Definition 75. *Ein invariantes Maß $m \in \mathcal{M}(T)$ wird ein Gleichgewicht (Equilibrium) für die stetige Funktion $f \in C(\Omega)$ genannt, wenn*

$$P(T, f) = h_m(T) + \int f dm$$

gilt. Ist $f = 0$, so spricht man auch vom Maß maximaler Entropie.

Satz 117. *Ist die Entropiefunktion nach oben halbstetig, so gibt es zu jeder stetigen Funktion f mindestens ein Gleichgewicht.*

Beweis. Sei $m_n \in \mathcal{M}(T)$ so gewählt, dass $P(T, f) = \lim_{n\to\infty} h_{m_n}(T) + \int f dm_n$. Dann ist jeder schwache Häufungspunkt der Folge $\{m_n : n \in \mathbb{N}\}$ ein Gleichgewicht.

Sei $\mathcal{L}$ eine Funktionenklasse. Bekanntlich heißen zwei Funktionen f und g in $\mathcal{L}$ kohomolog, falls es eine Funktion $h \in \mathcal{L}$ mit $f - g = h - h \circ T$ gibt (s. Abschnitt 4.1).

Proposition 28. 1. *Sind f und g in $C(\Omega)$ kohomolog, so besitzen sie dieselben Gleichgewichte.*
2. *Ist $f \in C(\Omega)$ und $f(x) < 0$ für jedes $x \in \Omega$, so ist die Funktion $s \mapsto P(T, sf)$, $s \geq 0$, strikt monoton fallend und stetig.*

Beweis. 1. Für jedes Maß $m \in \mathcal{M}(T)$ gilt $\int f dm = \int g + h - h\circ T dm = \int g dm$.
2. Sei $s < t$. Mit dem Variationsprinzip folgt

$$\begin{aligned} P(T, t \cdot f) &= \sup_{m \in \mathcal{M}(T)} h_m(T) + t \int f dm \\ &\leq \sup_{m \in \mathcal{M}(T)} h_m(T) + s \int f dm + (t - s) \max_{x \in \Omega} f(x) < P(T, s \cdot f). \end{aligned}$$

Die Stetigkeit ist ein Spezialfall von Proposition 26.

Korollar 18. *In der Situation von Proposition 28 gibt es eine eindeutige Nullstelle $\delta(f)$ der Funktion $t \mapsto P(T, tf)$.*

Die Formel

$$P(T, \delta(f)f) = 0$$

heißt *Bowen-McClusky-Formel.* Der Graph der Funktion $P(\cdot, f)$ ist schematisch in der Abbildung 6.1 wiedergegeben.

6.2 Gibbs-Maße

Es sei $(\Omega, \mathcal{B}, T, m)$ ein endliches maßtheoretisches dynamisches System mit Lebesgue-Raum $(\Omega, \mathcal{B})$. Da m als nichtsingulär vorausgesetzt ist, muss $m \circ T$ absolut stetig bezüglich m sein, besitzt also eine Radon-Nikodym Dichte $J_m = \frac{dm\circ T}{m}$. Sie heißt die Jacobi-Dichte von m. Ist m vorwärts invariant, so ist die Jacobi-Dichte 1.

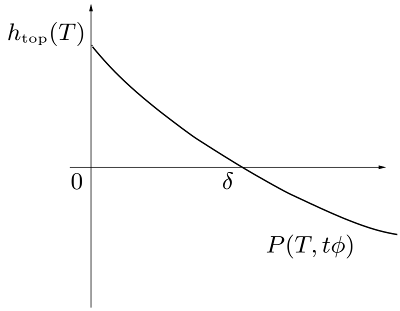

Abb. 6.1. Bowen-McClusky-Formel

Definition 76. *Sei* (Ω, T) *ein stetiges dynamisches System. Ein Wahrscheinlichkeitsmaß* μ *auf* $(\Omega, \mathcal{B})$ *heißt ein Gibbs-Maß für das Potential* $\varphi \in C(\Omega)$, *wenn* $J_m = \exp[-\varphi]$ *f.ü. gilt.*

Satz 118. *Sei* (Ω, T) *ein offenes und expandierendes dynamisches System. Dann gibt es zu jedem* $\varphi \in C(\Omega)$ *ein Gibbs-Maß zum Potential* $\varphi - P(T, \varphi)$.

Beweis. Der Operator $\mathcal{F}_{-\varphi}$ ist auf $C(\Omega)$ durch

$$\mathcal{F}_{-\varphi} f(x) = \sum_{y \in T^{-1}(\{x\})} f(y) \exp[\varphi(y)] \quad x \in \Omega; f \in C(\Omega)$$

definiert. Nach Lemma 7 gibt es eine Expansionskonstante $a > 0$ und $\Lambda > 1$, so dass $T : K(x, a) \to T(K(x, a))$ ein Homöomorphismus ist und $d(T(y), T(z)) \geq \Lambda d(y, z)$. $\mathcal{F}_{-\varphi}$ ist damit wohldefinierter, stetiger, positiver und linearer Operator (Lemma 9).
Der zu $\mathcal{F}_{-\varphi}$ duale Operator $\mathcal{F}^*_{-\varphi}$ operiert nach dem Rieszschen Satz ([12], S.333) auf dem Raum der Maße, und somit ist $m \mapsto \left(\int 1 d\mathcal{F}^*_{-\varphi} m\right)^{-1} \mathcal{F}^*_{-\varphi} m$ eine Abbildung, die Wahrscheinlichkeitsmaße in sich überführt. Da der Raum dieser Maße konvex und schwach kompakt ist, folgt aus dem Satz von Schauder und Tychonoff ([11], S.456), dass es einen Fixpunkt m gibt (das gleiche Argument wurde natürlich in Satz 97 benutzt). Dieser erfüllt also $\mathcal{F}^*_{-\varphi} m = \lambda m$ mit Eigenwert $\lambda = \int 1 d\mathcal{F}^*_{-\varphi} m$. Seien f eine stetige Funktion, die außerhalb einer Kugel $K(x, a)$ verschwindet, und ρ die zu $T_{|K(x,a)}$ inverse Abbildung. Es folgt

$$\begin{aligned}\lambda \int f dm &= \int f d\mathcal{F}^*_{-\varphi} m = \int \mathcal{F}_{-\varphi} f dm \\ &= \int f(\rho(z)) \exp[\varphi(\rho(z))] m(dz) = \int f \exp[\varphi] dm \circ T.\end{aligned}$$

Also ist die Jacobi-Dichte $\lambda \exp[-\varphi]$.

Es muss also nur noch gezeigt werden, dass $\log\lambda = P(T,\varphi)$ gilt. Für jedes $x \in \Omega$ kann $E_n(x) = T^{-n}(\{x\})$ zu einer (n,a)-getrennten Menge E_n erweitert werden. Wegen

$$\lambda^n = \int \mathcal{F}^n_{-\varphi}1\; dm = \int \sum_{z \in E_n(x)} \exp\left[S_n\varphi(z)\right] m(dz) \leq \sum_{y \in E_n} \exp[S_n\varphi(y)]$$

gilt $\log\lambda \leq \frac{1}{n}\log\sum_{y\in E_n}\exp[S_n\varphi(y)] = P(T,\varphi)$ (das Theorem 53 gilt entsprechend).

Zum Beweis der umgekehrten Ungleichung verwendet man die folgende Tatsache (vgl. Lemma 8 in Abschnitt 3.3): Für jedes $\delta > 0$ gibt es $m \in \mathbb{N}$, so dass der Abstand zweier Punkte $y, z \in \Omega$ durch δ beschränkt ist, sofern $d(T^j(y), T^j(z)) < a$, $j = 0, ..., m$, gilt. Sei E_1 eine $(1,a)$-spannende Menge und $E_n = T^{-n}E_1$. Dann enthält E_{n+m} eine (n,δ)-spannende Menge F_n, denn zu $z \in \Omega$ gibt es ein $x = x(z) \in E_{n+m}$ mit $d(T^j(x), T^j(z)) < a$ $(j = 0, ..., n+m)$, also auch $d(T^j(z), T^j(x)) < \delta$ für $j = 0, 1, ..., n-1$. Es folgt

$$\sum_{z\in F_n}\exp S_n\varphi(z) \leq \sum_{x \in E_{n+m}} \exp S_n\varphi(x) \leq \sum_{y \in T^{-m}E_1} \mathcal{F}^n_{-\varphi}1(y).$$

Sei α eine Zerlegung in messbare Mengen vom Durchmesser $< \delta$, so dass jede dieser Mengen genau einen Punkt aus $T^{-m}E_1$ enthält. Es folgt nun unmittelbar unter Benutzung des Stetigkeitsmoduls $\omega_f(\delta) = \sup_{d(x,y)<\delta}|f(x) - f(y)|$ für eine Funktion f, dass

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\sum_{z\in E_{n+m}} e^{S_n\varphi(z)} &\leq \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\left[\sum_{A\in\alpha}\frac{1}{m(A)}\int_A \mathcal{F}^n_{-\varphi}1dm\right] + \omega_\varphi(\delta)\\ &\leq \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\left[\int \mathcal{F}^n_{-\varphi}1dm\right] + \omega_\varphi(\delta) = \log[\lambda] + \omega(\varphi,\delta).\end{aligned}$$

Mit $\delta \to 0$ ist der Beweis erbracht.

Proposition 29. *Sei (Ω, T) wie in Satz 118 und topologisch transitiv. Ist φ Hölder-stetig, so sind je zwei Gibbs-Maße zum Potential $\varphi - P(T,\varphi)$ äquivalent.*

Beweis. Man betrachte zwei Gibbs-Maße m_1 und m_2 zum Potential $\varphi - P(T,\varphi)$. Sei α eine endliche Markoff-Zerlegung in m_i-randlose Mengen vom Durchmesser $< a$ (Satz 47). Da die Transformation T auf jeder Menge in α invertierbar ist, ist auch T^n auf jedem Atom $E \in \alpha_0^n$ invertierbar, und es gilt

$$m_i(T^nE) = \int_E \exp[nP(T,\varphi) - S_n\varphi]dm_i \quad i = 1, 2.$$

Man überlegt sich leicht, dass T^nE ein Atom von α ist. Da T topologisch transitiv ist, gibt es zu $A, B \in \alpha$ ein $n \in \mathbb{N}$ mit $C = (A \cap T^{-n}B)^\circ \neq \emptyset$. Dann ist C eine Vereinigung von Atomen in α_0^n, und jedes Atom wird von T^n auf B abgebildet. Hat B also positives Maß, so hat es auch jedes dieser Atome und damit auch A. Es folgt also, dass $c := \min\{m_i(A) : i = 1,2; A \in \alpha\} > 0$. Wählt man nun noch Punkte $x_i \in E$ $(i = 1,2)$ mit

$$m_1(E)\exp[nP(T,\varphi) - S_n\varphi(x_1)] \leq \int_E \exp[nP(T,\varphi) - S_n\varphi]dm_1 \leq 1$$

$$c \leq \int_E \exp[nP(T,\varphi) - S_n\varphi]dm_2 \leq m_2(E)\exp[nP(T,\varphi) - S_n\varphi(x_2)],$$

so folgt

$$\frac{m_1(E)}{m_2(E)} \leq c^{-1}\exp[S_n\varphi(x_1) - S_n\varphi(x_2)].$$

Aus der Hölder-Stetigkeit schließt man

$$\begin{aligned} |S_n\varphi(x_1) - S_n\varphi(x_2)| &\leq \sum_{k=0}^{n-1} |\varphi(T^k(x_1)) - \varphi(T^k(x_2))| \\ &= O\left(\sum_{k=0}^{n-1} d(T^k(x_1), T^k(x_2))^s\right). \end{aligned}$$

Da die Punkte $T^k(x_i)$ stets zu demselben Atom von α_0^{n-k} gehören, und deren Durchmesser exponentiell schnell abfallen, ist der letzte Ausdruck beschränkt (unabhängig von n). Es folgt nun, dass die Radon-Nikodym Dichte $\frac{dm_1}{dm_2}$ nach oben beschränkt ist. Vertauschung der beiden Maße zeigt auch, dass beide Maße äquivalent sind.

Sind (Ω, T) ein dynamisches System und μ ein Maß, so bezeichnet $\mathcal{K}(n,c,\kappa)$ die Menge aller Teilmengen $C \subset \Omega$ mit folgenden Eigenschaften:

1. $T^n : C \to \Omega$ ist injektiv.
2. $\mathrm{diam} T^j(C) \leq \kappa^{n-j}$
3. $\mu(T^n(C)) \geq c$.

Satz 119. *Seien (Ω, T) ein offenes, expandierendes und topologisch transitives dynamisches System, $\varphi \in C(\Omega)$ Hölder-stetig und μ ein Gibbs-Maß für φ. Dann gibt es ein eindeutig bestimmtes invariantes normiertes Maß $m \sim \mu$ mit Hölder-stetiger Dichte $h = \frac{dm}{d\mu}$. m ist ein Gibbs-Maß zum Potential*

$$\varphi - P(T,\varphi) + \log h \circ T - \log h.$$

Ferner gibt es eine Konstante K, so dass

$$K^{-1} \leq \frac{m(C)}{\exp[nP(T,\varphi) - S_n\varphi(x)]} \leq K \tag{6.3}$$

für jedes $x \in C$ und $C \in \mathcal{K}(n,c,\kappa)$. m ist einziges invariantes Maß, das (6.3) erfüllt und insbesondere das einzige Gibbs-Maß zu einem Potential, das kohomolog zu $\varphi - P(T,\varphi)$ mittels eines beschränkten Korandes ist.

Das Maß $m_\varphi = m$ heißt das zu φ gehörige invariante Gibbs-Maß.

Beweis. Die Existenz des eindeutig bestimmten invarianten Maßes $m \sim \mu$ mit Hölder-stetiger Dichte folgt aus Satz 97, denn μ ist positiv auf offenen, nicht leeren Mengen: Sei α eine endliche Markoff-Zerlegung (Satz 47). Dann gibt es ein $A \in \alpha$ mit strikt positivem Maß. Sind dann $B \in \alpha$ und $n \in \mathbb{N}$, so dass $(B \cap T^{-n+1}(A))^\circ \neq \emptyset$, so gilt für jeden n-Zylinder $[a_0, ..., a_{n-1}] \subset B \cap T^{-n+1}(A)$, dass $T^{n-1}([a_0, ..., a_{n-1}]) = A$, also $\mu([a_0, ..., a_{n-1}]) > 0$. Da jede nicht leere offene Menge einen Zylinder enthält, ist die Behauptung gezeigt. Man rechnet sofort nach, dass m ein Gibbs-Maß ist:

$$\begin{aligned}\int \mathcal{F}_{-\varphi+P(T,\varphi)-\log h\circ T+\log h} g dm &= \int \mathcal{F}_{-\varphi+P(T,\varphi)} gh/h \circ T dm \\ &= \int \mathcal{F}_{-\varphi+P(T,\varphi)} ghdmu = \int gdm.\end{aligned}$$

Der Aussage (6.3) folgt leicht aus der Tatsache, dass für $x, y \in C \in \mathcal{K}(n, c, \kappa)$

$$|S_n\varphi(x) - S_n\varphi(y)| \leq D_\varphi \sum_{k=0}^{\infty} \kappa^{sk} =: M < \infty,$$

$$c \leq m(T^n(C)) \leq 1$$

und deshalb

$$ce^{-M} \leq \mu(C) \exp[S_n\varphi(x) - nP(T, \varphi)] \leq m(T^n(C)e^M = e^M.$$

Die Behauptung ist damit gezeigt, denn m und μ sind äquivalent. Es folgt ebenfalls aus dieser Abschätzung, dass es keine zwei invariante ergodische Maße mit der Eigenschaft in (6.3) geben kann, und deshalb sind invariante Gibbs-Maß eindeutig.

Satz 120. *Die Druckfunktion $P(\cdot) = P(T, \cdot) : \mathrm{Lip}(s) \to \mathbb{R}$ für ein expandierendes, topologisch transitives und offenes dynamisches System ist reell analytisch. Es gelten für $\varphi, \psi, \psi_1, \psi_2 \in \mathrm{Lip}(s)$:*

1. *$\frac{d}{dt} P(\varphi + t\psi)_{|t=0} = \int \psi dm_\varphi$, wobei $m = m_\varphi$ das invariante Gibbs-Maß zu φ ist.*
2. *$\frac{d^2}{dtds} P(\varphi + t\psi_1 + s\psi_2)_{|t=0} = D_\varphi(\psi_1, \psi_2)$, wobei*

$$D_\varphi(f, g) = \sum_{k=0}^{\infty} \int (f - \int f dm_\varphi)(g \circ T^k - \int g dm_\varphi) dm_\varphi$$

die asymptotische Kovarianz der Funktionen f und g unter dem invarianten Gibbs-Maß m_φ bezeichnet.

Beweis. Der Transfer-Operator $\mathcal{F}_\varphi$ ist für komplexwertige Funktionen φ wohldefiniert, ähnlich wie in Beispiel 79, und zwar ist $\mathcal{F}_\varphi(f) = \mathcal{F}_{\Re\varphi}(fe^{i\Im\varphi})$. Sei $0 < s \leq 1$ fest und B der Banachraum aller Funktionen $\varphi = u + iv$ mit $u, v \in \mathrm{Lip}(s)$. Da $\mathcal{F}_\varphi f = \mathcal{F}_u(fe^{iv})$ kann man Satz 96 anwenden und erhält, dass auch $\mathcal{F}_\varphi$ einen isolierten Eigenwert $\lambda(\varphi)$ vom Betrag $\leq e^{P(u)}$ besitzt, und das übrige Spektrum in einem Kreis vom Radius $< e^{P(u)}$ enthalten ist. Nach dem Störungssatz für lineare Operatoren ([80], S.255) gibt es dann zu jedem $\epsilon > 0$ und $\varphi \in B$ ein $\delta > 0$, so dass die Abbildung $\psi \to \lambda(\psi)$ in einer δ-Umgebung von φ analytisch ist.
Seien nun $\varphi, \psi \in \mathrm{Lip}(s)$ und $m = m_\varphi$ das invariante Gibbs-Maß zu φ (Satz 119). Sei f_s die Eigenfunktion des Operators $\mathcal{F}_{\varphi+s\psi}$ zum Eigenwert $e^{P(\varphi+s\psi)}$. Differenziert man jede der beiden Seiten der Gleichung

$$\mathcal{F}_{\varphi+s\psi} f(s) = e^{P(\varphi+s\psi)} f(s)$$

nach s und wertet an der Stelle $s = 0$ aus, erhält man

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}\mathcal{F}_{\varphi+s\psi} f_{s|s=0} &= \sum_{T(y)=\cdot} \frac{df_s}{ds}_{|s=0}(y)e^{-\varphi(y)} + f_0(y)\psi(y)e^{\varphi(y)} \\ &= \mathcal{F}_\varphi\left(\frac{df_s}{ds}_{|s=0} + f_0\psi\right)\end{aligned}$$

und

$$\frac{d}{ds}e^{P(\varphi+s\psi)}f(s)_{|s=0} = e^{P(\varphi)}\left(\frac{d}{ds}P(\varphi+s\psi)_{|s=0}f(0) + \frac{df_s}{ds}_{|s=0}\right).$$

Integration mittels m und die Invarianz des Gibbs-Maßes (also $f_0 = 1$ und $P(\varphi) = 0$ gelten) liefern

$$\begin{aligned}\int \frac{df_s}{ds}_{|s=0} + \psi dm &= \int \mathcal{F}_\varphi\left(\frac{df_s}{ds}_{|s=0} + f_0\psi\right) dm \\ &= \int \frac{d}{ds}P(\varphi+s\psi)_{|s=0} + \frac{df_s}{ds}_{|s=0} dm.\end{aligned}$$

Es folgt also 1.
Die Gleichung in 2. berechnet man in ähnlicher Weise.

Beispiel 90. Seien φ und ψ zwei Hölder-stetige Funktionen mit $P(T, \varphi) = 0$ und $\psi < 0$. Die Funktion

$$s \mapsto P(T, s\psi + q\varphi) =: P(s\psi + p\varphi) \qquad q \in \mathbb{R}$$

besitzt, unter Benutzung der entsprechenden Variante von Proposition 28, eine eindeutig bestimmte Nullstelle $S(q)$. Da die Funktion $(s, q) \mapsto s\psi + q\varphi$ reell analytisch ist, ist es auch $(s, q) \mapsto P(T, s\psi + q\varphi)$ nach Satz 120. Die Funktion $q \mapsto S(q)$ ist damit reell analytisch nach dem Satz über implizite

Funktionen, falls die partielle Ableitung nach s nicht verschwindet. Nach Satz 120 gilt

$$\frac{d}{dx}P(x\psi + q\varphi)_{|x=s} = \int \psi dm_{s,q}, \quad \frac{d}{dy}P(s\psi + y\varphi)_{|y=q} = \int \varphi dm_{s,q}, \quad (6.4)$$

wobei $m_{s,q}$ das invariante Gibbs-Maß zu $s\psi + q\varphi$ bezeichnet. Da $\psi < 0$ ist, verschwindet die partielle Ableitung nach s nicht.
Aus (6.4) errechnet sich auch sofort $S'(q)$, denn

$$0 = \frac{d}{dq}P(S(q)\psi + q\varphi) = \int \psi dm_{S(q),q}S'(q) + \int \varphi dm_{S(q),q}$$

zeigt, dass

$$S'(q) = -\frac{\int \varphi dm_{S(q),q}}{\int \psi dm_{S(q),q}} =: -\alpha(q).$$

Die zweite Ableitung von S kann man in ähnlicher Weise durch zweimalige Ableitung erhalten. Es ergibt sich unter Benutzung von Satz 120

$$S''(q) = \frac{D_{S(q)\psi+q\varphi}(\varphi - S'(q)\psi, \varphi - S'(q)\psi)}{-\int \psi dm_{S(q),q}}. \quad (6.5)$$

Da $\psi < 0$ gilt, ist die zweite Ableitung stets positiv. Da der Zähler genau dann verschwindet, wenn $S(q)\psi + q\varphi$ kohomolog zu einer Konstanten ist, folgt, dass S strikt konvex ist, wenn keine Kohomologie zu einer Konstanten vorliegt.

6.3 Entropie und Liapunoff-Exponent

Sei (Ω, T) ein stetiges dynamisches System mit kompaktem Raum $\Omega \subset \mathbb{R}^d$. Das folgende Resultat kann als Variante von Satz 116 angesehen werden.

Proposition 30. *Sei m ein T-invariantes Wahrscheinlichkeitsmaß, das absolut stetig bzgl. des normierten Maßes μ ist. Für eine integrierbare Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}_-$ bezeichne*

$$K_n(x, f) = \{y \in \Omega : \sup_{0 \leq j < n} \frac{d(T^j(x), T^j(y))}{\exp[f(T^j(x))]} \leq 1\}.$$

Dann gilt

$$h_m(T) \geq -\int_\Omega \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \mu(K_n(x, f))m(dx).$$

Beweis. Sei α_r eine Zerlegung von Ω in Mengen eines Durchmessers $< r$ und der Mächtigkeit $|\alpha_r| \leq Kr^{-d}$, K eine passende Konstante unabhängig von r. Sei $A_n := \{y \in \Omega : -n - 1 < f(y) \leq -n\}$ und α $(n \geq 0)$ die Menge