2 Digitalsignal-Eigenschaften

2.1 Digitalsignal-Kennwerte

Ein Digitalsignal ist ein wertdiskretes und zeitgerastertes Signal. Wertdiskret bedeutet, dass nur endlich viele unterschiedliche Amplitudenwerte möglich sind. Zeitgerastert bedeutet, dass nur zu äquidistanten (gleichabständigen) Zeitpunkten ein neuer Amplitudenwert möglich ist. Nachfolgend werden vorwiegend elektrische Digitalsignale betrachtet, die Amplitudenwerte sind dann elektrische Spannungen.

Bild 2.1 stellt zwei Digitalsignale entsprechend obiger Definition dar. Im allgemeinen Fall (linkes Teilbild) liegt eine zeitlich äquidistante Folge von Elementarimpulsen mit b möglichen Amplitudenwerten vor, hier als Dirac-Impulse (der Ordinatenwert entspricht dann der Impulsfläche der Dirac-Impulse) dargestellt. Werden Rechteck-Impulse mit einer Impulsdauer gleich der Zeitrasterdauer verwendet, ergibt sich ein Treppenspannungs-Digitalsignal (rechtes Teilbild). Das Treppenspannungs-Digitalsignal kann mathematisch (nicht als technische Realisierung) aus der Dirac-Impulsfolge durch einen Spalt-Tiefpass (dessen Ausgangs-Impulsbreite gleich der Zeitrasterdauer ist) abgeleitet werden.

wird vorausgesetzt, dass die möglichen Spannungswerte u_i zufällig mit den Wahrscheinlichkeiten p_i (mit $i = 1, 2, .., b$) auftreten.

Digitalsignal-Kennwerte

Zur Einarbeitung in die Grundzüge der Signaltheorie wird auf [STRU82] verwiesen, die Eigenschaften von Digitalsignalen sind in [LOCH95] dargestellt.

Schrittdauer T
Die Schrittdauer T eines Digitalsignals ist der zeitliche Nennabstand der Signalelemente. Die Schrittdauer hat nichts zu tun mit der Impulsdauer der verwendeten Impulse, letztere kann beliebige Werte von 0 bis T annehmen.

Schrittgeschwindigkeit v
Die Schrittgeschwindigkeit v ist der Kehrwert der Schrittdauer T und somit gleich der Anzahl der Signal-Schritte pro Zeiteinheit.

$$v := 1/T; \qquad [bd];$$

Die Schrittgeschwindigkeit hat die Dimension 1/Zeit, die physikalische Einheit 1/s und erhält die Pseudoeinheit [bd] als Abkürzung für baud zugeordnet. Diese Pseudoeinheit wurde zur Erinnerung an den Franzosen Baudot gewählt, einem Begründer der Telegrafentechnik.

Stufenhöhe Δu
Als Stufenhöhe Δu bezeichnet man den Spannungsunterschied zwischen benachbarten, gleichabständigen Spannungswerten.

Signalhub u_{ss}
Als Signalhub u_{ss} bezeichnet man den Spannungsbereich, der vom Signal benutzt wird. Der Signalhub wird auch Aussteuerbereich des Signals genannt.

$$u_{ss} := u_{max} - u_{min} = (b-1) \cdot \Delta u;$$

Gleichanteil u_g
Als Gleichanteil bezeichnet man den Langzeit-Mittelwert des Signals. Bei einem zufälligen Digitalsignal kann der Langzeit-Mittelwert als Erwartungswert (EW) der Digitalsignal-Amplitudenwerte berechnet werden:

$$u_g := EW[u_i] = \sum_{(i)} u_i \cdot p_i;$$

Die Kurzschreibweise (i) unter dem Summenzeichen bedeutet, dass die Summation über alle zulässigen Werte des Indizes i durchzuführen ist, hier also $i = 1, 2, ... b$. Beim Gleichanteil sind Amplitude und Effektivwert identisch.

Gesamt-Effektivwert u_{eff}
Der Gesamt-Effektivwert entspricht derjenigen Gleichspannung, welche an einem ohmschen Widerstand die selbe Leistung wie das betrachtete Signal erzeugt.

$$u_{eff}^2 = EW\left[u_i^{\,2}\right] = \sum_{(i)} u_i^2 \cdot p_i$$

Scheitelwert u_s
Der Scheitelwert ist definiert als Maximalwert des Signalbetrags.

$$u_s := \max_{(i)} \left[abs(u_i)\right];$$

Diese Definition ergibt auch für solche Signale sinnvolle Ergebnisse, deren negativster Momentanwert betragsmäßig größer ist als der positivste Momentanwert. Die häufig verwendete Definition $u_s = u_{max}$ liefert dann falsche Werte, da das mathematische Maximum der positivste Signalwert ist.

Scheitelfaktor K
Der Scheitelfaktor K (auch als crest-Faktor bezeichnet) ist definiert als Quotient von Scheitelwert und Effektivwert:

$K := u_s / u_{eff}$;

Bei Gleichspannung (oder bei einem bipolaren Rechtecksignal) ist K = 1, bei Sinusspannung ist K = 1.414. Bei amplitudenbegrenzten Zufallssignalen mit $u_{max} = |u_{min}| = u_{ss}/2$ folgt als Scheitelfaktor $K = (u_{ss}/2) / u_{eff} = u_{ss} / (2 \cdot u_{eff})$;

Signal-Wechselanteil

Der Wechselanteil eines Signals ergibt sich aus der Signal-Zeitfunktion durch Subtraktion des Gleichanteils. Der Wechselanteil ist eine Signal-Zeitfunktion mit Gleichanteil 0.

$u_w(t) := u(t) - u_g$;

$$EW[u_w] = \sum_{(i)} u_{w,i} \cdot p_i = \sum_{(i)} \left(u_i - u_g\right) \cdot p_i = \sum_{(i)} u_i \cdot p_i - u_g \cdot \sum_{(i)} p_i = u_g - u_g = 0\,;$$

Zusammenhang zwischen Gesamt-, Gleich- und Wechselleistung

Zwischen Gesamt-Effektivwert u_{eff}, Wechsel-Effektivwert $u_{eff,w}$ und Gleichanteil u_g eines Signals besteht nachfolgender Zusammenhang (welcher für deterministische Signale bereits aus der Fourier-Analyse bekannt ist):

$$u_{eff}^2 = u_g^2 + u_{eff,w}^2\,;$$

Beweis:

$$u_{eff}^2 = EW[(u_g + u_{w,i})^2] = \sum_{(i)} (u_g^2 + 2 \cdot u_g \cdot u_{w,i} + u_{w,i}^2) \cdot p_i$$
$$= u_g^2 \cdot \sum_{(i)} p_i + 2 \cdot u_g \cdot \sum_{(i)} u_{w,i} \cdot p_i + \sum_{(i)} u_{w,i}^2 \cdot p_i$$
$$= u_g^2 \cdot 1 \quad + 2 \cdot u_g \cdot 0 \quad + u_{w,eff}^2$$

Durch Übergang zu den Leistungswerten kann diese Aussage wie folgt formuliert werden:

Gesamt-Leistung = Gleich-Leistung + Wechsel-Leistung;

Bild 2.2 veranschaulicht den Zusammenhang zwischen den Teil-Effektivwerten (für Gleichanteil und Wechselanteil) und dem Gesamt-Effektivwert in geometrischer Form.

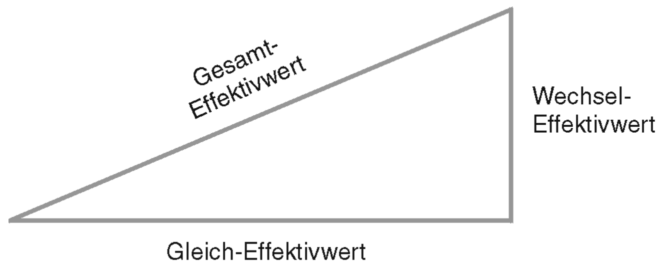

Bild 2.2: Zusammenhang zwischen Gesamt-Effektivwert, Gleich-Effektivwert und Wechsel-Effektivwert.
u_{eff} Gesamt-Effektivwert; u_g Gleich-Effektivwert = Gleichanteil; $u_{w,eff}$ Wechsel-Effektivwert;

Beispiel 2.1

Gegeben:
Die möglichen Spannungswerte -1V, 0V, +1V eines dreiwertigen Digitalsignals mit der Schrittdauer 1 ms treten mit den Wahrscheinlichkeiten 0.4, 0.4, 0.2 auf.

Gesucht:
Schrittgeschwindigkeit, Stufenhöhe, Signalhub, Gleichanteil, Gesamt-Effektivwert, Scheitelfaktor, Wechsel-Effektivwert, Wechselanteil des Signals!

Lösung:

Schrittgeschwindigkeit	v = 1/T = 1/(1ms) = 1000 bd = 1 kbd;
Stufenhöhe	Δu = 1V;
Signalhub (hier Spannungshub)	u_{ss} = +1V - (-1V) = 2V;
Gleichanteil	$u_g = \sum_{(i)} u_i \cdot p_i =$ (-0.4 + 0 + 0.2) V= - 0.2 V;

Gesamt-Effektivwert	$u_{eff}^2 = \sum_{(i)} u_i^2 \cdot p_i = (1 \cdot 0.4+0+1 \cdot 0.2)\ V^2 = 0.6\ V^2$; $u_{eff} = 0.775$ V;
Scheitelfaktor	K = 1/0.775 = 1.29;
Wechsel-Effektivwert	$u_{w,eff}^2 = u_{eff}^2 - u_g^2 = (0.6 - 0.04)\ V^2 = 0.56\ V^2$; $u_{w,eff} = 0.748$ V;
Wechselanteil (Zeitfunktion mit Gleichanteil 0)	$u_w(t) = u(t) - u_g = u(t) - (-0.2V) = u(t) + 0.2V$;

2.2 Digitalsignal-Störunterdrückung

Prinzip

Beim Empfang eines Digitalsignals kann auch dann noch richtig entschieden (auf den richtigen, gesendeten Spannungswert geschlossen) werden, wenn dem Digitalsignal kleine Störsignale überlagert sind. Kleine Störsignale werden bei korrekter Entscheidung vollständig aus dem Signal entfernt. Dieser wesentliche Vorteil der Digitalsignal-Übertragung gegenüber der Analogsignal-Übertragung wird als Stör(signal)unterdrückung bzw. Stör(signal)befreiung bezeichnet. Die Störsignalunterdrückung ist der wichtigste Vorteil der digitalen Übertragungstechnik gegenüber der analogen Übertragungstechnik.

Abtast-Entscheider

Die einfachste Entscheiderschaltung ist der Abtastentscheider. Dieser tastet das Digitalsignal in Schrittmitte ab (Entscheidungszeitpunkt). Durch Vergleich des Abtastwertes mit abgespeicherten Amplitudenwerten (Entscheidungsschwellen) entscheidet er über den ausgangsseitig abzugebenden Amplitudenwert. Nur die momentane Störsignalamplitude zum Abtastzeitpunkt ist für die Sicherheit dieser Entscheidung maßgebend.

Bild 2.3 zeigt schematisch (für b = 5) die Abtast-Entscheidung für ein b-wertiges Digitalsignal mit dem Signalhub $u_{ss}= (b-1) \cdot \Delta u$ und der Schrittdauer T. Die (b-1) Entscheiderschwellen liegen mittig zwischen den Amplitudenwerten des Digitalsignals. Liegt der empfangene Abtastwert zwischen zwei Entscheidungsschwellen, wird auf den eingeschlossenen Amplitudenwert entschieden. Ist der Abtastwert kleiner als die kleinste (größer als die größte) Entscheiderschwelle, wird auf den kleinsten (auf den größten) Amplitudenwert entschieden. Dadurch werden alle Störsignale unterdrückt, welche zum Abtastzeitpunkt betragsmäßig kleiner als die halbe Stufenhöhe des Digitalsignals sind. Für ein bandbegrenztes, gestörtes Empfangssignal (in Bild 2.3 als dicke, strichlierte Linie dargestellt) ergeben sich die selben Abtastwerte wie für das ideale, ungestörte Rechtecksignal.

Störunterdrückung des Abtast-Entscheiders

Bei einem b-wertigen Digitalsignal mit dem Signalhub u_{ss} ist die Stufenhöhe des Digitalsignals $\Delta u = u_{ss} / (b-1)$. Somit ist der Scheitelwert der soeben noch unterdrückten Störspannung:

$$\left|u_n\right|_{max} = \frac{\Delta u}{2} = \frac{u_{ss}}{2 \cdot (b-1)} = K_n \cdot u_{n,eff} \;;$$

Bei vorgegebenem Signalhub u_{ss} ergibt sich die maximale Störunterdrückung bei minimalem b (also bei b=2) und somit beim Binärsignal:

$$\left|u_n\right|_{max} = \frac{u_{ss}}{2} \;;$$

Aus dem oben berechneten maximal zulässigen Scheitelwert des Störsignals folgt unter Verwendung des Scheitelfaktors K_n des Störsignals der maximal zulässige Effektivwert, hieraus ist dann die maximal zulässige Störsignal-Leistung berechenbar.

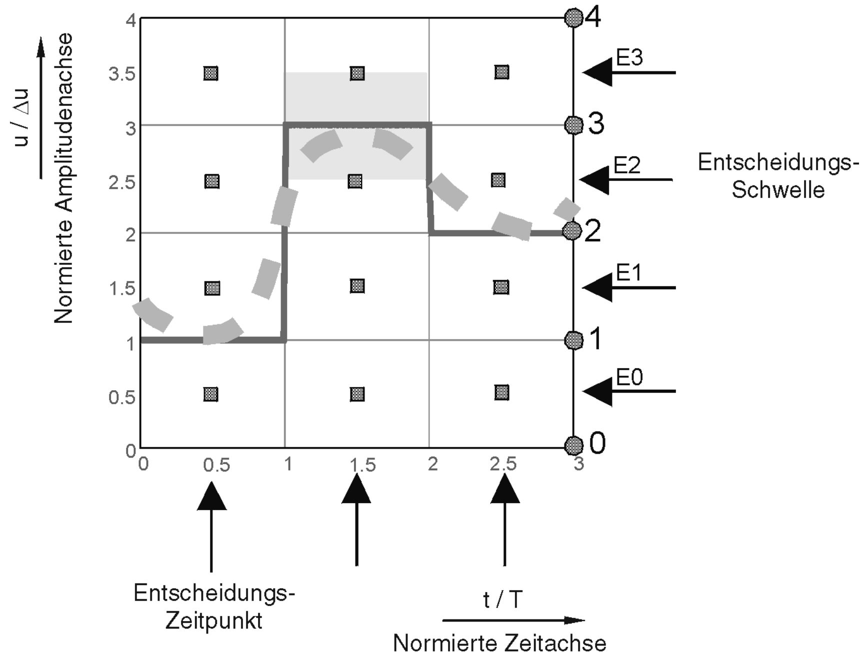

Bild 2.3: Störunterdrückung des Abtastentscheiders.
Entscheidungsschwelle: Mitte zwischen benachbarten Amplitudenwerten;
Entscheidungszeitpunkt: Schrittmitte;

2.3 Digitalsignal-Bandbreitenbedarf

Vorbemerkung

Bei Analogsignal-Übertragungssystemen muss die Signalübertragung (möglichst) verzerrungsfrei erfolgen, damit die Signalform (möglichst) nicht verändert wird. Bei Digitalsignal-Übertragungssystemen muss pro Schrittdauer T nur ein einziger diskreter Amplitudenwert übertragen werden. Eine fehlerfreie Erkennung dieses Amplitudenwerts ist bereits dann möglich, wenn zum Entscheidungszeitpunkt der empfangene Amplitudenwert innerhalb eines Amplitudenintervalls liegt, siehe Bild 2.3 zum Abtastentscheider. Signalform-Verzerrungen und zusätzliche Störungen sind deshalb zulässig, so weit diese Bedingung nicht verletzt wird. Nachfolgend wird zunächst die Übertragung von Dirac-Impulsen über ein Ideales Tiefpass-Übertragungssystem analysiert [GERD96, LOCH95].

Frequenzgang des Idealen Tiefpasses

Der komplexe Frequenzgang eines Idealen Tiefpasses (Küpfmüller-Tiefpass, Rechteck-Tiefpass) ist wie folgt definiert (zur rect-Funktion siehe Anhang A):

$$H(f) := \mathrm{rect}[f/(2 \cdot f_g)] \quad \begin{cases} = 1; & |f| < f_g; \\ = 0.5; & |f| = f_g \\ = 0; & |f| > f_g; \end{cases}$$

Der komplexe Frequenzgang ist reellwertig definiert. Somit hat der Amplitudengang exakt denselben Verlauf und das Phasenmaß b(f) ergibt sich zu b = 0. Die Phasenlaufzeit t_{ph} und die Gruppenlaufzeit t_g sind damit ebenfalls identisch gleich 0. Der ideale Tiefpass ist ein idealisiertes Modell-Übertragungssystem, welches eine einfache Berechnung von prinzipiellen Grenzen der Digitalsignal-Übertragung ermöglicht.

Bild 2.4 zeigt den einseitigen Amplitudengang des Idealen Tiefpasses (Küpfmüller-Tiefpass, Rechteck-Tiefpass) und den einseitigen Amplitudengang des später verwendeten cos-roll-off-Tiefpasses (raised cosine characteristic). Der Ideale Tiefpass kann als Sonderfall des cos-roll-off-Tiefpasses mit dem roll-off-Parameter r = 0 aufgefasst werden. Zunächst wird nur der Ideale Tiefpass betrachtet.

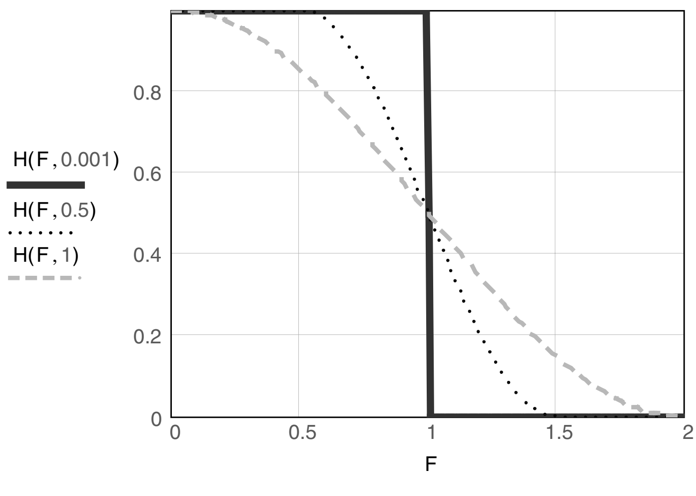

Bild 2.4: Einseitiger Amplitudengang für Idealen Tiefpass und Cos-Roll-Off-Tiefpass. Amplitudengang H(F, r); $F := f / f_g$ normierte Frequenz; f_g Eckfrequenz (6-dB-Grenzfrequenz); r roll-off-Faktor ($0 \le r \le 1$);

Impulsantwort des Idealen Tiefpasses

Im Anhang A sind die Grundlagen der Fourier-Transformation dargestellt. Unter Verwendung des dort abgeleiteten Transformationspaars [sinc(t), rect(f)] und des dort abgeleiteten Ähnlichkeitssatzes kann die Impulsantwort eines Idealen Tiefpass-Übertragungssystems in zwei kurzen Rechenschritten ermittelt werden. Nachfolgend wird ohne Rückgriff auf diese Vorkenntnisse die Impulsantwort durch direkte Anwendung des Fourier-Integrals noch einmal berechnet.

Durch Anwendung der Fourier-Transformation (FT) und der Inversen Fourier-Transformation (IFT) ergibt sich die Impulsantwort eines Idealen Tiefpass-Übertragungssystems mit folgendem Rechengang:

Eingangszeitfunktion:	$1[\mathrm{Vs}] \cdot \delta(t) = \delta(t);$
Eingangsspektrum:	$\mathrm{FT}[\delta(t)] = 1;$
Komplexer Frequenzgang des Tiefpasses:	$H(f);$
Ausgangsspektrum:	$1[\mathrm{Vs}] \cdot H(f);$
Ausgangszeitfunktion:	$\mathrm{IFT}[1 \cdot H(f)] = h(t);$

Die Durchführung der inversen Fouriertransformation ergibt (mit $\omega = 2\pi f$):

$$h(t) = \mathrm{IFT}[1 \cdot \underline{H}(f)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{H}(f) \cdot e^{j\omega t} df = \int_{-f_g}^{+f_g} 1 \cdot e^{j\omega t} df =$$

$$= \left[\frac{e^{j2\pi f t}}{j2\pi t} \right]_{-fg}^{+fg} = \frac{e^{j2\pi f_g t} - e^{-j2\pi f_g t}}{j2\pi t} = (2 \cdot f_g) \cdot \frac{\sin(2\pi f_g t)}{(2\pi f_g t)}$$

Mit der si-Funktion $\mathrm{si}(x) := \sin(x)/x$ oder der sinc-Funktion $\mathrm{sinc}(x) := \mathrm{si}(\pi \cdot x)$ und der Abkürzung $T := (1/2 \cdot f_g)$ ergibt sich für die Impulsantwort h(t):

$$h(t) = \frac{1}{T} \cdot \mathrm{sinc}\left(\frac{t}{T}\right) = \frac{1}{T} \cdot \mathrm{si}\left(\pi \cdot \frac{t}{T}\right); \qquad \text{mit} \quad T := \frac{1}{2 \cdot f_g};$$

Zur reellen geraden Frequenzfunktion (dem zweiseitigen rect-Frequenzgang) ergibt sich eine reelle gerade Zeitfunktion (die sinc-Impulsantwort), siehe Zuordnungssatz der Fourier-Transformation im Anhang. Der Maximalwert ($2 \cdot f_g = 1/T$) der Impulsantwort ist gleich der vom zweiseitigen Amplitudengang im Frequenzbereich eingeschlossenen Fläche (Höhe 1, Breite $2 \cdot f_g$).

Normierte Impulsantwort

Nachfolgend wird folgende Normierung durchgeführt:

Amplitudennormierung: $\mathbf{y = h(t) / h_{max};}$ **mit** $\mathbf{h_{max} = (2 \cdot f_g) = 1/T;}$
Zeitnormierung: $\mathbf{x = t/T;}$

Es ergibt sich dann die einfach zu merkende normierte Impulsantwort:

$$y(x) = \mathrm{sinc}(x);$$

Bild 2.5 zeigt den Verlauf der sinc(x)-Funktion. Wesentlich ist folgende Eigenschaft:

$$y(x) = \mathrm{sinc}(x) \quad = 1; \quad \text{für} \quad x = 0;$$
$$= 0; \quad \text{für} \quad x = k; \quad k \neq 0; \quad k \text{ ganzzahlig};$$

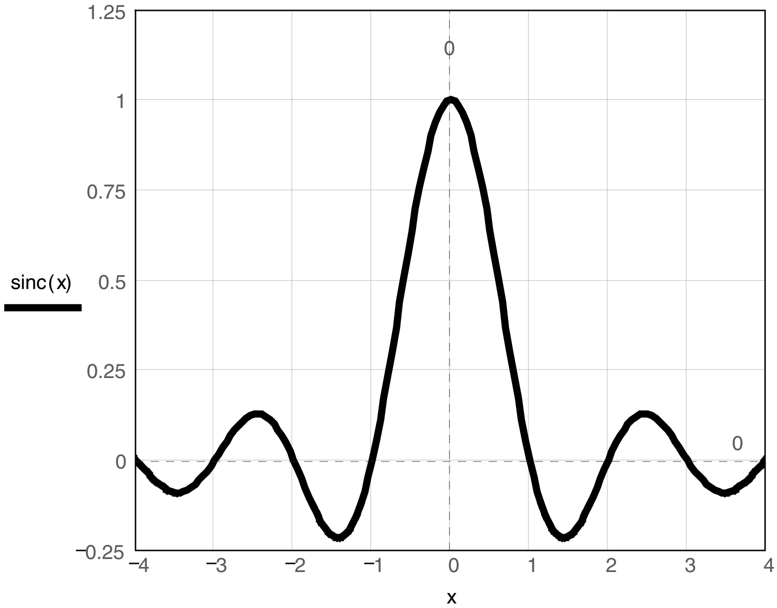

Bild 2.5: sinc(x)-Funktion.
$\mathrm{sinc}(x) := \mathrm{si}(\pi \cdot x) := \sin(\pi \cdot x) / (\pi \cdot x);$

Die sinc-Funktion hat bei x = 0 den Maximalwert 1, bei allen übrigen ganzzahligen Werten von x hat sie eine Nullstelle. Der maximale Überschwinger ist mit etwa 22% der Impulsamplitude sehr groß. Die Vor- und Nachschwinger gehen nur sehr langsam mit 1/|x| gegen 0. Für die reale Impulsantwort folgt daraus: Die Impulsantwort des Idealen Tiefpasses mit der Grenzfrequenz f_g hat bei t = 0 den Maximalwert $h_{max} = (2 \cdot f_g) = 1/T$ und bei allen sonstigen ganzzahligen Vielfachen von T eine Nullstelle. Der maximale Impuls-Überschwinger beträgt rund 22% der Impulsamplitude unabhängig von der Bandbreite des Idealen Tiefpasses. Beispielsweise würde auch bei bei n-facher Bandbreite (n = 2, 3, ..) die Höhe des Überschwingers immer gleich bleiben.

Bei einem linearen System gilt das Superpositionsprinzip. Auf eine Sequenz von Eingangs-Impulsen antwortet das System mit der zugehörigen Sequenz von ausgangsseitigen Impuls-Antworten, welche sich zur resultierenden Ausgangs-Zeitfunktion überlagern. Wenn die Eingangs-Impulse einen geeigneten Zeitabstand (also eine geeignete Schrittdauer) aufweisen, erfolgt die Überlagerung derart, dass keine Nachbarsymbol-Beeinflussung vorliegt.

Keine Nachbarsymbol-Beeinflussung bei richtiger Digitalsignal-Schrittdauer

Wird am Eingang eines Idealen-Tiefpass-Übertragungssystems ein Diracimpuls mit dem Impulsmoment (also der Impulsfläche) $u_k \cdot T$ genau zum Rasterzeitpunkt $t_k = k \cdot T$ gesendet (mit T als zeitlichem Abstand der Sende-Impulse) und wird das Ausgangssignal genau zum Rasterzeitpunkt $t_k = k \cdot T$ abtastet, dann wird der zugehörige Abtastwert genau den erwünschten Amplitudenwert $(u_k \cdot T) / T = u_k$ haben. Dirac-Impulse, welche zu anderen (früheren oder späteren) Rasterzeitpunkten t_k gesendet wurden, können diesen Abtastwert nicht beeinflussen. Es tritt keine Nachbarsymbol-Beeinflussung (Inter Symbol Interference, ISI) auf, wenn als Sende-Schrittdauer $T = 1/(2 \cdot f_g)$ gewählt wird.

Beim Idealen-Tiefpass-Übertragungssystem mit der einseitigen Bandbreite f_g tritt bei der Sende-Schrittgeschwindigkeit $v = 2 \cdot f_g$ keine Nachbarsymbol-Beeinflussung auf.

Bild 2.6 zeigt, wie sich drei sinc-Impulse ohne Nachbarsymbol-Beeinflussung (ISI = 0) überlagern. Die sendeseitig ausgewählte Wertefolge ...0011100... ergibt sich bei zeitrichtiger Abtastung fehlerfrei aus dem empfangsseitigen Summensignal.

Hinweis:

Die sinc-Funktion ist eine bandbegrenzte zeitkontinuierliche Elementarfunktion, welche den Aufbau einer bandbegrenzten zeitkontinuierlichen Zeitfunktion aus den zeitdiskreten Abtastwerten der Zeitfunktion ermöglicht (zwischen den Abtastwerten interpoliert). In Bild 2.6 ist dies beispielhaft dargestellt. In späteren Kapiteln wird diese Möglichkeit des Aufbaus einer zeitkontinuierlichen bandbegrenzten Funktion aus ihren zeitdiskreten Abtastwerten angewendet werden.

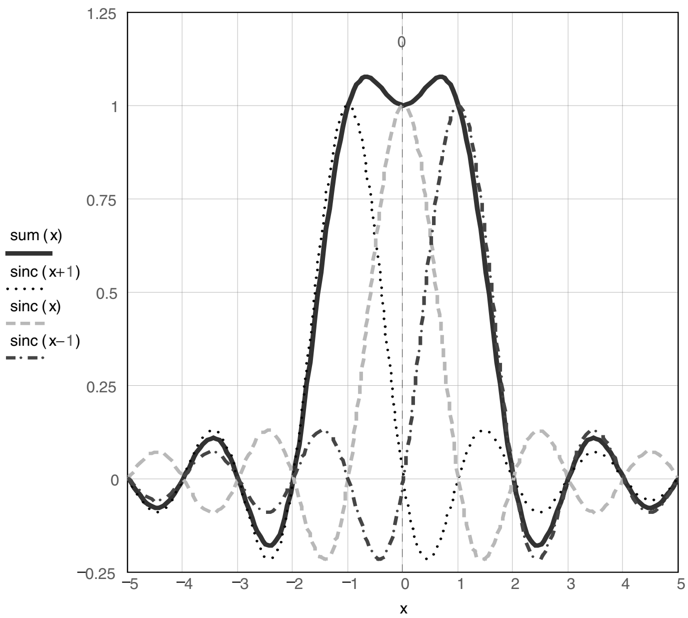

Bild 2.6: Überlagerung von drei sinc-Impulsen ohne Nachbarsymbol-Beeinflussung

Nyquist-Bandbreite

Mit $T = 1/(2 \cdot f_g)$ und $v := 1/T = 2 \cdot f_g$ gilt: Über einen ungestörten Idealen Tiefpass-Kanal mit der Grenzfrequenz f_g können pro Zeiteinheit **genau** $v = 1/T = 2 \cdot f_g$ unabhängige Abtastwerte ohne gegenseitige Beeinflussung übertragen werden. Für die Übertragung von v Abtastwerten pro Zeiteinheit (Schrittgeschwindigkeit v) ohne gegenseitige Beeinflussung wird also mindestens die einseitige Bandbreite $f_g = v/2$ benötigt, diese wird auch als Nyquist-Bandbreite oder Nyquist-Frequenz bezeichnet:

$$f_k = \frac{v}{2};$$

Ein Digitalsignal mit der Schrittgeschwindigkeit v benötigt die einseitige Mindest-Kanalbandbreite v/2, dieser Wert wird als Nyquist-Bandbreite bezeichnet.

Nyquist-Bedingung 1. Art

Die oben diskutierte Eigenschaft der sinc-Funktion (Abtastwerte $y(0) = 1$, $y(k) = 0$ für alle ganzzahligen $k \neq 0$) stellt sicher, dass keine Nachbarsymbol-Beeinflussung auftreten kann. In Kapitel 3 (Nyquist-Bedingungen) wird dies als Nyquist-Bedingung erster Art im Zeitbereich formuliert werden. Jedes Übertragungssystem, dessen Impulsantwort diese Bedingung erfüllt, ermöglicht bei Abwesenheit von Störungen eine fehlerfreie Erkennung (ohne Nachbarsymbol-Beeinflussung) der Signalschritte eines Digitalsignals [GERD96, LOCH95].

Augenmuster (eye pattern)

Das Augenmuster eines zeitlich unbegrenzten Digitalsignals ergibt sich, wenn dessen Signalanteile aus dem k-ten Zeitintervall $[k \cdot T, (k+1) \cdot T]$ für alle ganzzahligen k in das 0-te Zeitintervall $[0, T]$ verschoben (also dort übereinander gezeichnet) werden. Eine Nachbarsymbol-Beeinflussung durch vorherige oder nachfolgende Impulse ist dann optisch sehr einfach zu erkennen. Für eine näherungsweise Berechnung des Augenmusters reicht die Berücksichtigung endlich vieler Zeitintervalle aus (weil die Impuls-Vorläufer und -Nachläufer schnell gegen null gehen). Messtechnisch ergibt sich das Augenmuster, wenn bei Oszilloskop-Darstellung des Digitalsignals bei hoher Nachleuchtdauer mit der Schritt-Taktfrequenz v getriggert wird.

Nachfolgend wird das Augenmuster eines binären Digitalsignals näherungsweise aus wenigen „extremen“ Zeitfunktionen des Digitalsignals berechnet. Diese Extremfälle sind dadurch gekennzeichnet sind, dass Zustands-Übergänge schon abgeklungen sind (wie Dauer-1, Dauer-0; dies ergibt dann die äußeren Randlinien des Augenmusters) oder erst eingeleitet wurden (wie eine 1 in 0-Folge, eine 0 in 1-Folge, auch um eine Schrittdauer nach rechts oder links versetzt; dies ergibt dann die inneren Randlinien des Augenmusters).

Bei einer bipolar codierten Binärfolge (jede binäre 0 wird als negativer Dirac-Impuls, jede binäre 1 wird als positiver Dirac-Impuls gesendet) wird das Augenmuster näherungsweise von folgenden Randlinien begrenzt (mit $x = t/T$ = normierte Zeitvariable):

out111(x) :=	Ausgangssignal bei 1-Folge am Eingang;
out000(x) :=	Ausgangssignal bei 0-Folge am Eingang;
out010(x) :=	Ausgangssignal bei genau einer 1 in 0-Folge;
out101(x) :=	Ausgangssignal bei genau einer 0 in 1-Folge;
out101(x-1) :=	Ausgangssignal bei genau einer 0 in 1-Folge, versetzt nach rechts;
out101(x+1) :=	Ausgangssignal bei genau einer 0 in 1-Folge, versetzt nach links;
out010(x-1) :=	Ausgangssignal bei genau einer 1 in 0-Folge, versetzt nach rechts;
out010(x+1) :=	Ausgangssignal bei genau einer 1 in 0-Folge, versetzt nach links;

Bild 2.7 zeigt das entsprechend obiger Beschreibung berechnete Augenmuster für den Idealen Tiefpass-Kanal.

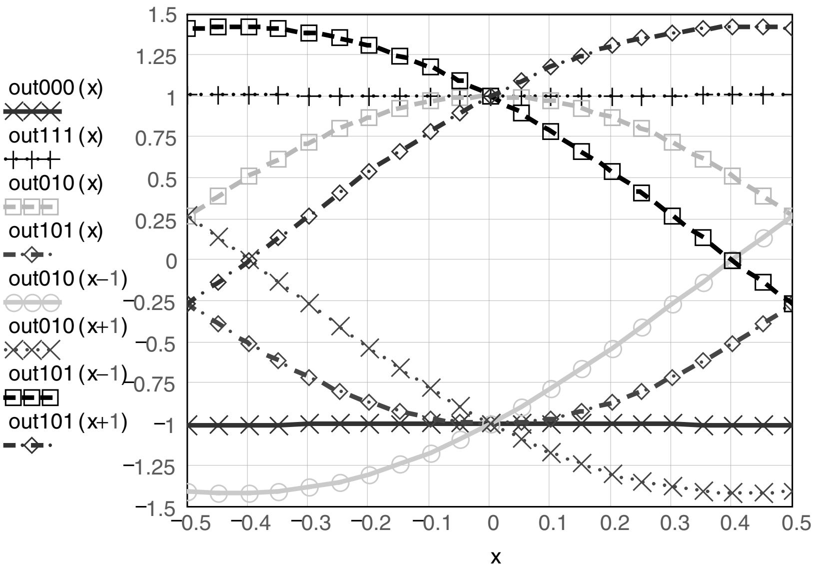

Bild 2.7: Augenmuster am Ausgang eines Idealen Tiefpass-Kanals.

Diskussion des Augenmusters

In Amplitudenrichtung ist das Auge beim Idealen Tiefpass-Übertragungssystem zum Abtastzeitpunkt $x = 0$ voll geöffnet (100% Amplituden-Augenöffnungsgrad). Der Abtastwert zum Zeitpunkt 0 wird bei exakter Abtastung durch benachbarte Impulse nicht beeinflusst (keine Nachbarsymbol-Beeinflussung). Es treten aber starke Überschwing-Effekte auf. Bei kleinen Abweichungen vom exakten Abtastzeitpunkt wird die Augenöffnung (wegen des steilen Durchgangs der begrenzenden Randlinien) sofort kleiner (und damit die Schritt-Fehlerrate bei Störungen sofort ansteigen). Die zeitliche Augenöffnung beträgt nur rund 80% der Schrittdauer (80% Zeit-Augenöffnungsgrad). Die Bedingungen für eine Ableitung der Schritt-Taktfrequenz aus dem Empfangssignal sind nicht optimal, da aus den Nulldurchgängen des Digitalsignals kein jitterfreies Anregungssignal für die Taktrückgewinnung abgeleitet werden kann.

Bewertung des Idealen Tiefpass-Übertragungssystems

Ein Basisband-Übertragungssystem mit Idealem Tiefpass-Frequenzgang ist für theoretische Überlegungen ideal. Der Bandbreitenbedarf ist minimal und bei exakter Abtastung ergibt sich keine Nachbarsymbol-Beeinflussung. Für praktischen Anwendungen ergeben sich folgende Nachteile, welche durch die unendlich steile Filterflanke verursacht werden.

Die Impulsantwort eines Idealen Tiefpass-Übertragungssystems geht nur langsam gegen null, das Abklingen der Impuls-Vorschwinger und -Nachschwinger erfolgt nur proportional $1/|x|$. Der maximale Überschwinger der Impulsantwort ist mit etwa 22% der Maximal-Amplitude sehr groß. Bei kleinen zeitlichen Abweichungen des Sende- oder Empfangs-Taktsignals (als Zittern bzw. jitter des Entscheidungszeitpunkts bezeichnet) ergibt sich deshalb eine starke Beeinflussung des Nutzabtastwertes durch die Vor- und Nachschwinger benachbarter Impulse (Nachbarsymbolbeeinflussung, Impulsnebensprechen, Inter Symbol Interference ISI), wie beim Augenmuster beschrieben.

Die Impulsantwort eines Idealen Tiefpass-Übertragungssystems ist reell und gerade, somit nicht kausal (identisch gleich 0 für $t<0$) und nicht realisierbar. Nur durch Einführung einer geeigneten Phasenlaufzeit $t_0>0$ (entspricht einem frequenzproportionalem Phasengang $\omega \cdot t_0$ und verschiebt das Maximum der Impulsantwort nach $+t_0>0$) und nachfolgende zeitliche Begrenzung der Impulsantwort auf das Zeitintervall $[0, 2 \cdot t_0]$ erhält man eine kausale Impulsantwort. Der dieser zeitbegrenzten, kausalen Impulsantwort zugehörige Frequenzgang ist näherungsweise realisierbar. Eine gute Approximation erfordert aber wegen des langsamen Abklingens der Impulsausläufer (bedingt durch die unendlich steile Filterflanke im Frequenzbereich) ein großes t_0 und somit einen sehr hohen Schaltungsaufwand.

Diese Nachteile können nur durch einen weichen Übergang vom Übertragungsfaktor 1 zum Übertragungsfaktor 0 beseitigt werden. Die benötigte Gesamt-Bandbreite erhöht sich dann allerdings. Ein solches Tiefpass-Übertragungssystem ist der im nachfolgenden Kapitel behandelte Tiefpass mit cos-roll-off-Amplitudengang.

Ergänzende Hinweise

- Die Bandbreite f_g nach obiger Definition ist die physikalische oder einseitige Bandbreite des Tiefpasses. Die mathematische oder zweiseitige Bandbreite des Tiefpasses ist $2 \cdot f_g$.
- Die Impulsantwort $h(t) = (2 \cdot f_g) \cdot \mathrm{sinc}(..)$ hat scheinbar die Dimension $\dim[h(t)] = \dim(f_g)$ = Frequenz = 1/Zeit. Das Impulsmoment (die Impulsfläche) eines Diracimpulses hat jedoch die Dimension (Amplitude · Zeit), bei Spannungsimpulsen also die Einheit (V · s). Für die Ermittlung der Impulsantwort ist das Impulsmoment 1 und taucht deshalb im Ergebnis als Formelzeichen nicht auf. Die Multiplikation unter Berücksichtigung der Einheiten liefert jedoch wegen $\dim[h(t)]$ = (Amplitude · Zeit)/Zeit = Amplitude bei Spannungsimpulsen wie zu erwarten $[(V \cdot s)/s] = [V]$.
- Das Ergebnis für den Mindest-Bandbreitenbedarf eines Digitalsignals (Nyquist-Bandbreite) kann man auch durch Umkehrung des Abtasttheorems erhalten. Das **Abtasttheorem** lautet:

  Ein auf die Maximalfrequenz f_{max} strikt bandbegrenztes Signal ist durch $f_a > 2 \cdot f_{max}$ Abtastwerte pro Zeiteinheit eindeutig bestimmt.

  Ein Digitalsignal mit der Schrittgeschwindigkeit v ist andererseits eindeutig durch v Abtastwerte je Zeiteinheit definiert. Dieser Abtastwertfolge kann eindeutig ein auf die Grenzfrequenz v/2 bandbegrenztes Signal zugeordnet werden, welches in den Abtastzeitpunkten mit dem Digitalsignal übereinstimmt. Wird anstelle des Digitalsignals dieses mit dem Digitalsignal übereinstimmt. Wird anstelle des Digitalsignals dieses bandbegrenzte Signal (über den Idealen Tiefpass mit der Grenzfrequenz v/2) verzerrungsfrei übertragen und auf der Empfangsseite zeitrichtig abgetastet, so kann das ursprüngliche Digitalsignal exakt reproduziert werden. Somit folgt im Grenzfall auch aus dem Abtasttheorem (f_a durch v und f_{max} durch f_k ersetzen): $f_k = v/2$;

2.4 Übungen

Aufgabe 2.1

Gegeben:

Gegeben ist ein bipolares Digitalsignal (symmetrisch zur 0-Linie) mit folgenden Kennwerten: 4-wertig, Amplitudenwerte gleichwahrscheinlich, Stufenhöhe 1 V, Schrittdauer 1µs.

Gesucht:

1) Gleichanteil;
2) Signalhub;
3) Gesamt-Effektivwert;
4) Scheitelfaktor;
5) Maximal zulässige Störspannung bei Abtastentscheidung;
6) Erforderliche Mindest-Kanalbandbreite eines Idealen-Tiefpass-Kanals;

Lösung:

Die Amplitudenwerte -1.5 V, -0.5 V, +0.5 V, +1.5 V sind gleichwahrscheinlich, somit folgt:

1) $u_g = 0$ V;
2) $u_{ss} = (b-1) \cdot \Delta u = 3$ V;
3) $u_{eff} = 1.12$ V;
4) K:= Betragsmaximum / Effektivwert = 1.5V / 1.12 V = 1.34;
5) $|u_n|_{max} = \Delta u/2 = 0.5$ V;
6) $f_k = v/2 = 500$ kHz;