56,59(10^6) \text{ Pa}}{70(10^9) \text{ Pa}} = 0,000808 \text{ mm/mm}$$

Die bleibende plastische Dehnung in Segment  $BC$  ist dann

$$\epsilon_{OG} = \epsilon_{BC} - \epsilon_{Rück} = 0,0450 \text{ mm/mm} - 0,000808 \text{ mm/mm}$$

$$\epsilon_{OG} = 0,0442 \text{ mm/mm}$$

Deshalb bleibt die Welle bei der Entlastung um den Betrag

$$\delta' = \epsilon_{OG} b = 0,0442 (400 \text{ mm}) = 17,7 \text{ mm}$$

verlängert.

### 3.6 Querkontraktionszahl

Wenn auf einen Körper eine axiale Zugkraft wirkt, dann verlängert er sich nicht nur, sondern er wird in Querrichtung außerdem dünner. Man kann zum Beispiel bei der Verlängerung eines Gummibandes feststellen, dass sich sowohl die Dicke als auch die Breite des Bandes vermindern. In gleicher Weise verursachen am Körper wirkende Druckkräfte eine Verkürzung in Richtung der Kraftwirkung, quer dazu jedoch eine Ausdehnung. Diese zwei Fälle sind in Abbildung 3.21 für einen Stab mit dem Ausgangsradius  $r$  und der Länge  $L$  illustriert.

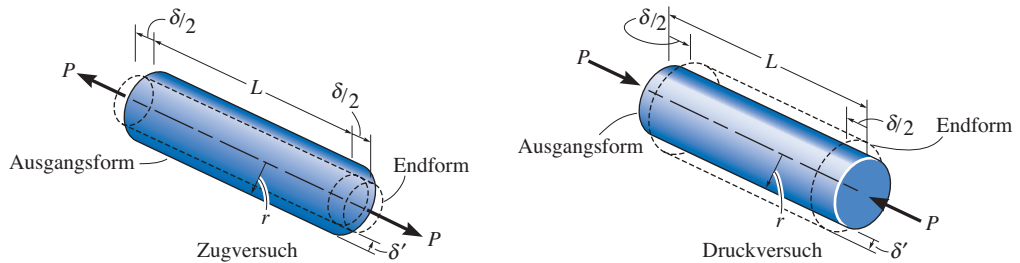


Abbildung 3.21

Wird der Stab durch die Kraft  $P$  belastet, dann ändert sich seine Länge um den Betrag  $\delta$  und sein Radius um  $\delta'$ . Die Dehnungen in Längs- bzw. axialer Richtung, sowie in Quer- bzw. radialer Richtung sind wie folgt definiert:

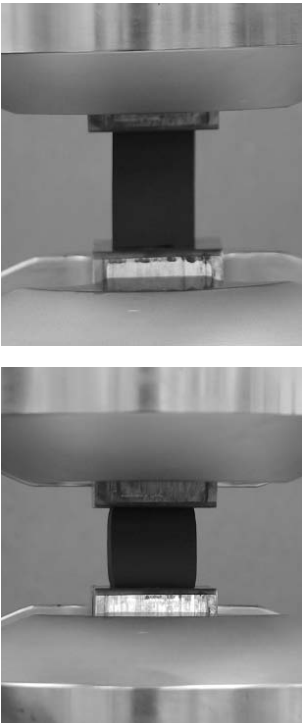
$$\epsilon_{axial} = \frac{\delta}{L} \quad \text{und} \quad \epsilon_{radial} = \frac{\delta'}{r}$$

Im frühen 19. Jahrhundert erkannte der französische Wissenschaftler S.D. Poisson, dass innerhalb des *elastischen Bereichs* das Verhältnis dieser beiden Dehnungen eine *Konstante* ergibt, denn die Deformationen  $\delta$  und  $\delta'$  verhalten sich proportional. Diese Konstante wird  $\nu$  genannt. Ihr numerischer Wert ist für ein bestimmtes Material eindeutig, wenn es sowohl *homogen* als auch *isotrop* ist. Mathematisch ausgedrückt gilt

$$\nu = -\frac{\epsilon_{radial}}{\epsilon_{axial}} \quad (3.9)$$

Das negative Vorzeichen bedeutet, dass eine Verlängerung (positive Dehnung) eine Querkontraktion (negative Dehnung) und umgekehrt verursacht. Beachten Sie, dass die Querdehnung für ein isotropes Material in allen Quer- (bzw. radialen) Richtungen *gleich* ist. Zudem wird diese Dehnung nur durch eine Längs- bzw. Axialkraft verursacht, d.h. diese Dehnung liegt vor, obwohl keine Kraft oder Spannung in Querrichtung wirkt, um das Material in dieser Richtung zu dehnen.

Die Querkontraktionszahl ist dimensionslos; für die meisten nicht porösen Festkörper liegt dieser Wert im Allgemeinen zwischen  $1/3$  und  $1/4$ . Typische Werte für  $\nu$  sind für gebräuchliche Werkstoffe auf der letzten Seite des Buches aufgelistet. Ein idealer Werkstoff, der bei Längenänderung keine Querdehnung aufweist, besitzt eine Querkontraktionszahl  $\nu = 0$ .



Bei Stauchung dieses zylindrischen Gummiblocks (negative Dehnung) vergrößert sich der Durchmesser (positive Dehnung). Das Verhältnis beider Dehnungen ist konstant.

Weiterhin werden wir in *Abschnitt 10.6* sehen, dass der maximal mögliche Wert für die Querkontraktionszahl 0,5 ist. Deshalb gilt  $0 \leq \nu \leq 0,5$ .

### Beispiel 3.4

Ein Stab aus Stahl hat die in *Abbildung 3.22* dargestellten Abmessungen. Bestimmen Sie die Längenänderung und die Änderungen der Abmessungen des Querschnitts, wenn die

Axialkraft  $P$  auf den Stab wirkt.

$a = 1,5 \text{ m}$ ,  $b = 100 \text{ mm}$ ,  $c = 50 \text{ mm}$ ,  $P = 80 \text{ kN}$

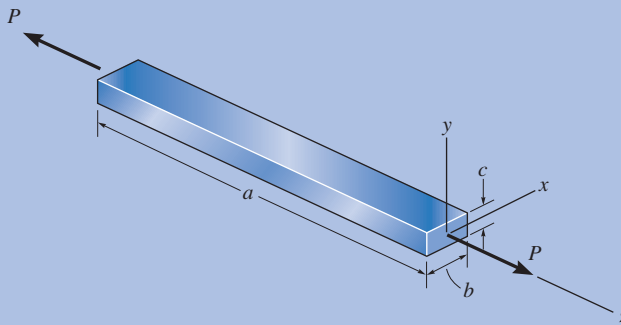


Abbildung 3.22

### Lösung

Die Normalspannung im Stab ist

$$\sigma_z = \frac{P}{A} = \frac{P}{bc} = \frac{80(10^3)\text{N}}{(0,1\text{m})(0,05\text{m})} = 16,0(10^6)\text{Pa}$$

Aus der Tabelle der letzten Buchseite entnehmen wir für Stahl  $E_{St} = 200 \text{ GPa}$ . Damit ist die Dehnung in  $z$ -Richtung

$$\epsilon_z = \frac{\sigma_z}{E_{St}} = \frac{16,0(10^6)\text{Pa}}{200(10^9)\text{Pa}} = 80(10^{-6})\text{ mm/mm}$$

Die Verlängerung des Stabes ist demzufolge

$$\delta_z = \epsilon_z a = [80(10^{-6})](1,5\text{ m}) = 120\text{ }\mu\text{m}$$

Bei Verwendung der Gleichung (3.9) ergeben sich die Querkontraktionen sowohl in  $x$ - als auch in  $y$ -Richtung (mit  $\nu_{St} = 0,32$  – zu finden auf der letzten Buchseite) zu

$$\epsilon_x = \epsilon_y = -\nu_{St} \epsilon_z = -0,32[80(10^{-6})] = -25,6\text{ }\mu\text{m/m}$$

Somit sind die Änderungen der Querschnittsabmessungen

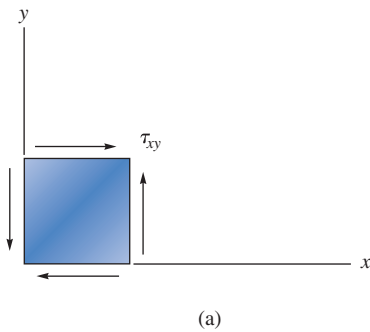
$$\delta_x = \epsilon_x b = -[25,6(10^{-6})](0,1\text{ m}) = -2,56\text{ }\mu\text{m}$$

$$\delta_y = \epsilon_y c = -[25,6(10^{-6})](0,05\text{ m}) = -1,28\text{ }\mu\text{m}$$

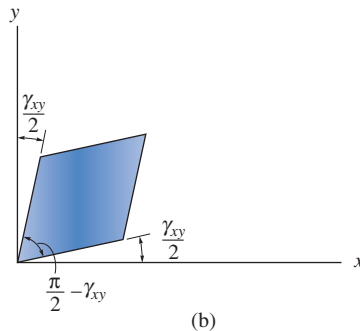


### 3.7 Schubspannungs-Gleitungs-Diagramm

In *Abschnitt 1.5* wurde gezeigt, dass für ein Element eines Materials, das einer *reinen Schubspannung* unterliegt, das Gleichgewicht verlangt, dass gleich große Schubspannungen an den vier Seiten des Elements auftreten müssen. Diese Spannungen müssen entweder zu den diagonal gegenüberliegenden Ecken hin oder davon weggerichtet sein, *Abbildung 3.23a*. Bei einem *homogenen* und *isotropen* Material deformiert zudem die Schubspannung das Element gleichmäßig, *Abbildung 3.23b*. Wie in *Abschnitt 2.2* bereits erwähnt, gibt die Gleitung  $\gamma_{xy}$  die Winkelverformung des Elements in Relation zur Ausgangsposition der Seiten entlang der  $x$ - und  $y$ -Achsen an.



(a)



(b)

Abbildung 3.23

Ein einer Schubspannung unterworfenen Material kann in einem Labor untersucht werden, indem man Probekörper in Form dünner, zylindrischer Rohre verwendet und diese einer Torsionsbeanspruchung aussetzt. Wenn das angreifende Moment und der resultierende Verdrehwinkel gemessen werden, dann können die Daten mit Methoden, die wir in Kapitel 5 noch erläutern, zur Bestimmung der Schubspannung und der Gleitung verwendet, sowie ein Schubspannungs-Gleitungs-Diagramm gezeichnet werden. Ein Beispiel eines derartigen Diagramms ist für ein duktiles Material in *Abbildung 3.24* dargestellt.

Wie beim Zugversuch zeigt das durch eine Schubspannung belastete Material ein linear-elastisches Verhalten und es besitzt eine definierte *Proportionalitätsgrenze*  $\tau_p$ . Genauso tritt eine Verfestigung auf, bis die maximale Schubspannung  $\tau_{max}$  erreicht wird. Und schließlich beginnt das Material seine Schubfestigkeit zu verlieren, bis es einen Punkt erreicht, wo es bricht,  $\tau_B$ .

Für die meisten Konstruktionswerkstoffe wie das gerade beschriebene Material ist das elastische Verhalten linear, und deshalb kann das Hooke'sche Gesetz für Schub als

$$\tau = G\gamma \quad (3.10)$$

angeschrieben werden.

Hierbei wird  $G$  als **Schubmodul** oder **Gleitmodul** bezeichnet. Sein Wert kann als Steigung der anfänglichen Gerade des  $\tau$ - $\gamma$ -Diagramms angegeben werden, d.h.  $G = \tau_p / \gamma_p$ . Typische Werte für gebräuchliche Werkstoffe sind auf der letzten Seite des Buches angegeben. Beachten Sie, dass die Maßeinheiten für  $G$  *gleich* denen für  $E$  sind (z.B. Pa), denn der Gleitwinkel  $\gamma$  wird in der dimensionslosen Einheit Radiant gemessen.

In *Abschnitt 10.6* wird gezeigt, dass die drei Materialkonstanten  $E$ ,  $\nu$  und  $G$  nicht unabhängig von einander sind und über die Gleichung

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (3.11)$$

in Beziehung stehen.

Vorausgesetzt  $E$  und  $G$  sind bekannt, dann kann der Wert von  $\nu$  eher über diese Gleichung als durch experimentelle Messung bestimmt werden. Beispielsweise ist für den Fall von Stahl  $E_{St} = 200$  GPa und  $G_{St} = 76$  GPa und damit ist aus Gleichung (3.11)  $\nu_{St} = 0,32$ .

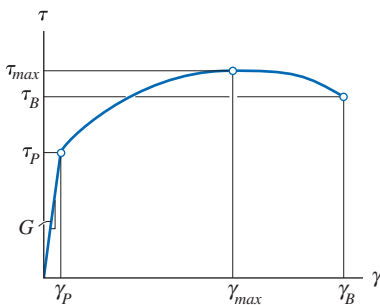


Abbildung 3.24

**Beispiel 3.5**

Ein Probekörper aus Titan wird auf Torsion untersucht; das dazugehörige Schubspannungs-Gleitungs-Diagramm ist in Abbildung 3.25a dargestellt. Bestimmen Sie den Schubmodul  $G$ , die Proportionalitätsgrenze und die maximale Schubspannung. Bestimmen Sie auch die maximale Strecke  $d$ , um welche die Oberseite des Blocks aus gleichem Material, Abbildung 3.25b, horizontal verschoben werden kann, damit es sich bei Einwirkung der Querkraft  $Q$  elastisch verhält. Welchen Wert muss  $Q$  annehmen, damit diese Verschiebung verursacht wird?

$a = 100 \text{ mm}$ ,  $b = 75 \text{ mm}$ ,  $c = 50 \text{ mm}$ ,  $\tau_p = 360 \text{ MPa}$ ,  $\gamma_p = 0,008 \text{ rad}$

**Lösung**

**Schubmodul** Dieser Wert stellt die Steigung der Geraden  $OA$  des  $\tau$ - $\gamma$ -Diagramms dar. Die Koordinaten von Punkt  $A$  sind  $(\tau_p, \gamma_p)$ . Somit ist

$$G = \frac{\tau_p}{\gamma_p} = \frac{360 \text{ MPa}}{0,008 \text{ rad}} = 45(10^9) \text{ MPa}$$

Die lineare Funktion der Strecke  $OA$  ist demzufolge  $\tau = 45(10^9) \text{ Pa } \gamma$ , was gleichzeitig das Hooke'sche Gesetz für Schub darstellt.

**Proportionalitätsgrenze** Die Kontrolle ergibt, dass der geradlinige Verlauf der Kurve bei Punkt  $A$  aufhört. Somit ist

$$\tau_p = 360 \text{ MPa}$$

**Maximale Schubspannung** Dieser Wert gibt die maximale Schubspannung bei Punkt  $B$  an. Aus der Kurve ist

$$\tau_{max} = 504 \text{ MPa}$$

abzulesen.

**Maximale elastische Verschiebung und Querkraft** Aufgrund der maximalen elastischen Gleitung von  $\gamma_p = 0,008 \text{ rad}$  (ein sehr kleiner Winkel) wird die Oberseite des Blocks, Abbildung 3.25b, horizontal verschoben:

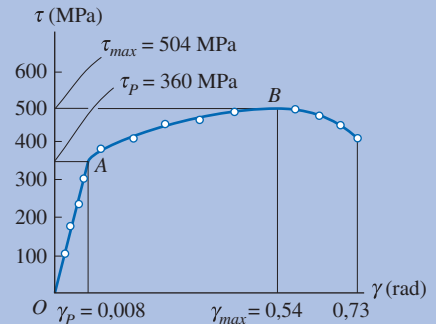
$$\tan \gamma_p \approx \gamma_p = \frac{d}{c}$$

$$d = c \gamma_p = (50 \text{ mm})(0,008 \text{ rad}) = 0,4 \text{ mm}$$

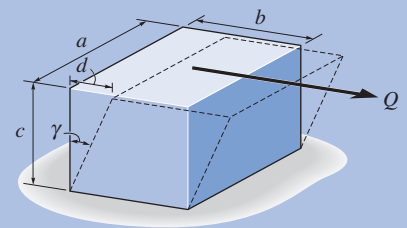
Die zugehörige mittlere Schubspannung im Block ist  $\tau_m = 360 \text{ MPa}$ . Somit ist die für die Verschiebung notwendige Querkraft

$$\tau_m = \frac{Q}{A}$$

$$Q = \tau_m A = \tau_m b a = 360 \text{ MPa}(75 \text{ mm})(100 \text{ mm}) = 2700 \text{ kN}$$



(a)



(b)

**Abbildung 3.25**

## Beispiel 3.6

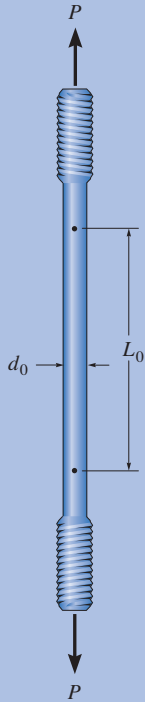


Abbildung 3.26

Ein Probekörper aus Aluminium, Abbildung 3.26, hat einen Durchmesser  $d_0$  und eine Messlänge  $L_0$ . Bestimmen Sie den Elastizitätsmodul, wenn eine Kraft  $P$  die Messlänge um  $\delta$  vergrößert. Bestimmen Sie weiterhin, um welchen Betrag die Kraft  $P$  den Durchmesser der Probe verkleinert.

$P = 165 \text{ kN}$ ,  $d_0 = 25 \text{ mm}$ ,  $L_0 = 250 \text{ mm}$ ,  $\delta = 1,20 \text{ mm}$ ,  $G_{Al} = 26 \text{ GPa}$ ,  $\sigma_F = 440 \text{ MPa}$

## Lösung

**Elastizitätsmodul** Die mittlere Normalspannung im Probekörper ist

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{P}{\left(\frac{\pi}{4}\right)d_0^2} = \frac{165(10^3)\text{N}}{\left(\frac{\pi}{4}\right)(0,025\text{m})^2} = 336,1 \text{ MPa}$$

und die Dehnung ist dann

$$\epsilon_L = \frac{\delta}{L} = \frac{1,20 \text{ mm}}{250 \text{ mm}} = 0,00480 \text{ mm/mm}$$

Weil  $\sigma < \sigma_F = 440 \text{ MPa}$  ist, verhält sich das Material elastisch. Der Elastizitätsmodul ist

$$E_{Al} = \frac{\sigma}{\epsilon} = \frac{336(10^6)\text{Pa}}{0,00480} = 70,0 \text{ GPa}$$

**Verkleinerung des Durchmessers** Zuerst bestimmen wir die Querkontraktionszahl für das Material unter Verwendung von Gleichung (3.11):

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (1+\nu) = \frac{E}{2G}$$

$$\nu = \left(\frac{E}{2G}\right) - 1 = \left(\frac{70(10^9)\text{Pa}}{(2)26(10^9)\text{Pa}}\right) - 1 = 0,346$$

Weil  $\epsilon_L = 0,00480 \text{ mm/mm}$  ist, ergibt sich  $\epsilon_Q$  mit Hilfe der Gleichung (3.9) zu

$$\nu = -\frac{\epsilon_Q}{\epsilon_L}$$

$$\epsilon_Q = -\nu\epsilon_L = -(0,346)(0,0048 \text{ mm/mm}) = -0,00166 \text{ mm/mm}$$

Die Änderung des Durchmessers ist damit

$$\delta' = d_0 \epsilon_Q = (25 \text{ mm})(-0,00166 \text{ mm/mm}) = -0,0415 \text{ mm}$$

## 3.8 Werkstoffversagen aufgrund von Kriechen und Ermüdung

Die mechanischen Eigenschaften eines Werkstoffes wurden bis hierher für eine statische bzw. langsam aufgebrachte Belastung bei konstanter Temperatur diskutiert. In manchen Fällen muss ein Bauteil allerdings unter Bedingungen eingesetzt werden, bei denen es über einen langen Zeitraum Lasten bei erhöhten Temperaturen aushalten muss, oder wo die Lasten wiederholt bzw. zyklisch auftreten. Diese Effekte werden wir in diesem Band nicht ausführlich behandeln, obwohl wir kurz erwähnen, wie man die Festigkeit eines Materials für diese Bedingungen bestimmt, weil ihnen bei der Bemessung durchaus besondere Beachtung geschenkt werden muss.

**Kriechen** Wenn ein Material über einen langen Zeitraum eine Last trägt, kann es sich fortwährend verformen, bis ein plötzlicher Bruch auftritt oder sein Gebrauch stark beeinträchtigt wird. Diese zeitabhängige, fortschreitende Deformation ist als *Kriechen* bekannt. Im Normalfall berücksichtigt man Kriechen, wenn Metalle und keramische Werkstoffe als Tragsystem oder mechanische Bauteile für höhere Temperaturbelastungen eingesetzt werden. Für einige Materialien, z.B. Polymere und Composite (einschließlich Holz oder Beton), ist die Temperatur jedoch *nicht* der ausschlaggebende Faktor, und daher kann Kriechen genau genommen auch durch eine reine Langzeitbelastung auftreten. Als typischen Fall beachten wir die Tatsache, dass ein Gummiband nicht in seine Ausgangsform zurückgeht, nachdem es von einer gestreckten Position entspannt wird, in der es für einen langen Zeitraum gehalten wurde. Im Allgemeinen spielen deshalb *Spannung und/oder Temperatur* eine wesentliche Rolle bei der *Kriechgeschwindigkeit*.

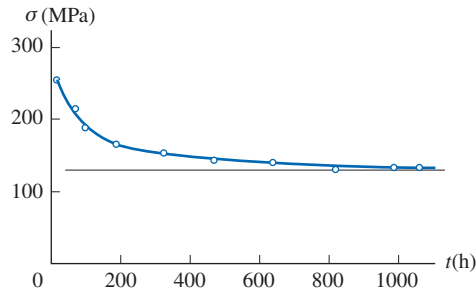
Für praktische Anwendungen, bei denen Kriechen ein wichtiger Faktor ist, legt man gewöhnlich ein Material für einen angenommenen Zeitraum derart aus, dass es einer festgelegten Kriechbeanspruchung widersteht. In dieser Hinsicht ist die sog. *Kriechfestigkeit* eine wichtige mechanische Eigenschaft, die für die Bemessung von kriechbeanspruchten Bauteilen verwendet wird. Dieser Wert repräsentiert die höchste Ausgangsspannung, die ein Material in einem festgelegten Zeitraum aushält, ohne einen bestimmten Betrag an Kriechdehnung zu erreichen. Die Kriechfestigkeit ist temperaturabhängig. Somit müssen für die Auslegung eine bestimmte Temperatur, Belastungsdauer und zulässige Kriechdehnung definiert werden. Zum Beispiel wird für Stahlschrauben und -rohre eine Kriechdehnung von 0,1% pro Jahr vorgeschlagen sowie 0,25% pro Jahr für die Bleiummantelung von Kabeln.

Für die Bestimmung der zulässigen Kriechfestigkeit existieren für die einzelnen Werkstoffe verschiedene Methoden. Eine der einfachsten Methoden umfasst den gleichzeitigen Test von verschiedenen Proben bei einer konstanten Temperatur, wobei jede Probe einer unterschiedlich großen Axialspannung ausgesetzt wird. Durch Messung der Zeitdauer, die für das Auftreten der zulässigen Dehnung oder der Bruchdehnung für jede Probe nötig ist, kann eine Dehnungs-Zeit-Kurve



Die Langzeitwirkung der Kabellast verursacht eine Deformation des Mastes aufgrund von Kriechen.

aufgenommen werden. Gewöhnlich gehen diese Versuche bis zu einer Zeit von 1000 h. Ein Beispiel dieser Ergebnisse ist für Edelstahl bei einer Temperatur von 650° C und vorgegebener Kriechdehnung von 1% in Abbildung 3.27 dargestellt. Wie erwähnt, besitzt dieses Material eine Fließfestigkeit von 276 MPa bei Raumtemperatur (0,2% Dehnung), die Fließfestigkeit nach 1000 h wurde mit  $\sigma = 138$  MPa ermittelt.



$\sigma$ - $t$ -Diagramm für Edelstahl  
bei 650°C und Kriechdehnung 1%

**Abbildung 3.27**

Allgemein *sinkt* die Kriechfestigkeit für *höhere Temperaturen* oder für *höhere, einwirkende Spannungen*. Für längere Zeitspannen müssen die Kurven extrapoliert werden. Dieses Verfahren erfordert gewöhnlich ein gewisses Maß an Erfahrung zum Kriechverhalten, sowie zusätzliches Wissen hinsichtlich der Kriecheigenschaften des verwendeten Materials. Nachdem die Kriechfestigkeit eines Materials bestimmt wurde, wird noch ein Sicherheitsfaktor eingeführt, um die entsprechende zulässige Spannung für die Auslegung zu erhalten.

**Ermüdung** Ständig wiederkehrende *zyklische Änderungen* von Spannung und Dehnung, denen ein Metall ausgesetzt ist, verursachen einen Bruch der inneren Struktur und führen schließlich zum Versagen. Dieses Verhalten wird als *Ermüdung* bezeichnet und ist gemeinhin verantwortlich für einen hohen Prozentsatz von Ausfällen in Verbindungsstäben und Kurbelwellen von Motoren, Dampf- oder Gasturbinenschaufeln, Verbindungselementen oder Trägern für Brücken, Eisenbahnradern und -achsen, sowie anderen Teilen, die zyklisch belastet werden. In all diesen Fällen tritt der Bruch bei einer Spannung auf, die *geringer* ist als die Fließspannung des Materials.

Die Art des Versagens ist augenscheinlich das Ergebnis der Tatsache, dass es mikroskopisch kleine Bereiche gibt, im allgemeinen an der Oberfläche des Bauteils, in denen die lokale Spannung *wesentlich größer* ist als die über den gesamten Querschnitt gemittelte Spannung. Bei einem zyklischen Auftreten dieser höheren Spannung kommt es zur Bildung von winzigen Rissen. Das Auftreten dieser Risse verursacht eine weitere Spannungserhöhung an den Rissspitzen bzw. -grenzen, was wiederum zu einer zusätzlichen Rissausbildung im Material bei weiter zyklisch auftretender Spannung führt. Allmählich wird der Querschnitt

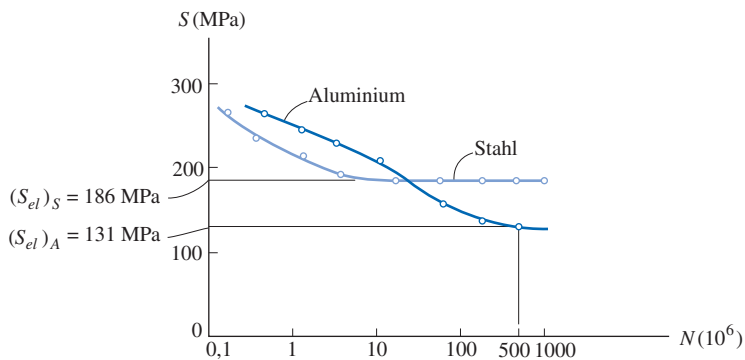


Die Dimensionierung von Riesenrädern erfordert eine sorgsame Berücksichtigung der Beanspruchungsfälle, die eine Materialermüdung verursachen können.

des Bauteils soweit reduziert, dass er der Belastung nicht mehr standhält und folglich kommt es zu einem plötzlichen Versagen. Selbst wenn das Material als duktil bekannt ist, verhält es sich, als wäre es *spröde*.

Für die Festlegung einer ausreichenden Festigkeit für ein metallisches Material unter wiederholter Lasteinwirkung ist es notwendig, eine Grenze zu bestimmen, unterhalb derer für eine Belastung mit einer bestimmten Zyklenzahl kein Ausfall feststellbar ist. Diese Spannungsgrenze wird *Ermüdungsgrenze* genannt. Man nutzt zu ihrer Bestimmung eine spezielle Versuchsanordnung, wobei jedes Stück einer Probenserie einer festgelegten Maximalspannung ausgesetzt wird und diese zudem so lange zyklisch verändert wird, bis das Material versagt. Die Ergebnisse werden als Funktion grafisch dargestellt, mit der Spannung  $S$  (oder  $\sigma$ ) als Ordinate und der Zyklenzahl bis zum Ausfall  $N$  als Abszisse. Diese grafische Funktion wird *Wöhler-Kurve*, im Englischen *S-N-Diagramm* genannt. In den meisten Fällen werden die Werte in einem logarithmischen Maßstab aufgetragen, denn sie sind gewöhnlich sehr groß.

Für zwei gebräuchliche metallische Werkstoffe sind Beispiele von S-N-Diagrammen in Abbildung 3.28 dargestellt. Die Ermüdungsgrenze ist jene Spannung, wo die S-N-Kurve horizontal bzw. asymptotisch verläuft. Wie bereits erwähnt, gibt es einen gut definierten Wert von  $(S_{el})_S = 186 \text{ MPa}$  für Stahl. Für Aluminium ist die Ermüdungsgrenze nicht ausdrücklich definiert und daher wird sie normalerweise als Spannung mit einer Grenze von 500 Millionen Zyklen mit  $(S_{el})_A = 131 \text{ MPa}$  angegeben. Typische Werte für die Ermüdungsgrenze sind für eine Vielzahl von Werkstoffen im Allgemeinen in Nachschlagewerken aufgeführt.



S-N-Diagramm (Wöhler-Kurve) für Stahl- und Aluminiumlegierungen  
( $N$ -Achse hat eine logarithmische Skalierung)

**Abbildung 3.28**

Nach der Bestimmung der Ermüdungsgrenze wird häufig angenommen, dass für jede Spannung unterhalb dieses Wertes der Ermüdungszeitraum unbegrenzt ist, und daher wird der Zyklenzahl bis zum Ausfall keine weitere Beachtung geschenkt.

## Wichtige Punkte

- Die *Querkontraktionszahl*  $\nu$  ist ein Maß der Querdehnung eines homogenen und isotropen Materials im Verhältnis zu seiner Längsdehnung. Diese Dehnungen haben im Allgemeinen ein unterschiedliches Vorzeichen, d.h. falls die Dehnung eine Verlängerung repräsentiert, entspricht die Querdehnung einer Verkürzung.
- Das *Schubspannungs-Gleitungs-Diagramm* ist die grafische Darstellung der Schubspannung als Funktion der Gleitung. Wenn ein Material homogen, isotrop und auch linear-elastisch ist, dann wird die Steigung dieser Kurve innerhalb des elastischen Bereiches als Schubmodul oder Gleitmodul  $G$  bezeichnet.
- Es gibt eine mathematische Beziehung zwischen  $G$ ,  $E$  und  $\nu$ .
- *Kriechen* ist eine mit der Zeit fortschreitende Deformation, wobei die Spannung und/oder die Temperatur eine wichtige Rolle spielen. Bauteile werden so bemessen, dass sie Kriecheffekten aufgrund ihrer Kriechfestigkeit widerstehen. Die Kriechfestigkeit ist die höchste Ausgangsspannung, die ein Material während einer festgelegten Zeitdauer standhält, ohne eine bestimmte Kriechdehnung zu überschreiten.
- Ermüdung tritt in metallischen Werkstoffen auf, wenn die Spannungen oder die Dehnungen in zyklischen Abständen wiederkehren. Bauteile werden so ausgelegt, dass sie der Ermüdung widerstehen, indem sichergestellt wird, dass sie eine *Ermüdungsgrenze* nicht überschreiten. Dieser Wert wird einem *S-N-Diagramm* (*Wöhler-Kurve*) entnommen und definiert die Maximalspannung, die ein Bauteil standhält, wenn es einer festgelegten Anzahl von Belastungszyklen ausgesetzt ist.

## Aufgaben zu 3.1 bis 3.5

Lösungen finden Sie in *Anhang D*.

**3.1** Ein Betonzylinder mit dem Durchmesser  $d$  und einer Messlänge  $l_0$  wird einem Druckversuch unterworfen. Die Resultate dieses Versuchs sind in Tabelle A 3.1 mit den Daten der Belastung und der entsprechenden Stauchung dargestellt. Zeichnen Sie das Spannungs-Dehnungs-Diagramm, indem Sie die Maßstäbe  $25 \text{ mm} \hat{=} 50 \text{ MPa} \hat{=} 0,2(10^{-3}) \text{ mm/mm}$  verwenden. Bestimmen Sie aus dem Diagramm näherungsweise den Elastizitätsmodul.

Gegeben:  $d = 150 \text{ mm}$ ,  $l_0 = 300 \text{ mm}$

Last (kN)	Stauchung (mm)
0	0
25,0	0,015
47,5	0,030
82,5	0,050
102,5	0,065
127,5	0,085
150,0	0,100
172,5	0,1125
192,5	0,125
232,5	0,155
250,0	0,175
265,0	0,185

Tabelle A 3.1

**3.2** Für ein keramisches Material sind die Messdaten aus dem Spannungs-Dehnungs-Versuch in der Tabelle A 3.2/3.3 gegeben. Die Kurve verläuft zwischen dem Ausgangszustand und dem ersten Messwert linear. Zeichnen Sie das Diagramm und bestimmen Sie den Elastizitätsmodul sowie die spezifische Formänderungsenergie bis zur Proportionalitätsgrenze.

**3.3** Für ein keramisches Material sind die Messdaten aus dem Spannungs-Dehnungs-Versuch in der Tabelle A 3.2/3.3 gegeben. Die Kurve verläuft zwischen dem Ausgangszustand und dem ersten Messwert linear. Zeichnen Sie das Diagramm und bestimmen sie näherungsweise die spezifische Bruchenergie. Die Bruchspannung  $\sigma_B$  ist gegeben.

Gegeben:  $\sigma_B = 373,8 \text{ MPa}$

$\sigma$ (MPa)	$\epsilon$ (mm/mm)
0	0
232,4	0,0006
318,5	0,0010
345,8	0,0014
360,5	0,0018
373,8	0,0022

Tabelle A 3.2/3.3

■ **3.4** Die Messdaten aus einem Spannungs-Dehnungs-Versuch sind in der Tabelle A 3.4 gegeben. Die Kurve verläuft zwischen dem Ausgangszustand und dem ersten Messwert linear. Zeichnen Sie das Diagramm und bestimmen Sie den Elastizitätsmodul und die spezifische Formänderungsenergie bis zur Proportionalitätsgrenze.

$\sigma$ (MPa)	$\epsilon$ (mm/mm)
0	0
224,0	0,0016
234,5	0,0018
280,0	0,0030
288,4	0,0050

Tabelle A 3.4



**3.5** An einem Probekörper mit dem Durchmesser  $d$  und einer Messlänge  $l_0$  wurde ein Zugversuch durchgeführt. Die Messdaten sind in Tabelle A 3.5/3.6 aufgeführt. Zeichnen Sie das Diagramm und bestimmen Sie näherungsweise den Elastizitätsmodul, die Zugfestigkeit und die Bruchspannung. Verwenden Sie den Maßstab  $20 \text{ mm} \hat{=} 50 \text{ MPa}$  und  $20 \text{ mm} \hat{=} 0,05 \text{ mm/mm}$ . Zeichnen Sie den linear-elastischen Bereich erneut, indem Sie denselben Spannungsmaßstab benutzen, jedoch einen Dehnungsmaßstab von  $20 \text{ mm} \hat{=} 0,001 \text{ mm/mm}$ .

Gegeben:  $d = 12,5 \text{ mm}$ ,  $l_0 = 50 \text{ mm}$

**3.6** An einem Stahl-Probekörper mit dem Durchmesser  $d$  und einer Messlänge  $l_0$  wurde ein Zugversuch durchgeführt. Zeichnen Sie das Spannungs-Dehnungs-Diagramm unter Verwendung der Daten in Tabelle A 3.5/3.6 und bestimmen Sie näherungsweise die spezifische Bruchenergie. Verwenden Sie den Maßstab  $20 \text{ mm} \hat{=} 50 \text{ MPa}$  und  $20 \text{ mm} \hat{=} 0,05 \text{ mm/mm}$ .

Gegeben:  $d = 12,5 \text{ mm}$ ,  $l_0 = 50 \text{ mm}$

Last (kN)	Dehnung (mm)
0	0
11,1	0,0175
31,9	0,0600
37,8	0,1020
40,9	0,1650
43,6	0,2490
53,4	1,0160
62,3	3,0480
64,5	6,3500
62,3	8,8900
58,8	11,9380

Tabelle A 3.5/3.6

**3.7** Für eine Stahllegierung mit dem Ausgangsdurchmesser  $d_0$  und der Messlänge  $l_0$  ist das Spannungs-Dehnungs-Diagramm in Abbildung A 3.7/3.8 dargestellt. Bestimmen Sie näherungsweise den Betrag der sich zurückbildenden elastischen Dehnung sowie der bleibenden Vergrößerung der Messlänge nach Entlastung für den Fall, dass der Probekörper bis zu einer Spannung  $\sigma$  belastet wird.

Gegeben:  $\sigma = 490 \text{ MPa}$ ,  $d_0 = 12 \text{ mm}$ ,  $l_0 = 50 \text{ mm}$

**3.8** Für eine Stahllegierung mit dem Ausgangsdurchmesser  $d_0$  und der Messlänge  $l_0$  ist das Spannungs-Dehnungs-Diagramm in Abbildung A 3.7/3.8 dargestellt. Bestimmen Sie näherungsweise den Elastizitätsmodul für das Material, die zum Fließen notwendige Belastung sowie die Zugfestigkeit der Probe.

Gegeben:  $d_0 = 12 \text{ mm}$ ,  $l_0 = 50 \text{ mm}$

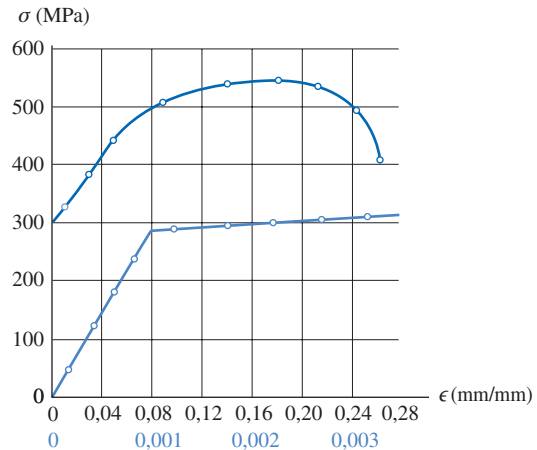


Abbildung A 3.7/3.8

**3.9** Für eine Stahllegierung mit dem Ausgangsdurchmesser  $d_0$  und der Messlänge  $l_0$  ist das Spannungs-Dehnungs-Diagramm in Abbildung A 3.9 dargestellt. Bestimmen Sie näherungsweise die spezifische Formänderungsenergie bis zur Proportionalitätsgrenze sowie die spezifische Bruchenergie des Materials.

Gegeben:  $d_0 = 12 \text{ mm}$ ,  $l_0 = 50 \text{ mm}$

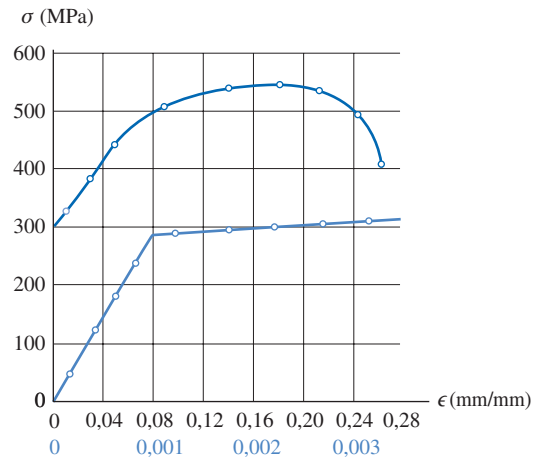


Abbildung A 3.9

**3.10** Für einen Träger aus einer Stahllegierung ist das Spannungs-Dehnungs-Diagramm in Abbildung A 3.10 dargestellt. Bestimmen Sie näherungsweise den Elastizitätsmodul, die Proportionalitätsgrenze, die Zugfestigkeit und die spezifische Formänderungsenergie bis zur Proportionalitätsgrenze. Ermitteln Sie außerdem die sich zurückbildende elastische Dehnung und die bleibende Dehnung in dem Träger nach Entlastung für den Fall, dass dieser bis zu einer Spannung  $\sigma$  belastet wird.  
Gegeben:  $\sigma = 360$  MPa

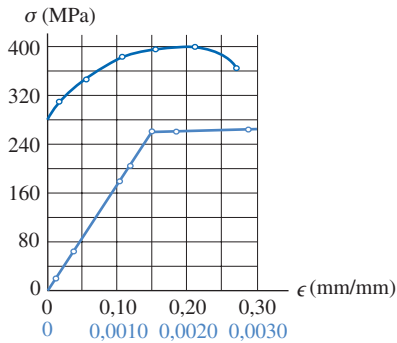


Abbildung A 3.10

**3.11** Ein Stahlträger hat die Länge  $l_0$  und die Querschnittsfläche  $A_0$ . Bestimmen Sie die Länge des Trägers, wenn dieser durch eine axiale Zugkraft  $P$  belastet wird. Das Material zeigt linear-elastisches Verhalten.

Gegeben:  $A_0 = 450$  mm<sup>2</sup>,  $l_0 = 1.250$  mm,  $P = 20$  kN,  $E_{St} = 210$  GPa

**3.12** Aus dem Zugversuch einer Probe mit der Messlänge  $l_0$  aus Polyäthylen, das zur Abschirmung von Koaxialkabeln verwendet wird, wurde das dargestellte Spannungs-Dehnungs-Diagramm ermittelt. Bestimmen Sie näherungsweise die Länge der Probe zwischen beiden Messpunkten nach der Entlastung, wenn die aufgebrauchte Last  $P$  eine Dehnung  $\epsilon$  verursacht. Nehmen Sie an, dass sich die Probendehnung elastisch zurückbildet.  
Gegeben:  $l_0 = 250$  mm,  $\epsilon = 0,024$  mm/mm

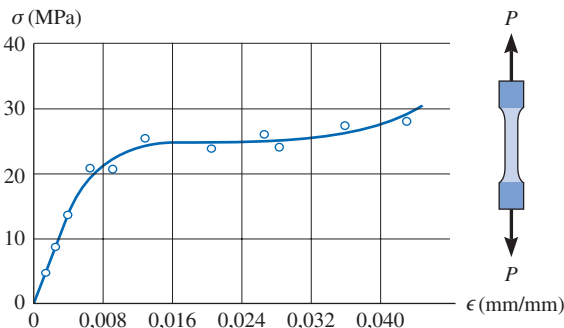


Abbildung A 3.12

**3.13** Die Änderung des Gewichts eines Flugzeuges wird durch das Ablesen eines Dehnungsmessstreifens  $A$  ermittelt, der in der Aluminium-Radstütze befestigt ist. Vor der Belastung des Flugzeuges wird an dem Dehnungsmessstreifen in der Stütze der Wert  $\epsilon_1$  abgelesen, nach der Belastung der Wert  $\epsilon_2$ . Bestimmen Sie die Änderung der Krafteinwirkung auf die Stütze, wenn deren Querschnitt  $A_0$  ist.  
Gegeben:  $\epsilon_1 = 0,001$  mm/mm,  $\epsilon_2 = 0,00243$  mm/mm,  $A_0 = 2.150$  mm<sup>2</sup>,  $E_{Al} = 70(10^3)$  MPa

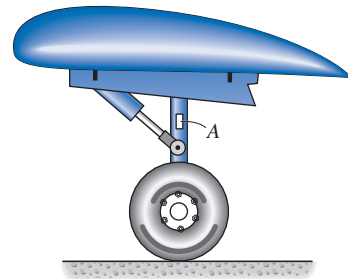


Abbildung A 3.13

**3.14** Durch Hinzufügen von Weichmachern in PVC ist es möglich, seine Steifigkeit zu reduzieren. Für drei Arten dieses Materials ist dieser Effekt in den Spannungs-Dehnungs-Diagrammen in Abbildung A 3.14 dargestellt. Legen Sie die Materialart fest, die zur Herstellung eines Stabes der Länge  $l_0$  und des Durchmessers  $d_0$  verwendet werden soll und bei der gefordert wird, dass er eine Mindestbelastung  $P$  aushält sowie sich maximal um  $\Delta l$  ausdehnt.

Gegeben:  $P = 100$  kN,  $l_0 = 125$  mm,  $d_0 = 50$  mm,  $\Delta l = 6,25$  mm

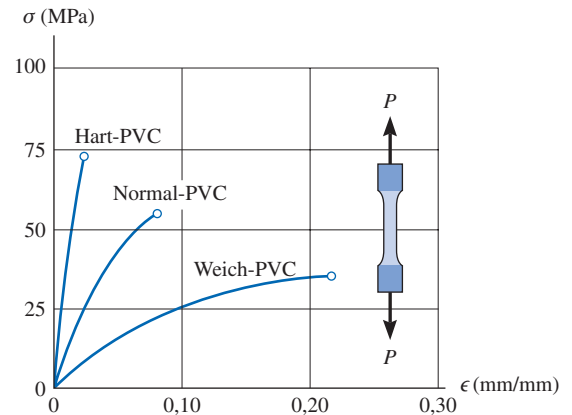


Abbildung A 3.14

**3.15** Auf einen Balken der Länge  $l_0$  und der Querschnittsfläche  $A_0$  wirkt eine Axiallast  $P$  ein. Bestimmen Sie den Elastizitätsmodul des Materials, wenn dieser sich um  $\Delta l$  ausdehnt. Das Material hat linear-elastisches Verhalten.

Gegeben:  $P = 40 \text{ kN}$ ,  $l_0 = 125 \text{ mm}$ ,  $A_0 = 450 \text{ mm}^2$ ,  $\Delta l = 0,05 \text{ mm}$

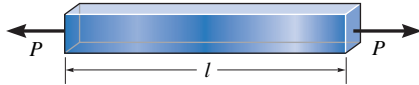


Abbildung A 3.15

**3.16** Ein Probekörper hat im Ausgangszustand die Länge  $l_0$ , den Durchmesser  $d_0$  und ist einer Beanspruchung  $P_1$  ausgesetzt. Bei einer Erhöhung der Beanspruchung von  $P_1$  auf  $P_2$  dehnt sich die Probe um den Betrag  $\Delta l$ . Bestimmen Sie den Elastizitätsmodul für das Material für den Fall, dass es linear-elastisch bleibt.

Gegeben:  $P_1 = 2.000 \text{ N}$ ,  $P_2 = 7.200 \text{ N}$ ,  $l_0 = 1 \text{ m}$ ,  $d_0 = 12 \text{ mm}$ ,  $\Delta l = 0,25 \text{ mm}$

**3.17** Ein Bauteil in einem Atomreaktor besteht aus einer Zirkonlegierung. Bestimmen Sie die erforderliche Querschnittsfläche, wenn das Bauteil eine Axiallast  $P$  aushalten muss. Verwenden Sie den Sicherheitsfaktor  $S$  bezogen auf den Fließzustand. Wie hoch ist die Belastung des Bauteils bei einer Länge  $l$  und einer Dehnung  $\Delta l$ ? Das Material verhält sich elastisch.

Gegeben:  $P = 20 \text{ kN}$ ,  $S = 3$ ,  $l_0 = 1 \text{ m}$ ,  $\Delta l = 0,5 \text{ mm}$ ,  $E_{Zr} = 100 \text{ GPa}$ ,  $\sigma_F = 410 \text{ MPa}$

**3.18** Die Stahldrähte  $AB$  und  $AC$  halten eine Masse  $M$ . Bestimmen Sie den erforderlichen Durchmesser für jeden Draht, wenn die zulässige Spannung der Drähte den Wert  $\sigma_{zul}$  hat. Was für eine neue Länge hat zudem der Draht  $AB$  nach dem Anhängen der Last? Die Länge im unbelasteten Zustand ist  $l_0$ .

Gegeben:  $M = 200 \text{ kg}$ ,  $\sigma_{zul} = 130 \text{ MPa}$ ,  $l_0 = 750 \text{ mm}$ ,  $E_{St} = 200 \text{ GPa}$ ,  $\alpha = 60^\circ$ ,  $\tan \beta = 4/3$

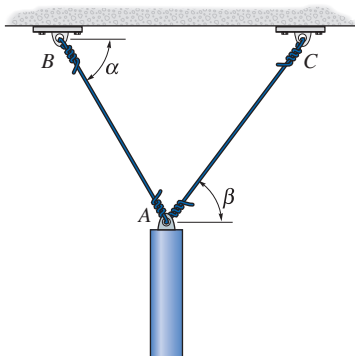


Abbildung A 3.18

**3.19** Der Stab  $DBA$  ist starr und befindet sich im Ausgangszustand in horizontaler Position. Wenn ein Gewicht  $G$  bei  $D$  gehalten wird, dann verschiebt sich das Ende  $D$  um den Betrag  $\Delta x$  nach unten. Bestimmen Sie die Dehnung der Drähte  $CD$  und  $BE$ . Bestimmen Sie zudem das Gewicht  $G$ , wenn die Drähte aus Stahl bestehen und eine Querschnittsfläche  $A_0$  haben.

Gegeben:  $A_0 = 0,8 \text{ mm}^2$ ,  $E_{St} = 210 \text{ GPa}$ ,  $\Delta x = 0,5 \text{ mm}$ ,  $a = 1 \text{ m}$ ,  $b = 1,5 \text{ m}$

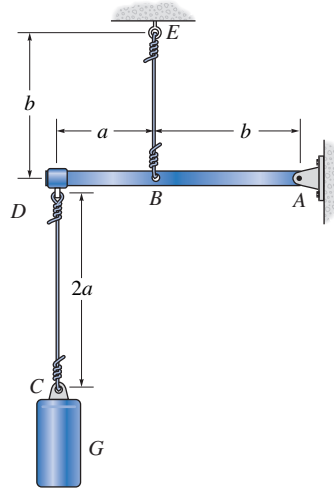


Abbildung A 3.19

**3.20** Für viele Metall-Legierungen kann das Spannungs-Dehnungs-Diagramm analytisch mit Hilfe der Ramberg-Osgood-Gleichung  $\epsilon = \sigma/E + k\sigma^n$  aufgestellt werden, wobei die drei Parameter  $E$ ,  $k$  und  $n$  aus den Messwerten des Diagramms entnommen werden. Bestimmen Sie die Parameter  $k$  und  $n$  mit Hilfe des Diagramms in Abbildung A 3.20 und geben Sie damit eine Funktionsdarstellung der Kurve an.

Gegeben:  $E = 210 \text{ GPa}$

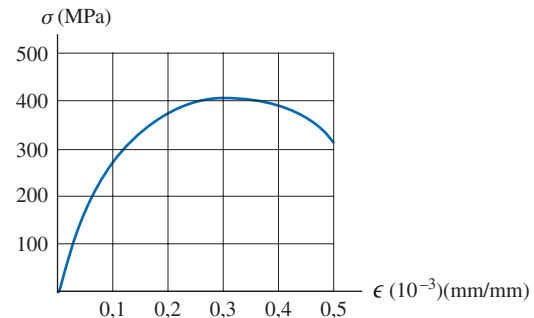


Abbildung A 3.20

**3.21** Manchmal werden anstatt von Drehmomentschlüsseln direkte Zugindikatoren benutzt, um sicher zu stellen, dass eine Schraube die vorgeschriebene Zugkraft für Verbindungen hat. Bestimmen Sie die Zugspannung im Schraubenschaft, wenn die Mutter derart angezogen wird, dass sich die sechs Indikatorköpfe mit der ursprünglichen Höhe  $h_0$  um  $\Delta h$  verkürzen, wobei eine Kontaktfläche  $A$  an jedem Kopf verbleibt. Das Material hat das dargestellte Spannungs-Dehnungs-Diagramm.

Gegeben:  $A = 1,5 \text{ mm}^2$ ,  $h_0 = 3 \text{ mm}$ ,  $\Delta h = 0,3 \text{ mm}$

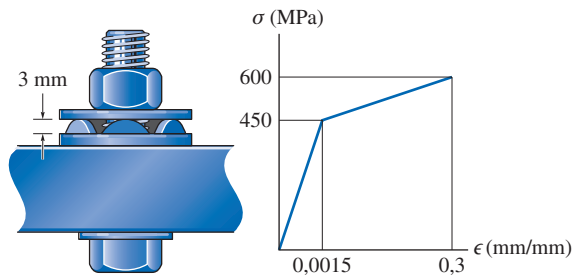


Abbildung A 3.21

**3.22** Die beiden Stäbe bestehen aus Polystyrol und haben ein Spannungs-Dehnungs-Diagramm wie in Abbildung A 3.22/3.23 dargestellt. Bestimmen Sie die größte Kraft  $P$ , die abgestützt werden kann, bevor einer der Stäbe bricht, wenn die Querschnittsfläche des Stabes  $AB$  den Wert  $A_{AB}$  und  $BC$  den Wert  $A_{BC}$  hat. Nehmen Sie an, dass kein Knicken auftritt.

Gegeben:  $A_{AB} = 900 \text{ mm}^2$ ,  $A_{BC} = 2.400 \text{ mm}^2$

**3.23** Die beiden Stäbe bestehen aus Polystyrol und haben ein Spannungs-Dehnungs-Diagramm, wie in Abbildung A 3.22/3.23 dargestellt. Bestimmen Sie die Querschnittsfläche für jeden Stab, so dass die Stäbe gleichzeitig brechen, wenn die Last  $P$  einwirkt. Nehmen Sie an, dass kein Knicken auftritt.

Gegeben:  $P = 15 \text{ kN}$

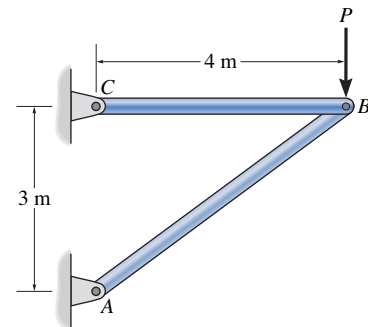
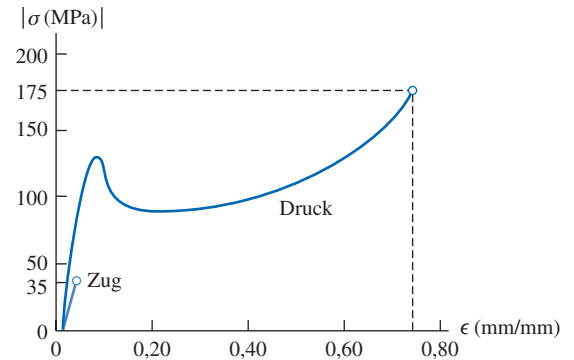


Abbildung A 3.22/3.23

## Aufgaben zu 3.6 bis 3.8

Lösungen finden Sie in *Anhang D*.

■ **3.24** Der Plastikstab hat den Durchmesser  $d_0$ . Bestimmen Sie die Längen- und Durchmesseränderung, wenn eine axiale Last  $P$  auf ihn einwirkt.

Gegeben:  $P = 80 \text{ kN}$ ,  $l_0 = 100 \text{ mm}$ ,  $d_0 = 10 \text{ mm}$ ,  
 $E_{\text{plastik}} = 131 \text{ GPa}$

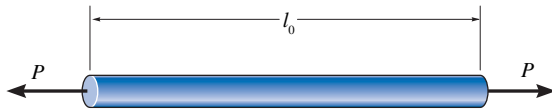


Abbildung A 3.24

■ **3.25** Die Stütze besteht aus drei starren Platten, die über zwei symmetrisch angeordnete Gummiblöcke miteinander verbunden sind. Bestimmen Sie näherungsweise die vertikale Verschiebung der Platte  $A$  infolge der Gleitung im Gummi, wenn an ihr eine Vertikalkraft  $P$  angreift. Jeder Block hat die Querschnittsfläche  $ab$ .

Gegeben:  $P = 50 \text{ N}$ ,  $G_{\text{Gu}} = 0,20 \text{ MPa}$ ,  $a = 30 \text{ mm}$ ,  
 $b = 20 \text{ mm}$ ,  $c = 40 \text{ mm}$

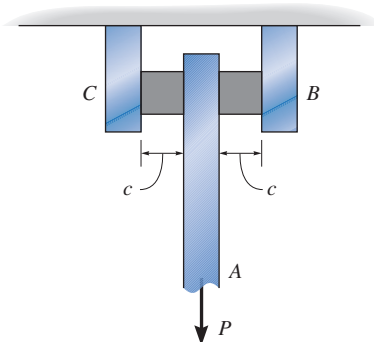


Abbildung A 3.25

■ **3.26** Ein zylindrischer Block aus Bronze mit einem Originaldurchmesser  $d_0$  und einer Länge  $l_0$  wird in eine Druckversuchsanlage eingesetzt und bis zu einer Länge  $l_1$  gestaucht. Bestimmen Sie den neuen Durchmesser des Blocks.

Gegeben:  $d_0 = 30 \text{ mm}$ ,  $l_0 = 60 \text{ mm}$ ,  $l_1 = 59,6 \text{ mm}$ ,  
 $\nu = 0,34$

■ **3.27** Ein zylindrischer Block aus Aluminium mit einem Originaldurchmesser  $d_0$  und einer Länge  $l_0$  wird in eine Druckversuchsanlage eingesetzt und mit einer maximalen Belastung  $P$  gestaucht. Bestimmen Sie (a) die Längenabnahme und (b) seinen neuen Durchmesser.

Gegeben:  $d_0 = 20 \text{ mm}$ ,  $l_0 = 75 \text{ mm}$ ,  $P = 5 \text{ kN}$ ,  
 $E_{\text{Al}} = 68,9 \text{ GPa}$

■ **3.28** Der elastische Bereich des Spannungs-Dehnungs-Diagramms für eine Stahllegierung ist in Abbildung A 3.28 dargestellt. Der Probekörper, von dem es erstellt wurde, hat den Ausgangsdurchmesser  $d_0$  und eine Messlänge  $l_0$ . Bei einer Belastung mit der Kraft  $P_A$  ist der Durchmesser  $d$ . Bestimmen Sie die Querkontraktionszahl für das Material.

Gegeben:  $E = 200 \text{ GPa}$ ,  $P_A = 50 \text{ kN}$ ,  $d = 12,99265 \text{ mm}$ ,  
 $d_0 = 13 \text{ mm}$ ,  $l_0 = 50 \text{ mm}$ ,  $\epsilon_A = 0,002$ ,  $\sigma_A = 400 \text{ MPa}$

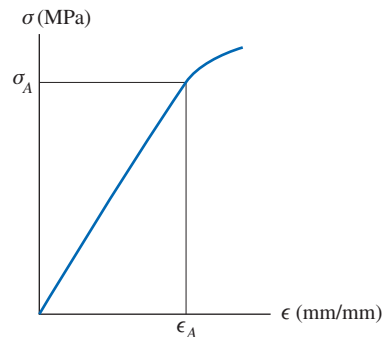


Abbildung A 3.28

■ **3.29** Der Block besteht aus Titan und wird entlang der  $y$ -Achse um  $\Delta l$  gestaucht, seine Form wird so geschert, dass der Winkel an den Ecken wie abgebildet  $\theta$  beträgt. Bestimmen Sie  $\epsilon_x$ ,  $\epsilon_y$  und  $\gamma_{xy}$ .

Gegeben:  $\Delta l = 1,2 \text{ mm}$ ,  $\theta = 89,7^\circ$ ,  $\nu = 0,36$ ,  
 $a = 100 \text{ mm}$ ,  $b = 80 \text{ mm}$

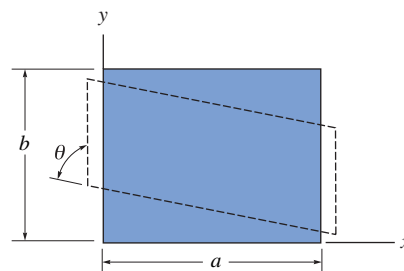


Abbildung A 3.29

**3.30** Der elastische Bereich des Spannungs-Dehnungs-Diagramms für eine Stahllegierung ist in Abbildung A 3.30 dargestellt. Der Probekörper, von dem das Diagramm erstellt wurde, hat einen Ausgangsdurchmesser  $d_0$  und eine Messlänge  $l_0$ . Bestimmen Sie seinen Durchmesser und die Messlänge, wenn an der Probe die Last  $P$  angreift.

Gegeben:  $P = 20 \text{ kN}$ ,  $d_0 = 13 \text{ mm}$ ,  $l_0 = 50 \text{ mm}$ ,  $\nu = 0,4$ ,  $\epsilon_A = 0,002$ ,  $\sigma_A = 400 \text{ MPa}$

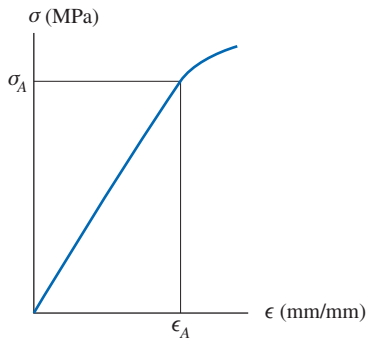


Abbildung A 3.30

**3.31** Das Schubspannungs-Gleitungs-Diagramm ist für eine Stahllegierung in Abbildung A 3.31 dargestellt. Bestimmen Sie die Kraft  $P$ , die ein Fließen des Materials verursacht, und den Elastizitätsmodul  $E$  für den Fall, dass die Schraube aus diesem Material besteht, einen Durchmesser  $d$  hat und für die Verbindung des Überlappungsstoßes verwendet wird.

Gegeben:  $d = 5 \text{ mm}$ ,  $\nu = 0,3$ ,  $\tau_A = 350 \text{ MPa}$ ,  $\gamma_A = 0,004$

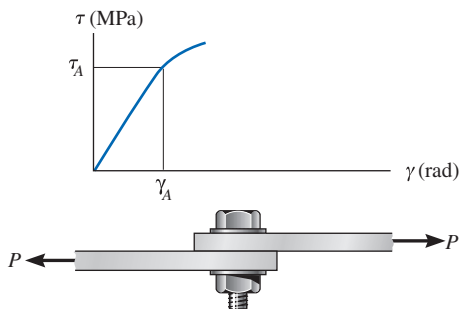


Abbildung A 3.31

**3.32** Eine Scherfeder besteht aus zwei Gummiblöcken, beide mit der Höhe  $h$ , Breite  $b$  und Dicke  $a$ . Die Blöcke sind mit drei Platten wie dargestellt verbunden. Bestimmen Sie die Verschiebung der Platte  $A$ , wenn eine vertikale Last  $P$  auf die Platte wirkt, unter der Annahme, dass die Platten starr sind und der Schubmodul des Gummis  $G$  ist. Nehmen Sie an, dass die Verschiebung sehr klein ist, so dass  $\delta = a \tan \gamma \approx a\gamma$  gilt.

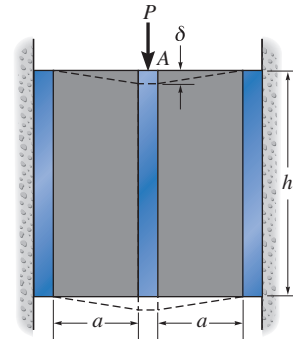


Abbildung A 3.32

**3.33** Durch Verbinden einer gelochten Gummiseibe mit einem starr fixierten Ring und einem mittigen Stift wird eine Scherfeder realisiert. Zeigen Sie, dass die Steigung bei Punkt  $A$  im Gummi  $dy/dr = -\tan \gamma = -\tan(P/(2\pi hGr))$  ist, wenn eine Axialkraft  $P$  an dem Stift wirkt. Für kleine Winkel gilt  $dy/dr = -P/(2\pi hGr)$ . Integrieren Sie diesen Ausdruck und nehmen Sie für die Integrationskonstante die Randbedingung  $y = 0$  bei  $r = r_a$ . Berechnen Sie aus dem Resultat die Durchbiegung  $y = \delta$  des Stifts.

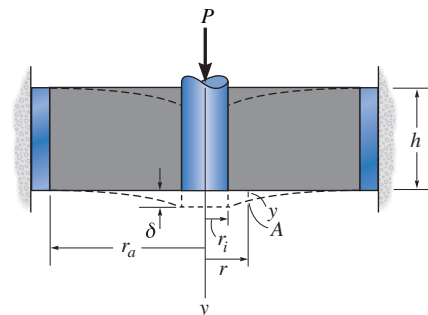


Abbildung A 3.33

## Vermischte Aufgaben

Lösungen finden Sie in *Anhang D*.

**3.34** Der Deckel  $H$  ist mit dem Zylinder eines Kompressors über sechs Stahlschrauben verbunden. Bestimmen Sie die Dehnung in den Schrauben, wenn die Klemmkraft in jeder Schraube  $P$  beträgt. Jede Schraube hat den Durchmesser  $d$ . Wie groß ist die Dehnung in jeder Schraube, wenn die Mutter abgeschraubt wird und somit eine Entlastung von der Klemmkraft stattfindet?

Gegeben:  $P = 4000 \text{ N}$ ,  $d = 5 \text{ mm}$ ,  $\sigma_F = 280 \text{ MPa}$ ,  
 $E_{St} = 210 \text{ GPa}$

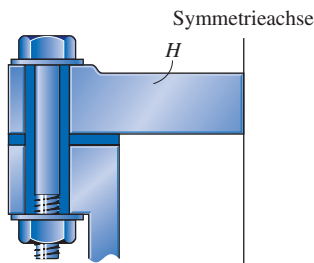


Abbildung A 3.34

**3.35** Der Stein hat die Masse  $m$  und den Schwerpunkt bei  $S$ . Er liegt auf einem Block bei  $A$  und einer Rolle bei  $B$  auf. Der Block ist auf dem Boden fixiert und hat eine gestauchte Höhe  $h$ , eine Breite  $b$  und eine Länge  $l$ . Der statische Reibungskoeffizient zwischen Block und Stein ist  $\mu_{Stein}$ . Bestimmen Sie näherungsweise die horizontale Verschiebung des Steins infolge der Schubspannungen im Block, wenn der Stein gerade zu gleiten beginnt. Nehmen Sie an, dass der Schwerpunkt  $a_2$  von  $A$  entfernt ist. Der Block ist aus einem Material mit dem Elastizitätsmodul  $E$  und der Querkontraktionszahl  $\nu$ .

Gegeben:  $m = 800 \text{ kg}$ ,  $h = 30 \text{ mm}$ ,  $b = 140 \text{ mm}$ ,  
 $l = 150 \text{ mm}$ ,  $\mu_{Stein} = 0,8$ ,  $a_1 = 1,25 \text{ m}$ ,  $a_2 = 1,5 \text{ m}$ ,  
 $x = 0,3 \text{ m}$ ,  $d = 0,4 \text{ m}$ ,  $E = 4 \text{ MPa}$ ,  $\nu = 0,35$

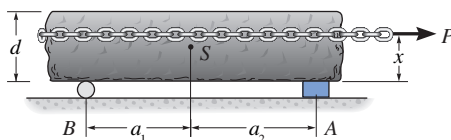


Abbildung A 3.35

**3.36** Das starre Rohr wird durch ein Gelenk bei  $C$  und ein Stahl-Führungsseil  $AB$  gehalten. Bestimmen Sie, wie weit der Draht mit dem Durchmesser  $d$  sich ausdehnt, wenn eine Last  $P$  an dem Rohr angreift. Das Material bleibt elastisch.

Gegeben:  $\theta = 60^\circ$ ,  $P = 1.500 \text{ N}$ ,  $E_{St} = 210 \text{ GPa}$ ,  
 $d = 5 \text{ mm}$ ,  $h = 2 \text{ m}$

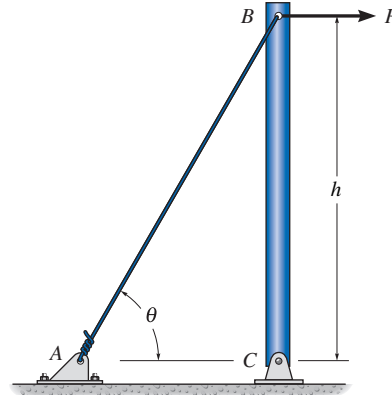


Abbildung A 3.36

**3.37** Das starre Rohr wird durch ein Gelenk bei  $C$  und ein Stahl-Führungsseil  $AB$  gestützt. Bestimmen Sie bei einem Drahtdurchmesser  $d$  die Last  $P$ , wenn das Ende  $B$  um  $\Delta x$  nach rechts verschoben wird.

Gegeben:  $\theta = 60^\circ$ ,  $E_{St} = 210 \text{ GPa}$ ,  $d = 5 \text{ mm}$ ,  
 $\Delta x = 2,5 \text{ mm}$

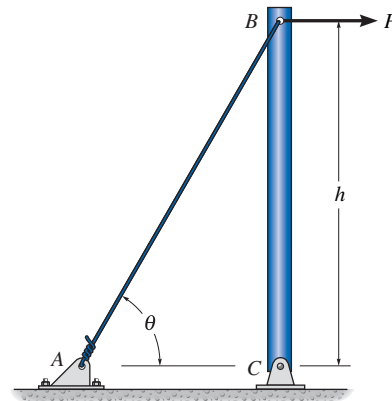


Abbildung A 3.37

**3.38** Die Schraube mit dem Durchmesser  $d_S$  besteht aus einer Aluminiumlegierung. Sie führt durch eine Magnesiumhülse mit dem Innendurchmesser  $d_1$  und Außendurchmesser  $d_2$ . Bestimmen Sie die Dehnungen in Hülse und Schraube, wenn die Mutter so fest angezogen ist, dass eine Zugspannung in der Schraube von  $\sigma_S$  entsteht und wenn die Ausgangslängen von Schraube und Hülse  $l_{S0}$  bzw.  $l_{H0}$  betragen. Nehmen Sie an, dass das Material  $A$  starr ist.

Gegeben:  $d_S = 8 \text{ mm}$ ,  $d_1 = 12 \text{ mm}$ ,  $d_2 = 20 \text{ mm}$ ,  
 $l_{H0} = 50 \text{ mm}$ ,  $l_{S0} = 80 \text{ mm}$ ,  $\sigma_S = 8 \text{ kN}$ ,  $E_{Al} = 70 \text{ GPa}$ ,  
 $E_{Mg} = 45 \text{ GPa}$

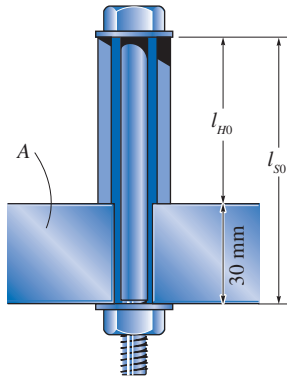


Abbildung A 3.38

**3.39** An einem Probekörper aus Stahl mit dem Durchmesser  $d_0$  und der Messlänge  $l_0$  wurde ein Zugversuch durchgeführt. Die Werte sind in der Tabelle A 3.39 aufgelistet. Zeichnen Sie das Spannungs-Dehnungs-Diagramm und bestimmen Sie näherungsweise den Elastizitätsmodul, die Streckgrenze, die Zugfestigkeit und die Bruchspannung. Verwenden Sie den Maßstab  $25 \text{ mm} \hat{=} 150 \text{ MPa}$  und  $25 \text{ mm} \hat{=} 0,50 \text{ mm/mm}$ . Zeichnen Sie den elastischen Bereich erneut mit Hilfe des gleichen Spannungsmaßstabes, aber mit dem neuen Dehnungsmaßstab  $25 \text{ mm} \hat{=} 0,001 \text{ mm/mm}$ .

Gegeben:  $d_0 = 12 \text{ mm}$ ,  $l_0 = 50 \text{ mm}$

Last (kN)	Ausdehnung (mm)
0	0
7,50	0,0125
23,00	0,0375
40,00	0,0625
55,00	0,0875
59,00	0,1250
59,00	0,2000
60,00	0,5000
83,00	1,0000
100,00	2,5000
107,50	7,0000
97,50	10,0000
92,50	11,5000

Tabelle A 3.39

**3.40** Für Polyester ist das Spannungs-Dehnungs-Diagramm in Abbildung A 3.40/3.41 dargestellt. Bestimmen Sie die Verdrehung des starren Balkens, wenn der Balken durch die Verbindungselemente  $AB$  und  $CD$  gehalten wird, die beide aus Polyester bestehen, sowie der Kraft  $P$  ausgesetzt ist. Die Durchmesser der Verbindungselemente sind  $d_{BC}$  bzw.  $d_{CD}$   
 Gegeben:  $P = 80 \text{ kN}$ ,  $d_{BC} = 40 \text{ mm}$ ,  $d_{CD} = 80 \text{ mm}$ ,  
 $h_1 = 2 \text{ m}$ ,  $h_2 = 0,5 \text{ m}$ ,  $a = 0,75 \text{ m}$

**3.41** Für Polyester ist das Spannungs-Dehnungs-Diagramm in Abbildung A 3.40/3.41 dargestellt. Bestimmen Sie die maximal mögliche Last  $P$ , die an dem starren Balken angreifen kann, bevor entweder das Verbindungselement  $AB$  oder der Pfeiler  $CD$  zerbricht, die den Balken halten und beide aus Polyester bestehen.

Gegeben:  $P = 80 \text{ kN}$ ,  $d_V = 12 \text{ mm}$ ,  $d_{pf} = 40 \text{ mm}$ ,  
 $h_1 = 2 \text{ m}$ ,  $h_2 = 0,5 \text{ m}$ ,  $a = 0,75 \text{ m}$

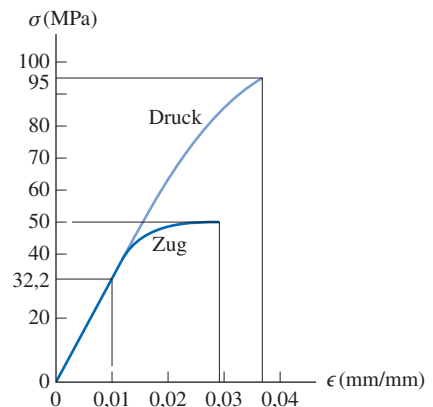
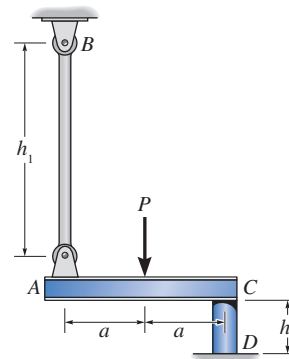


Abbildung A 3.40/3.41