PEARSON Education

PEARSON Studium

Ulrich Thonemann

Operations Management

Unter Mitarbeit von
Marc Albers
Andreas Brinkhoff
Kai Hoberg
Marcel Sieke

PEARSON Studium

ein Imprint von Pearson Education
München • Boston • San Francisco • Harlow, England
Don Mills, Ontario • Sydney • Mexico City
Madrid • Amsterdam

Standortplanung

3

ÜBERBLICK

3.1 Beliebige Standorte 103
3.1.1 Ein Standort 103
3.1.2 Mehrere Standorte 114

3.2 Bestimmte Standorte 120
3.2.1 Formulierung Basismodell 120
3.2.2 Lösung Basismodell 122
3.2.3 Erweiterungen Basismodell 127

3.3 Zusammenfassung und Ausblick 130

3.4 Anwendungen und Übungsaufgaben 131
3.4.1 Bestimmung der asiatischen Lagerstandorte der RHM 131
3.4.2 Bestimmung des Zentrallagerstandorts bei OmegaJet 134
3.4.3 Übungsaufgaben 137

3.5 Beweise 143

„Concern for man himself and his fate must always form the chief interest of all technical endeavors, concerns for the great unsolved problems of the organization of labor and the distribution of goods ….“

Albert Einstein in einer Ansprache am California Institute of Technology, 1931.

In Berlin, Mailand und Paris. Oder Frankfurt, München und Hamburg. An welchen Standorten sollte produziert und gelagert werden? Die Wahl der Produktions- und Lagerstandorte bestimmt zu einem großen Teil die Kosten, die Lieferzeit und die Lieferzuverlässigkeit. Wenn ein Standort erst einmal ausgewählt ist und eine Produktions- oder Lagerstätte errichtet wurde, dann ist es kostspielig, diese Entscheidung rückgängig zu machen. Auch geht es bei Standortentscheidungen häufig um hohe Investitionsvolumina. So hat Infineon beispielsweise rund 1,1 Milliarden Euro in die Chip-Fertigung am Standort Dresden investiert. Die richtige Wahl der Standorte ist also wichtig.

Welches die richtigen Standorte sind, wird von einer Reihe von Faktoren beeinflusst. Die wesentlichen Faktoren sind in Abbildung 3.1 dargestellt. Einer der wichtigsten Einflussfaktoren ist die *Zielsetzung*. Wenn Lagerstandorte zur Bevorratung kritischer Ersatzteile für medizintechnische Anlagen oder Computerserver bestimmt werden, ist es wichtig, dass die Ersatzteile innerhalb kurzer Zeit vom Lager zum Kunden transportiert werden können. Abbildung 3.2 zeigt ein Beispiel, in dem 7 500 Kunden in Deutschland von 90 Lagerstandorten aus in durchschnittlich 18 Minuten erreicht werden können. Wenn hingegen Standorte für die Produktion und Lagerung von Unterhaltungselektronik bestimmt werden, stehen die Kosten in der Regel mehr im Vordergrund als die Lieferzeit. Die *Kosten* sind bei der Standortplanung generell ein wichtiger Einflussfaktor. In den Kosten sind die Investitionskosten an den Stand-

Abbildung 3.1

Standortfaktoren

Abbildung 3.2

Beispiel zur Standortplanung

Ergebnis

- Fahrzeit: Durchschnittlich 18 Minuten pro Lieferung
- Lieferzuverlässigkeit: Belieferung von 97 Prozent der Kunden in unter 60 Minuten

orten enthalten, aber auch die Betriebskosten der Standorte, wie Personalkosten und Energiekosten, und die Transportkosten.

Ein weiterer Entscheidungsfaktor ist die Verfügbarkeit der benötigten *Ressourcen*, wie Mitarbeiter und Infrastruktur. Denn nicht an jedem Standort der Welt sind beispielsweise qualifizierte Ingenieure und eine stabile Infrastruktur vorhanden. Und nicht überall gibt es in ausreichender Menge gut ausgebildete Facharbeiter, die kostengünstig arbeiten. Weitere wichtige Entscheidungsfaktoren sind die *Expansionsmöglichkeiten* an den Standorten. Wenn beispielsweise der Markteintritt zunächst mit einer kleinen Produktionsmenge erfolgt, diese aber bei erfolgreichem Geschäft weiter ausgebaut werden soll, ist es wichtig, dass genügend Raum und Ressourcen zur Expansion zur Verfügung stehen. Auch *Regulierungen* sind ein wesentlicher Entscheidungsfaktor. Zu diesen zählen beispielsweise Arbeitszeitregelungen und Umweltschutzbestimmungen. Schließlich werden Standortentscheidungen auch durch die *Kultur* eines Landes und das *politische Klima* mit beeinflusst.

In diesem Kapitel konzentrieren wir uns auf analytische Verfahren zur Standortplanung, das heißt auf Verfahren, die auf quantitativen Daten beruhen. Wenn auch qualitative Faktoren ein wichtiges Entscheidungskriterium sind, so können diese vor Anwendung der analytischen Verfahren berücksichtigt werden. Beispielsweise, indem nur Standorte bei der Optimierung betrachtet werden, die sich in einem Land mit einem stabilen politischen Klima befinden. Außerdem fokussieren wir uns in diesem Kapitel auf das Ziel, das im Operations Management am häufigsten angestrebt wird: Die Minimierung der Kosten. In diesem Kapitel werden Sie lernen,

- wie optimale Standorte bestimmt werden, wenn für diese jeder *beliebige Ort* ausgewählt werden kann und
- wie optimale Standorte bestimmt werden, wenn aus einer Menge potenzieller, vom Anwender vorgegebener, *bestimmter Orte* die optimalen ausgewählt werden müssen.

In Abschnitt 3.1 untersuchen wir die Optimierung der Standorte, wenn wir *beliebige Orte* als Standorte verwenden können. So kann der Standort beispielsweise zwischen zwei Städten auf dem Land liegen oder sich auf einem hohen Berg befinden. Wir ermitteln Standorte, die die Transportkosten zu den jeweiligen Kunden minimieren. Die Transportkosten berechnen wir auf Basis einer einfachen Abschätzung der Entfernung der Standorte zu den Kunden. Weil wir beliebige Orte als Standorte zulassen und ein einfaches Verfahren zur Abschätzung der Transportkosten einsetzen, ist es möglich, das Standortoptimierungsproblem mit geringem Datenbedarf zu modellieren und es mit wenig Aufwand zu lösen. Mit diesem Verfahren lässt sich grob abschätzen, wo sich die optimalen Standorte befinden sollten, wenn die wesentlichen Kosten die Transportkosten sind. Die Verfahren sind jedoch nicht sinnvoll einsetzbar, wenn außer den Transportkosten noch andere Kosten entscheidungsrelevant sind oder wenn nur bestimmte Orte zur Auswahl stehen.

In Abschnitt 3.2 untersuchen wir daher die Optimierung der Standorte, wenn nur *bestimmte Standorte* ausgewählt werden können, die vom Anwender im Vorfeld als potenzielle Standorte zugelassen wurden. Bei der Vorauswahl kann der Anwender auch qualitative Entscheidungskriterien einsetzen. Neben den Transportkosten berücksichtigen wir auch fixe und variable Standortkosten.

In Abschnitt 3.3 fassen wir die Ergebnisse zusammen und geben einen Ausblick. In Abschnitt 3.4 zeigen wir, wie RHM ein Regionallager für den asiatisch-pazifischen Raum auswählt und OmegaJet den optimalen Standort für ein Ersatzteillager bestimmt.

Metro MGL Logistik

Das MGL-Konzept (MGL = Metro Gruppen Logistik) der Metro AG verdeutlicht, wie wichtig eine gute Standortplanung für den Erfolg eines Unternehmens sein kann. Die Metro AG hat mehr als 1 Million Artikel in ihrem Produkt-Portfolio und bezieht die Waren für die über 1 700 Groß- und Einzelhandelsfilialen von circa 8 000 Lieferanten. Dabei unterscheiden sich die Elemente dieses Logistik-Systems erheblich, zum Beispiel in der Filialgröße, Lage et cetera. Um diese Komplexität effizient zu managen, wurde die MGL Logistik GmbH gegründet. Die MGL Logistik GmbH ist verantwortlich für die Logistik bei der Metro AG und nutzt externe Logistikdienstleister, um die Produkte von den Lieferanten abzuholen. Dabei werden die Waren großer Lieferanten direkt in Verteilerknoten (Cross-Docking-Terminals) des Zielgebiets gebracht. In diesen Verteilerknoten werden im Idealfall keine Produkte gelagert, sondern nur auf andere Fahrzeuge umgeladen. Sind die Lieferanten hingegen klein, werden die Produkte zuerst in Verteilerknoten in der Nähe der Lieferanten gesammelt und erst dann an die Verteilerknoten des Zielgebiets geliefert. Die Bestimmung der richtigen Standorte dieser Cross-Docking-Terminals ist ein Standortplanungsproblem.

Durch das MGL-Konzept können viele Lieferungen gebündelt werden. Beispielsweise werden je LKW-Stopp durchschnittlich 30 Paletten ausgeliefert. Vor der Einführung des MGL-Konzepts wurde hingegen nur eine Palette je LKW-Stopp ausgeliefert. Durch die geringere Zahl von LKW, die die Filialen anfahren, werden die Filialen entlastet, da sie pro Lieferung eine größere Anzahl Paletten erhalten als mit dem alten Konzept. Weiterhin fahren nur noch nahezu voll ausgelastete LKW. Insgesamt belaufen sich die Einsparungen durch dieses System auf circa 150 Millionen Euro pro Jahr. Quellen: Logistik Heute [4] und Thonemann et al. [7].

3.1 Beliebige Standorte

In diesem Abschnitt gehen wir davon aus, dass wir eine bestimmte Anzahl Standorte an beliebigen Orten errichten können und dass die einzigen Kosten, die wir berücksichtigen müssen, die Transportkosten sind. Als weitere Vereinfachung der Realität nehmen wir an, dass die Transportkosten ausschließlich von der Entfernung zwischen Produktionsstandort und Lager beziehungsweise zwischen Lager und Kunde und der transportierten Menge abhängen. Wir nehmen also an, dass der Transportkostensatz ein Euro pro Stück pro Entfernungseinheit beträgt. Mit diesen Annahmen abstrahieren wir recht stark von der Realität. Sie erlauben es uns aber, das Standortplanungsproblem mit wenig Datenbedarf zu modellieren und mit einfachen Verfahren zu lösen. Da das Abstraktionsniveau, auf dem wir arbeiten, recht hoch ist, werden die Lösungen, die mit den Verfahren dieses Abschnitts erzielt werden, häufig nicht unmittelbar umgesetzt. Sie dienen vielmehr dazu, in einem ersten Schritt gute Standorte zu finden und dann in einem zweiten Schritt auf Basis weiterer Entscheidungskriterien die endgültigen Standorte auszuwählen.

Als Nächstes zeigen wir, wie der optimale Standort für ein einzelnes Lager gefunden werden kann. Danach erläutern wir, wie gute Standorte für mehrere Lager gefunden werden können.

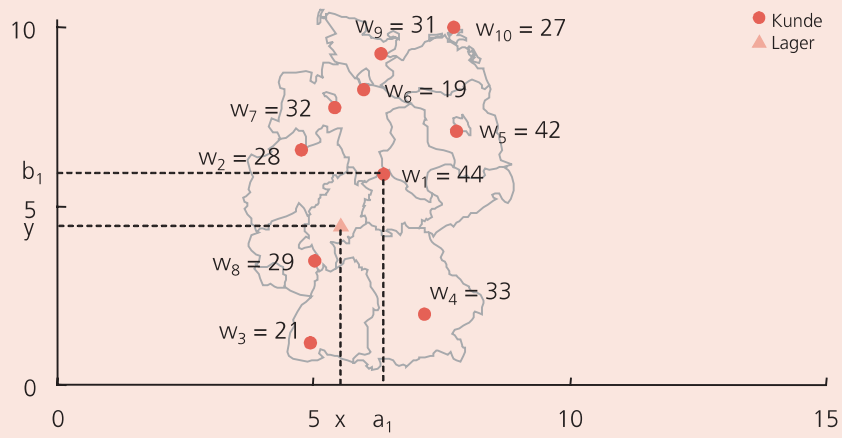
3.1.1 Ein Standort

Wir widmen uns nun der Aufgabe, den optimalen Standort für ein einzelnes Lager zu finden. Von diesem Lager aus werden J Kunden bedient.

Abbildung 3.3 zeigt ein Beispiel mit zehn Kunden und einem Lager. Die x-Koordinaten der Kundenstandorte bezeichnen wir mit a_j, die y-Koordinaten bezeichnen wir

Abbildung 3.3

Lager- und Kundenstandorte



mit b_j. Die Nachfrage von Kunde j beträgt w_j. Kunde 1 hat beispielsweise Standort $a_1 = 7$ und $b_1 = 6$ und eine Nachfrage von $w_1 = 44$.

Unser Ziel ist es, den optimalen Standort (x, y) des Lagers zu finden, der die Transportkosten zwischen dem Lager und allen Kunden minimiert. x und y sind also die Entscheidungsvariablen unseres Optimierungsproblems und (a_1, b_1), (a_2, b_2), … , (a_J, b_J) sowie $w_1, w_2, \ldots, w_J$ sind bekannte Parameterwerte. Mathematisch ausgedrückt lautet unser Optimierungsproblem

$$\min_{x,y} Z(x, y) = \min_{x,y} \sum_{j=1}^{J} w_j \, d_j(x, y) \,, \tag{3.1}$$

wobei $d_j(x, y)$ die Entfernung von Lagerstandort (x, y) zum Kundenstandort (a_j, b_j) bezeichnet. Sie wird mit der Nachfrage w_j gewichtet, so dass $Z(x, y)$ für die gesamten Transportkosten steht.

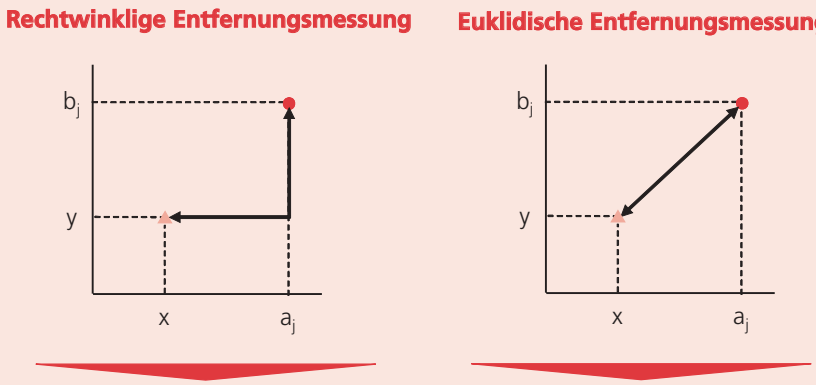
Wie groß diese Entfernung ist, hängt davon ab, wie wir sie messen. Die beiden gängigsten Verfahren, die rechtwinklige Entfernungsmessung und die euklidische Entfernungsmessung, sind in Abbildung 3.4 dargestellt. Bei der *rechtwinkligen Entfernungsmessung* gehen wir davon aus, dass man sich nur horizontal oder vertikal fortbewegen kann, nicht aber gleichzeitig in beide Richtungen. Um vom Lagerstandort (x, y) zum Kundenstandort (a_j, b_j) zu gelangen, müssen also die horizontale Entfernung vom Lager zum Kunden, $|a_j - x|$, plus die vertikale Entfernung vom Lager zum Kunden, $|b_j - y|$, zurückgelegt werden. Die Entfernung vom Lager zum Kunden j beträgt dann

$$d_j(x, y) = |a_j - x| + |b_j - y| \,. \tag{3.2}$$

Mit der rechtwinkligen Entfernungsmessung lässt sich die Entfernung zwischen Lager und Kunden in Städten häufig gut abschätzen. Dieses Entfernungsmaß wird auch

Abbildung 3.4

Rechtwinklige und euklidische Entfernungsmessung



Manhattan-Entfernung genannt, da die Straßen von Manhattan schachbrettartig angeordnet sind und daher dieses Entfernungsmaß gute Ergebnisse liefert.

Bei der *euklidischen Entfernungsmessung* wird die Länge der direkten Verbindungslinie vom Lagerstandort (x, y) zum Kundenstandort (a_j, b_j) gemessen. Die Entfernung beträgt dann

$$d_j(x, y) = \sqrt{(a_j - x)^2 + (b_j - y)^2}\,. \tag{3.3}$$

Mit der euklidischen Entfernungsmessung lässt sich die Entfernung zwischen Lager und Kunde gut abschätzen, wenn Lager und Kunde weit entfernt sind, sich also beispielsweise das Lager in Berlin und der Kunde in München befindet. Denn dann kann angenommen werden, dass Verkehrswege existieren, die annähernd auf der direkten Verbindungslinie liegen.

Im Folgenden zeigen wir zunächst, wie der optimale Standort des Lagers bei rechtwinkliger Entfernungsmessung bestimmt werden kann und danach, wie er bei euklidischer Entfernungsmessung bestimmt werden kann.

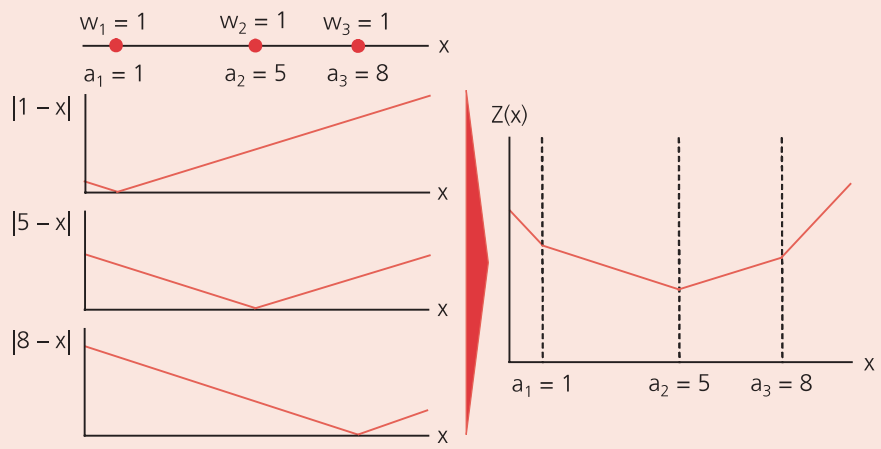
Rechtwinklige Entfernungen

Zunächst betrachten wir ein vereinfachtes eindimensionales Problem, bei dem sich alle Kunden auf einer Linie befinden. Mit den Erkenntnissen, die wir aus der Lösung dieses Problems gewinnen, ist es dann einfach, den optimalen Standort für den zweidimensionalen Fall zu finden.

Im eindimensionalen Fall muss ein Lager auf einer Geraden angeordnet werden. Abbildung 3.5 zeigt ein Beispiel mit drei Kunden. Im eindimensionalen Fall lautet

Abbildung 3.5

Beispiel mit rechtwinkliger Entfernung



das Optimierungsproblem

$$\min_x Z(x) = \min_x \sum_{j=1}^{J} w_j \, |a_j - x| \, . \tag{3.4}$$

Dieses Optimierungsproblem minimiert die Gesamtstrecke, über die die Kundenbestellungen transportiert werden, also die Summe der Produkte aus Kundennachfrage und Entfernungen der Kunden zum Lager.

Betrachten wir nun einen beliebigen Term $w_j|a_j - x|$ der Kostenfunktion $Z(x)$. Für $x < a_j$ lautet dieser Term $w_j(a_j - x)$, er fällt also linear in x mit Steigung $-w_j$. Für $x > a_j$ lautet dieser Term $w_j(x - a_j)$, er steigt also linear in x mit Steigung w_j. Der Graph der Funktion hat daher eine V-Form mit einem Minimum von null an der Stelle $x = a_j$. In unserem Beispiel besteht die Kostenfunktion aus der Summe von drei Termen der Form $w_j|a_j - x|$: $Z(x) = w_1|1 - x| + w_2|5 - x| + w_3|8 - x|$. Diese Kostenfunktion $Z(x)$ heißt stückweise linear, da sie zwischen den a_j-Werten jeweils linear ist. Da in unserem Beispiel alle $w_j = 1$ sind, beträgt die Steigung $-1 - 1 - 1 = -3$ für $x < 1$, die Steigung $+1 - 1 - 1 = -1$ für $1 < x < 5$, die Steigung $+1 + 1 - 1 = +1$ für $5 < x < 8$ und die Steigung $+1 + 1 + 1 = +3$ für $x > 8$. Aus der Grafik der Kostenfunktion können wir die optimale Lösung ablesen: $x^* = 5$.

Aber wie können wir generell die optimale Lösung finden? Um diese Frage zu beantworten, betrachten wir zunächst ein beliebiges x ($x \neq a_j$) und bestimmen die Steigung der Kostenfunktion an dieser Stelle. Die Steigung der Kostenfunktion an dieser Stelle ist die Summe der Steigungen der Terme $w_j|a_j - x|$. Für Terme mit $a_j < x$ beträgt sie $+w_j$, für Terme mit $a_j > x$ beträgt sie $-w_j$. Wir können also die Steigung an der Stelle x bestimmen, indem wir die Nachfragen w_j der Kunden, die links von x liegen (Kunden mit $a_j < x$), mit einem positiven Vorzeichen, und die Nachfragen w_j der Kunden, die rechts von x liegen (Kunden mit $a_j > x$), mit einem negativen Vorzeichen versehen und dann diese Nachfragen aufsummieren. In unserem Beispiel können wir so die Steigung an der Stelle $x = 7$ berechnen: Kunden 1 und 2 liegen links von $x = 7$ und Kunde 3 liegt rechts von $x = 7$. Die Steigung an der Stelle $x = 7$ beträgt also $+1 + 1 - 1 = +1$. Würde die Nachfrage von Kunde 1 $w_1 = 3$ betragen, wäre die Steigung $+3 + 1 - 1 = +3$.

Wir fassen nun unsere Erkenntnisse über die Kostenfunktion zusammen und nutzen diese Erkenntnisse dann, um ein einfaches Verfahren zu entwerfen, mit dem wir den optimalen Standort x^* für unser Lager finden können. Zur einfacheren Erläuterung gehen wir davon aus, dass die a_j aufsteigend sortiert sind, also $a_1 < a_2 < \cdots < a_J$.

Wir haben gesehen, dass die Kostenfunktion stückweise linear ist und dass die Steigung der Kostenfunktion an der Stelle x gleich der Summe der Nachfragen links von x minus der Summe der Nachfragen rechts von x ist. Zwischen den a_j-Werten ist die Steigung konstant, sie ändert sich aber bei jedem a_j: Für $x < a_j$ ist die Steigung geringer als für $x > a_j$. Der optimale Standort für das Lager liegt daher bei dem Kunden j, bei dem die Steigung der Kostenfunktion links von a_j negativ und rechts von a_j positiv ist. Dann steigen die Kosten an, wenn wir uns von x aus nach links oder nach rechts bewegen, und a_j muss daher die optimale Lösung sein.

Diesen optimalen Standort bestimmen wir, indem wir zunächst für jeden Standort j die kumulierte Nachfrage von Standort j und allen Standorten links von j berechnen:

$$W_j = w_1 + w_2 + \cdots + w_j \, . \tag{3.5}$$

Wenn sich das Lager am Standort von Kunde j befindet, dann liegen $W_{j-1} = w_1 + w_2 + \cdots + w_{j-1}$ Nachfragen links vom Lager und $W_J - W_j = w_{j+1} + w_{j+2} + \cdots + w_J$

Nachfragen rechts vom Lager. Der optimale Standort für das Lager befindet sich bei dem Kunden j, von dem aus nicht mehr als 50 Prozent der Nachfrage links und nicht mehr als 50 Prozent der Nachfrage rechts liegen. Warum? Dann beträgt die Steigung der Kostenfunktion links von Standort a_j $(x > a_{j-1}, x < a_j)$

$$\underbrace{+(w_1 + w_2 + \cdots + w_{j-1})}_{\leq \frac{1}{2} W_J} - \underbrace{(w_j + w_{j+1} + \cdots + w_J)}_{\geq \frac{1}{2} W_J} \leq 0 \,. \tag{3.6}$$

Und die Steigung der Kostenfunktion rechts von Standort a_j $(x > a_j, x < a_{j+1})$ beträgt

$$\underbrace{+(w_1 + w_2 + \cdots + w_j)}_{\geq \frac{1}{2} W_J} - \underbrace{(w_{j+1} + w_{j+1} + \cdots + w_J)}_{\leq \frac{1}{2} W_J} \geq 0 \,.$$

Die Steigung ist also links von Standort j negativ (genauer: nicht-positiv) und rechts von Standort j positiv (genauer: nicht-negativ). Standort j muss daher die optimale Lösung sein.

Tabelle 3.1 zeigt ein Beispiel mit sechs Kunden, die unterschiedlich hohe Nachfragen haben. Zur Bestimmung des optimalen Standorts sortieren wir die Kunden zunächst in aufsteigender Reihenfolge ihrer Standorte a_j, berechnen dann die kumulierten Nachfragen und wählen anschließend den Kundenstandort für unser Lager aus, von dem aus nicht mehr als 50 Prozent der Nachfrage links und nicht mehr als 50 Prozent der Nachfrage rechts liegen. Die Berechnungen sind in Tabelle 3.2 aufgeführt. Der optimale Standort für das Lager ist also $x^* = 6$. Denn links von diesem Standort liegen $50 \leq 204/2 = 102$ Nachfragen. Und rechts von diesem Standort liegen $101 \leq 204/2 = 102$ Nachfragen. Der optimale Wert der Zielfunktion beträgt

$$\begin{aligned} Z(x^*) &= \sum_{j=1}^{J} w_j \, |a_j - x^*| \\ &= 31\,|5-6| + 28\,|8-6| + 19\,|0-6| + \cdots + 41\,|10-6| \\ &= 621 \,. \end{aligned}$$

Tabelle 3.1

Kundenstandorte

Kunde j	Standort a_j	Nachfrage w_j
1	5	31
2	8	28
3	0	19
4	6	53
5	14	32
6	10	41

Tabelle 3.2

Bestimmung des optimalen Lagerstandortes

Kunde j	Standort a_j	Nachfrage w_j	Kumulierte Nachfrage
3	0	19	19
1	5	31	50
4	6	53	103⇐
2	8	28	131
6	10	41	172
5	14	32	204

Es kann vorkommen, dass mehrere Standorte optimal sind. Zum Beispiel, wenn vier Kunden mit gleichen Nachfragen von einem Lager aus bedient werden müssen.

Abbildung 3.6 zeigt die Standorte der Kunden und die Kostenfunktion. In diesem Beispiel sind Standorte $a_2 = 4$ und $a_3 = 7$ optimal: Die Nachfrage links von Standort a_2 beträgt $w_1 = 1$, also nicht mehr als 50 Prozent der Gesamtnachfrage, und die Nachfrage rechts von Standort a_2 beträgt $w_3 + w_4 = 2$, also auch nicht mehr als 50 Prozent der Gesamtnachfrage. Standort a_2 ist also optimal. Mit einer analogen Rechnung finden wir heraus, dass auch Standort a_3 optimal ist. Die Betrachtung der

Abbildung 3.6

Beispiel mit vier Kunden und rechtwinkliger Entfernung

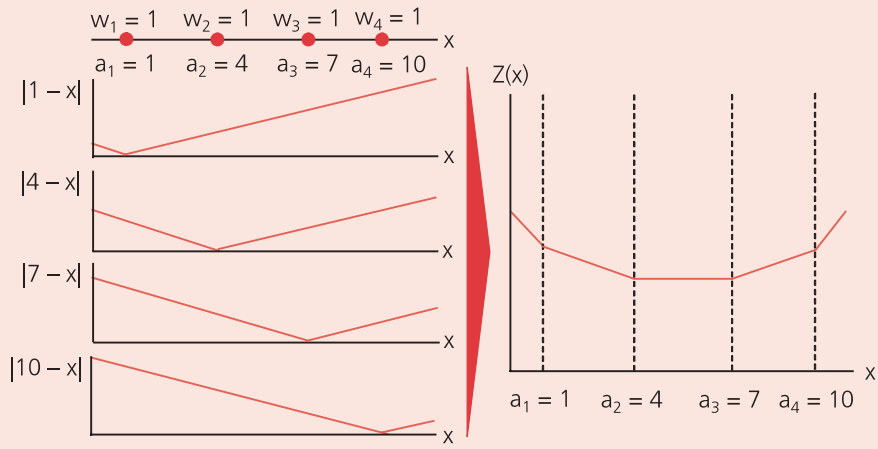
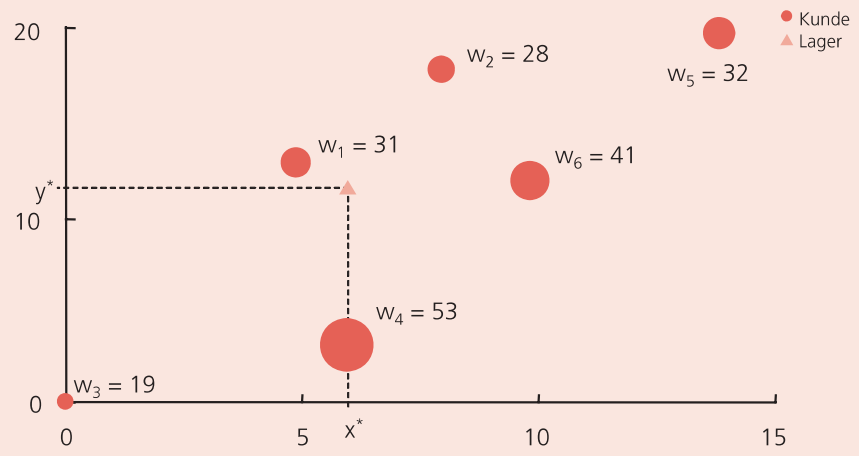


Abbildung 3.7

Kundenstandorte und -nachfragen



Kostenfunktion zeigt, dass diese zwischen 4 und 7 flach ist, das heißt die Steigung null hat. In diesem Beispiel sind daher alle Standorte $4 \leq x \leq 7$ optimal.

Bisher haben wir uns nur mit dem eindimensionalen Fall beschäftigt. Als Nächstes betrachten wir den zweidimensionalen Fall, also das Problem, ein Lager in einer Ebene anzuordnen. Abbildung 3.7 zeigt sechs Händler, die von einem Lager aus bedient werden sollen. Unser Ziel ist es, einen Standort für das Lager zu finden, so dass die Transportkosten minimiert werden. Mathematisch formuliert lautet das Optimierungsproblem

$$\min_{x,y} Z(x,y) = \min_{x,y} \sum_{j=1}^{J} w_j \left(|a_j - x| + |b_j - y|\right) . \tag{3.7}$$

Dieses Optimierungsproblem können wir umformulieren als

$$\min_{x,y} Z(x,y) = \min_{x,y} \sum_{j=1}^{J} w_j \, |a_j - x| + \sum_{j=1}^{J} w_j \, |b_j - y| \tag{3.8}$$

$$= \min_{x} \sum_{j=1}^{J} w_j \, |a_j - x| + \min_{y} \sum_{j=1}^{J} w_j \, |b_j - y| . \tag{3.9}$$

Diese Umformung ist zulässig, weil die Terme $w_j \, |a_j - x|$ und $w_j \, |b_j - y|$ voneinander unabhängig sind: Der erste Term hängt von x ab, aber nicht von y. Der zweite Term hängt hingegen nur von y ab, aber nicht von x. Wir können das Optimierungsproblem daher als zwei voneinander unabhängige Optimierungsprobleme betrachten und erst die optimale x-Koordinate für unser Lager bestimmen und dann die optimale y-Koordinate.

Die optimale x-Koordinate für unser Lager finden wir, indem wir das Optimierungsproblem

$$\min_x \sum_{j=1}^{J} w_j \, |a_j - x| \tag{3.10}$$

lösen. Wenn wir Formeln (3.4) und (3.10) vergleichen, sehen wir, dass dies genau das Optimierungsproblem ist, das wir bereits im eindimensionalen Fall gelöst haben. Die optimale x-Koordinate des Lagers entspricht also der x-Position des Kunden, von der aus nicht mehr als 50 Prozent der Nachfrage links liegen und von der aus nicht mehr als 50 Prozent der Nachfrage rechts liegen.

Die optimale y-Koordinate für unser Lager finden wir, indem wir das Optimierungsproblem

$$\min_y \sum_{j=1}^{J} w_j \, |b_j - y| \tag{3.11}$$

lösen. Dieses Optimierungsproblem entspricht Formel (3.10), nur mit y statt x und mit b_j statt a_j. Die optimale y-Koordinate des Lagers entspricht somit der y-Position des Kunden, unter der nicht mehr als 50 Prozent der Nachfrage liegen und über der nicht mehr als 50 Prozent der Nachfrage liegen.

Tabelle 3.3 und Abbildung 3.7 zeigen sechs Kundenstandorte und deren Nachfragen. Die optimalen Werte für die x-Koordinate und die y-Koordinate des Lagers finden wir, indem wir zunächst nur die x-Koordinaten der Standorte betrachten, diese in aufsteigender Reihenfolge der a_j sortieren und dann den Standort finden, von dem aus nicht mehr als 50 Prozent der Nachfrage links und nicht mehr als 50 Prozent der Nachfrage rechts liegen. Mit dem gleichen Vorgehen bestimmen wir den optimalen Wert der y-Koordinate des Lagers. Tabelle 3.4 zeigt die Ergebnisse. Der optimale Standort für das Lager ist also $x^* = 6$ und $y^* = 12$. Als Wert für die Zielfunktion ergibt sich

$$\begin{aligned} Z(x^*, y^*) &= \sum_{j=1}^{J} w_j \left(|a_j - x^*| + |b_j - y^*|\right) \\ &= 31\,(|5-6| + |13-12|) + \cdots + 41\,(|10-6| + |12-12|) = 1\,781\,. \end{aligned}$$

Tabelle 3.3

Beispiel Kundenstandorte

Kunde	Standort		Nachfrage
j	a_j	b_j	w_j
1	5	13	31
2	8	18	28
3	0	0	19
4	6	3	53
5	14	20	32
6	10	12	41

Tabelle 3.4

Bestimmung des optimalen Lagerstandortes

Kunde j	Standort a_j	Nachfrage w_j	Kumulierte Nachfrage
3	0	19	19
1	5	31	50
4	6	53	103 ⇐
2	8	28	131
6	10	41	172
5	14	32	204

Kunde j	Standort b_j	Nachfrage w_j	Kumulierte Nachfrage
3	0	19	19
4	3	53	72
6	12	41	113 ⇐
1	13	31	144
2	18	28	172
5	20	32	204

Ein schneller Weg, die optimalen x-Koordinaten und y-Koordinaten in den Tabellen zu identifizieren, ist es übrigens, nach der kleinsten kumulierten Nachfrage zu suchen, die größer oder gleich der halben Gesamtnachfrage ist. In unserem Beispiel würden wir mit diesem Vorgehen nach der kleinsten kumulierten Nachfrage suchen, die größer oder gleich $204/2 = 102$ ist.

Wie der optimale Standort für ein Lager mit rechtwinkliger Entfernungsmessung bestimmt wird, haben wir gerade gesehen. Wie der optimale Standort bei euklidischer Entfernungsmessung bestimmt wird, untersuchen wir im folgenden Abschnitt.

Euklidische Entfernungen

Bei der euklidischen Entfernungsmessung entspricht die Entfernung zwischen Lager und Kunde der Länge der direkten Verbindungslinie zwischen Lager und Kunde. Das Optimierungsproblem lautet

$$\min_{x,y} Z(x,y) = \min_{x,y} \sum_{j=1}^{J} w_j \sqrt{(a_j - x)^2 + (b_j - y)^2}\,. \tag{3.12}$$

Die Lösung zu diesem Optimierungsproblem kann nicht mehr separat für x und y gefunden werden wie bei der rechtwinkligen Entfernungsmessung. Die Wurzel verhindert, dass zwei unabhängige Terme gebildet werden können, von denen der eine nur von x und der andere nur von y abhängt. Um die optimale Lösung zu finden, werden die partiellen Ableitungen der Zielfunktion $Z(x, y)$ nach x und y gebildet und gleich null gesetzt. Da die partiellen Ableitungen nicht nach x und y aufgelöst werden können, wird ein numerischer Lösungsalgorithmus genutzt, um die optimalen Werte für x und y zu bestimmen.

Die partiellen Ableitungen von $Z(x, y)$ nach x und y lauten

$$\frac{\partial}{\partial x} Z(x,y) = \sum_{j=1}^{J} w_j \frac{(x - a_j)}{\sqrt{(a_j - x)^2 + (b_j - y)^2}} \quad \text{und} \tag{3.13}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} Z(x,y) = \sum_{j=1}^{J} w_j \frac{(y - b_j)}{\sqrt{(a_j - x)^2 + (b_j - y)^2}} \,. \tag{3.14}$$

Zur Vereinfachung der Schreibweise definieren wir eine Funktion

$$g_j(x,y) = \frac{w_j}{\sqrt{(a_j - x)^2 + (b_j - y)^2}} \tag{3.15}$$

und setzen diese Funktion in die Formeln (3.13) und (3.14) ein. Außerdem setzen wir die partiellen Ableitungen gleich null:

$$\frac{\partial}{\partial x} Z(x,y) = \sum_{j=1}^{J} g_j(x,y)(x - a_j) = 0 \quad \text{und} \tag{3.16}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} Z(x,y) = \sum_{j=1}^{J} g_j(x,y)(y - b_j) = 0 \,. \tag{3.17}$$

Die partiellen Ableitungen lösen wir nun nach x und y auf:

$$x = \frac{\sum_{j=1}^{J} a_j g_j(x,y)}{\sum_{j=1}^{J} g_j(x,y)} \,, \tag{3.18}$$

$$y = \frac{\sum_{j=1}^{J} b_j g_j(x,y)}{\sum_{j=1}^{J} g_j(x,y)} \,. \tag{3.19}$$

Um die optimalen Werte für x und y zu finden, können wir nicht einfach die Parameterwerte des Problems in Formeln (3.18) und (3.19) einsetzen, denn die Formeln für x und y hängen von den Variablen x und y selbst ab. Um die optimalen Werte für x und y zu finden, können wir aber einen iterativen Lösungsalgorithmus verwenden, den wir anhand der gleichen Beispieldaten, die wir auch bei der Optimierung mit rechtwinkligen Entfernungen verwendet haben, erläutern. Die Kundenstandorte und Kundennachfragen sind in Tabelle 3.3 dargestellt.

Tabelle 3.5 zeigt die Lösung des Problems. Dabei ist t der Iterationsindex.

Tabelle 3.5

Lösung Standortproblem

t	$g_1()$	$g_2()$	$g_3()$	$g_4()$	$g_5()$	$g_6()$	x_t	y_t
0							6,000	12,000
1	21,9	4,4	1,4	5,9	2,8	10,3	6,900	12,024
2	14,5	4,6	1,4	5,8	3,0	13,2	7,489	11,932
3	11,4	4,6	1,3	5,9	3,1	16,3	7,867	11,879
4	10,1	4,6	1,3	5,8	3,1	19,2	8,106	11,866
5	9,4	4,6	1,3	5,8	3,2	21,6	8,261	11,870
6	9,0	4,6	1,3	5,8	3,2	23,5	8,365	11,878
7	8,7	4,6	1,3	5,8	3,2	25,0	8,436	11,855
8	8,6	4,6	1,3	5,8	3,3	26,1	8,486	11,891
9	8,5	4,6	1,3	5,7	3,3	27,0	8,522	11,895
10	8,4	4,6	1,3	5,7	3,3	27,7	8,548	11,898

Abbildung 3.8 zeigt, wie sich die Lösung von Iteration zu Iteration verändert. Wir finden die Lösung folgendermaßen:

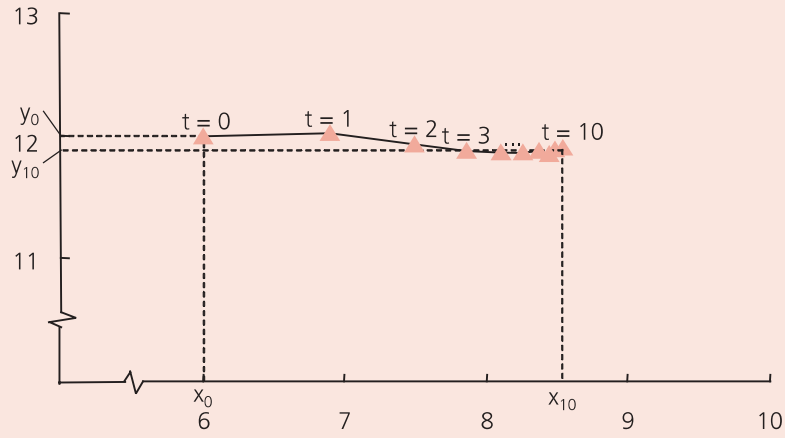
1. **Auswahl Anfangslösung** Zunächst wird eine Anfangslösung x_0 und y_0 gewählt. Je besser diese Anfangslösung ist, desto schneller wird die optimale Lösung gefunden. Als gute Anfangslösung kann beispielsweise die Lösung des Problems mit rechtwinkligen Entfernungen genutzt werden. Diese kennen wir bereits für unser Beispiel: $x_0 = 6$, $y_0 = 12$.

2. **Update-Lösung** Auf Basis der aktuellen Werte x_t und y_t werden die neuen Werte x_{t+1} und y_{t+1} berechnet. Dazu werden die aktuellen Werte x_t und y_t in die Formeln (3.18) und (3.19) eingesetzt. In Tabelle 3.5 werden die neuen Werte x_{t+1} und y_{t+1} berechnet, indem zunächst die Funktionen $g_j(x_t, y_t)$ für $j = 1, \ldots, 6$ mit den aktuellen Werten von x_t und y_t berechnet werden. Dann werden die $g_j(x_t, y_t)$-Werte in die Formeln (3.18) und (3.19) eingesetzt, um die neuen Werte x_{t+1} und y_{t+1} zu berechnen.

3. **Terminierung Algorithmus** Wenn x_{t+1} näherungsweise x_t entspricht und y_{t+1} näherungsweise y_t entspricht, wählen wir x_{t+1} und y_{t+1} als optimale Lösung. Ansonsten erhöhen wir t um 1 und wiederholen Schritt 2. Was näherungsweise bedeutet, bestimmt der Anwender, also Sie. In Tabelle 3.5 haben wir nach zehn Iterationen den Algorithmus abgebrochen, da sich die Werte für x und y von Iteration 9 nach Iteration 10 nur um maximal 0,026, also nur in der zweiten Nachkommastelle unterscheiden.

Abbildung 3.8

Iterationen



Die Kosten dieser Lösung betragen

$$Z(8{,}548,\ 11{,}898) = \sum_{j=1}^{J} w_j \sqrt{\left(a_j - 8{,}548\right)^2 + \left(b_j - 11{,}898\right)^2} \tag{3.20}$$

$$= 1\,427{,}8\,. \tag{3.21}$$

Mit diesem Algorithmus kann der optimale Standort eines Lagers bei euklidischer Entfernungsmessung gefunden werden. Da bei einer guten Wahl der Anfangslösung meist nur wenige Iterationen notwendig sind, bis der Algorithmus terminiert, kann er auch bei einer sehr großen Anzahl Kunden problemlos eingesetzt werden.

Bisher haben wir uns auf die Bestimmung des optimalen Standorts eines Lagers konzentriert. Wie die optimalen Standorte mehrerer Lager bestimmt werden können, untersuchen wir im folgenden Abschnitt.

3.1.2 Mehrere Standorte

Häufig werden nicht alle Kunden aus einem einzigen Lager bedient, sondern aus unterschiedlichen Lagern. So haben beispielsweise die meisten High-Tech-Unternehmen mindestens drei Ersatzteilzentrallager, aus denen sie Kundennachfragen erfüllen: Eins in Europa, eins in Asien und eins in Nordamerika. Wenn $I > 1$ Lager positioniert werden sollen, müssen nicht nur die Lagerstandorte bestimmt werden, sondern es muss auch entschieden werden, welche Kunden von welchem Lager aus bedient werden sollen. Dieses Optimierungsproblem ist mathematisch recht komplex und es ist schwierig, es optimal zu lösen. Daher werden anstatt optimaler Lösungsverfahren häufig Heuristiken eingesetzt. Heuristiken finden Lösungen, die in der Regel gut, aber nicht unbedingt optimal sind. Dafür lassen sie sich einfacher implementieren und

Tabelle 3.6

Zuordnungsoptimierung: Erste Iteration

Kunde	Standort		Nachfrage	Entfernung	
j	a_j	b_j	w_j	$d_j(8,8)$	$d_j(15,15)$
1	1	1	17	14⇐	28
2	2	5	21	9⇐	23
3	4	4	32	8⇐	22
4	10	15	45	9	5⇐
5	12	10	15	6⇐	8
6	15	10	31	9	5⇐
7	17	18	19	19	5⇐

haben kürzere Laufzeiten als optimale Lösungsverfahren. Wir stellen als Nächstes eine Heuristik zur Lösung des Problems vor, mit der sich in der Regel gute Ergebnisse erzielen lassen.

Die Heuristik besteht aus zwei Optimierungen: Der Optimierung der Zuordnung und der Optimierung der Standorte. Bei der Optimierung der *Zuordnung* werden die Kunden den Lagerstandorten optimal zugeordnet. Bei der Optimierung der *Standorte* werden die optimalen Standorte der Lager bestimmt. Die beiden Optimierungen werden mehrfach nacheinander durchgeführt. Wir erläutern die Details der Heuristik zunächst allgemein und dann anhand des Beispiels in Tabelle 3.6.

Abbildung 3.9 zeigt, wie sich die Lösung von Iteration zu Iteration verbessert. Die Heuristik funktioniert folgendermaßen:

1. **Auswahl Anfangslösung** Als Erstes werden vorläufige Standorte für die I Lager ausgewählt. Es können beispielsweise Lagerstandorte gewählt werden, die jeweils in der Nähe einer Kundenansammlung liegen.

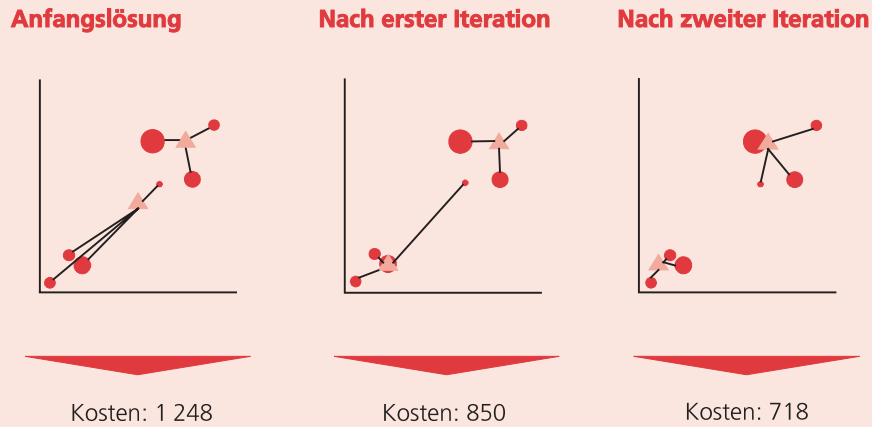
2. **Optimierung Zuordnung** Für die gegebenen Lagerstandorte werden die optimalen Zuordnungen von Kunden zu Lagern ermittelt. Dazu wird für jeden Kunden das am nächsten liegende Lager ausgewählt und der Kunde diesem Lager zugeordnet.

3. **Optimierung Standorte** Für die gegebene Zuordnung von Kunden zu Lagern werden die optimalen Lagerstandorte ermittelt. Dazu wird für jedes Lager der optimale Standort ausgewählt, und zwar unter der Annahme, dass genau die Kunden von dem Lager aus versorgt werden, die dem Lager bei der Optimierung der Zuordnung zugewiesen wurden.

4. **Terminierung Algorithmus** Schritte 2 und 3 werden so lange abwechselnd durchgeführt, wie sich die Lagerstandorte von einer Iteration zur nächsten ändern. Dann terminiert der Algorithmus mit den aktuellen Lagerstandorten und der aktuellen Zuordnung von Kunden zu Lagern als Lösung.

Abbildung 3.9

Iterationen bei mehreren Standorten



Wenden wir nun den Algorithmus auf unser Beispiel an. Als *Anfangslösung* wählen wir $x_1 = 8$, $y_1 = 8$ und $x_2 = 15$, $y_2 = 15$ als Standorte für die Lager 1 und 2, da diese Standorte jeweils in der Nähe mehrerer Kunden liegen. Für diese Lagerstandorte bestimmen wir mit Hilfe der rechtwinkligen Entfernung die optimale *Zuordnung* von Kunden zu Lagern. Tabelle 3.6 zeigt, dass die Kunden 1, 2, 3 und 5 dem Lager 1 und die Kunden 4, 6 und 7 dem Lager 2 zugeordnet werden. Für die gegebenen Lagerstandorte kennen wir nun die optimalen Kundenzuordnungen.

Als Nächstes optimieren wir die *Standorte* der Lager. Wir nehmen die Zuordnung von Kunden zu Lagern als gegeben an und optimieren die Lagerstandorte. Tabelle 3.7 zeigt, dass sich als optimaler Standort für Lager 1 der Standort $x_1 = 4$, $y_1 = 4$ ergibt. Mit dem gleichen Vorgehen ergibt sich für Lager 2 als optimaler Standort $x_2 = 15$, $y_2 = 15$.

Eine *Terminierung* des Algorithmus erfolgt nicht, da sich der Standort von Lager 1 gegenüber der Anfangslösung geändert hat. Wir durchlaufen den Algorithmus deshalb erneut.

Wir beginnen mit der *Zuordnung* von Kunden zu Lagern. Da sich der Standort von Lager 1 bei der letzten Standortoptimierung verändert hat, haben sich auch die Entfernungen der Kunden zum Lager 1 verändert. In Tabelle 3.8 sind die Entfernungen der Kunden zum neuen Standort von Lager 1, $x_1 = 4$, $y_1 = 4$, dargestellt. Für jeden Kunden suchen wir nun wieder das am nächsten liegende Lager. Für die gegebenen Lagerstandorte ist es optimal, Kunden 1, 2 und 3 von Lager 1 und Kunden 4, 5, 6 und 7 von Lager 2 aus zu beliefern. Die Zuordnung der Kunden zu den Lagern hat sich gegenüber der vorigen Zuordnung geändert. Kunde 5 wurde bei der vorigen Zuordnung von Lager 1 aus beliefert und wird bei der aktuellen Zuordnung von Lager 2 aus beliefert. Die Standorte der Lager sind daher wahrscheinlich nicht mehr optimal.

Tabelle 3.7

Standortoptimierung: Erste Iteration

Kunde j	Standort a_j	Nachfrage w_j	Kumulierte Nachfrage
1	1	17	17
2	2	21	38
3	4	32	70⇐
5	12	15	85

Kunde j	Standort b_j	Nachfrage w_j	Kumulierte Nachfrage
1	1	17	17
3	4	32	49⇐
2	5	21	70
5	10	15	85

Tabelle 3.8

Zuordnungsoptimierung: Zweite Iteration

Kunde	Standort		Nachfrage	Entfernung	
j	a_j	b_j	w_j	$d_j(4,4)$	$d_j(15,15)$
1	1	1	17	6⇐	28
2	2	5	21	3⇐	23
3	4	4	32	0⇐	22
4	10	15	45	17	5⇐
5	12	10	15	14	8⇐
6	15	10	31	17	5⇐
7	17	18	19	27	5⇐

Deshalb optimieren wir die *Standorte* erneut. Wir nehmen die Zuordnung von Kunden zu Lagern als gegeben an und suchen für diese Zuordnung die optimalen Lagerstandorte. Tabelle 3.9 zeigt, dass sich als optimaler Standort für Lager 1 der Standort $x_1 = 2$, $y_1 = 4$ ergibt. Mit dem gleichen Vorgehen ergibt sich für Lager 2 der optimale Standort $x_2 = 12$, $y_2 = 15$.

Wieder erfolgt keine *Terminierung* des Algorithmus, da sich der Standort eines Lagers verändert hat. Wir durchlaufen den Algorithmus also erneut.

Tabelle 3.9

Standortoptimierung: Zweite Iteration

Kunde j	Standort a_j	Nachfrage w_j	Kumulierte Nachfrage
1	1	17	17
2	2	21	38⇐
3	4	32	70

Kunde j	Standort b_j	Nachfrage w_j	Kumulierte Nachfrage
1	1	17	17
3	4	32	49⇐
2	5	21	70

Tabelle 3.10

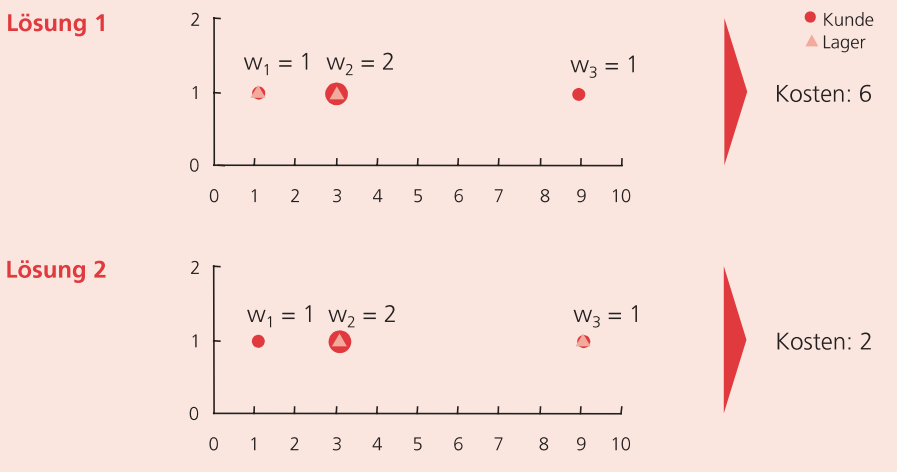
Zuordnungsoptimierung: Dritte Iteration

Kunde	Standort		Nachfrage	Entfernung	
j	a_j	b_j	w_j	$d_j(2,4)$	$d_j(12,15)$
1	1	1	17	4⇐	25
2	2	5	21	1⇐	20
3	4	4	32	2⇐	19
4	10	15	45	19	2⇐
5	12	10	15	16	5⇐
6	15	10	31	19	8⇐
7	17	18	19	29	8⇐

Wir beginnen wieder mit der Optimierung der *Zuordnung*. Für die gegebenen Lagerstandorte bestimmen wir die optimale Zuordnung von Kunden zu Lagern. Da sich die Standorte beider Lager bei der letzten Standortoptimierung geändert haben, haben sich auch die Entfernungen der Kunden zu den beiden Lagern verändert. In Tabelle 3.10 sind die Entfernungen der Kunden zum neuen Standort von Lager 1, $x_1 = 2$, $y_1 = 4$, und zum neuen Standort von Lager 2, $x_2 = 12$, $y_2 = 15$, dargestellt. Für die gegebenen Lagerstandorte ist es optimal, Kunden 1, 2 und 3 von Lager 1 aus zu beliefern und Kunden 4, 5, 6 und 7 von Lager 2 aus zu beliefern. Das ist die gleiche Zuordnung von Kunden zu Lagern wie in der vorigen Zuordnung. Da sich die

Abbildung 3.10

Lokales und globales Optimum



Zuordnung nicht geändert hat, ist es einfach, die optimalen *Standorte* zu bestimmen. Es sind die gleichen wie zuvor, $x_1 = 2$, $y_1 = 4$ und $x_2 = 12$, $y_2 = 15$. Da sich die Standorte nicht geändert haben, erfolgt die *Terminierung* des Algorithmus.

Wir können nun die Kosten der Lösung berechnen. Diese betragen

$$Z = 17 \cdot 4 + 21 \cdot 1 + 32 \cdot 2 + 45 \cdot 2 + 15 \cdot 5 + 31 \cdot 8 + 19 \cdot 8 = 718\,.$$

Ob wir die optimale Lösung gefunden haben, wissen wir nicht. Die Lösung, die wir gefunden haben, stellt für die gegebenen Lagerstandorte zwar eine *optimale Zuordnung* von Kunden zu Lagern dar. Und für die gegebene Zuordnung nutzt sie die *optimalen Standorte*. Aber es könnte sein, dass durch gleichzeitige Optimierung der Zuordnung und der Standorte eine bessere Lösung gefunden werden könnte.

Abbildung 3.10 verdeutlicht diese Aussage. In dem Standortoptimierungsproblem mit drei Kunden sollen zwei Lagerstandorte bestimmt werden. Nehmen wir an, die Heuristik wird mit Lösung 1 als *Anfangslösung* gestartet. Dann folgt die *Zuordnungsoptimierung*. Diese ordnet wieder Kunde 1 dem linken Lager und Kunden 2 und 3 dem rechten Lager zu. Danach folgt die *Standortoptimierung*. Da Lager 1 nur einen Kunden hat, wird das Lager an dessen Standort positioniert. Lager 2 hat zwei Kunden mit Nachfragen $w_2 = 2$ und $w_3 = 1$. Es ist daher optimal, das Lager am Standort von Kunde 2 zu positionieren. Da sich die Standorte nicht von der Anfangslösung unterscheiden, folgt die *Terminierung* mit der Anfangslösung. Und dies, obwohl offensichtlich Lösung 2 besser wäre.

Zusammenfassung

In diesem Abschnitt haben Sie gelernt, wie die Standorte für ein oder mehrere Lager gefunden werden können, wenn diese Lager an beliebigen Orten positioniert

werden können. Für den Fall, dass für ein einzelnes Lager der optimale Standort gefunden werden soll, haben wir die rechtwinklige und die euklidische Entfernungsmessung untersucht. Zur Lösung des Optimierungsproblems wird bei *rechtwinkliger Entfernungsmessung* zunächst der Kunde identifiziert, von dem aus nicht mehr als 50 Prozent der Nachfrage links und nicht mehr als 50 Prozent der Nachfrage rechts liegen. Die horizontale Position dieses Kunden ist die optimale horizontale Position des Lagers. Die optimale vertikale Position des Lagers wird analog bestimmt. Bei *euklidischer Entfernungsmessung* können die optimale horizontale und vertikale Position des Lagers nicht mehr nacheinander, sondern müssen gleichzeitig bestimmt werden. Dazu wird ein iterativer Algorithmus eingesetzt, der die optimale Lösung numerisch bestimmt.

Wenn für mehr als ein Lager die optimalen Standorte gefunden werden sollen, ist es schwierig, die optimale Lösung zu finden. Es können aber Heuristiken eingesetzt werden, die gute Lagerstandorte, allerdings nicht immer optimale Lagerstandorte finden. Wir haben eine solche Heuristik vorgestellt. Die Heuristik optimiert zunächst die *Zuordnung* von Kunden zu Lagern und optimiert danach die *Standorte* der Lager. Diese Optimierungen werden so lange wiederholt, bis keine Verbesserungen mehr gefunden werden. Wir haben bei der Anwendung der Heuristik die rechtwinklige Entfernungsmessung eingesetzt. Die Heuristik kann aber auch bei euklidischer Entfernungsmessung eingesetzt werden.

Wir sind bisher davon ausgegangen, dass Lager an beliebigen Standorten positioniert werden können und wir haben nur die Transportkosten berücksichtigt. Mit diesen Annahmen lassen sich gute Lagerstandorte zwar zügig identifizieren, doch bieten sich für eine genauere und realitätsnähere Planung andere Verfahren an. Diese untersuchen wir als Nächstes.

3.2 Bestimmte Standorte

Wir betrachten nun realitätsnähere Modelle als im vorigen Abschnitt. Diese berücksichtigen zusätzlich zu den Transportkosten auch fixe und variable Produktions- beziehungsweise Standortkosten. Außerdem wählen wir nicht mehr beliebige Orte als Lösung aus, sondern berücksichtigen nur Standorte aus einer gegebenen Menge von Standorten. Diese vorgegebene Menge von Standorten wird durch den Anwender ausgewählt, der bei der Auswahl auch qualitative Faktoren berücksichtigen kann.

Im Folgenden formulieren wir zunächst das Basismodell der Standortplanung, mit dem sich die wichtigsten Standortentscheidungen modellieren lassen. Dieses Modell enthält einige ganzzahlige Entscheidungsvariablen und lässt sich mit einem Branch-and-Bound-Algorithmus effizient lösen. Wir erläutern daher die Funktionsweise des Branch-and-Bound-Algorithmus und wenden diesen dann auf die Lösung des Standortproblems an. Danach stellen wir einige Erweiterungen des Basismodells vor, mit denen sich beispielsweise Kapazitätsbeschränkungen der Standorte oder zweistufige Lagersysteme berücksichtigen lassen.

3.2.1 Formulierung Basismodell

Wir gehen davon aus, dass wir N potenzielle Standorte identifiziert haben, an denen jeweils ein Lager betrieben werden kann. Wenn an Standort n ein Lager betrieben wird, fallen fixe und variable Standortkosten an. Die *fixen Standortkosten* betragen

f_n. Darin sind Mieten, Versicherungen, Overheadkosten und andere Kosten enthalten, die unabhängig von der Menge sind, die von dem Lager ausgeliefert wird. Die *variablen Standortkosten* betragen v_n pro Einheit, die von dem Lager ausgeliefert wird. In den variablen Standortkosten sind Materialhandhabungskosten und alle anderen Kosten enthalten, die proportional zur ausgelieferten Menge sind. Die *Transportkosten* von Lager n zu Kunde j betragen t_{nj} je Einheit. In den Transportkosten sind Fahrzeugkosten, Mautkosten und alle anderen Kosten enthalten, die proportional zur Transportmenge vom Lager n zum Kunden j sind. Die Transportkosten werden auf Basis der tatsächlichen Entfernungen zwischen Lagern und Kunden bestimmt. Die *Nachfrage* von Kunde j beträgt w_j.

Zur Vereinfachung der Notation fassen wir die variablen Standortkosten und die Transportkosten unter dem Begriff Distributionskosten zusammen. Die *Distributionskosten* c_{nj} sind die Summe der variablen Kosten, die anfallen, um die gesamte Nachfrage von Kunde j aus Lager n zu liefern:

$$c_{nj} = \left(v_n + t_{nj}\right) w_j \,. \tag{3.22}$$

Wenn also die variablen Lagerkosten von Lager 1 $v_1 = 2{,}00$ €/Stück betragen, $t_{13} = 1{,}00$ €/Stück die Transportkosten von Lager 1 zum Kunden 3 sind und die Nachfrage von Kunde 3 $w_3 = 100$ Stück/Tag beträgt, dann betragen die Distributionskosten von Lager 1 zum Kunden 3 $c_{13} = (2{,}00$ €/Stück $+ 1{,}00$ €/Stück$)\,100$ Stück/Tag $=$ 300 €/Tag. Diese fallen natürlich nur dann an, wenn die gesamte Nachfrage von Kunde 3 aus Lager 1 erfüllt wird.

Unser Optimierungsproblem enthält zwei Kostenarten: Distributionskosten und fixe Standortkosten. Unser Ziel ist es, die Summe dieser beiden Kostenarten zu minimieren. Dazu müssen wir zwei Entscheidungen treffen: Erstens müssen wir entscheiden, an welchen Lagerstandorten Lager eröffnet werden sollen. Dazu definieren wir die folgenden binären Entscheidungsvariablen, also Entscheidungsvariablen, die nur die Werte 0 oder 1 annehmen können:

$$y_n = \begin{cases} = 1\,, & \text{wenn an Standort } n \text{ ein Lager eröffnet wird,} \\ = 0\,, & \text{wenn nicht.} \end{cases}$$

Zweitens müssen wir entscheiden, welcher Kunde von welchem Lager aus beliefert werden soll. Dazu definieren wir die folgenden binären Entscheidungsvariablen:

$$x_{nj} = \begin{cases} = 1\,, & \text{wenn Lager } n \text{ Kunde } j \text{ beliefert,} \\ = 0\,, & \text{wenn nicht.} \end{cases}$$

Wir haben nun alle Parameter und Entscheidungsvariablen definiert, die wir benötigen, um das Standortproblem als mathematisches Programm zu formulieren:

$$\text{(BSB)} \qquad \min_{\mathbf{x},\mathbf{y}} \sum_{n=1}^{N} \sum_{j=1}^{J} c_{nj} x_{nj} + \sum_{n=1}^{N} f_n y_n \tag{3.23}$$

$$\text{N.B.} \quad \sum_{n=1}^{N} x_{nj} = 1 \qquad j = 1, \dots, J \tag{3.24}$$

$$x_{nj} \le y_n \quad n = 1, \dots, N\,, \;\; j = 1, \dots, J \tag{3.25}$$

$$x_{nj} \in \{0, 1\} \tag{3.26}$$

$$y_n \in \{0, 1\} \tag{3.27}$$

Die Zielfunktion (3.23) besteht aus den Distributionskosten und den fixen Standortkosten. Distributionskosten fallen dann an, wenn Lager n Kunde j beliefert. Dann ist die Entscheidungsvariable $x_{nj} = 1$ und die Distributionskosten betragen $c_{nj}x_{nj} = c_{nj} \cdot 1 = c_{nj}$. Die fixen Standortkosten fallen für jedes Lager n an, das geöffnet ist und von dem aus Kunden beliefert werden können. Ist Lager n geöffnet, dann ist die Entscheidungsvariable $y_n = 1$ und es fallen fixe Standortkosten in Höhe von $f_n y_n = f_n \cdot 1 = f_n$ an.

Die Nebenbedingungen stellen sicher, dass nur zulässige Lösungen berechnet werden. Nebenbedingungen (3.24) gewährleisten, dass alle Kundennachfragen erfüllt werden. Dazu werden für jeden Kunden j die Lieferungen von allen Lagern aufsummiert und gleich 1 gesetzt. Dadurch wird jeder Kunde von genau einem Lager beliefert. Für Kunde 1 lautet die Nebenbedingung beispielsweise $x_{11} + x_{21} + \cdots + x_{N1} = 1$.

Die Nebenbedingungen (3.25) stellen sicher, dass von einem Lager aus nur dann Lieferungen ausgehen, wenn dieses auch geöffnet ist. Ist beispielsweise $y_1 = 0$, dann lauten die Nebenbedingungen für Lager 1 $x_{11} \leq 0$, $x_{12} \leq 0$, ..., $x_{1J} \leq 0$. In Kombination mit Nebenbedingungen (3.26) führt dies dazu, dass alle Entscheidungsvariablen $x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1J}$ gleich 0 gesetzt werden. Ist hingegen $y_1 = 1$, dann lauten die Nebenbedingungen für Lager 1 $x_{11} \leq 1$, $x_{12} \leq 1$, ..., $x_{1J} \leq 1$. In Kombination mit Nebenbedingungen (3.26) führt dies dazu, dass die Entscheidungsvariablen $x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1J}$ gleich 0 oder gleich 1 gesetzt werden können. Kunden können also von Lager 1 aus beliefert werden ($x_{1j} = 1$), müssen aber nicht zwingend von Lager 1 aus beliefert werden ($x_{1j} = 0$).

Die Nebenbedingungen (3.26) stellen sicher, dass keine Teillieferungen als Lösungen ermittelt werden, dass also entweder die gesamte Bestellmenge von Lager n an Kunde j geliefert wird ($x_{nj} = 1$) oder aber keine Lieferung von Lager n an Kunde j erfolgt ($x_{nj} = 0$). Teillieferungen ($0 < x_{nj} < 1$) sind nicht zulässig.

Nebenbedingungen (3.27) stellen schließlich sicher, dass ein Lager entweder geschlossen ($y_n = 0$) oder geöffnet ist ($y_n = 1$), eine teilweise Öffnung ($0 < y_n < 1$) ist nicht zulässig.

3.2.2 Lösung Basismodell

Wir erläutern nun die Lösung des Optimierungsproblems (BSB), das aus Zielfunktion (3.23) und Nebenbedingungen (3.24) bis (3.27) besteht, anhand der Beispieldaten in den Tabellen 3.11 und 3.12. In dem Beispiel können wir bis zu $N = 3$ Lager öffnen, von denen aus $J = 4$ Kunden bedient werden. Unser Ziel ist es, die optimale Menge zu öffnender Lager (y_n) und die optimale Zuordnung von Lagern zu Kunden (x_{nj}) zu finden, so dass alle Kundennachfragen zu minimalen Kosten erfüllt werden. Mit $N = 3$ Lagern und $J = 4$ Kunden müssen wir $N \cdot J = 3 \cdot 4 = 12$ Werte für die Entscheidungsvariablen x_{nj} und $N = 3$ Werte für die Entscheidungsvariablen y_n finden. Da jedes x_{nj} und jedes y_n die Werte 0 und 1 annehmen kann, gibt es $2^{12+3} = 32\,768$ mögliche Lösungen. Wir könnten nun die Kosten jeder dieser 32 768 Lösungen berechnen, um die kostenminimale Lösung zu ermitteln.

Doch es gibt ein intelligenteres Verfahren, bei dem nicht alle Lösungen untersucht werden müssen. Dieses basiert auf der Überlegung, dass die optimalen Zuordnungen von Kunden zu Lagern (x_{nj}) sehr einfach zu bestimmen sind, wenn bekannt ist, welche Lager geöffnet und welche geschlossen sind (y_n). Denn dann können wir für jeden der $J = 4$ Kunden einfach das kostengünstigste Lager wählen. Wenn beispielsweise

Tabelle 3.11

Fixkosten und Nachfrage

Lager n	Fixkosten € f_n	Kunde j	Nachfrage Stück/Tag w_j
1	85	1	42
2	60	2	39
3	65	3	51
		4	45

Tabelle 3.12

Berechnung Distributionskosten ($v_n = 0{,}10$ €/Stück)

Lager	Transportkosten €/Stück				Distributionskosten €/Tag			
n	t_{n1}	t_{n2}	t_{n3}	t_{n4}	c_{n1}	c_{n2}	c_{n3}	c_{n4}
1	0,83	0,69	0,86	0,23	39	31	49	15
2	1,23	1,05	0,39	0,43	56	45	25	24
3	0,52	1,13	0,68	2,03	26	48	40	96

Lager 1 und 2 geöffnet sind und Lager 3 geschlossen ist ($y_1 = 1$, $y_2 = 1$, $y_3 = 0$), dann können Kunden ausschließlich von den Lagern 1 und 2 beliefert werden. Zur Minimierung der Kosten werden Kunden von dem Lager aus beliefert, das die geringeren Distributionskosten verursacht. Kunden 1, 2 und 4 werden von Lager 1 beliefert und Kunde 3 wird von Lager 2 beliefert.

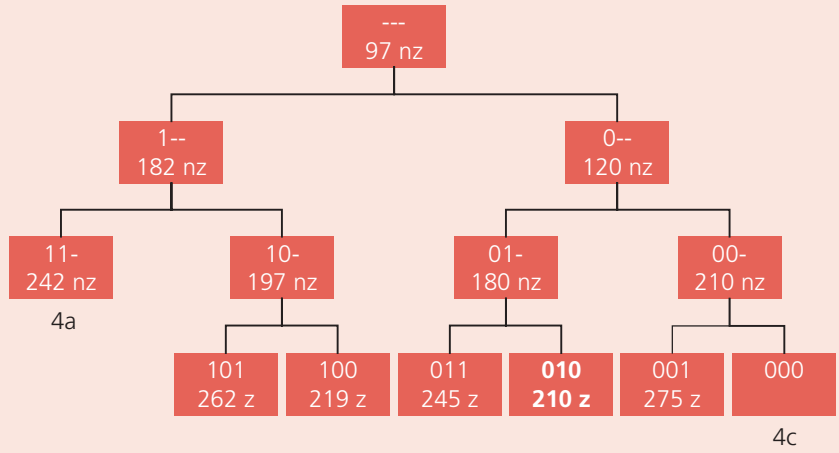
Wir müssen also nur $2^N = 2^3 = 8$ unterschiedliche Kombinationen von geöffneten und geschlossenen Lagern untersuchen und können dann die optimale Zuordnung von Kunden zu Lagern durch einen einfachen Kostenvergleich bestimmen. Wenn die Menge der potenziellen Lager groß ist, kann aber die Anzahl der möglichen Kombinationen so groß werden, dass die optimale Lösung nicht in akzeptabler Rechenzeit gefunden wird. Um eine Lösung in akzeptabler Rechenzeit von beispielsweise einigen Stunden zu finden, verwenden wir daher einen Branch-and-Bound-Algorithmus.

Bei einem *Branch-and-Bound-Algorithmus* wird das Optimierungsproblem zunächst in Unterprobleme aufgeteilt. Diese Unterprobleme werden dann so lange weiter aufgeteilt, bis sie entweder einfach lösbar sind oder bis klar wird, dass sie die optimale Lösung nicht enthalten können und dadurch das Unterproblem von weiteren Betrachtungen ausgeschlossen werden kann.

Wir erläutern das Branch-and-Bound-Konzept anhand von Abbildung 3.11. Beginnen wir mit dem *Branching*, der Aufteilung eines Problems in Unterprobleme. In

Abbildung 3.11

Branch-and-Bound-Baum



unserem Beispiel müssen wir die Werte von den drei Entscheidungsvariablen y_1, y_2 und y_3 bestimmen. Um die Anzahl der Entscheidungsvariablen zu reduzieren, können wir einigen der Entscheidungsvariablen feste Werte zuordnen. Als Erstes ordnen wir y_1 einen festen Wert zu. Wir wählen für das erste Unterproblem $y_1 = 1$ und für das zweite Unterproblem $y_1 = 0$. In jedem dieser beiden Unterprobleme müssen wir dann nur noch zwei Entscheidungsvariablen bestimmen, y_2 und y_3. Wir haben das Ursprungsproblem durch die Aufteilung in zwei Unterprobleme somit vereinfacht. Das Branching ist in Abbildung 3.11 grafisch dargestellt. Die obere Zeile in den Rechtecken bezeichnet das jeweilige Unterproblem. „$1 - -$“ bedeutet beispielsweise, dass $y_1 = 1$ festgelegt ist, dass y_2 und y_3 aber noch nicht festgelegt sind. Und „$0\ 1-$“ bedeutet, dass $y_1 = 0$ und $y_2 = 1$ festgelegt sind, y_3 aber noch nicht festgelegt ist.

Das zweite Element des Branch-and-Bound-Konzeptes ist das *Bounding*, die Schrankenbildung. Eine Schranke gibt an, welcher bestmögliche Zielfunktionswert in einem Unterproblem gefunden werden kann, wobei nicht alle Nebenbedingungen erfüllt sein müssen. Wir bilden eine Schranke S^F für die fixen Standortkosten und eine Schranke S^D für die Distributionskosten. Der Wert der Schranke für das gesamte Unterproblem ist dann $S = S^F + S^D$.

Zur Berechnung der Schranke für die fixen Standortkosten berücksichtigen wir bei den Kosten nur die Lagerstandorte, die als geöffnet festgelegt wurden, und ignorieren Lagerstandorte, die als geschlossen festgelegt wurden oder unbestimmt sind. Das heißt, wir berücksichtigen bei den Kosten nur Lagerstandorte mit $y_n = 1$. Der Wert der Schranke für die fixen Standortkosten des Unterproblems „$1 - -$“ beträgt beispielsweise $S^F(1 - -) = 1 \cdot f_1 + 0 \cdot f_2 + 0 \cdot f_3 = 85$, der des Unterproblems „$0\ 1\ -$“ beträgt $S^F(0\ 1-) = 0 \cdot f_1 + 1 \cdot f_2 + 0 \cdot f_3 = 60$.

Zur Berechnung der Schranke für die Distributionskosten gehen wir davon aus, dass Kunden von jedem Lagerstandort aus beliefert werden können, der nicht geschlossen

ist. Das heißt, Kunden können von allen Lagerstandorten mit $y_n = 1$ und $y_n = -$ beliefert werden. Bei Unterproblem „$1 - -$“ können beispielsweise alle Lagerstandorte verwendet werden. Wir wählen also für jeden Kunden den Lagerstandort mit den geringsten Distributionskosten, was zu einem Schrankenwert für die Distributionskosten von $S^D(1 - -) = c_{31} + c_{12} + c_{23} + c_{14} = 26 + 31 + 25 + 15 = 97$ führt. Bei Unterproblem „$0\ 1-$“ können wir hingegen Kunden nur aus Lagerstandorten 2 oder 3 beliefern, da Lagerstandort 1 geschlossen ist. Wir wählen dann für jeden Kunden entweder Lagerstandort 2 oder 3 aus, je nachdem, von welchem Lagerstandort der Kunde günstiger beliefert werden kann. Dies führt zu einem Schrankenwert für die Distributionskosten von $S^D(0\ 1-) = c_{31} + c_{22} + c_{23} + c_{24} = 26 + 45 + 25 + 24 = 120$.

Die Summe der Schrankenwerte der fixen Lagerkosten S^F und der Distributionskosten S^D ist der Schrankenwert S. In unseren Beispielen beträgt beispielsweise $S(1--) = S^F(1--) + S^D(1--) = 85 + 97 = 182$ und $S(0\ 1-) = S^F(0\ 1-) + S^D(0\ 1-) = 60 + 120 = 180$. Das heißt, dass alle Lösungen, bei denen am Standort 1 ein Lager geöffnet ist, Kosten von mindestens $S(1 - -) = 182$ verursachen und die Lösungen, bei denen am Standort 1 kein Lager geöffnet ist, aber am Standort 2 ein Lager geöffnet ist, Kosten von mindestens $S(0\ 1-) = 180$ verursachen. Beachten Sie, dass die Schrankenwerte Mindestkosten und nicht unbedingt zulässige Lösungen darstellen. Bei Unterproblem „$1 - -$“ haben wir beispielsweise bei der Berechnung der fixen Standortkosten keine Kosten für Lager 2 berücksichtigt und bei der Berechnung der Distributionskosten trotzdem Lager 2 genutzt, um Kunde 3 zu beliefern.

Sie haben jetzt gesehen, wie mit dem Branching ein Problem in Unterprobleme aufgeteilt werden kann, die einfacher lösbar sind als das Ursprungsproblem. Und Sie haben gesehen, wie mit dem Bounding ein Schrankenwert berechnet werden kann, der die Mindestkosten des Unterproblems angibt. Dieser Schrankenwert stellt nicht notwendigerweise eine zulässige Lösung dar. Wir haben nun das grundlegende Verständnis geschaffen, um den Branch-and-Bound-Algorithmus vorzustellen. Dieser funktioniert folgendermaßen:

1. **Initialisierung**
   (a) Zur Initialisierung werden zunächst die Kosten einer beliebigen zulässigen Lösung berechnet. Als zulässige Lösung wird eine Lösung bezeichnet, die alle Nebenbedingungen erfüllt. Eine zulässige Lösung ist beispielsweise nur ein Lager am Standort 1 zu eröffnen: $y_1 = 1,\ y_2 = 0$ und $y_3 = 0$. Die Kosten dieser Lösung betragen $Z = f_1 + c_{11} + c_{12} + c_{13} + c_{14} = 85 + 39 + 31 + 49 + 15 = 219$. $Z = 219$ ist dann der Wert der besten Lösung, die bisher gefunden wurde.
   (b) Zur Initialisierung werden auch die Kosten der Schranke für das Gesamtproblem „$- - -$“ berechnet. In unserem Beispiel betragen diese $S(- - -) = c_{31} + c_{12} + c_{23} + c_{14} = 26 + 31 + 25 + 15 = 97$.
2. **Terminierung** Wenn alle Unterprobleme gelöst oder von der weiteren Betrachtung ausgeschlossen sind, terminiert der Algorithmus. Der optimale Zielfunktionswert ist Z.
3. **Branching** Beim Branching wird das Ursprungsproblem in Unterprobleme unterteilt oder ein Unterproblem in weitere Unterprobleme unterteilt. Beispielsweise kann das Unterproblem „$1 - -$“ in die Unterprobleme „$1\ 1-$“ und „$1\ 0-$“ unterteilt werden. In unserem Fall lautet die Branching-Regel „Lege für den jeweils nächsten Standort fest, ob ein Lager an ihm eröffnet werden soll ($y_n = 1$) oder nicht ($y_n = 0$)“.

4. **Bounding** Für jedes Unterproblem wird eine Schranke S berechnet, die angibt, wie hoch der optimale Zielfunktionswert des Unterproblems mindestens ist. Dann wird entschieden, wie mit den Unterproblemen weiter fortgefahren wird:

   (a) $S > Z$: Dann ist der optimale Zielfunktionswert des Unterproblems höher als Z, dem Wert der besten Lösung, die wir bisher gefunden haben. Da wir an einer solchen Lösung kein Interesse haben, betrachten wir das Unterproblem nicht weiter.

   (b) $S < Z$ und Lösung des Unterproblems zulässig: Dann erfüllt die Lösung mit Schrankenwert S alle Nebenbedingungen und ist die optimale Lösung für das Unterproblem und somit auch für das Ursprungsproblem. Da der Schrankenwert S kleiner als Z ist, haben wir auch eine neue beste Lösung gefunden und setzen $Z = S$.

   (c) Keine zulässige Lösung im Unterproblem: Wenn das Unterproblem keine zulässigen Lösungen enthält, betrachten wir es nicht weiter. Dies ist bei unserer Anwendung nur bei Unterproblem „0 0 0“ der Fall, kann bei anderen Anwendungen aber häufiger vorkommen.

5. Gehe zu 2.

Wenden wir nun den Branch-and-Bound-Algorithmus auf unser Beispielproblem an.

Zur *Initialisierung* benutzen wir die oben berechnete Anfangslösung „1 0 0“ mit Zielfunktionswert $Z = 219$ und dem Schrankenwert des Gesamtproblems $S(- - -) = 97$ nz. Das „nz“ hinter dem Schrankenwert bedeutet, dass es sich bei der Lösung um eine nicht zulässige Lösung handelt. Die Lösung ist nicht zulässig, da wir bei der Berechnung des Schrankenwertes für die fixen Standortkosten davon ausgegangen sind, dass kein Lager geöffnet ist, bei der Berechnung des Schrankenwertes für die Distributionskosten jedoch Kunden von mehreren Lagerstandorten beliefert haben. Zulässige Lösungen werden mit „z“ gekennzeichnet. Es erfolgt keine *Terminierung* des Algorithmus, da das Problem „– – –“ nicht von weiteren Betrachtungen ausgenommen wurde. Das erste *Branching* teilt dann das Problem „– – –“ in die beiden Unterprobleme „1 – –“ und „0 – –“ auf. Beim *Bounding* ergeben sich Schrankenwerte $S(1 - -) = 182$ nz und $S(0 - -) = 120$ nz. Keins der Kriterien 4a bis 4c ist erfüllt.

Es erfolgt keine *Terminierung* des Algorithmus. Das nächste *Branching* teilt das Unterproblem „1 – –“ in die beiden Unterprobleme „1 1–“ und „1 0–“ auf. Beim *Bounding* ergeben sich die Schrankenwerte $S(1\ 1-) = 242$ nz und $S(1\ 0-) = 197$ nz. Für Unterproblem „1 1–“ ist Kriterium 4a erfüllt. Da $S(1\ 1-) = 242 > 219 = Z$ gilt, wissen wir, dass das Unterproblem „1 1–“ und alle Unterprobleme keine Lösungen enthalten können, die besser als unsere beste bisher gefundene Lösung „1 0 0“ mit Zielfunktionswert $Z = 219$ sind. Wir schließen also Unterproblem „1 1–“ von der weiteren Betrachtung aus. Für Unterproblem „1 0–“ ist keins der Kriterien erfüllt. Wir schließen es also nicht von der weiteren Betrachtung aus.

Der Algorithmus wird fortgesetzt, bis der Baum so aussieht, wie er in Abbildung 3.11 dargestellt ist. Dann sind alle Unterprobleme gelöst oder von der weiteren Betrachtung ausgeschlossen. Die optimale Lösung lautet „0 1 0“ und verursacht Kosten in Höhe von $Z = 210$.

In dem einfachen Beispiel wurden nur Kriterien 4a und 4c angewandt und relativ wenige Unterprobleme von der Suche ausgeschlossen. In Abschnitt 3.4.1 zeigen wir

ein weiteres Beispiel, bei dem alle Kriterien mehrfach zutreffen, wodurch eine große Anzahl von Unterproblemen von der Betrachtung ausgeschlossen werden kann.

In diesem Abschnitt haben wir das Basismodell der Standortplanung entwickelt und es mit Hilfe des Branch-and-Bound-Verfahrens gelöst. Dazu wurde das Gesamtproblem in mehrere Unterprobleme aufgeteilt und jedes für sich gelöst. Teilprobleme, die nicht viel versprechend waren, wurden von der weiteren Betrachtung ausgeschlossen, wodurch wir das ursprünglich sehr komplexe Problem mit einer überschaubaren Anzahl von Schritten lösen konnten.

3.2.3 Erweiterungen Basismodell

Wir stellen nun einige Erweiterungen des Basismodells vor, mit denen sich Standortplanungsprobleme realistischer modellieren lassen als mit dem Basismodell BSB. Diese Erweiterungen erlauben es, Anforderungen in unser Modell aufzunehmen, die ursprünglich noch nicht enthalten waren, aber für die Problemlösung von Bedeutung sind. Zuerst stellen wir Erweiterungen des Basismodells vor, die lediglich zusätzliche Nebenbedingungen erfordern: Die Begrenzung der Lageranzahl, die Begrenzung der Kundenanzahl je Lager, die Beschränkung der Lagerkapazität und die Berücksichtigung von Wenn-Dann-Beziehungen. Danach stellen wir zwei Modelle vor, die sich sowohl in der Zielfunktion als auch in den Restriktionen vom Basismodell BSB unterscheiden. Diese erlauben es, Lagerstrukturen für mehrere Produkte gleichzeitig zu optimieren und zweistufige Lagersysteme zu modellieren.

Begrenzung Lageranzahl

Bei der Lösung des Basisproblems BSB kann es vorkommen, dass die Anzahl der geöffneten Lager in der optimalen Lösung größer als gewünscht ist. Daher kann es erforderlich sein, die maximale Anzahl geöffneter Lager zu beschränken. Diese Beschränkung kann durch Einfügen einer Nebenbedingung erzielt werden:

$$\sum_{n=1}^{N} y_n \leq M \,. \tag{3.28}$$

Diese Nebenbedingung wird zusätzlich zu den Nebenbedingungen (3.24) bis (3.27) genutzt, um sicherzustellen, dass maximal M Lager geöffnet werden können. Wenn genau M Lager geöffnet werden sollen oder mindestens M Lager geöffnet werden sollen, muss das Kleiner-gleich-Zeichen lediglich durch ein Gleichheitszeichen beziehungsweise ein Größer-gleich-Zeichen ersetzt werden.

Begrenzung Kundenanzahl

Es ist möglich, dass nach der Lösung des Basisproblems BSB ein Lager nur eine sehr geringe Anzahl von Kunden beliefert. Im Extremfall kann es sein, dass nur ein Kunde beliefert wird. Wenn dieser Kunde nun seinen Bedarf bei einer anderen Firma deckt, muss das Lager geschlossen werden, da ihm kein Kunde mehr zugeordnet ist. Um dieses Risiko zu reduzieren, können wir die minimale Anzahl von Kunden, die aus einem Lager beliefert werden, begrenzen. Dies geschieht durch Einfügen der Nebenbedingungen

$$\sum_{j=1}^{J} x_{nj} \geq R_n \quad n = 1, \ldots, N \,. \tag{3.29}$$

Beschränkung Kapazität

In unserem Basismodell BSB haben wir implizit angenommen, dass die Standorte über eine unendliche Kapazität verfügen. Das heißt, dass jeder Lagerstandort in der Lage ist, eine beliebige Menge auszuliefern. Diese Annahme ist oftmals nicht zutreffend, da die Lagerkapazität häufig begrenzt ist. Wir können das Basismodell aber um Kapazitätsrestriktionen erweitern, damit das Modell die Realität genauer abbildet. Die Nebenbedingungen

$$\sum_{j=1}^{J} x_{nj} \leq K_n \quad n = 1, \dots, N \tag{3.30}$$

stellen sicher, dass jedes Lager nicht mehr als K_n Kunden beliefert. Wir können also für jedes potenzielle Lager die maximale Kapazität individuell festlegen. Wenn nicht die Anzahl der Kunden beschränkt werden soll, sondern die ausgelieferte Menge, kann die Nebenbedingung

$$\sum_{j=1}^{J} w_j x_{nj} \leq K_n \quad n = 1, \dots, N \tag{3.31}$$

verwendet werden.

Wenn-Dann-Beziehungen

Durch eine einfache Erweiterung des Basismodells können auch Wenn-Dann-Beziehungen modelliert werden. Beispielsweise kann gefordert werden, dass Lager m geschlossen sein muss, wenn Lager n geöffnet wird und umgekehrt, um in einer Region nicht zu viele Lager zu öffnen. Diese Forderung kann durch die zusätzliche Nebenbedingung

$$y_n + y_m \leq 1 \tag{3.32}$$

realisiert werden. Andererseits kann durch die Nebenbedingung

$$y_n = y_m \tag{3.33}$$

erreicht werden, dass Lager n und Lager m immer den gleichen Zustand haben, das heißt, entweder sind beide geöffnet oder beide geschlossen.

Mehrere Produkte

Bislang haben wir uns nur mit der Standortoptimierung für ein Produkt auseinander gesetzt, was eine gewisse Abstraktion von der Realität darstellt. Wenn wir die Standortplanung detailgetreuer auf Produktebene durchführen möchten, können wir die Produkte nicht einzeln optimieren, da beispielsweise bei der Optimierung eines Produkts ein Lager geöffnet werden könnte, aber bei einem anderen Produkt geschlossen werden könnte. Die Fixkosten fallen aber unabhängig vom gewählten Produkt an. Daher müssen wir unser Basismodell BSB für den Mehrproduktfall erweitern, indem wir einige Variablen und Parameter um einen Index p für die unterschiedlichen Produkte erweitern:

$$\text{(MSB)} \qquad \min_{\mathbf{x},\mathbf{y}} \sum_{p=1}^{P} \sum_{n=1}^{N} \sum_{j=1}^{J} c_{pnj} x_{pnj} + \sum_{n=1}^{N} f_n y_n \tag{3.34}$$

$$\text{N.B.} \quad \sum_{n=1}^{N} x_{pnj} = 1 \qquad j = 1, \dots, J\,, \quad p = 1, \dots, P \tag{3.35}$$

$$x_{pnj} \le y_n \quad n = 1, \dots, N\,, \quad j = 1, \dots, J\,, \quad p = 1, \dots, P \tag{3.36}$$

$$x_{pnj} \in \{0, 1\} \tag{3.37}$$

$$y_n \in \{0, 1\} \tag{3.38}$$

Die Zielfunktion summiert die Distributionskosten aller Produkte und addiert die Fixkosten für jedes geöffnete Lager. Wir gehen davon aus, dass in jedem Lager n jedes Produkt p gelagert werden kann. Nebenbedingungen (3.35) stellen sicher, dass die Bedarfe aller Kunden für alle Produkte erfüllt werden. Nebenbedingungen (3.36) stellen sicher, dass ein Produkt p nur dann aus einem Lager n geliefert werden kann, falls das Lager auch geöffnet ist. Nebenbedingungen (3.37) und (3.38) garantieren schließlich die Ganzzahligkeit von x_{pnj} und y_n.

Zweistufiges Lagersystem

Viele Unternehmen betreiben neben regionalen Lagern auch ein oder mehrere zentrale Lager, die die regionalen Lager beliefern. Kunden können dann mit geringer Zeitverzögerung aus Regionallagern beliefert werden, was beispielsweise im Bereich der Ersatzteilversorgung von enormer Bedeutung ist. Um diese Situation zu modellieren, führen wir eine neue Entscheidungsvariable ein, die angibt, ob ein Zentrallager geöffnet ist oder nicht:

$$Y_s = \begin{cases} = 1\,, & \text{wenn an Standort } s \text{ ein Zentrallager eröffnet wird}\,, \\ = 0\,, & \text{wenn nicht}\,. \end{cases}$$

Zweitens müssen wir entscheiden, von welchem Zentrallager s das Regionallager n die Waren beziehen soll. Dafür benutzen wir

$$X_{sn} = \begin{cases} = 1\,, & \text{wenn Zentrallager } s \text{ Regionallager } n \text{ versorgt}\,, \\ = 0\,, & \text{wenn nicht}\,. \end{cases}$$

Die fixen Kosten eines Zentrallagers sind F_s. Das erweiterte Modell für den zweistufigen Fall ist daher

$$\text{(ZSB)} \qquad \min_{\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{X},\mathbf{Y}} \sum_{n=1}^{N} \sum_{j=1}^{J} c_{nj} x_{nj} + \sum_{s=1}^{S} \sum_{n=1}^{N} C_{sn} X_{sn} + \sum_{n=1}^{N} f_n y_n + \sum_{s=1}^{S} F_s Y_s \tag{3.39}$$

$$\text{N.B.} \quad \sum_{n=1}^{N} x_{nj} = 1 \qquad j = 1, \dots, J \tag{3.40}$$

$$\sum_{s=1}^{S} X_{sn} = 1 \qquad n = 1, \dots, N \tag{3.41}$$

$$x_{nj} \le y_n \qquad n = 1, \dots, N\,, \quad j = 1, \dots, J \tag{3.42}$$

$$X_{sn} \le Y_s \qquad s = 1, \dots, S\,, \quad n = 1, \dots, N \tag{3.43}$$

$$x_{nj} \in \{0, 1\} \qquad n = 1, \dots, N\,, \quad j = 1, \dots, J \tag{3.44}$$

$$y_n \in \{0, 1\} \qquad n = 1, \dots, N \tag{3.45}$$

$$X_{sn} \in \{0, 1\} \qquad s = 1, \dots, S\,, \quad n = 1, \dots, N \tag{3.46}$$

$$Y_s \in \{0, 1\}. \qquad s = 1, \dots, S\,. \tag{3.47}$$

Die Nebenbedingung (3.41) stellt sicher, dass jedes Regionallager von genau einem Zentrallager versorgt wird. Weiterhin erlaubt Nebenbedingung (3.43) die Versorgung nur dann, wenn das Zentrallager geöffnet ist. Schließlich wird durch die weiteren Nebenbedingungen die Ganzzahligkeit garantiert. Auch dieses Problem können wir mit Hilfe des Branch-and-Bound-Verfahrens effizient lösen.

Zusammenfassung

In diesem Abschnitt haben Sie gelernt, wie optimale Standorte aus einer Menge von vorgegebenen potenziellen Standorten ausgewählt werden. Dazu haben wir zunächst ein mathematisches Programm entwickelt, das das Problem formal darstellt. Dabei haben wir neben Transportkosten auch variable und fixe Standortkosten berücksichtigt. Das mathematische Programm haben wir mit Hilfe eines Branch-and-Bound-Algorithmus gelöst.

Anschließend haben wir einige Erweiterungen des Basismodells vorgestellt, die es uns ermöglichen, zusätzliche Restriktionen in unser Modell aufzunehmen. Beispielsweise können wir nun die maximale Lagerzahl festlegen, eine Minimalzahl von Kunden je Lager fordern und auch Wenn-Dann-Beziehungen darstellen. Weiterhin konnten wir unser Modell erweitern, so dass wir nun auch den Mehrproduktfall lösen können. Schließlich haben wir ein zweistufiges Problem präsentiert, bei dem Regionallager von mehreren Zentrallagern beliefert werden können. Es existiert eine Vielzahl von anderen Erweiterungen. Den interessierten Leser verweisen wir an Love [5].

3.3 Zusammenfassung und Ausblick

In diesem Kapitel haben wir uns mit der optimalen Planung von Standorten beschäftigt. Wir haben zunächst gezeigt, wie sich mit geringem Datenbedarf und geringem Aufwand die optimalen Standorte bestimmen lassen, wenn die wesentlichen Kosten die Transportkosten sind und *beliebige Orte* als Standorte gewählt werden können. Das Ergebnis dieser Optimierung liefert einen ersten Anhaltspunkt dafür, wo die Standorte errichtet werden sollten. Zur Berechnung der Transportkosten haben wir angenommen, dass diese proportional zur Entfernung zwischen Lager und Kunden sind. Die Entfernungen haben wir mit Hilfe der rechtwinkligen Entfernungen sowie mit euklidischen Entfernungen gemessen. Rechtwinklige Entfernungen eignen sich gut zur Abschätzung von innerstädtischen Entfernungen, euklidische Entfernungen eignen sich eher zur Abschätzung von Entfernungen zwischen Städten.

Teilweise entsprechen jedoch weder die rechtwinkligen noch die euklidischen Entfernungen der wirklichen Distanz. Dann können wir ein allgemeineres Entfernungsmaß verwenden, die l_p-Entfernung. Diese ist definiert als

$$d_j(x, y, p) = \left(|a_j - x|^p + |b_j - y|^p\right)^{1/p} . \tag{3.48}$$

Für $p = 1$ erhalten wir die rechtwinklige Entfernung und für $p = 2$ die euklidische Entfernung. Wir sehen also, dass es sich bei der rechtwinkligen und euklidischen Entfernung um Spezialfälle des l_p-Maßes handelt. Nur welches p müssen wir wählen? Die Lösung liegt im Vergleich der berechneten und der beobachteten Entfernungen. Wir müssen das p so anpassen, dass die Differenz zwischen den berechneten und den

beobachteten Entfernungen minimiert wird. Mit diesem Vorgehen kann häufig eine bessere Schätzung der Entfernungen erreicht werden als mit den rechtwinkligen und euklidischen Entfernungen (Drezner [1]).

Wenn neben den Transportkosten noch andere Kosten entscheidungsrelevant sind, oder qualitative Faktoren bei der Standortwahl berücksichtigt werden sollen, ist die Optimierung mit beliebigen Orten ungeeignet. Eine bessere Alternative ist dann die Optimierung mit im Voraus bestimmten Orten. Bei der Optimierung mit *bestimmten Orten* wird zunächst unter Berücksichtigung qualitativer Faktoren eine Menge von Orten ausgewählt, die sich prinzipiell als Standorte eignen. Dann werden die Transportkosten sowie die variablen und fixen Standortkosten dieser Orte bestimmt und als Parameter in einem mathematischen Modell genutzt. Das Modell lässt sich dann mit einem Branch-and-Bound-Algorithmus lösen. Die Leistung des Branch-and-Bound-Algorithmus hängt wesentlich von der Qualität der Schrankenberechnung ab. Wir haben eine sehr einfache Schrankenberechnung vorgestellt. Es gibt jedoch noch andere Verfahren, mit denen sich bessere Schranken berechnen lassen. Wir verweisen den interessierten Leser an Francis et al. [2].

Branch-and-Bound-Algorithmen lassen sich nicht nur zur Lösung von Standortproblemen einsetzen, sondern sind recht vielseitig verwendbar, wenn einige oder alle Entscheidungsvariablen eines Problems ganzzahlig sind. So lassen sich beispielsweise auch die Mitarbeitereinsatzplanung und die Tourenplanung mit einem Branch-and-Bound-Verfahren optimieren (Hillier und Lieberman [3]). Das Vorgehen ist dabei das gleiche wie bei der Standortplanung. Es wird zunächst entschieden, wie das Branching aussehen sollte, also wie ein Problem sinnvoll in Unterprobleme aufgeteilt werden kann. Dann wird entschieden, wie das Bounding ausgestaltet sein sollte, also wie sich sinnvolle Schrankenwerte für die Unterprobleme berechnen lassen. Danach wird der Branch-and-Bound-Algorithmus so eingesetzt, wie Sie ihn kennen gelernt haben.

Zur Lösung der Standortprobleme existieren mehrere Software-Produkte. Beispielsweise ermöglicht der IBM Warehouse Site Planner (WSP) die Optimierung von Distributionsnetzwerken. Der WSP berücksichtigt sowohl die einkommenden Lieferungen von der Produktion zum Lager als auch die ausgehenden Sendungen zum Kunden. Weiterhin können Kapazitätsrestriktionen und standortabhängige Lagerkosten angegeben werden. Zusätzlich ist der IBM Warehouse Site Planner in der Lage, unterschiedliche Transportmittel zu berücksichtigen. Diese und andere Software-Produkte basieren auf den Verfahren, die Sie in diesem Kapitel kennen gelernt haben. Das Verständnis dieser Verfahren erlaubt es Ihnen, Standortplanungsprobleme richtig zu modellieren und die richtigen Verfahren zu deren Lösung einzusetzen.

3.4 Anwendungen und Übungsaufgaben

3.4.1 Bestimmung der asiatischen Lagerstandorte der RHM

Die RHM GmbH ist mit ihren Produkten bislang nur in Europa, Nordamerika und Australien vertreten. Der Geschäftsführer Karsten Prinkens hat aber schon seit längerer Zeit ein Auge auf den asiatischen Markt geworfen, um dort seine Haushaltsgeräte aus dem Niedrigpreissegment zu vertreiben. Aus seiner Sicht scheint dieser große und schnell wachsende Markt viel versprechend zu sein und er erwartet vom wirtschaftlichen Aufschwung Chinas auch Impulse für die Märkte der umliegenden

Länder. Zuerst plante Herr Prinkens den Aufbau einer Produktionsstätte in China, um dort die günstigen Arbeitskosten zu nutzen. Er hatte aber große Bedenken wegen des hohen bürokratischen Aufwands, der möglicherweise schlechteren Qualität der Produkte und der politischen und wirtschaftlichen Risiken. Daher verwarf Herr Prinkens diese Idee recht schnell und entschied, dass seine Produkte auch weiterhin in Köln und Ljubljana produziert und dann nach Asien geliefert werden sollten.

Da es sich um Geräte des Niedrigpreissegments handelt und ein Lufttransport hohe Kosten verursacht, müssen die Geräte per Seefracht verschickt werden. Die Transportzeit ab Deutschland in den asiatisch-pazifischen Raum beträgt sechs bis acht Wochen. Aufgrund dieser langen Transportzeit ist es notwendig, einen Teil der Ware in einem oder mehreren Lagern in Asien zwischenzulagern. Aus diesen Lagern können dann Kundennachfragen mit kurzer Lieferzeit erfüllt werden. Darum hat sich Herr Prinkens für eine Lagerung im asiatischen Raum entschieden, auch wenn dies Investitionen in den Bau und Unterhalt der Lagerstandorte bedeutet. Diese Investitionen werden sich aber aus Herrn Prinkens Sicht relativ schnell auszahlen.

Nun bleibt nur noch zu klären, wo diese Lager eröffnet werden sollen. Zunächst wurden dazu potenzielle Lagerstandorte identifiziert, die aufgrund von Faktoren wie Verkehrs- und Kommunikationsinfrastruktur und politischer Stabilität als geeignet erscheinen. Die Lagerstandorte und ihre Fixkosten sind in Tabelle 3.13 dargestellt.

Der Vertrieb konnte die wesentlichen Märkte identifizieren. Auf Basis der Einwohnerzahlen und der wirtschaftlichen und demographischen Situation wurden die zukünftigen Nachfragen der Märkte mit Hilfe einer Kausalanalyse abgeschätzt. Die Kunden von RHM sind Großabnehmer, die die Ware in die einzelnen Regionen verteilen und in oder in der Nähe der asiatischen Handelszentren angesiedelt sind. Um die Transportkosten von den Lagern zu den Kunden abzuschätzen, hat Herr Prinkens einen ehemaligen Studienkollegen kontaktiert, der nach dem Studium nach Asien ausgewandert ist und dort in der Bekleidungsindustrie als Supply Chain Manager Karriere gemacht hat. Mit Hilfe der Informationen seines ehemaligen Kommilitonen konnten die Distributionskosten von den potenziellen Lagerstandorten zu den Abnehmern berechnet werden. Diese sind in Tabelle 3.14 dargestellt und enthalten neben Nachfragen und Transportkosten auch länderspezifische Kostenunterschiede in variablen Kosten, Zollabfertigung et cetera.

Die Kundenzentren und potenziellen Lagerstandorte sind in Abbildung 3.12 zusammenfassend dargestellt. Es müssen also von vier potenziellen Lagerstandorten dieje-

Tabelle 3.13

Fixkosten in Tausend Euro pro Monat

n	Lager	Fixkosten
1	Tokyo	143
2	Singapur	121
3	Hongkong	49
4	Manila	28

Tabelle 3.14

Distributionskosten in Tausend Euro pro Monat

		Distributionskosten ab Lager			
j	Kunde	Tokyo	Singapur	Hong Kong	Manila
1	Tokyo	4	24	30	28
2	Singapur	24	1	16	29
3	Hongkong	12	19	3	20
4	Manila	23	11	24	2
5	Peking	16	14	21	19
6	Shanghai	19	13	17	18
7	Bangkok	21	14	18	13

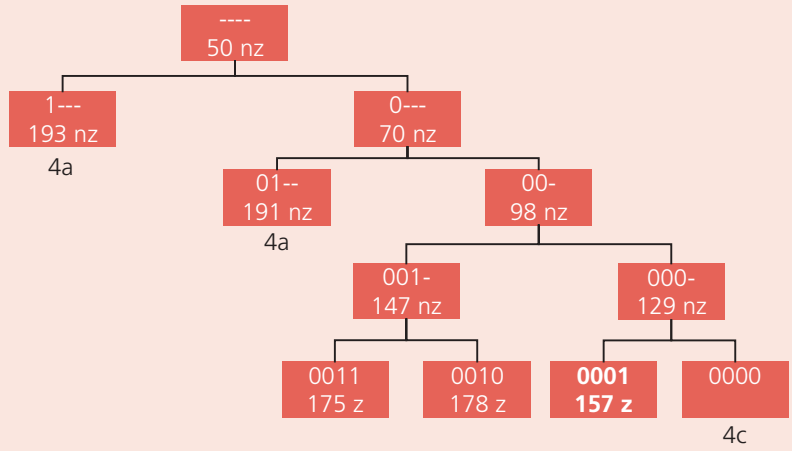
Abbildung 3.12

Kundenzentren und potenzielle Lagerstandorte der RHM

nigen bestimmt werden, die die Summe aus fixen Standortkosten und Distributionskosten minimieren. Herr Prinkens muss also ein Standortoptimierungsproblem mit *bestimmten Standorten* lösen. Dazu setzt er einen *Branch-and-Bound*-Algorithmus ein. Als Startlösung öffnet er ein einziges Lager in Hongkong. Diese Startlösung hat Kosten von $Z = f_3 + c_{31} + c_{32} + c_{33} + c_{34} + c_{35} + c_{36} + c_{37} = 178$. Den Branch-and-Bound-Baum bauen wir analog dem Vorgehen in Abschnitt 3.2 auf. Der Baum ist in Abbildung 3.13 dargestellt. Man kann erkennen, dass die Möglichkeiten der

Abbildung 3.13

Branch-and-Bound-Lösung



Lageröffnung in Tokyo und Singapur sehr früh ausgeschlossen werden, da die Schranken $S(1 - --) = 193$ nz beziehungsweise $S(0\ 1 - -) = 191$ nz den Kostenwert unserer Startlösung Z überschreiten. Daher müssen wir diese Teilbäume nicht weiter betrachten. Als erste zulässige Lösung finden wir „0 0 1 1“ mit Kosten von $Z = f_3 + f_4 + c_{41} + c_{32} + c_{33} + c_{44} + c_{45} + c_{36} + c_{47} = 175$ z, das heißt, die Lager Hongkong und Manila sind unsere neue beste Lösung. Die nächste zulässige Lösung „0 0 1 0“ entspricht unserer Ausgangslösung. Da die Kosten jedoch höher als unsere bisherige beste Lösung sind, brauchen wir diese Konfiguration nicht weiter zu betrachten. Schließlich finden wir noch eine letzte zulässige Lösung „0 0 0 1“, die mit den Kosten $Z = f_4 + c_{41} + c_{42} + c_{43} + c_{44} + c_{45} + c_{46} + c_{47} = 157$ z besser ist als alle bislang gefundenen zulässigen Lösungen. Da nun alle Teilbäume ausgewertet sind, wissen wir, dass Herr Prinkens ein neues Lager in Manila errichten sollte.

3.4.2 Bestimmung des Zentrallagerstandorts bei OmegaJet

Die OmegaJet wartet ihre 14 Flugzeuge durch ein eigenes Wartungsteam an den drei Heimatstandorten Köln, Hamburg und Berlin. Diese Wartungen werden über Nacht durchgeführt, falls die erforderlichen Reparaturen nicht dringend sind und den laufenden Flugbetrieb beeinträchtigen. Bislang werden viele hochwertige Teile an jedem Heimatstandort vorgehalten. Beispielsweise liegen teure Bordelektronik-Komponenten an allen drei Flughäfen. Dem zuständigen Controller ist jetzt aber aufgefallen, dass diese Teile nur sehr wenig oder bislang noch gar nicht nachgefragt wurden und dadurch hohe Kosten durch die Kapitalbindung verursachen. Er schlägt daher vor, dass diese Ersatzteile in Zukunft nur an einem Ort gelagert werden und alle Reparaturstätten von diesem Ort beliefert werden, falls ein Teil benötigt wird. Natürlich muss auch weiterhin sichergestellt sein, dass die Ersatzteile rechtzeitig am

entsprechenden Flughafen sind, um die Reparatur zeitgerecht durchführen zu können, so dass das Flugzeug am nächsten Morgen auch wieder flugbereit ist. Auch sollte der Transport von dem zentralen Lager zu den einzelnen Flughäfen nicht zu hohe Kosten verursachen.

Die Frage ist nun, wo dieses Zentrallager errichtet werden soll. In Köln, Hamburg, Berlin oder an einem beliebigen Ort zwischen diesen Flughäfen? Um eine optimale Lösung zu finden, betrachten wir zuerst die Anzahl der an den entsprechenden Flughäfen gewarteten Flugzeuge. Das Ergebnis ist in Tabelle 3.15 dargestellt.

Weiterhin müssen wir die Positionen der Flughäfen bestimmen. Da Köln der Flughafen ist, der im Südwesten aller anderen liegt, können wir die Positionen relativ zu Köln bestimmen, das heißt Köln hat die Koordinaten $(0, 0)$ und die Positionen der anderen Flughäfen werden relativ in östlicher und nördlicher Distanz gemessen. Mit Hilfe einer Deutschlandkarte können wir die Standorttabelle 3.16 erstellen.

Beispielsweise liegt Hamburg 222 km östlich und 259 km nördlich von Köln. Mit diesen Werten können wir nun den optimalen Standort bestimmen. Wir benutzen die euklidische Distanz, da diese große Entfernungen innerhalb Deutschlands besser als das rechtwinklige Distanzmaß approximiert. Der optimale Standort wird nun mit Hilfe des in Abschnitt 3.1 vorgestellten Verfahrens durch Anwendung der Formeln (3.18) und (3.19) iterativ bestimmt. Als Startlösung verwenden wir $x_0 = 250$ und $y_0 = 120$, da wir vermuten, dass der optimale Standort irgendwo in der Mitte zwischen den drei Flughäfen liegen muss. Tabelle 3.17 stellt die Ergebnisse der Iterationen dar.

Tabelle 3.15

Anzahl Wartungen je Woche

Flughafen j	Flugzeuge w_j
Köln	6
Hamburg	3
Berlin	5

Tabelle 3.16

Entfernung der Flughafenstandorte von Köln in Kilometern

Flughafen	Standort	
j	a_j	b_j
Köln	0	0
Hamburg	222	259
Berlin	454	148

Tabelle 3.17

Lösung Standortproblem OmegaJet

t	$g_1(x_t, y_t)$	$g_2(x_t, y_t)$	$g_3(x_t, y_t)$	x_t	y_t
0				250,00	120,00
1	0,0216	0,0212	0,0243	234,38	135,27
2	0,0222	0,0241	0,0227	227,08	139,26
3	0,0225	0,0250	0,0220	223,55	140,02
4	0,0227	0,0252	0,0217	221,73	139,85
5	0,0229	0,0252	0,0215	220,70	139,48
6	0,0230	0,0251	0,0214	220,09	139,15
7	0,0230	0,0250	0,0214	219,70	138,89
8	0,0231	0,0250	0,0213	219,44	138,71

Wir stoppen nach der achten Iteration, da sich der Standort nicht mehr wesentlich verändert. Nach unserer Analyse liegt also der optimale Standort ca. 219 km östlich und 139 km nördlich von Köln.

Ein Blick auf die Abbildung 3.14 verrät, dass wir unser Zentrallager in Hannover oder Umgebung errichten sollten, um eine Lieferung der Ersatzteile mit minimalen

Abbildung 3.14

OmegaJet-Flughäfen und optimaler Zentrallagerstandort

Kosten sicherzustellen. Weiterhin sehen wir auch, dass die zentrale Lage eine zeitgerechte Anlieferung von kritischen Teilen erlaubt.

3.4.3 Übungsaufgaben

Aufgabe 1 – Allgemein

a. Diskutieren Sie, welche Faktoren in die Standortentscheidung einbezogen werden sollten!

b. Diskutieren Sie, wie sich die Ausprägungen der verschiedenen Standortfaktoren verhalten, wenn Sie eine Investition in China mit einer Investition in Deutschland vergleichen!

c. Vergleichen Sie die Verfahren zur Optimierung beliebiger und bestimmter Standorte!

Aufgabe 2 – Getränkelieferant

Ein mittelständischer Getränkehändler beliefert in einer Studentenstadt sechs Kneipen mit Getränken. Um sich von der Konkurrenz zu differenzieren, sollen die Kneipen zu möglichst niedrigen Preisen versorgt werden. Zurzeit liefert das Unternehmen die Getränke aus einem Lager am Rande der Stadt mit folgenden Mengen an die Kneipen:

Kneipe	Standort		Nachfrage
j	a_j	b_j	w_j
1	4	9	4
2	7	3	7
3	12	2	9
4	1	5	4
5	3	7	3
6	5	1	5

Um auch in Zukunft exzellente Getränke zu unschlagbar günstigen Preisen liefern zu können, will der Getränkehändler nun seinen Lagerstandort optimieren, um mit minimalem Transportaufwand die Kneipen zu beliefern. Bevor aber die Suche nach einer möglichen Immobilie beginnen kann, möchte sich die Geschäftsführung zunächst einen Eindruck verschaffen, wo das Lager entstehen soll.

a. Welches Verfahren würden Sie zum Auffinden des optimalen Lagerstandorts wählen und warum?

b. Finden Sie den optimalen Standort des Lagers!

Aufgabe 3 – Cross-Docking-Positionierung

Ein großes Handelsunternehmen will zur Bündelung der Transporte zwei Cross-Docking-Terminals errichten, um seine sechs Filialen zu versorgen. In Cross-Docking-Terminals werden im Normalfall keine Produkte gelagert, sondern nur zwischen den LKW umgeladen. In dem betrachteten Fall werden die Waren von den Zulieferern zu den Terminals gebracht und dort auf Transporte zu den Filialen verteilt. Als Kriterium

für die Standortwahl kommt nach Ansicht des Logistikleiters nur die Minimierung der Transportkosten zwischen den Terminals und den Filialen in Frage. Weiterhin soll die rechtwinklige Distanz verwendet werden. Die Positionen der Filialen und die nachgefragten Paletten sind in der folgenden Tabelle dargestellt:

Filiale	Standort		Nachfrage
j	a_j	b_j	w_j
1	2	9	31
2	3	10	28
3	0	1	19
4	7	6	53
5	1	3	32
6	9	5	41

a. Positionieren Sie die beiden Lager! Verwenden Sie dabei als Startpunkte $(x_1, y_1) = (3, 5)$ und $(x_2, y_2) = (8, 8)$. Berechnen Sie auch die gesamten Transportkosten!

b. Positionieren Sie die beiden Lager und verwenden Sie als Startpunkte $(x_1, y_1) = (5, 3)$ und $(x_2, y_2) = (5, 8)$! Berechnen Sie die gesamten Transportkosten!

c. Wie kommen die Unterschiede in den optimalen Lösungen von a) und b) zustande und wie würden Sie dieses Problem lösen?

Aufgabe 4 – Poststelle

In einem Hochhaus, das von einem multinationalen Konzern als Zentrale verwendet wird, soll eine Poststelle optimal positioniert werden. Als Daten haben Sie die Positionen und das Briefaufkommen der einzelnen Abteilungen vorgegeben. Da Abteilungen sich meist über größere Bereiche des Gebäudes erstrecken, sind zur Vereinfachung die Sekretariate der Abteilungen angegeben. Da wir im Gebäude den Fluren folgen und zum Wechsel der Stockwerke den Aufzug benutzen müssen, sollen rechtwinklige Distanzen verwendet und diese außerdem mit dem Briefaufkommen gewichtet werden. Die folgende Tabelle stellt die zur Verfügung stehenden Daten dar:

Abteilung	Standort			Briefaufkommen
j	a_j	b_j	c_j	w_j
1	3	6	1	23
2	8	9	3	19
3	1	4	2	9
4	6	2	1	29
5	5	7	4	14
6	7	1	5	31

Dabei werden die x-Koordinaten mit a_j, die y-Koordinaten mit b_j und die z-Koordinaten, das heißt die Stockwerke, mit c_j bezeichnet.

a. Wie können Sie das Problem generell lösen?

b. Positionieren Sie die Poststelle optimal innerhalb des Gebäudes!

c. Wie müssten Sie vorgehen, um zwei Poststellen optimal zu positionieren?

Aufgabe 5 – Ersatzteilversorgung

Ein Hersteller von Anlagen für die chemische Industrie möchte in Zukunft den gesamten deutschlandweiten Ersatzteilbedarf aus einem Lager bedienen. Dazu soll ein Lager optimal positioniert werden, um alle Abnehmer zu minimalen Kosten beliefern zu können. Sie konnten fünf Hauptabnehmer identifizieren, deren Standorte und jährliche Ersatzteilnachfrage in folgender Tabelle angegeben sind:

Unternehmen	Standort		Nachfrage
j	a_j	b_j	w_j
1	6	4	17
2	14	12	16
3	2	8	18
4	4	1	10
5	2	2	27

a. Bestimmen Sie den optimalen Standort des Ersatzteillagers unter Verwendung von euklidischen Distanzen!

b. Welche Entfernung wird pro Jahr insgesamt zurückgelegt, wenn Sie von Ihrer optimalen Lösung ausgehen?

Aufgabe 6 – Papierproduktion

Ein Hersteller von Papier, dessen Produkte zum größten Teil in der Druckindustrie verwendet werden, möchte zwei neue Lagerstandorte eröffnen, um sechs neu hinzugekommene Druckereien zu möglichst minimalen Kosten beliefern zu können. Dazu wurden zuerst die Standorte der Druckereien aus einer Karte abgelesen und danach die prognostizierte Absatzmenge pro Jahr ermittelt. Das Ergebnis dieser Datenerhebung finden Sie in folgender Tabelle:

Druckerei	Standort		Nachfrage
j	a_j	b_j	w_j
1	5	3	31
2	13	11	28
3	2	7	19
4	5	8	53
5	2	3	32
6	6	5	41

a. Bestimmen Sie die optimalen Standorte unter Verwendung von euklidischen Distanzen!

b. Welche Entfernung wird pro Jahr insgesamt zurückgelegt, falls die prognostizierten Nachfragen so eintreten?

c. Wie hoch ist die maximale Entfernung, die zu einer Druckerei zurückgelegt werden muss?

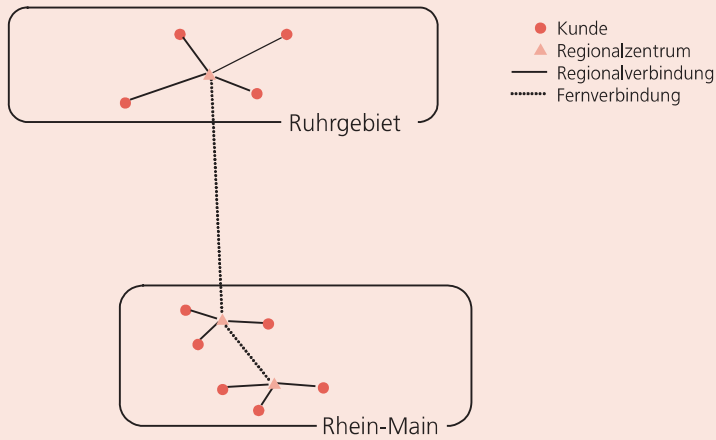
Aufgabe 7 – Güterverkehr

Ein Transportunternehmen, das das Schienennetz der Deutschen Bahn AG nutzt, will in Zukunft als *Low-Cost*-Güterverkehrsanbieter auftreten. Im letzten Jahr konnten einige neue Großkunden im Rhein-Main- und im Ruhrgebiet erfolgreich akquiriert werden. Es wird angenommen, dass die akquirierten Unternehmen ausschließlich untereinander Lieferbeziehungen unterhalten. Dabei ist zwischen den Unternehmen des Ruhrgebiets und denen des Rhein-Main-Gebiets mit einem großen Güterverkehrsaufkommen zu rechnen. Damit nun nicht zwischen allen Unternehmen Züge verkehren müssen, hat sich die Unternehmensleitung für eine Netzwerkstruktur entschieden, die in der Abbildung 3.15 beispielhaft dargestellt ist.

Diese Architektur bündelt sowohl im Ruhrgebiet als auch im Rhein-Main-Gebiet die Transporte in Regionalzentren. Nur zwischen diesen Regionalzentren verkehren dann Ferngüterzüge, die dadurch eine hohe Auslastung der Güterwagen haben. Da angenommen werden kann, dass diese Fernzüge nur Fixkosten verursachen, das heißt die Kosten unabhängig von der beförderten Menge sind, führt die hohe Auslastung zu geringeren Kosten pro Transporteinheit. Weiterhin müssen für die Regionalzentren Fixkosten in Betracht gezogen werden. Diese sind in der folgenden Tabelle für beide Regionen dargestellt:

Abbildung 3.15

Zugnetz



n	Zentrum (Ruhrgebiet)	Fixkosten
1	Recklinghausen	143
2	Dortmund	121
3	Wuppertal	49
4	Duisburg	60

n	Zentrum (Rhein-Main)	Fixkosten
1	Frankfurt	151
2	Mannheim	133
3	Mainz	41
4	Rüsselsheim	34

Außerdem liegen die Kosten des gesamten Rangieraufkommens zwischen Kunde und potenziellem Regionalzentrum vor. Die folgende Tabelle zeigt die Kunden und potenziellen Zentren im Ruhrgebiet mit den entsprechenden Rangierkosten:

		Rangierkosten zum Zentrum			
j	Kunde	Recklinghausen	Dortmund	Wuppertal	Duisburg
1	Metallteile AG	4	24	30	28
2	Gras und Wiesen AG	24	1	16	29
3	Stofffabrik GmbH	12	19	3	20
4	Kabeldraht AG	23	11	24	2
5	Kunststoff GmbH	16	14	21	19
6	Knallgas AG	21	14	18	13

Im Rhein-Main-Gebiet sind folgende Kunden und potenzielle Regionalzentren identifiziert worden:

		Rangierkosten zum Zentrum			
j	Kunde	Frankfurt	Mannheim	Mainz	Rüsselsheim
1	Kleinwagen AG	34	28	32	3
2	Paper & Pulp GmbH	23	32	9	29
3	Holzschneiderei GmbH	19	27	2	22
4	Kisten & Co. KG	24	23	34	2
5	Steinbruch GmbH	18	19	35	7

a. Im ersten Schritt sollen die Rangierkosten innerhalb des Ruhrgebiets minimiert werden. Welche Zentren sollen geöffnet werden und welcher Kunde soll von welchem Zentrum versorgt werden?

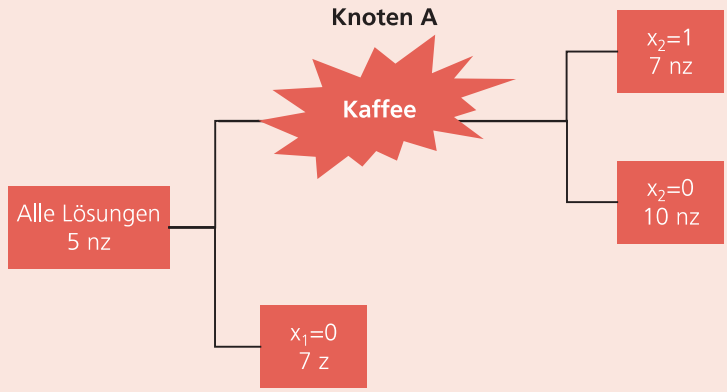
b. Im nächsten Schritt sollen die Rangierkosten innerhalb des Rhein-Main-Gebiets minimiert werden. Welche Zentren sollen geöffnet werden und welcher Kunde soll von welchem Zentrum versorgt werden?

Aufgabe 8 – Das Klausurkaffee-Problem

Sie haben die ganze letzte halbe Stunde der Produktionsklausur an der Lösung eines binären Branch-and-Bound-Problems gearbeitet. Leider haben Sie nach der erfolgrei-

Abbildung 3.16

Das Kaffeeproblem



chen Lösung vor Freude Ihren Kaffee umgestoßen, so dass einige Stellen des Baums nicht mehr lesbar sind:

Die Aufsicht will Ihnen keine Verlängerung der Bearbeitungszeit gewähren und Sie haben nur noch zwei Minuten bis zur Abgabe der Klausur, um einige Werte des nicht mehr lesbaren Knotens A zu finden. Für die Beantwortung der folgenden Fragen können Sie eindeutige Werte, beispielsweise $x_1 = 1$, oder Intervalle wie beispielsweise $Z \geq 42$ benutzen.

a. Wie viele Entscheidungsvariablen wurden in dem Problem verwendet?

b. Wie hoch war die Anfangslösung Z, mit der wir das Branch-and-Bound-Verfahren initialisiert haben?

c. Wie hoch war die untere Schranke S an Knoten A, wenn Sie davon ausgehen, dass beim *Branching* zunächst die unteren Schranken von x_1 und erst dann die unteren Schranken von x_2 bestimmt wurden?

d. War die untere Schranke S an Knoten A zulässig? Warum?

e. Wie hoch sind die Kosten Z der optimalen Lösung? Wie ist der Wert von x_1 in der optimalen Lösung? Was ist mit den anderen Entscheidungsvariablen?

Aufgabe 9 – Maschinenbelegung

Ein Kunststoffproduktehersteller möchte die Produktion für die nächste Woche planen. Es ist vorgesehen, dass insgesamt vier Produkte gefertigt werden. Weiterhin stehen auch vier Maschinen zur Verfügung, die jedoch abhängig vom gefertigten Produkt und Maschinentyp unterschiedliche Kosten verursachen, bedingt durch beispielsweise ungleichen Energieverbrauch oder Wartungs- und Personalaufwand. Die angestrebte Produktionsmenge eines jeden Produkts kann auf jeder Maschine in genau einer Woche produziert werden. Um unnötige Umrüstzeiten zu vermeiden, muss jedes Produkt genau einer Maschine zugeordnet werden und jede Maschine kann daher

während der betrachteten Woche nur genau ein Produkt fertigen. Die Produktionskostenmatrix ist gegeben durch

Produkt	Produktionskosten			
i	c_{i1}	c_{i2}	c_{i3}	c_{i4}
1	13	15	34	23
2	32	2	4	34
3	13	23	6	54
4	23	3	3	4

Lösen Sie das Zuordnungsproblem mit dem Ziel, die Produktionskosten zu minimieren, und geben Sie an, welches Produkt auf welcher Maschine gefertigt werden soll!

Aufgabe 10 – Innerstädtischer Arbeitsgeräte-Pool

Ein Stadtbauunternehmen muss innerhalb Berlins J beliebig positionierte Abstellstandorte für hochwertige Arbeitsgeräte finden. Von diesen Standorten sollen die Baustellen morgens die Geräte gestellt bekommen und diese abends wieder dorthin zurückbringen. Nun sollen die Standorte gefunden werden, von denen aus die Geräte mit einem minimalen Gesamttransportaufwand zu den Baustellen gebracht werden können.

a. Um welches Problem handelt es sich in der dargestellten Situation?

b. Überführen Sie das Problem in ein mathematisches Modell! Entwickeln Sie dazu unter Verwendung von rechtwinkligen Distanzen eine Zielfunktion und eine oder mehrere Nebenbedingungen!

3.5 Beweise

Konvexität: Wir werden nun zeigen, dass die Zielfunktion $Z(x, y)$ aus Gleichung 3.12 konvex ist und bedienen uns dazu einiger Eigenschaften von Funktionen.

Eigenschaft 1: Die Funktion $\sqrt{(a-x)^2 + (b-y)^2}$ beschreibt einen Kegel. Ein Kegel ist eine konvexe Funktion.
Eigenschaft 2: $f(x, y)$ sei eine konvexe Funktion und w eine positive Konstante. Dann ist $w\,f(x, y)$ eine konvexe Funktion.
Eigenschaft 3: Die Summe konvexer Funktionen ist konvex.
Betrachten wir zunächst einen einzelnen Term der Zielfunktion

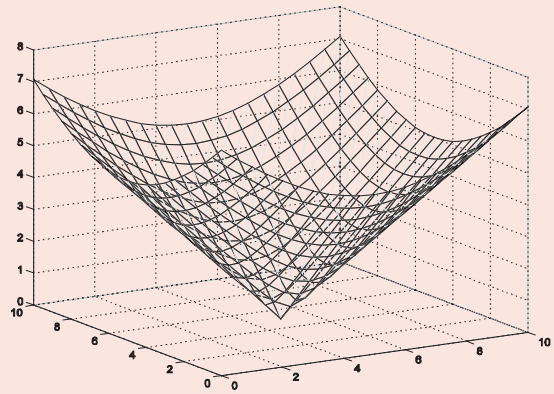
$$d_j(x, y) = \sqrt{(a_j - x)^2 + (b_j - y)^2}\,.$$

Durch Eigenschaft 1 wissen wir, dass diese Funktion einen Kegel darstellt und dass ein Kegel konvex ist. Für $a_j = 5$ und $b_j = 5$ ist der Kegel in Abbildung 3.17 dargestellt. Da für alle Punkte $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ des Kegels die Ungleichung

$$\lambda d_j(x_1, y_1) + (1-\lambda) d_j(x_2, y_2) \geq d_j(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2, \lambda y_1 + (1-\lambda)y_2)$$

Abbildung 3.17

Kegel



gilt, sehen wir, dass der Kegel konvex ist. In der Zielfunktion des Standortproblems wird der Distanz-Term $\sqrt{(a_j - x)^2 + (b_j - y)^2}$ mit einer positiven Nachfrage w_j multipliziert. Durch Eigenschaft 2 wissen wir, dass auch $w_j\sqrt{(a_j - x)^2 + (b_j - y)^2}$ konvex ist. Und durch Eigenschaft 3 wissen wir, dass auch die Summe aus den J Termen $w_j\sqrt{(a_j - x)^2 + (b_j - y)^2}$ konvex ist. Somit haben wir gezeigt, dass die Zielfunktion konvex ist. Wir können daher die partiellen Ableitungen von $Z(x, y)$ nach x und y bilden und diese gleich null setzen, um die optimale Lösung für den Lagerstandort zu finden.

Literaturverzeichnis

[1] Drezner, Z. (1995). *Facility Location: A Survey of Applications and Methods*. New York: Springer.

[2] Francis, R. L., McGinnis, L. F. und White, J. A. (1992). *Facility Layout and Location: An Analytical Approach*. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice Hall.

[3] Hillier, F. S. und Lieberman, G. J. (2002). *Introduction to Operations Research*. McGraw-Hill.

[4] *Logistik Heute*. November 2003.

[5] Love, R. F., Morris, J. G. und Wesolowsky, G. O. (1988). *Facilities Location*.

[6] Nahmias, S. (2005). *Production and Operations Analysis*. 5. Auflage. New York: McGraw-Hill.

[7] Thonemann, U. W. et al. (2003). *Supply Chain Champions*. Financial Times Deutschland/Gabler.