
Vorwort

Dieses Buch gibt den Inhalt einer zweisemestrigen Vorlesung wieder, die ich an der Universität Ulm für Studierende mit den Fachrichtungen Elektrotechnik und Informationstechnik im Hauptstudium halte. Es kann auch von Entwicklungsingenieuren in der Praxis genutzt werden, die ihr Wissen auf dem Gebiet der Informationsübertragung auffrischen wollen, aber auch von Mathematikern, Physikern und Informatikern, die sich in dieses Gebiet einarbeiten möchten. Um dem Leser den Zugang zu erleichtern, gibt es das mit „Signale und Systeme“ benannte erste Kapitel, das als kompakte Wiederholung des notwendigen Basiswissen gedacht ist. Es dient gleichzeitig dazu, in die später verwendete Terminologie einzuführen.

Der eigentliche Stoff der Vorlesung und der ausführlichere Teil des Buches beginnt mit Kapitel zwei. Behandelt werden zunächst die grundlegenden Verfahren zur Übertragung digitaler Signale und darauf aufbauend im Kapitel vier die konventionellen Verfahren zur Übertragung analoger Signale. Dies berücksichtigt die Tatsache, dass man heute Sprache, Bilder, Filme, Daten und Texte digital in einheitlicher Weise quasi fehlerfrei speichern und übertragen kann, und digitale Übertragungen inzwischen als Grundlage für konventionelle analoge Übertragungen angesehen werden können. Das unaufhaltsame Vordringen digitaler Übertragungen wird im Kapitel sieben mit der Informationstheorie auch theoretisch begründet.

Das Ziel des Buches ist, ein grundlegendes Verständnis für die Prinzipien zu vermitteln, die allen Verfahren zur Informationsübertragung gemeinsam sind, und die unabhängig von der momentan zur Realisierung verfügbaren Technologie weiterbestehen werden. Um diese Prinzipien besser herausarbeiten zu können, wird in den ersten vier Kapiteln ein Übertragungskanal vorausgesetzt, der nur Störungen in Form von additivem weißen gaußschen Rauschen hinzufügt. Der Stoff bis einschließlich Kapitel vier wird von mir in drei Semesterwochenstunden (SWS) Vorlesung und einer SWS Übung behandelt. An dieser Stelle ist ein Schnitt möglich. Für diejenigen, die nur eine Einführung in die grundlegenden Methoden der Informationsübertragung benötigen, reichen die ersten vier Kapitel.

Im Kapitel fünf stehen stochastisch-zeitvariante Kanäle im Vordergrund. Es ist vor dem Hintergrund zu sehen, dass Funk-Übertragungsmedien zunehmend wichtiger geworden sind und damit auch Verfahren zur adaptiven Entzerrung, die im darauf folgenden Kapitel behandelt werden. Auf der Grundlage des bis dahin vorhandenen Verständnisses wird dann in die abstrahierende Informationstheorie eingeführt und ebenso in die Gebiete der Kanal- und Quellencodierung, die hieraus hervorgegangen sind. Da Übertragungsmedien einem einzelnen Sender-Empfänger-Paar in der Praxis selten exklusiv zur Verfügung stehen, sind Multiplexverfahren wichtig, mit denen parallele Übertragungswege erzeugt werden können. Die hierfür notwendigen Methoden werden anschließend behandelt. Besonderes Gewicht hat dabei die Kombination von linearen Modulationsverfahren und Multiplex, die in der Praxis zunehmend an Bedeutung gewonnen hat, vor allem in den Ausprägungen „Orthogonal Frequency Division Multiplexing“ (OFDM) und „Code Division Multiplexing“ (CDM). Das letzte Kapitel führt schließlich in die Methoden und Verfahren ein, die wichtig werden, wenn viele Teilnehmer vorhandene Kanäle zu Informationsübertragung nutzen wollen. Wegen des nun auftretenden Wettbewerbs-Problems rücken die Theorie der Warteschlangen und Zugriffsprotokolle in den Vordergrund. Kapitel fünf bis neun werden von mir in vier SWS Vorlesung und zwei SWS Übung behandelt.

Zum Abschnitt „Vektorwertige Übertragung mit linearen Modulationsverfahren“ innerhalb des Kapitels acht ist anzumerken, dass der hier dargestellte Stoff über die Vorlesung hinausgeht und von mir in umfassenderer Form im Rahmen einer Wahlvorlesung behandelt wird. Er schließt sich aber nahtlos an die zuvor erläuterten Multiplexverfahren an und stellt eine Überleitung zu aktuellen Forschungsthemen auf dem Gebiet der drahtlosen Informationsübertragung dar.

Zu jedem der neun Kapitel gibt es Übungsaufgaben. Um die Seitenzahl des Buches in Grenzen zu halten, sind die Lösungen nicht abgedruckt. Sie können jedoch von der Web-Adresse

<http://www.springeronline.com/de/3-540-21400-3>

abgerufen werden.

Viele Beschreibungen und Denkweisen in diesem Buch sind durch meinen verehrten Lehrer Hans Dieter Lüke geprägt, durch seine Schule. Ich möchte ihm dafür an dieser Stelle ganz besonders herzlich danken.

Der vorliegende Text ist aus einem Vorlesungsskript entstanden, dessen erster Teil bereits mehrfach Korrektur gelesen und durch Vorschläge ergänzt worden ist. Hierbei haben viele meiner ehemaligen wissenschaftlichen Mitarbeiter mitgewirkt. Ihnen allen bin ich zu Dank verpflichtet, vor allem aber auch den jetzigen wissenschaftlichen Mitarbeitern. Sie haben den aktuellen Buchtext gelesen und standen jederzeit für intensive fachliche Diskussionen zur Verfügung. Es ist schwer möglich, alle Beiträge detailliert aufzuführen und in gebührendem Maße zu würdigen, doch ich schätze jeden einzelnen

sehr. Unserem Akademischen Oberrat, Herrn Dr. Werner Teich, danke ich ganz besonders für die vielen fruchtbaren Diskussionen in den vergangenen Jahren, aber auch für das kritische Lesen dieses Textes und die wertvollen Hinweise und Verbesserungsvorschläge. Im Rahmen dieses Buchprojekts hat sich Herr Dipl.-Ing. Ulrich Marxmeier um alle Latex-Belange gekümmert und an der endgültigen Fertigstellung des Buchtextes intensiv mitgewirkt. Auch ihm möchte ich hier für sein Engagement danken, aber auch Frau Rittinger, die uns in der Schlussphase noch unterstützt hat. Ganz besonderer Dank gebührt Frau Heike Schewe. Sie hat sämtliche Abbildungen erstellt und in Form von Hilfsblättern zur Vorlesung über viele Jahre hinweg betreut, ebenso das oben erwähnte Vorlesungsskript. Sie hat darüber hinaus diesem Buch die endgültige Form gegeben.

Ulm, Sommer 2004

Jürgen Lindner

Missverständnisse soll die Bezeichnung „digitale Übertragung“ im Folgenden benutzt werden.

Eine Übertragung von analogen Quellensignalen, z. B. von Sprachsignalen, die in gleicher Weise nicht ganz korrekt auch *analoge Übertragung* genannt wird, wird erst später behandelt. Dies hat den Vorteil, dass die analogen Übertragungsverfahren aus den digitalen herzuleiten sind.

2.3 Binäre Übertragung

Bei einer binären Übertragung kann die Nachrichtenquelle zwischen zwei Elementarsignalen wählen. Für das *Elementarsignalalphabet* A_e gilt somit:

$$A_e = \{e_0(t), e_1(t)\}. \quad (2.3)$$

Welche konkreten Elementarsignale hier gewählt werden, ist für das Prinzip der Binärübertragung unerheblich. Es muss lediglich sichergestellt werden, dass sich $e_0(t)$ und $e_1(t)$ voneinander unterscheiden. Wie dieser „Unterschied“ zu messen ist und wie er sich auf die Resistenz gegen das AWGR auswirkt, wird später deutlich werden. Wichtig ist aber jetzt bereits, ein *Gütemaß* für die Binärübertragung zu definieren, über dessen Optimierung wir zu optimalen Empfangsalgorithmen bzw. zu optimalen Empfängerstrukturen gelangen. Ein in der Praxis wichtiges Gütemaß, das auch hier verwendet werden soll, ist die mittlere Zahl von richtig übertragenen Bits, die es zu maximieren gilt. Das wahrscheinlichkeitstheoretische Äquivalent hierzu ist die Wahrscheinlichkeit, mit der ein Bit – oder, hiermit korrespondierend, ein Elementarsignal – richtig empfangen wird.

Die zu lösende Aufgabe besteht also darin, eine Vorschrift zu finden, mit der das wahrscheinlichst gesendete Elementarsignal bei gegebenem Empfangssignal bestimmt werden kann.

Im Folgenden werden wir zunächst ein einmaliges Aussenden eines Elementarsignals zum Zeitpunkt $t = 0$ und den korrespondierenden einmaligen Empfang betrachten. Die in einem solchen „Experiment“ auftretenden Signale werden dabei als Musterfunktionen von stochastischen Prozessen aufgefasst. Alle vorkommenden Wahrscheinlichkeiten sind somit in Ensemblerichtung über die verschiedenen Musterfunktionen zum Zeitpunkt $t = 0$ gebildet zu verstehen und die Musterfunktionen entstehen durch (gedankliches) Wiederholen des Experiments.

Die Verallgemeinerung auf ein fortlaufendes Aussenden von Elementarsignalen, wie es in praktischen Anwendungen auftritt, wird in Abschn. 2.3.5 vorgenommen.

2.3.1 Optimales Empfangsverfahren

Abbildung 2.6 zeigt das vorausgesetzte Modell der Binärübertragung. Die Nachrichtenquelle wählt zwischen den beiden Elementarsignalen $e_0(t)$ und $e_1(t) \neq e_0(t)$ aus und sendet das ausgewählte über den AWGR-Kanal zum Empfänger. Wenn das ausgewählte Elementarsignal mit $e_i(t)$ bezeichnet wird ($i = 0$ oder $i = 1$), dann ergibt sich am Eingang des Empfängers das Signal

$$g(t) = e_i(t) + n(t). \quad (2.4)$$

$n(t)$ ist hierbei, wie oben bereits erläutert, eine Musterfunktion des WGR-Prozesses. Der Empfänger berechnet nun zwei Wahrscheinlichkeiten:

$$\begin{aligned} P_0 &= \text{Prob}[e_0(t) \text{ gesendet} \mid g(t) \text{ empfangen}] \\ P_1 &= \text{Prob}[e_1(t) \text{ gesendet} \mid g(t) \text{ empfangen}]. \end{aligned} \quad (2.5)$$

P_0 und P_1 sind *bedingte Wahrscheinlichkeiten*, bei denen vorausgesetzt ist, dass das Ereignis rechts von \mid , d. h. „ $g(t)$ empfangen“, bereits eingetreten ist. Auf den hier vorliegenden zeitlichen Ablauf bezogen spricht man bei P_0 und P_1 auch von *A-Posteriori*-Wahrscheinlichkeiten. Neben der Schreibweise nach (2.5) ist es üblich, eine abgekürzte Schreibweise zu verwenden:

$$P_i = \text{Prob}[e_i(t) \mid g(t)]; \quad i = 0, 1. \quad (2.6)$$

Wir wollen sie im Folgenden auch nutzen und dabei beachten, dass im Argument von $\text{Prob}[\cdot]$ *Ereignisse* stehen. Die vom Empfänger anzuwendende Entscheidungsregel lautet somit

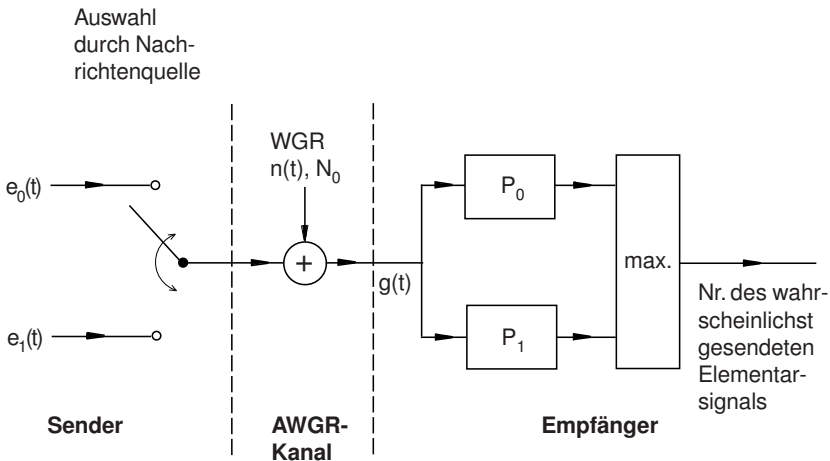


Abb. 2.6. Einfaches Modell für eine Binärübertragung über einen AWGR-Kanal

$$\max_{i=0,1} \{\text{Prob}[e_i(t) | g(t)]\} = P_k \quad (2.7)$$

$\Rightarrow e_k(t)$ mit größter Wahrscheinlichkeit gesendet.

Wegen der hier vorkommenden A-Posteriori-Wahrscheinlichkeiten wird diese Regel auch *Maximum-A-Posteriori-Entscheidungsregel* oder kurz *MAP-Entscheidungsregel* genannt. Nun sind die beiden hier auftretenden A-Posteriori-Wahrscheinlichkeiten nicht direkt zu berechnen. „ $e_i(t)$ gesendet“ ist die Ursache für das sich anschließende Ereignis „ $g(t)$ empfangen“. Wenn aber „ $g(t)$ empfangen“ bereits eingetreten ist, dann müssen die beiden Ereignisse in (2.6) als *Hypothesen* aufgefasst werden, aufgrund deren das Ereignis „ $g(t)$ empfangen“ eingetreten ist. Die Wahrscheinlichkeiten sind somit Wahrscheinlichkeiten für Hypothesen, die einer Berechnung hier nicht zugänglich sind. Mit dem *Satz von Bayes* wird es aber möglich, das hier vorgegebene Übertragungsmodell ins Spiel zu bringen und die gesuchten Wahrscheinlichkeiten indirekt doch zu berechnen. Der Satz von Bayes lautet bei der hier vorgegebenen Aufgabe:

$$\text{Prob}[e_i(t) | g(t)] = \text{Prob}[e_i(t)] \frac{\text{Prob}[g(t) | e_i(t)]}{\text{Prob}[g(t)]}; \quad i = 0, 1. \quad (2.8)$$

$\text{Prob}[e_i(t)]$ auf der rechten Seite ist eine *A-Priori*-Wahrscheinlichkeit. Sie gibt an, mit welcher Wahrscheinlichkeit die Nachrichtenquelle das Elementarsignal $e_i(t)$ auswählt. Sie muss im voraus bekannt sein. $\text{Prob}[g(t) | e_i(t)]$ ist – im Gegensatz zu $\text{Prob}[e_i(t) | g(t)]$ – mit dem vorgegebenen Übertragungsmodell über ein Gedankenexperiment bestimmbar: Man nimmt an, dass $e_0(t)$ gesendet wird und bestimmt mit dem Wissen über den AWGR-Prozess die Wahrscheinlichkeit $\text{Prob}[g(t) | e_0(t)]$. Mit dem Senden von $e_1(t)$ wiederholt man das Gedankenexperiment und bestimmt in gleicher Weise $\text{Prob}[g(t) | e_1(t)]$. Bis auf $\text{Prob}[g(t)]$ sind somit alle Wahrscheinlichkeiten auf der rechten Seite von (2.8) bekannt bzw. bestimmbar. Für die Maximierungsaufgabe nach (2.7) ist diese letztere Wahrscheinlichkeit irrelevant, da sie nicht von i abhängt. Die MAP-Entscheidungsregel kann daher auch so ausgedrückt werden:

$$\begin{aligned} \max_{i=0,1} \{\text{Prob}[e_i(t)] \text{Prob}[g(t) | e_i(t)]\} &= \text{Prob}[e_k(t)] \text{Prob}[g(t) | e_k(t)] \\ &\Rightarrow e_k(t) \text{ mit größter Wahrscheinlichkeit gesendet.} \end{aligned} \quad (2.9)$$

Beim Entwurf eines digitalen Übertragungssystems geht man in der Regel davon aus, dass die zu übertragenden Bits alle mit gleicher Wahrscheinlichkeit auftreten. Als Rechtfertigung für diese Annahme wird meist die *Transparenz* angeführt: Das Übertragungssystem soll für alle Arten von Quellen ohne jeweils neue Anpassung in gleicher Weise gut funktionieren. Mit dieser Annahme liegen die A-Priori-Wahrscheinlichkeiten $\text{Prob}[e_i(t)]$ fest: Sie sind gleich. Für den hier vorliegenden binären Fall bedeutet dies:

$$\text{Prob}[e_0(t)] = \text{Prob}[e_1(t)] = \frac{1}{2}. \quad (2.10)$$

Da somit bei den A-Priori-Wahrscheinlichkeiten ebenfalls keine Abhängigkeit von i mehr vorliegt, können sie bei der Maximierungsaufgabe auch weggelassen werden. Die Entscheidungsregel nach (2.9) vereinfacht sich somit zu

$$\begin{aligned} \max_{i=0,1} \{\text{Prob}[g(t) | e_i(t)]\} &= \text{Prob}[g(t) | e_k(t)] \\ \Rightarrow e_k(t) &\text{ mit größter Wahrscheinlichkeit gesendet.} \end{aligned} \quad (2.11)$$

Diese neue Entscheidungsregel wird *Maximum-Likelihood-Entscheidungsregel* oder kurz *ML-Regel* genannt. „Likelihood“ bedeutet dabei so viel wie „Glaubwürdigkeit“ oder „Verlässlichkeit“. Im Anhang zu diesem Kapitel wird gezeigt, dass diese ML-Regel durch eine korrespondierende ML-Regel ausgedrückt werden kann, in der anstelle der zeitkontinuierlichen Signale nur noch Signalvektoren vorkommen:

$$\begin{aligned} \max_{i=0,1} \left\{ p_{\underline{g}}(\underline{x} = \underline{g} | \underline{e}_i) \right\} &= p_{\underline{g}}(\underline{x} = \underline{g} | \underline{e}_k) \\ \Rightarrow e_k(t) &\text{ mit größter Wahrscheinlichkeit gesendet.} \end{aligned} \quad (2.12)$$

Die zwei Wahrscheinlichkeiten $\text{Prob}[\cdot]$ aus (2.11) sind jetzt durch zwei N -dimensionale bedingte Wahrscheinlichkeitsdichten $p_{\underline{g}}(\underline{x} | \underline{e}_0)$ und $p_{\underline{g}}(\underline{x} | \underline{e}_1)$ ersetzt. \underline{g} ist der zu $g(t)$ gehörige Empfangssignalvektor, die Vektoren \underline{e}_0 und \underline{e}_1 ersetzen die beiden zeitkontinuierlichen Elementarsignale. \underline{x} ist der Variablenvektor der Wahrscheinlichkeitsdichte. Die Wahrscheinlichkeitsdichten leiten sich aus dem AWGR auf dem Kanal ab:

$$\begin{aligned} p_{\underline{g}}(\underline{x} | \underline{e}_i) &= p_{\underline{n}}(\underline{x} - \underline{e}_i) \\ &= \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi (N_0 2f_g)^2}} \right]^N \exp \left(-\frac{\|\underline{x} - \underline{e}_i\|^2}{2(N_0 2f_g)^2} \right). \end{aligned} \quad (2.13)$$

f_g ist hierbei die Grenzfrequenz der als bandbegrenzt angenommenen Elementarsignale, N_0 die Rauschleistungsdichte auf dem Kanal, und für die Dimension N des Signalraumes gilt:

$$N = 2f_g T, \quad (2.14)$$

wobei T wiederum die Dauer der Elementarsignale ist.

Die Entscheidungsregel (2.12) besagt somit, dass man von einem empfangenen Vektor \underline{g} jeweils \underline{e}_0 bzw. \underline{e}_1 subtrahieren muss um dann durch Einsetzen der beiden Differenzen in die mehrdimensionale Gauß-Verteilung (2.13) den größeren der beiden Wahrscheinlichkeitsdichte-Werte zu bestimmen. Der Vektor \underline{e}_k , der zum größeren der beiden Werte gehört, entspricht dem wahrscheinlichst gesendeten Elementarsignal $e_k(t)$.

Abbildung 2.7 soll dies als Beispiel für Signalvektoren mit $N = 2$ Komponenten veranschaulichen. Die hier relevante zweidimensionale Gauß-Verteilung ist an den rotationssymmetrischen Glockenkurven zu erkennen. Die Leistungsdichte N_0 des AWGR auf dem Kanal ist so angenommen, dass die Wahrscheinlichkeitsdichten $p_g(\underline{x} | \underline{e}_0)$ und $p_g(\underline{x} | \underline{e}_1)$ sehr schnell abfallen und sich kaum durchdringen.

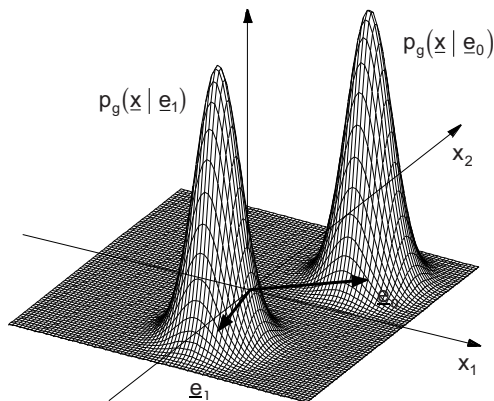


Abb. 2.7. Verteilungsdichtefunktion im Signalraum bei binärer Übertragung

Abbildung 2.8 zeigt das gleiche Bild „von oben“. Eingezeichnet sind Linien gleicher Wahrscheinlichkeit und als Beispiel ein aktuell empfangener Vektor $\underline{x} = \underline{g}$.

Die größere von beiden Wahrscheinlichkeitsdichten ist für diesen Empfangsvektor \underline{g} offensichtlich die zu \underline{e}_0 gehörende. Die ML-Regel (2.12) teilt die Ebene in zwei Gebiete: Wo die beiden Dichten gleich groß sind ergibt sich eine Trennlinie, die *Entscheidungsgrenze*. Vektoren \underline{g} auf der einen Seite der Entscheidungsgrenze führen zur Entscheidung „ $e_0(t)$ mit größter Wahrscheinlichkeit gesendet“, solche auf der anderen Seite zu „ $e_1(t)$ mit größter Wahrscheinlichkeit gesendet“. Da die Gauß-Glocken die gleiche Höhe besitzen, ergibt sich als Entscheidungsgrenze eine Gerade. Sie ist identisch mit der Mittelsenkrechten der Verbindungsgeraden $\underline{e}_0 - \underline{e}_1$.

Setzt man die beiden hier vorkommenden Wahrscheinlichkeitsdichten ins Verhältnis und bildet anschließend den natürlichen Logarithmus, d. h.

$$\log \left[\frac{p_n(\underline{g} - \underline{e}_0)}{p_n(\underline{g} - \underline{e}_1)} \right] = \frac{\|\underline{g} - \underline{e}_1\|^2 - \|\underline{g} - \underline{e}_0\|^2}{2\sigma_n^2}, \quad (2.15)$$

dann wird offensichtlich, dass zwei euklidische Distanzen verglichen werden und die ML-Entscheidungsregel in eine *Minimaldistanz-Regel* umformuliert werden kann:

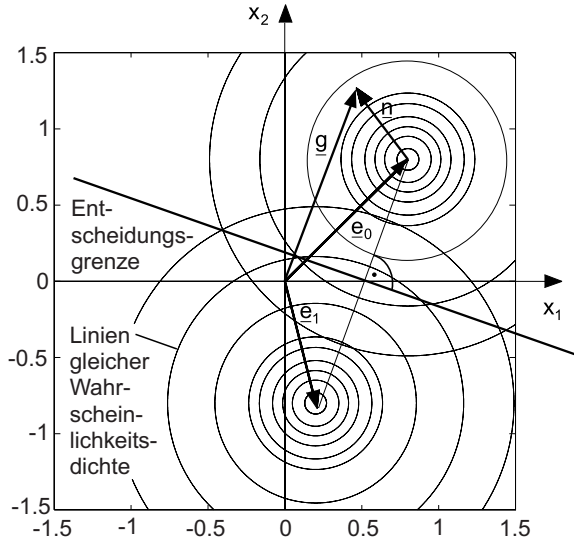


Abb. 2.8. Verteilungsdichtefunktion im Signalraum bei binärer Übertragung; Schnitt

$$\begin{aligned}
 d_0 &= \|\underline{g} - \underline{e}_0\| \\
 d_1 &= \|\underline{g} - \underline{e}_1\| \\
 \min\{d_0, d_1\} &= d_k
 \end{aligned}
 \tag{2.16}$$

$\Rightarrow e_k(t)$ mit größter Wahrscheinlichkeit gesendet,

d. h. man sucht den Elementarsignalvektor aus, der die kleinste euklidische Distanz d_i zum empfangenen Vektor \underline{g} besitzt.

Gleichung (2.15) wird auch als *Log-Likelihood-Verhältnis* bezeichnet. Die Umformungen und Erläuterungen gelten für Vektoren mit beliebig vielen Komponenten bzw. für beliebig hochdimensionale Vektor- oder Signalmräume. Die euklidischen Distanzen sind Folge der Gauß-Verteilung, die wiederum durch den angenommenen AWGR-Kanal bedingt ist. Andere Arten von Störungen müssen nicht zu euklidischen Distanzen führen, d. h. die letzten Umformungen sind sicher Spezialfälle. Andererseits legt Abb. 2.7 nahe, dass auch andere Typen von Verteilungsdichtefunktionen zu einer Geraden als Entscheidungsgrenze führen können, die wiederum mit der abgeleiteten Minimaldistanz-Regel (2.16) konform ist. Bei Dimensionen größer als 2 wird aus der Entscheidungsgrenze eine Ebene bzw. Hyperebene, und die Linien gleicher Wahrscheinlichkeitsdichte werden bei der Gauß-Verteilung zu Kugelschalen bzw. Hyperkugelschalen. Beliebige Verteilungsdichtefunktionen

der Störungen führen schließlich zu allgemeinen Entscheidungsflächen im N -dimensionalen Raum der Signalvektoren, und die Minimaldistanz-Regel gilt dann nicht mehr. Dieser Fall ist jedoch bereits allgemeiner als der hier vorausgesetzte mit AWGR-Störungen.

2.3.2 Empfängerstrukturen

Die Berechnung der beiden quadratischen Distanzen ergibt:

$$\begin{aligned} d_i^2 &= \|\underline{g} - \underline{e}_i\|^2 \\ &= (\underline{g} - \underline{e}_i, \underline{g} - \underline{e}_i) \\ &= (\underline{g}, \underline{g}) + (\underline{e}_i, \underline{e}_i) - (\underline{g}, \underline{e}_i) - (\underline{e}_i, \underline{g}). \end{aligned} \quad (2.17)$$

(\cdot, \cdot) bedeutet das Skalarprodukt zwischen den im Argument stehenden Signalvektoren. Für $(\underline{e}_i, \underline{g})$ gilt beispielsweise

$$(\underline{e}_i, \underline{g}) = \sum_{l=1}^N e_{il} g_l^*.$$

Angenommen werden soll nun ein System mit orthonormalen Basisfunktionen, das den Übergang vom Signalraum zum hier betrachteten, korrespondierenden Raum der Signalvektoren ermöglicht, z. B. das zuvor bereits genutzte System von si-Funktionen (Abtasttheorem). Die Orthonormalität bewirkt, dass die Vektor-Skalarprodukte in (2.17) mit den korrespondierenden Skalarprodukten im Signalraum direkt identisch sind (s. Abschn. 1.1.3, Parseval-Theorem). Die ersten beiden Skalarprodukte stellen somit die Energien E_g und E_{e_i} der Signale $g(t)$ und $e_i(t)$ dar. Für die Berechnung der minimalen Distanz ist E_g offensichtlich irrelevant. Mit der allgemein gültigen Beziehung $(\underline{g}, \underline{e}_i) = (\underline{e}_i, \underline{g})^*$ folgt, dass die Summe der beiden rechten Skalarprodukte mit dem doppelten Realteil eines Skalarprodukts identisch ist und die Entscheidungsregel wie folgt formuliert werden kann:

$$\begin{aligned} \max_{i=0,1} \{ \operatorname{Re}\{(\underline{g}, \underline{e}_i)\} - \frac{1}{2} E_{e_i} \} &= \operatorname{Re}\{(\underline{g}, \underline{e}_k)\} - \frac{1}{2} E_{e_k} \\ \Rightarrow \underline{e}_k(t) &\text{ mit größter Wahrscheinlichkeit gesendet.} \end{aligned} \quad (2.18)$$

Wir werden in späteren Abschnitten auf diese Entscheidungsregel zurückkommen, zunächst aber nur reellwertige Signale voraussetzen, d. h. keine äquivalenten TP-Signale. Für das Skalarprodukt in (2.18) gilt mit dem Parseval-Theorem (1.30)

$$(\underline{g}, \underline{e}_i) = \sum_l g_l e_{il} = \int_T g_{f_g}(t) e_i(t) dt. \quad (2.19)$$

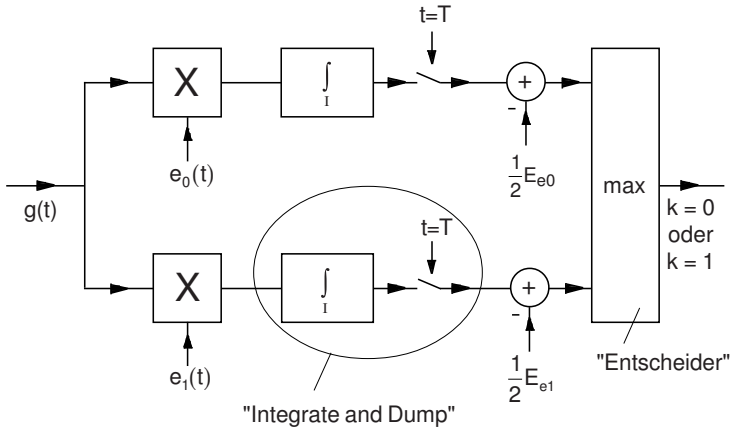


Abb. 2.9. Optimaler Empfänger bei einer Binärübertragung; Korrelation

Beachtet man, dass die $e_i(t)$ außerhalb des Integrationsintervalls der Dauer T identisch Null sein sollen, dann gilt weiter

$$(\underline{g}, \underline{e}_i) = \int_{-\infty}^{\infty} g_{f_g}(t) e_i(t) dt. \tag{2.20}$$

Schließlich kann man die Bandbegrenzung der $e_i(t)$ auf f_g berücksichtigen, womit das auf f_g bandbegrenzte Eingangssignal $g_{f_g}(t)$ auch durch das Eingangssignal $g(t)$ selbst ersetzt werden kann:

$$(\underline{g}, \underline{e}_i) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e_i(t) dt. \tag{2.21}$$

Diese Berechnungsvorschrift bezeichnet man auch als *Korrelation*. Sie kann wie in Abb. 2.9 dargestellt realisiert werden. Nach der Integrationszeit T darf der Wert des Skalarprodukts ausgegeben werden, woraus sich auch die Bezeichnung *Integrate and Dump* ableitet, die in der Praxis üblich ist. Eine weitere Möglichkeit ergibt sich, wenn man das Skalarprodukt als Ausgangssignal eines LTI-Systems zum Zeitpunkt $t = 0$ auffasst:

$$(\underline{g}, \underline{e}_i) = e_i(-t) * g(t)|_{t=0}. \tag{2.22}$$

Das LTI-System besitzt hierbei eine Stoßantwort, die dem *zeitinversen* des jeweils vorausgesetzten Elementarsignals $e_i(t)$ entspricht. Ein solches LTI-System wird auch als *Korrelationsfilter* bezeichnet, oder als *Matched Filter*

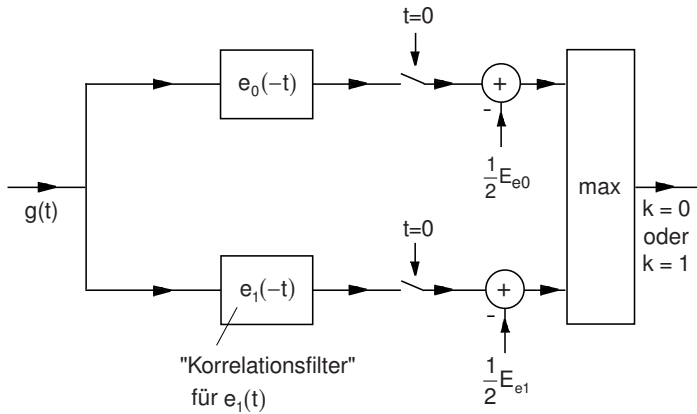


Abb. 2.10. Optimaler Empfänger bei einer Binärübertragung; Korrelationsfilter, Matched Filter (MF)

(MF), was so viel wie *angepasstes Filter* (an $e_i(t)$) bedeutet. Ein MF für $e_i(t)$ ist also ein LTI-System mit der Stoßantwort $e_i(-t)$. Abbildung 2.10 zeigt ein entsprechendes Blockbild.

Da nur zwei Skalarprodukte gebildet werden müssen, kann die Entscheidungsregel auch lauten:

$$(g, \Delta e_{10}) \begin{cases} \geq \frac{1}{2} \Delta E_{10} \Rightarrow e_1(t) \text{ gesendet} \\ < \frac{1}{2} \Delta E_{10} \Rightarrow e_0(t) \text{ gesendet.} \end{cases} \quad (2.23)$$

Hierbei sind die Abkürzungen $\Delta e_{10} = e_1 - e_0$ und $\Delta E_{10} = E_{e_1} - E_{e_0}$ verwendet worden. Die hieraus resultierende Struktur eines Empfängers zeigt Abb. 2.11. Der Block nach dem Abtaster ist der *Entscheider*, der die Grenze im Signalraum realisiert. Abbildung 2.12 zeigt dies als Beispiel in einem Vektorraum mit zwei Dimensionen.

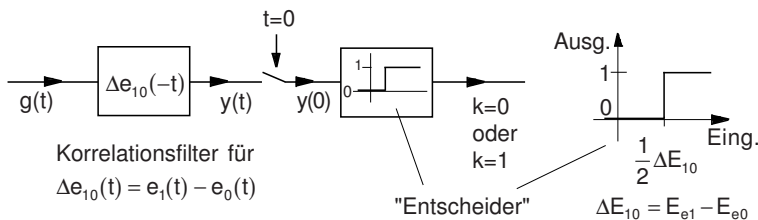


Abb. 2.11. Optimaler Empfänger bei einer Binärübertragung; Variante mit Differenzsignalen

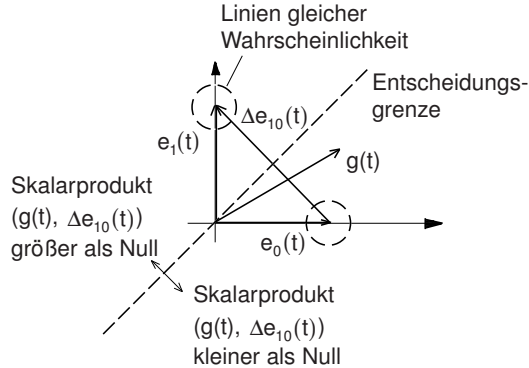


Abb. 2.12. Optimaler Empfänger bei einer Binärübertragung; Signalvektoren im Falle von orthogonalen Elementarsignalen gleicher Energie

Diese dritte Variante eines optimalen Empfängers bei einer Binärübertragung soll im Folgenden benutzt werden, um die Wahrscheinlichkeit für mögliche Fehlentscheidungen zu berechnen. Verwendet wird dabei die gerade schon erläuterte Gleichwertigkeit der Skalarprodukte von Signalvektoren und der zugehörigen zeitkontinuierlichen Signale (Parseval-Theorem).

2.3.3 Berechnung der Fehlerwahrscheinlichkeit

Die Entscheidungen des optimalen Empfängers sind im statistischen Sinn zu deuten. Das AWGR auf dem Kanal bewirkt, dass bei der Entscheidung auf $e_0(t)$ oder $e_1(t)$ Fehler vorkommen können. Die Wahrscheinlichkeit für solche Fehlentscheidungen – von nun an kurz mit *Fehlerwahrscheinlichkeit* bezeichnet – kann berechnet werden, wenn man beachtet, dass das Übertragungsmodell und die zuvor behandelten Empfangsverfahren gegeben sind.

Am Ausgang des Korrelationsfilters – s. Abb. 2.11 – ergibt sich das Signal

$$\begin{aligned} y(t) &= g(t) * \Delta e_{10}(-t) \\ &= s(t) * \Delta e_{10}(-t) + n(t) * \Delta e_{10}(-t). \end{aligned} \quad (2.24)$$

Für den rechten Term, den Rauschsignalanteil in $y(t)$, soll die Abkürzung $n_e(t)$ verwendet werden, d. h.

$$n_e(t) = n(t) * \Delta e_{10}(-t). \quad (2.25)$$

Der Abtastwert von $y(t)$ zum Zeitpunkt $t = 0$, d. h.

$$y(0) = y(0)|_{n_e(t)=0} + n_e(0) \quad (2.26)$$

ist die sog. *Entscheidungsvariable*. Je nachdem, ob $e_0(t)$ oder $e_1(t)$ gesendet wird, ergibt sich für den *Nutzsignalanteil*, d. h. für $y(0)$ bei $n_e(0) = 0$, ein anderer Wert. Wird $e_0(t)$ gesendet, dann gilt:

des *zeitdiskreten Ersatzkanals* interessiert ist (dies wird in Kap. 6 behandelt), dann lässt sich die Messung im rauschfreien Fall auch exakt durchführen.

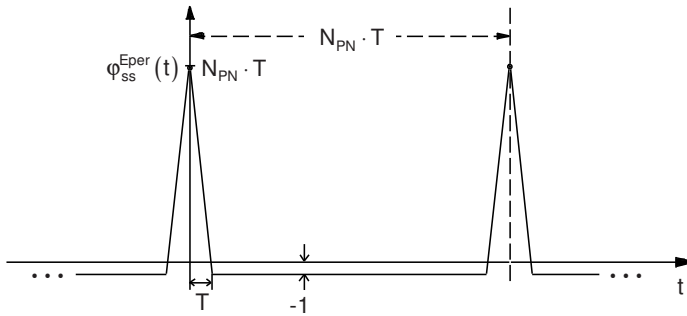


Abb. 5.8. Periodische AKF einer PN-Folge mit rect-Subimpulsen

Die zunächst angenommene unendliche periodische Wiederholung braucht man praktisch nur so oft vornehmen, dass sich die gewünschte Stoßantwort innerhalb eines Messfensters befindet. Praktisch werden neben PN-Folgen auch solche verwendet, die innerhalb dieses Messfensters einen idealen Verlauf der AKF besitzen. Die lineare Interpolation, die in dem Verlauf von $\varphi_{ss}^{Eper}(t)$ in Abb. 5.8 zu erkennen ist, hat ihre Ursache in dem als Beispiel gewählten rect-Elementarsignal. Andere Elementarsignale sind jedoch auch möglich und in der Praxis üblich (z. B. „Raised Cosine“, s. Kap. 3).◀

5.2 Zeitvariante und stochastisch-zeitvariante Kanäle, Fading

Durch die zunehmende Bedeutung von Mobilfunksystemen und anderen drahtlosen Übertragungssystemen sind Funkkanäle immer mehr in den Vordergrund gerückt. In der Regel liegt bei Funkkanälen eine Mehrwegeausbreitung vor, d. h. das Sendesignal gelangt über mehrere Wege vom Sender zum Empfänger. Wegen der Mobilität kommt aber noch ein weiterer Effekt ins Spiel, die *Zeitvarianz*. Sie bedeutet, dass die Mehrwege-Stoßantworten nicht immer gleich bleiben, sie verändern sich vielmehr mit der Bewegung von Sendern und/oder Empfängern. Zur Beschreibung dieser Zeitabhängigkeit ist eine zweite Zeitvariable erforderlich.

5.2.1 Zeitvariante Stoßantwort

Betrachtet werden soll zunächst das einfachste *zeitvariante System* $s(t) \rightarrow g(t)$, der *Multiplizierer* – s. Abb. 5.9. Dabei soll gelten, dass zwischen $a(t)$ und $s(t)$

keine Abhängigkeit besteht. Die durch $a(t)$ gegebene Zeitvarianz des Systemverhaltens ist offensichtlich. Je nach Art der Signale $s(t)$ und $a(t)$ kann $g(t)$ determiniert oder stochastisch sein. Ist $a(t)$ ein stochastisches Signal, d. h. als Musterfunktion eines stochastischen Prozesses aufzufassen, dann gehört der Multiplizierer zur Klasse der *stochastisch-zeitvarianten Systeme*. In diesem Fall ist – unabhängig davon, ob $s(t)$ stochastisch oder determiniert ist – $g(t)$ ebenfalls Musterfunktion eines stochastischen Prozesses.

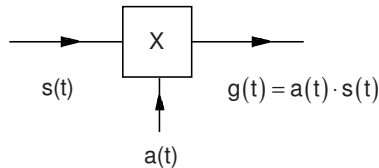


Abb. 5.9. Der Multiplizierer als einfachstes zeitvariantes System

Das nun betrachtete zweite Beispiel, das *zeitvariante Transversalfilter*, stellt eine Verallgemeinerung des Multiplizierer-Systems dar. Es soll dazu dienen, allgemeine zeitvariante Systeme einführen und verstehen zu können. Abbildung 5.10 zeigt, wie bei diesem speziellen zeitvarianten System zeitverzögerte Versionen des Eingangssignals mit *Gewichtsfaktoren* multipliziert und aufsummiert werden.

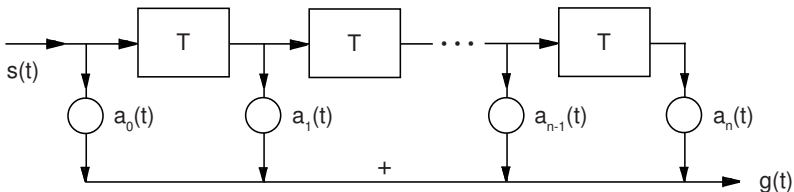


Abb. 5.10. Zeitvariantes Transversalfilter

Die Zeitvarianz kommt dadurch zum Ausdruck, dass sich die Gewichtsfaktoren zeitlich ändern. Der zuvor kurz betrachtete Multiplizierer ist hier mehrfach vorhanden – das Signal $x(t)$ von zuvor entspricht jetzt den zeitlich veränderlichen Gewichtsfaktoren $a_i(t)$. Das Ausgangssignal dieses Systems lässt sich sofort angeben:

$$g(t) = \sum_i a_i(t) s(t - iT). \quad (5.10)$$

Hier treten die zuvor bereits erwähnten zwei verschiedenartigen Zeiten auf. Neben der Zeit t , die auch als *absolute Zeit* bezeichnet wird, ist dies die *Ver-*

zögerungszeit $\tau = iT$. Die Verzögerungszeit τ kann in diesem Beispiel nur diskrete Werte annehmen. Lässt man bei konstanter Gesamtlaufzeit nT die Zahl der Koeffizienten $a_i(t)$ und die Zahl der Laufzeitglieder gegen unendlich streben, dann erreicht man, dass τ kontinuierlich wird und alle reellen Zahlenwerte annehmen kann. Jedes $a_i(t)$, das nun besser als $a(\tau, t)$ geschrieben wird, trägt einen infinitesimalen Anteil zum Ausgangssignal $g(t)$ bei. Für das Ausgangssignal folgt somit die Integraldarstellung

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} a(\tau, t) s(t - \tau) d\tau. \quad (5.11)$$

Hierbei tritt die Verzögerungszeit als Integrationsvariable auf, weshalb sie manchmal auch *Integrationszeit* genannt wird. Gleichung (5.11) soll nun mit Hilfe von drei Spezialfällen interpretiert werden.

Spezialfall 1: zeitinvariantes Transversalfilter

Für das Ausgangssignal gilt:

$$g(t) = \sum_i a_i s(t - iT). \quad (5.12)$$

Wählt man

$$a(\tau, t) = \sum_i a_i \delta(\tau - iT) \quad (5.13)$$

dann folgt für $g(t)$ nach (5.11):

$$\begin{aligned} g(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_i a_i \delta(\tau - iT) s(t - \tau) d\tau \\ &= \sum_i a_i \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau - iT) s(t - \tau) d\tau \\ &= \sum_i a_i s(t - iT). \end{aligned} \quad (5.14)$$

Der letzte Schritt in dieser Gleichung, der zum erwarteten Ergebnis führt, beruht auf der Definition des Diracstoßes bzw. auf der Siebeigenschaft – s. Kap. 1. ◀

Spezialfall 2: zeitvariantes Transversalfilter

Das Ausgangssignal berechnet sich wieder nach (5.11). Macht man für $a(\tau, t)$ hier den Ansatz

$$a(\tau, t) = \sum_i a_i(t) \delta(\tau - iT) \quad (5.15)$$

dann ergibt sich in ähnlicher Weise wie beim zeitinvarianten Transversalfilter das gewünschte Ergebnis, s. (5.10):

$$\begin{aligned}
g(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_i a_i(t) \delta(\tau - iT) s(t - \tau) d\tau \\
&= \sum_i a_i(t) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau - iT) s(t - \tau) d\tau \\
&= \sum_i a_i(t) s(t - iT). \tag{5.16}
\end{aligned}$$

Spezialfall 3: Multiplizierer

Der Multiplizierer kann nun auch als zeitvariantes Transversalfilter mit einem Koeffizienten aufgefasst werden, d. h.

$$g(t) = a_0(t) s(t). \tag{5.17}$$

Mit dem hier zweckmäßigen Ansatz

$$a(\tau, t) = a_0(t) \delta(\tau) \tag{5.18}$$

lässt sich wiederum mit (5.11) das Ausgangssignal $g(t)$ berechnen:

$$\begin{aligned}
g(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} a_0(t) \delta(\tau) s(t - \tau) d\tau \\
&= a_0(t) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau) s(t - \tau) d\tau \\
&= a_0(t) s(t). \tag{5.19}
\end{aligned}$$

Die Ansätze für $a(\tau, t)$ sind bei diesen drei Spezialfällen bereits in Kenntnis des resultierenden Ergebnisses gewählt worden. Verdeutlicht werden sollte damit, dass es zweckmäßig ist, die Funktion $a(\tau, t)$ als *zeitvariante Stoßantwort* des Systems $s(t) \rightarrow g(t)$ zu bezeichnen. t ist die *absolute Zeit*, τ die *Verzögerungszeit* oder *Integrationszeit*. In Anlehnung an die bei zeitinvarianten Systemen benutzte Schreibweise soll statt $a(\tau, t)$ von nun an $h(\tau, t)$ verwendet werden. Gleichung (5.11) schreibt sich damit wie folgt:

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau, t) s(t - \tau) d\tau. \tag{5.20}$$

Diese Gleichung stellt offenbar die Verallgemeinerung des Faltungsintegrals dar – s. Kap. 1. Eine symbolische Schreibweise mit dem Faltungsstern (*) – wie bei zeitinvarianten Systemen üblich – soll hier nicht mehr verwendet werden, weil dies zu Missverständnissen bei der Integrationsvariablen führen kann. Für die Stoßantwort eines LTI-Systems sind nun als Spezialfall mehrere Schreibweisen denkbar:

$$\text{LTI: } h(\tau, t) = h(\tau, t_0) = h(\tau, \tau) = h(\tau, 0) = h(\tau). \tag{5.21}$$

$h(\tau)$ ist hierbei als Abkürzung zu verstehen. Im Gegensatz zu der bei LTI-Systemen eingeführten Schreibweise steht jetzt aber im Argument der Stoßantwort nicht die absolute Zeit t sondern die Verzögerungs- oder Integrationszeit τ . In ein Faltungsintegral ist $h(\tau)$ somit direkt einzusetzen:

$$\text{LTI: } g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) s(t - \tau) d\tau. \tag{5.22}$$

In diesem Spezialfall kann natürlich wieder der Faltungstern verwendet werden, d. h.:

$$\text{LTI: } g(t) = h(t) * s(t). \tag{5.23}$$

Zu beachten ist bei (5.23) der symbolische Wechsel der Zeitvariablen, der in den vorangegangenen Kapiteln in der gleichen Weise auftrat.

In Abb. 5.11 ist die *zeitvariante Faltungsoperation* nach (5.20) bildlich dargestellt. Zu sehen sind Schnitte für $t = konst.$ durch eine als Beispiel angenommene zeitvariable Stoßantwort $h(\tau, t)$ zusammen mit dem für das jeweilige t geltende verschobene Eingangssignal.

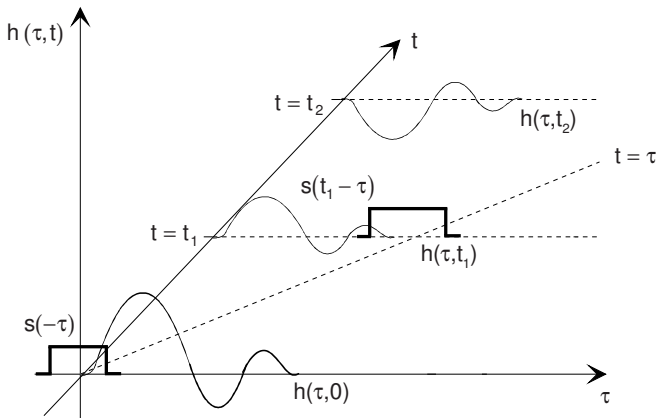


Abb. 5.11. Veranschaulichung der zeitvarianten Faltungsoperation

Der Einfachheit wegen ist in diesem Beispiel ein rect-Verlauf für $s(t)$ angenommen. Die gezeichneten Funktionen müssen entsprechend (5.20) multipliziert werden, anschließend erfolgt die Integration über τ . Im Gegensatz zur zeitinvarianten Faltungsoperation muss hier für jedes t eine andere Stoßantwort herangezogen werden. Das Eingangssignal verschiebt sich somit auf einer 45-Grad-Linie durch die τ - t -Ebene. Die Verzögerungszeit τ und die absolute Zeit t laufen bei der Faltungsoperation gleichzeitig. Legt man einen Diracstoß an den Eingang eines derartigen zeitvarianten Systems, dann ergibt sich folgendes Ausgangssignal:

$$\begin{aligned}
 g(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau, t) \delta(t - \tau) d\tau \\
 &= h(t, t).
 \end{aligned}
 \tag{5.24}$$

Verzögert man den Diracstoß am Eingang um eine Zeit t_0 , dann gilt:

$$\begin{aligned}
 g(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau, t) \delta(t - t_0 - \tau) d\tau \\
 &= h(t - t_0, t).
 \end{aligned}
 \tag{5.25}$$

Diese beiden Gleichungen beschreiben Schnitte unter 45 Grad durch die Funktion $h(\tau, t)$ und gleichzeitig eine Messvorschrift zur näherungsweise Bestimmung von $h(\tau, t)$. Mit genügend vielen „Stützfunktionen“ $h(t - t_i, t)$ lässt sich die gesamte Funktion hinreichend genau bestimmen. In praktischen Anwendungen liegt meist ein extremer Sonderfall vor: die zeitliche Variation der Stoßantworten (in t -Richtung!) geht nur sehr langsam vor sich. So ist die Zeitskala in τ -Richtung beim digitalen Mobilfunk in μs , während die t -Skala zweckmäßigerweise in ms betrachtet wird, um Änderungen in t -Richtung zu erkennen. Das bedeutet, dass während der zeitvarianten Faltungsoperation näherungsweise eine zeitlich nicht veränderliche Stoßantwort vorliegt. Die zeitvariante Faltungsoperation entspricht dann mit dieser momentan vorliegenden Stoßantwort der zeitinvarianten Faltungsoperation von früher. Man spricht in diesem Fall auch von *langsam zeitvarianten Systemen* und bezeichnet $h(t - t_i, t) = h_{t_i}(t)$ als *Kurzzeitstoßantwort* zum Zeitpunkt t_i .

5.2.2 Zeitvariante Übertragungsfunktion

Der vorherige Abschnitt hat verdeutlicht, dass die Verzögerungszeit τ der Zeit entspricht, die zuvor bei zeitinvarianten Systemen mit t bezeichnet wurde. Die *zeitvariante Übertragungsfunktion* wird deshalb zweckmäßig als Fouriertransformierte bezüglich τ definiert:

$$h(\tau, t) \overset{\tau}{\circlearrowleft} \bullet H(f, t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau, t) e^{-j2\pi f\tau} d\tau
 \tag{5.26}$$

$$H(f, t) \overset{f}{\bullet} \circlearrowright h(\tau, t) = \int_{-\infty}^{\infty} H(f, t) e^{j2\pi f\tau} df.$$

Abbildung 5.12 zeigt ein einfaches Beispiel für einen zeitvarianten Übertragungskanal. Es knüpft an die zuvor behandelte Zweiwegeausbreitung an. Das Sendesignal gelangt hier ebenfalls über zwei Wege zum Empfänger, jedoch bewegt sich der Reflektor jetzt. Diese Bewegung verursacht die Zeitvarianz dieses Kanals.

Der Einfachheit wegen soll die Bewegung als gleichförmig angenommen werden. Die Laufzeiten sollen so groß sein, dass Änderungen der Laufzeit des