

## Grenzschichten (boundary layers)

### BEDEUTUNG UND DEFINITION

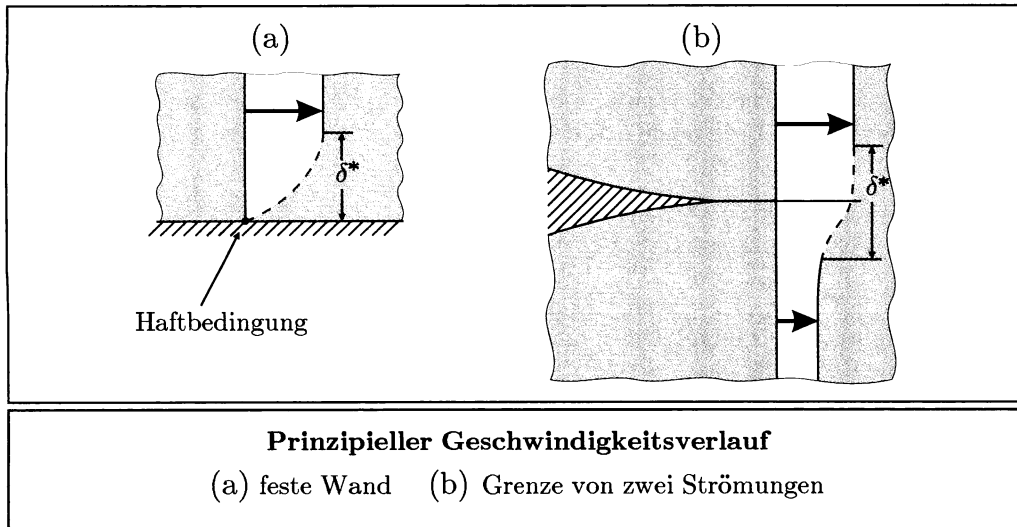
Es handelt sich um denjenigen Teil eines Strömungsfeldes, in dem es zur Ausbildung hoher Gradienten der Geschwindigkeit (*Strömungsgrenzschicht*), der Temperatur (*Temperaturgrenzschicht*) oder der Konzentration in einem Gemisch (*Konzentrationsgrenzschicht*) kommt. Diese Grenzschichten treten an den Rändern von Strömungsfeldern auf, wenn dort bestimmte Randbedingungen „erzwingen“ werden. Zum klassischen Fall der Strömungsgrenzschicht an einer festen Wand kommt es, wenn dort aufgrund der sog. *Haftbedingung* eine Geschwindigkeit erzwungen wird (z.B. die Geschwindigkeit Null, wenn die Wand in Ruhe ist), die von derjenigen abweicht, die weiter entfernt von der Wand vorliegt.

	Definition	
<p>Unter einer <i>Strömungsgrenzschicht</i> versteht man eine dünne Schicht am Rand eines Strömungsfeldes, in der es zur Ausbildung von hohen Geschwindigkeitsgradienten kommt und in der deshalb Reibungseffekte von ausschlaggebender Bedeutung sind. Diese Schicht wird um so ausgeprägter (steilere Gradienten und dünnere Schichten), je höher die Reynolds-Zahl ist. Deshalb kann das Verhalten der Strömung in der Grenzschicht in transformierten Koordinaten, in die eine bestimmte Reynolds-Zahl Abhängigkeit aufgenommen wird, einheitlich beschrieben werden (asymptotische Grenzschichttheorie für <math>Re \rightarrow \infty</math>). Zusätzlich zur Strömungsgrenzschicht kann es zu <i>Temperatur-</i> und/oder <i>Konzentrationsgrenzschichten</i> kommen, die durch hohe Gradienten der Temperatur bzw. der Konzentration in einem Gemisch gekennzeichnet sind.</p>		

### PHYSIKALISCHER HINTERGRUND

Von extremen Ausnahmen abgesehen besitzen Fluide die Eigenschaft, eine kontinuierliche (nicht singuläre, „sprunghafte“) Verteilung der Strömungsgeschwindigkeit auszubilden. Dies ist die Folge von Wechselwirkungen benachbarter Fluidmoleküle, die ein unbeeinflusstes „aneinander Vorbeigleiten“ einzelner Fluidbereiche verhindern. In diese Wechselwirkung sind die wandgebundenen Moleküle einer Festkörperberandung (Strömung längs einer festen Wand) ebenso eingebunden wie die angrenzenden Moleküle einer zweiten Strömung, die von einer bestimmten Stelle an mit der ersten Strömung in Kontakt tritt. In beiden Fällen werden damit sprunghafte Änderungen der Geschwindigkeit unterbunden. Im Falle einer Begrenzung des Strömungsgebietes durch eine feste Wand spricht man von der sog. *Haftbedingung*, weil das Fluid scheinbar an der Wand „haftet“.

Wenn nun die Geschwindigkeit an einer ruhenden Wand Null ist und sprunghafte Änderungen ausgeschlossen sind, so muss ein kontinuierlicher Verlauf der Geschwindigkeitsverteilung zwischen der Wand und dem Strömungsfeld weit entfernt von der Wand vorliegen, wie dies im nachfolgenden Bild skizziert ist. Dabei ist zunächst offen, in welchem Wandabstand  $\delta^*$  dieser Übergang in die sog. *Aussenströmung* erfolgt.



Diese Dicke  $\delta^*$ , die noch ohne nähere Definition als *Grenzschichtdicke* bezeichnet werden soll, kann durch einfache Überlegungen abgeschätzt werden, wie dies zunächst für laminare Grenzschichten erläutert wird.

Die Grenzschichtdicke  $\delta^*$  ergibt sich physikalisch aus dem Zusammenspiel zwischen dem wandparallelen konvektiven Transport des Fluides und einem quer dazu auftretenden Transportvorgang, der durch die Molekülwechselwirkung hervorgerufen wird. Diese mikroskopische Molekülwechselwirkung äußert sich makroskopisch als Viskosität  $\eta^*$  (dynamische Viskosität) oder  $\nu^*$  (kinematische Viskosität) des Fluides. Der Quertransport selbst kann als molekularer oder auch diffusiver Transport von Drehung interpretiert werden, die in einer Strömung an der Wand entsteht (s. dazu das Stichwort DREHUNG). Wenn nun die Viskosität des Fluides für einen (Drehungs-) Transport über einen Abstand  $\delta^*$  sorgt, so ist die Kombination  $\nu^*/\delta^*$  mit der Dimension Länge/Zeit ein Maß für die zugehörige Transportgeschwindigkeit quer zur Wand. Die Schichtdicke  $\delta^*$  folgt dann aus der Bedingung:

Zeit für den wandparallelen Transport mit  $u_\infty^*$  über eine Länge  $L^*$ , also  $L^*/u_\infty^* = \text{Zeit}$  für den Quertransport von Drehung mit  $\nu^*/\delta^*$  über einen Abstand  $\delta^*$ , also  $\delta^*/(\nu^*/\delta^*) = \delta^{*2}/\nu^*$ .

Die Gleichsetzung dieser beiden Zeiten gibt damit an, wie weit die Drehung (die an der Wand entsteht) in die Strömung eindringen kann, wenn diese gleichzeitig wandparallel stromabwärts befördert wird. Dies ist aber gerade die gesuchte Grenzschichtdicke. Aus  $L^*/u_\infty^* = \delta^{*2}/\nu^*$  folgt unmittelbar

$$\frac{\delta^*}{L^*} = \text{Re}^{-1/2} \quad \text{mit} \quad \text{Re} = \frac{u_\infty^* L^*}{\nu^*}$$

Die Grenzschichtdicke wird also für  $\text{Re} \rightarrow \infty$  beliebig klein. Strömungen bei großen Reynolds-Zahlen weisen damit dünne Strömungsgrenzschichten auf.

Wenn die molekulare Viskosität den einzigen Quertransportmechanismus darstellt, ist damit auch die konkrete Abhängigkeit der Grenzschichtdicke von der Reynolds-Zahl als  $\text{Re}^{-1/2}$  bekannt. Dies gilt für laminare Strömungen. Bei turbulenten Strömungen sind die Verhältnisse schwieriger, weil

- es zwei Quertransport-Mechanismen gibt, die molekulare Viskosität  $\nu^*$  und die turbulente, sog. Scheinviskosität  $\nu_t^*$ ; deshalb gibt es dann eine Zweischichtenstruktur.
- die dominierende Scheinviskosität  $\nu_t^*$  keine konstante Stoffgröße ist, sondern eine mit dem Wandabstand variierende Strömungsgröße; deshalb liegt nicht mehr die Proportionalität zu  $\text{Re}^{-1/2}$  vor.

Trotz dieser komplizierten Verhältnisse gelangt man auch bei turbulenten Grenzschichten zu einer Abschätzung der Grenzschichtdicke, wenn die eigentliche Ursache des Quertransportes berücksichtigt wird. Bei turbulenten Grenzschichten spielt die Viskosität im überwiegenden Teil der Grenzschicht keine Rolle, sondern die Bewegung großräumiger Strukturen führt zu einem Quertransport von Drehung. Eine charakteristische Geschwindigkeit für die Bewegung dieser Strukturen ist eine mittlere Schwankungsgeschwindigkeit  $\hat{u}^{*'} in der Grenzschicht. Wenn diese in der ersten Näherung als  $x$ -unabhängig angesehen wird (weil die Turbulenz in einer Grenzschicht etwa gleich stark bleibt), so ergibt sich folgendes. Eine charakteristische Zeit für den Quertransport von Drehung ist jetzt  $\delta^*/\hat{u}^{*'}$ . Die Gleichsetzung dieser Zeit mit der charakteristischen Zeit für den wandparallelen Transport ( $L^*/u_\infty^*$ ) ergibt:$

$$\delta^* = \frac{\hat{u}^{*'}}{u_\infty^*} L^* \quad \text{und damit:} \quad \delta^* \sim L^*$$

Erwartungsgemäß liegt hiermit zunächst, anders als bei laminaren Grenzschichten, keine Reynolds-Zahl-Abhängigkeit vor. Eine genauere Analyse ergibt allerdings eine schwache Reynolds-Zahl-Abhängigkeit, weil die Annahme  $\hat{u}^{*' = \text{const}$  „zu grob“ ist.

Den bisherigen Überlegungen kann entnommen werden, dass für turbulente Strömungen  $\delta^* \sim L^*$  (in erster Näherung) gilt, während für laminare Grenzschichten  $\delta^* \sim L^{*1/2}$  vorliegt. Dies bedeutet, dass turbulente Grenzschichten mit der Lauflänge sehr viel stärker wachsen als laminare Grenzschichten. Eine präzise Definition der Grenzschichtdicke  $\delta^*$  bzw. von gleichwertigen, aber geeigneteren Größen ist unter dem Stichwort GRENZSCHICHTDICKEN zu finden.

## ANWENDUNGEN UND BEISPIELE

Grenzschichteffekte treten bei einer Reihe von Alltagsphänomenen auf, die erklärt werden können, ohne dass die Grenzschichten im einzelnen berechnet werden müssten. Nachfolgend werden zwei solche Beispiele erläutert.

### 1. Ansammeln von Teeblättern in der Mitte des Tassenbodens nach dem Umrühren

Teeblätter bewegen sich nach dem Umrühren zunächst in der Tasse verteilt (annähernd) auf Kreisbahnen. Dabei werden die nach außen gerichteten Zentrifugalkräfte auf die Teeblätter durch Druckkräfte kompensiert, die in der Gesamtwirkung betragsmäßig gleich groß wie die Zentrifugalkräfte sind, aber nach innen gerichtet wirken. Diese kommen zustande, weil der Druck auf gleichem Höhenniveau nicht konstant ist (wie bei einer ruhenden Flüssigkeit), sondern nach außen hin zunimmt. Diese Zunahme korrespondiert mit der nach außen ansteigenden Flüssigkeitsoberfläche des rotierenden Fluides.

Sinken die Teeblätter nun auf den Boden und geraten dabei in die Bodengrenzschicht, so wird dieses Kräftegleichgewicht gestört. Die nach innen gerichtete Druckkraft bleibt unverändert erhalten, weil die Druckverhältnisse in der Grenzschicht genauso sind wie am Grenzschichttrand (man sagt: der Druck wird der Grenzschicht durch die Außenströmung aufgeprägt). Dies gilt aber nicht für die Zentrifugalkräfte. Da die Teeblätter in der Grenzschicht abgebremst werden, Zentrifugalkräfte aber proportional zum Quadrat der Umfangsgeschwindigkeit sind, nehmen diese Kräfte ab. Damit überwiegen aber die nach innen gerichteten Druckkräfte und bewegen die Teeblätter ins Zentrum, wo sie sich dann in der Mitte des Tassenbodens ansammeln.

[Übrigens: Im Jahr 1926 schrieb Erwin Schrödinger (Nobelpreis für Physik, 1933) an Albert Einstein: „Meine Frau hat mich vor ein paar Tagen über das „Teetassen-Phänomen“ befragt und ich konnte ihr keine vernünftige Erklärung geben. Sie sagt, dass sie nie wieder ihren Tee umrühren wird, ohne an Sie zu denken“- nachdem Albert Einstein es erklären konnte; zitiert aus: P. Ghose, D. Home (1994); Riddles in your Teacup, IOP Publishing Ltd.]

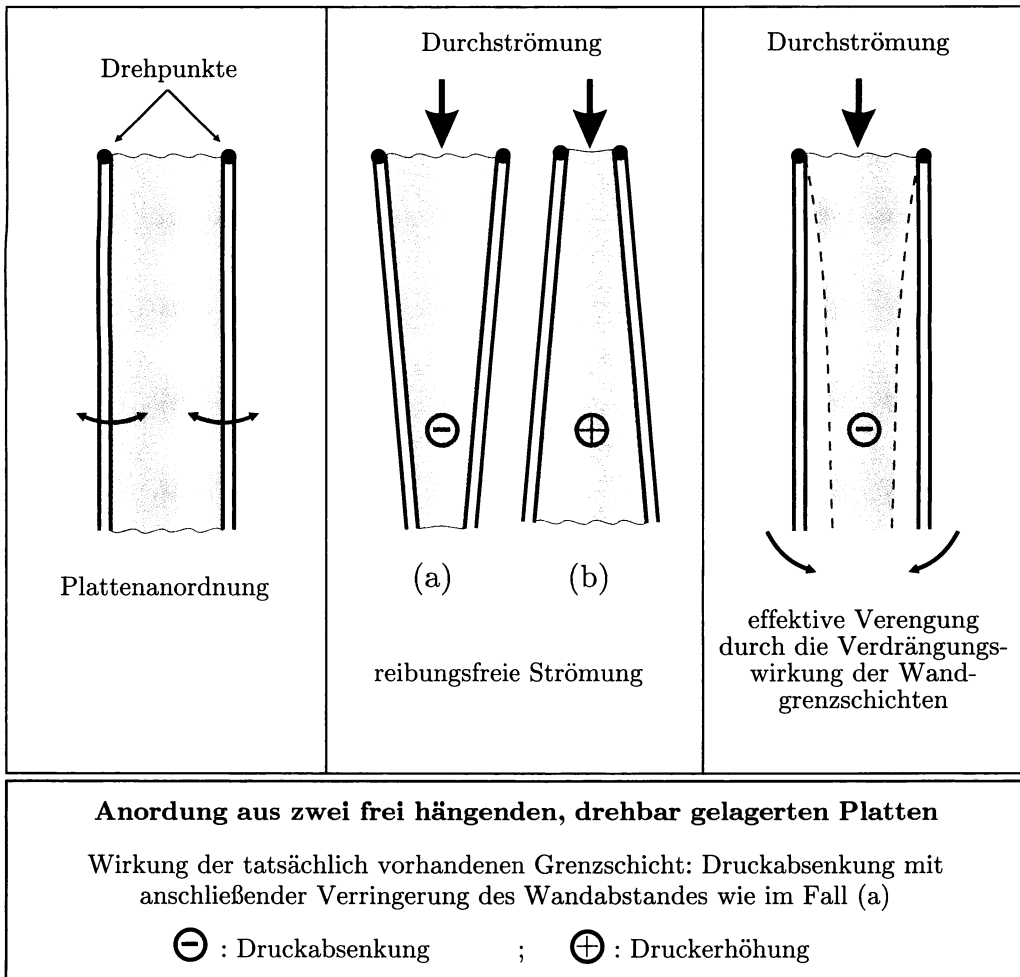
## *2. Luftstrom zwischen zwei senkrechten, beweglichen Wänden*

In der im Bild auf der nächsten Seite gezeigten Anordnung sind zwei ebene Platten drehbar gelagert. Ohne Strömung im Plattenzwischenraum sind die Platten parallel zueinander angeordnet. Eine als reibungsfrei angenommene Strömung zwischen diesen Platten würde daran zunächst nichts ändern. Wenn allerdings durch eine kleine Störung die Platten aufeinander zu bewegt werden, entsteht eine Düse mit abnehmendem Druck, was zu einer weiteren Verengung des Strömungskanals führt. Andererseits entsteht bei einer Anfangsstörung, die beide Platten voneinander entfernt, ein Diffusor mit zunehmendem Druck, was zu einer weiteren Aufweitung des Kanals führt. Welcher der beiden im Bild gezeigten Fälle (a) oder (b) eintritt, hängt danach von einer zufällig auftretenden Anfangsstörung ab. Die Realität zeigt aber, daß stets Fall (a) auftritt, bei dem sich die Platten aufeinander zu bewegen. Für diesen Effekt sind Reibungseinflüsse verantwortlich, die sich in der Ausbildung von Wandgrenzschichten äußern. Durch deren sog. Verdrängungswirkung wirkt der Querschnitt effektiv verengt, so dass es zu einer Beschleunigung und damit verbundenen Druckabsenkung kommt, was die Platten näher zusammenbringt.

Dieser Effekt ist z.B. zu beobachten, wenn von oben mit dem Mund zwischen zwei in den Fingern auf Abstand gehaltene Blätter Papier geblasen wird.

## BEACHTEN

❑ **Haftbedingung:** Das Wort suggeriert mit der zusätzlichen Interpretation „Strömungsgeschwindigkeit Null an der Wand“, dass die wandnächsten Fluidmoleküle in Ruhe seien. Dies ist nicht der Fall, weil sie mit den Wandmolekülen genauso wenig starr verbunden sind wie mit anderen benachbarten Fluidmolekülen (wohl aber mit beiden in Wechselwirkung stehen). Eine zutreffende Interpretation von Haftbedingung müsste vielmehr heißen: Die Extrapolation der wandnahen (gemittelten) Molekülgeschwindigkeiten auf die Wand ergibt dort den Wert Null.



❑ **Weitere Strömungen mit Grenzschichtcharakter:** In einer weitergehenden Bedeutung werden auch andere Strömungen, die nicht durch die Haftbedingung an festen Wänden entstehen, als Grenzschichtströmungen bezeichnet. Entscheidend dafür ist, dass sie „schlanke Gebiete“ mit hohen Geschwindigkeitsgradienten ausbilden, wie dies bei den sog. *Trennungsschichten* (reibungsbefahelter Bereich zwischen zwei angrenzenden Strömungen) und *Freistrahlen* („schlanke“ Strömungsgebiete von Strahlen in einer ruhenden Umgebung) der Fall ist. Auch für diese Strömungen gelten die GRENZSCHICHTGLEICHUNGEN. Die Besonderheiten der jeweiligen Strömung kommt dann durch die Randbedingungen zum Ausdruck.

❑ **Einfluss von Wandrauheiten:** Bezüglich des Einflusses von Wandrauheiten auf die Strömung bzw. den Strömungswiderstand verhalten sich laminare und turbulente Grenzschichten fundamental verschieden. Während laminare Grenzschichten durch Rauheiten der Wand unbeeinflusst bleiben, spielen sie bei turbulenten Grenzschichten eine entscheidende Rolle, sobald ein bestimmter Mindestwert einer Rauheitshöhe überschritten wird. Die Erklärung hierfür liegt in der Zweischichtenstruktur turbulenter Grenzschichten (s. dazu das Stichwort SCHUBSPANNUNGSGESCHWINDIGKEIT, dort

unter PHYSIKALISCHER HINTERGRUND). Sobald Wandrauheiten groß genug sind, um in den Bereich der Grenzschicht zu ragen, der nicht ausschließlich durch die molekulare Viskosität bestimmt wird, beeinflusst dies das gesamte Grenzschichtverhalten. Da die rein viskose Unterschicht gemessen in der Koordinate  $y^+ = y^* u_\tau^* / \nu^*$  bis etwa  $y^+ = 5$  reicht, haben Rauheiten mit absoluten Höhen  $k^*$  einen Einfluss, sobald  $k^* u_\tau^* / \nu^* > 5$  gilt. Zu  $y^+$  s. wiederum das Stichwort SCHUBSPANNUNGSGESCHWINDIGKEIT, jetzt unter ANWENDUNGEN UND BEISPIELE.

- ❑ **Grenzschichtströmungen idealer Gase:** Dabei ergibt sich folgender (scheinbare) Widerspruch: Grenzschichtströmungen entstehen aufgrund von Molekülwechselwirkungen, ideale Gase sind wechselwirkungsfreie Ansammlungen von Molekülen.

Die Auflösung dieses „Widerspruches“ besteht darin, dass die physikalisch vorhandenen Wechselwirkungen bei Gasen einerseits überhaupt erst zu der makroskopischen Größe Viskosität führen, es andererseits aber erst bei hohen Drücken zu Abweichungen vom thermodynamisch idealen Gasverhalten kommt, das gerade die Vernachlässigung der Wechselwirkungen meint. Grenzschichtströmungen von Gasen, die sich wie ideale Gase verhalten, sind also dann möglich, wenn der Druck hoch genug ist, damit aus makroskopischer Sicht eine Viskosität existiert (weil ein Kontinuum vorliegt), aber nicht so hoch, dass bereits Abweichungen vom idealen Gasverhalten berücksichtigt werden müssten. Da nennenswerte Abweichungen vom idealen Gasverhalten erst bei Drücken oberhalb von etwa 10 bar auftreten, sind Grenzschichtströmungen idealer Gase (genauer: von realen Gasen, die sich wie ideale Gase verhalten) ohne weiteres möglich.

## WEITERFÜHRENDE LITERATUR

Herwig, H. (2002): *Strömungsmechanik*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York

Oertel, H.; Hrsg (2001): *Prandtl-Führer durch die Strömungslehre*, 10. Aufl.; Vieweg Verlag, Braunschweig/Wiesbaden

Schlichting, H.; Gersten K. (1997): *Grenzschicht-Theorie*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York

Gersten, K.; Herwig, H. (1992): *Strömungsmechanik*, Vieweg Verlag, Braunschweig/Wiesbaden

Van Dyke, M. (1975): *Perturbation Methods in Fluid Mechanics*, The Parabolic Press, Stanford, California

## Grenzschichtdicken (boundary layer thicknesses)

### BEDEUTUNG UND DEFINITION

Es handelt sich um verschiedene Dicken, die neben dem Abstand des Grenzschichtendes von der Wand (Grenzschichtdicke im engeren Sinne) ein Maß für die Verdrängung der Außenströmung (Verdrängungsdicke), für den Impulsverlust in der Grenzschicht (Impulsverlustdicke) sowie den Verlust an kinetischer Energie in der Grenzschicht (Energieverlustdicke) darstellen. Die experimentelle Bestimmung dieser Größen ist durchaus problematisch, weil Grenzschichten für  $Re \rightarrow \infty$  definiert sind, reale Strömungen aber zwar bei großen, jedoch stets endlichen Reynolds-Zahlen vorkommen.

		Definition	
Für Strömungsgrenzschichten an festen, undurchlässigen Wänden werden folgende Dicken definiert, wobei die Koordinate $y^*$ von der Wand ausgehend senkrecht in das Strömungsgebiet weist:			
• Grenzschichtdicke $\delta_{99}^*$ (oft auch nur $\delta^*$ ):	Wandabstand, in dem die wandparallele Geschwindigkeit 99% der Außenströmungsgeschwindigkeit erreicht hat (s. dazu die spätere Erläuterung unter PHYSIKALISCHER HINTERGRUND)		
• Verdrängungsdicke $\delta_1^*$ :	$\delta_1^* = \int_0^{\delta^*} \left[ 1 - \frac{u^*}{U^*} \right] dy^*$	(*)	
• Impulsverlustdicke $\delta_2^*$ :	$\delta_2^* = \int_0^{\delta^*} \left[ 1 - \frac{u^*}{U^*} \right] \frac{u^*}{U^*} dy^*$	(**)	
• Energieverlustdicke $\delta_3^*$ : (kinetische Energie)	$\delta_3^* = \int_0^{\delta^*} \left[ 1 - \left( \frac{u^*}{U^*} \right)^2 \right] \frac{u^*}{U^*} dy^*$	(***)	

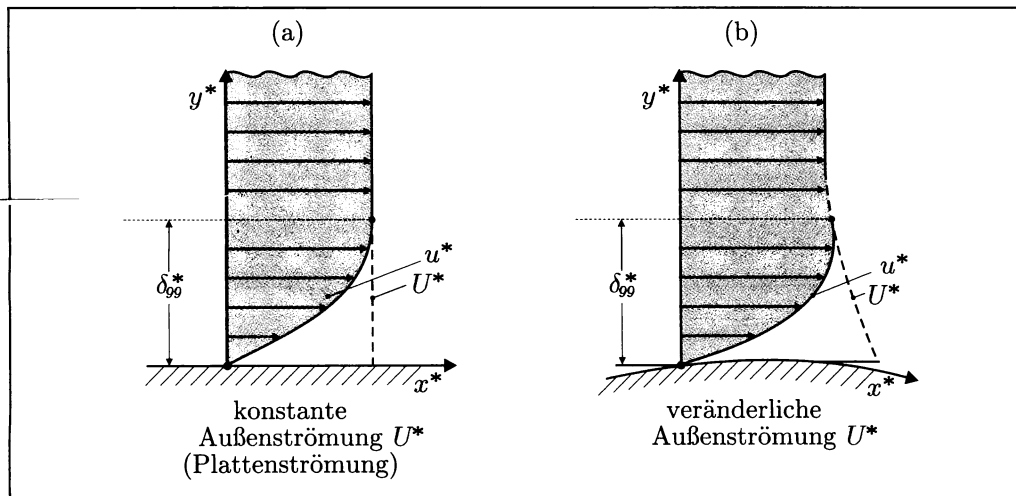
$\delta_{99}^*, \delta_1^*, \delta_2^*, \delta_3^*$	Grenzschichtdicken	m
$u^*$	wandparallele Grenzschicht-Geschwindigkeitskomponente	m/s

$U^*$	wandparallele Außengeschwindigkeitskomponente (s. Erläuterungen)	m/s
$y^*$	Koordinate senkrecht zur Wand	m

## PHYSIKALISCHER HINTERGRUND

Grenzschichten sind die wandnahen Bereiche eines Strömungsfeldes, in denen der Übergang von der Geschwindigkeit Null (relativ zur Wand, HAFTBEDINGUNG) auf den Wert in der sich anschließenden Außenströmung erfolgt. In diesen Grenzschichten spielen Reibungseffekte eine besondere Rolle. Als Grenzschichtdicke im engeren Sinne,  $\delta_{99}^*$ , wird nun der Wandabstand eingeführt, bei dem 99 % der Außenströmungsgeschwindigkeit erreicht sind. Mit dieser Definition sind zwei Probleme verbunden:

- Der Übergang in die Außenströmung erfolgt „asymptotisch“, d.h. fließend, ohne klare Grenze, weshalb das 99 %-Kriterium eingeführt wurde. Dieses Kriterium ist im konkreten Fall wegen der damit geforderten hohen (Mess-) Genauigkeit nur schwer anzuwenden.
- Prinzipielle Schwierigkeiten treten bei der Anwendung des 99 %-Kriteriums dann auf, wenn die Außenströmung (an einer festen Stelle  $x^*$  entlang der Wand) noch eine (meist allerdings relativ schwache) Abhängigkeit von der Querkoordinate  $y^*$  aufweist. Dies ist immer dann der Fall, wenn keine sog. Plattenströmung vorliegt. Die Plattenströmung ( $U^* = u_\infty^*$  im gesamten Außenbereich des Strömungsfeldes) stellt somit eine Sonder-situation dar, an der allerdings häufig die Grenzschichtdicken-Definitionen erläutert werden. Das nachfolgende Bild zeigt diesen Sonderfall (a) und einen allgemeineren



### Grenzschichtdicke $\delta_{99}^*$

BEACHTEN:  $U^*$  ergibt sich aus einer Extrapolation der Geschwindigkeit im Außenbereich zur Wand hin



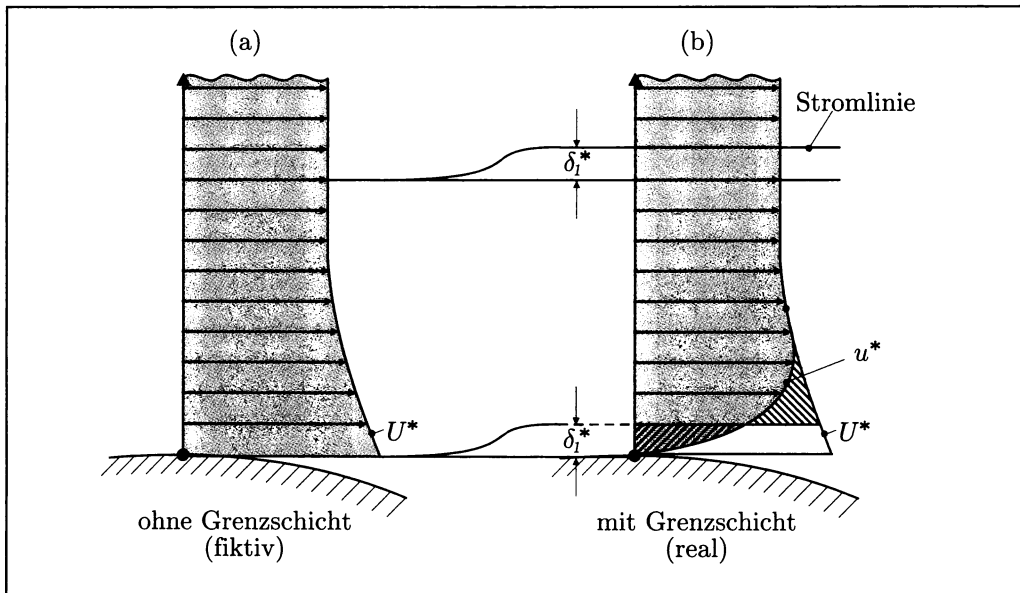
Fall (b), der an einer konvex gekrümmten Wand auftreten würde. Dort ist erkennbar, dass zwar auch 99 % der Außenströmung erreicht werden müssen, die Außenströmung selbst aber eine mehr oder weniger offensichtliche Extrapolation der Strömung im Außenbereich darstellt.

Alle weiteren Grenzschichtdicken werden auf der Basis der nachfolgenden Überlegungen definiert und stellen Größen dar, die besser zur Charakterisierung der Grenzschicht geeignet sind, als die Größe  $\delta_{99}^*$ .

In Grenzschichten ist die Geschwindigkeit aufgrund der Haftbedingung an der Wand gegenüber einem fiktiven Fall ohne Haftbedingung reduziert. Als Folge davon liegen in Wandnähe z.B. ein geringerer Impuls sowie eine geringere kinetische Energie vor. Der Vergleich mit dem fiktiven Fall „ohne Haftbedingung“, also einem Fall, bei dem sich keine Grenzschicht ausbildet, dient dazu, Längen zu definieren, die eine Grenzschicht bezüglich verschiedener Aspekte charakterisieren. Im einzelnen wird definiert:

- Verdrängungsdicke  $\delta_1^*$ :

Gegenüber dem fiktiven Fall einer Strömung ohne Haftbedingung (keine Grenzschicht) ist die gesamte Außenströmung um einen gewissen lauffängenabhängigen Betrag  $\delta_1^*$  nach außen „verdrängt“ worden. Das nachfolgende Bild zeigt die Entstehung der *Verdrängungsdicke*  $\delta_1^*$  am allgemeinen Fall einer nicht-konstanten Außenströmung (beachte: diese entspricht der Definition (\*) für die Plattenströmung exakt, für alle anderen Strömungen in guter Näherung; für  $u^*$  und  $U^*$  s. auch das vorherige Bild).



### Verdrängungswirkung einer Strömungsgrenzschicht

$\delta_1^*$  ist die Größe, bei der die unterschiedlich schraffierten Flächen in Fall (b) gleich groß sind

- Impulsverlustdicke  $\delta_2^*$ :

Infolge des verminderten Massenstromes ist auch der Impulsstrom in Wandnähe (gegenüber dem fiktiven Fall ohne Grenzschicht) vermindert, und zwar um den Betrag  $\int (U^* - u^*) dm^*$  mit  $dm^* = \rho^* u^* B^* dy^*$  und  $B^*$  als Breite senkrecht zur Zeichenebene. Nun ist  $\delta_2^*$  die Schichtdicke, die bei einer Geschwindigkeit  $U^* = \text{const} = U_W^*$  einen Impuls besitzt, der gleich dem Impulsdefekt der realen Grenzschicht ist. Diese entspricht  $\delta_2^*$  gemäß (\*\*) wiederum nur für die Platte exakt, sonst in guter Näherung.

- Energieverlustdicke  $\delta_3^*$ :

Der verminderte Massenstrom hat auch einen verminderten Strom kinetischer Energie zur Folge, und zwar von der Größe  $\int (U^{*2} - u^{*2}) dm^*$ . Wenn  $\delta_3^*$  die Schichtdicke ist, die bei einer Geschwindigkeit  $U^* = \text{const} = U_W^*$  eine kinetische Energie besitzt, die dem Energiedefekt der realen Grenzschicht entspricht, folgt  $\delta_3^*$  aus der Definitionsbox (mit derselben Anmerkung wie bei  $\delta_2^*$ ).

Die verschiedenen Grenzschichtdicken sind bezüglich konkreter Zahlenwerte von drei Einflüssen abhängig:

- der Reynolds-Zahl  $Re = u_B^* L_B^* / \nu^*$  des Problems ( $u_B^*$ : charakteristische Geschwindigkeit,  $L_B^*$ : charakteristische Länge)
- der Form der Außenströmung  $U^*$ , wobei  $U^*(y^*)$  in unmittelbarer Nähe der Wand maßgeblich ist
- der Position auf dem umströmten Körper.

Liegen diese Größen fest, können konkrete Zahlenwerte angegeben werden, wie im folgenden Beispiel gezeigt wird.

## ANWENDUNGEN UND BEISPIELE

*Zahlenwerte bei verschiedenen Reynolds-Zahlen; Plattenströmung mit  $U^* = u_\infty^*$ , betrachtete Position:  $x^* = L^* = 1 \text{ m}$  von der Plattenvorderkante entfernt*

Die Reynolds-Zahl, gebildet mit der Lauflänge  $x^*$ , entscheidet darüber, ob die Grenzschicht laminar oder turbulent ist. Für  $Re_x = u_\infty^* x^* / \nu^* > 5 \cdot 10^5$  liegt in vielen Fällen eine turbulente Grenzschicht vor (die Einschränkung „in vielen Fällen“ bezieht sich auf die Tatsache, dass der Transitionsprozess von einer Reihe von zusätzlichen Bedingungen wie Wandrauheiten, Störungen in der Außenströmung u.ä. abhängt).

Die nachfolgende Tabelle enthält drei Reynolds-Zahlen  $Re_L = u_\infty^* L^* / \nu^*$ , mit  $L^* = 1 \text{ m}$ , die kleiner und drei, die größer als diese sog. kritische Reynolds-Zahl von  $5 \cdot 10^5$  sind. Die angegebenen Dicken gelten deshalb entsprechend für laminare bzw. turbulente Grenzschichten.

### Zahlenwerte für die Plattengrenzschicht bei $x^* = 1$ m

(Daten aus Herwig (2002))

$H_{12}, H_{32}$  : s. unter BEACHTE (Formparameter)

#### BEACHTE

❑ **Endliche Reynolds-Zahlen:** Die Grenzschichttheorie ist eine asymptotische Theorie für  $Re \rightarrow \infty$ . In diesem Grenzfall entspricht die Geschwindigkeit am Außenrand der Grenzschicht der Wandgeschwindigkeit einer Strömung ohne Grenzschicht, s. dazu das Stichwort GRENZSCHICHTTHEORIE. Im Grenzfall  $Re = \infty$  entspricht die Geschwindigkeit  $U^*$  in den Definitionen der Grenzschichtdicken deshalb der Geschwindigkeit  $U^* = U_W^*(x^*)$ . Wenn aber endliche Reynolds-Zahlen vorliegen, wie dies bei Messungen stets der Fall ist, muss bei der Auswertung berücksichtigt werden, dass  $U^*$  im Grenzschichtbereich noch eine Abhängigkeit von der Querkoordinate  $y^*$  aufweist. Der Verlauf von  $U^*$  bzgl.  $y^*$  muss deshalb (bis auf den Sonderfall der Plattenströmung) durch eine Extrapolation ermittelt werden, wie dies in den zuvor gezeigten Bildern angedeutet ist.

❑ **Grenzschichtdicken bei laminaren Grenzschichten:** Laminare Grenzschichten können in einer einheitlichen, transformierten Querkoordinate  $N = (y^*/L^*)\sqrt{Re}$  beschrieben werden. Für die Dicken  $\delta_i^*$  ( $\delta_1^*, \delta_2^*, \delta_3^*, \dots$ ) führt dies auf:

$$\delta_i^* = \int_0^{\delta_i^*} \dots dy^* \quad \rightarrow \quad \hat{\delta}_i \equiv \frac{\delta_i^*}{L^*} \sqrt{Re} = \int_0^{\infty} \dots dN$$

mit  $\hat{\delta}_i$  als dimensionloser transformierter Dicke. Die obere Integrationsgrenze kann als  $N \rightarrow \infty$  gewählt werden, weil der Integrand für große Werte von  $N$  zu Null wird. Da turbulente Grenzschichten keine einheitliche Querkoordinate aufweisen (Zweischichtenstruktur) ist eine analoge einfache Transformation dort nicht möglich.

❑ **Laufängenabhängigkeiten:** Die Dicken von Grenzschichten nehmen fast ausnahmslos mit der Lauflänge zu (beginnend an einer Vorderkante oder in einem Staupunkt).

Die konkrete Abhängigkeit von der Lauflänge  $x^*$  ist dabei je nach Außenströmung jedoch verschieden. Außerdem verhalten sich laminare und turbulente Grenzschichten diesbezüglich unterschiedlich. Als typisches Beispiel kann wieder die Plattengrenzschicht gelten. Eine laminare Grenzschicht wächst proportional zu  $\sqrt{x^*}$ , beginnend an der Vorderkante als Ursprung der Grenzschicht. Eine turbulente Grenzschicht wächst nahezu linear mit der Lauflänge  $x^* - x_0^*$  an, wobei  $x_0^*$  einen fiktiven Ursprung darstellt, der berücksichtigt, dass eine turbulente Grenzschicht in einem Transitionsprozess aus einer laminaren Grenzschicht hervorgeht.

- **Formparameter:** Neben den Grenzschichtdicken selbst können auch die Verhältnisse von zwei Dicken der Charakterisierung von Grenzschichten dienen. In diesem Sinne werden die sog. *Formparameter*  $H_{12} = \delta_1^*/\delta_2^*$  und  $H_{32} = \delta_3^*/\delta_2^*$  eingeführt. Diese Größen können für gegebene Grenzschichtprofile ausgewertet werden und charakterisieren mit ihren Zahlenwerte die „Form“ des betreffenden Profils. Typische Werte für  $H_{12}$  liegen z.B. bei laminaren Grenzschichten bei  $H_{12} \approx 2,6$  (Plattenströmung), während die turbulenten Werte deutlich niedriger liegen, z.B.  $H_{12} \approx 1,4$  (ebenfalls für die Plattenströmung).

## WEITERFÜHRENDE LITERATUR

Herwig, H. (2002): *Strömungsmechanik*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York

Schlichting, H.; Gersten, K. (1997): *Grenzschicht-Theorie*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York

Gersten, K.; Herwig, H. (1992): *Strömungsmechanik*, Vieweg Verlag, Braunschweig/Wiesbaden