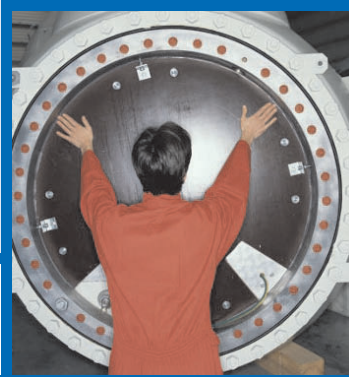


mb
maschinenbau



Russel C. Hibbeler

Technische Mechanik 1 Statik

10., überarbeitete Auflage

Übersetzung aus dem Amerikanischen: Georgia Mais
Fachliche Betreuung: Jörg Wauer, Wolfgang Seemann

PEARSON
Studium

ein Imprint von Pearson Education
München • Boston • San Francisco • Harlow, England
Don Mills, Ontario • Sydney • Mexico City
Madrid • Amsterdam

Gleichgewicht am Punkt

3

ÜBERBLICK

3.1 Gleichgewichtsbedingung für einen Massenpunkt	97
3.2 Freikörperbild	97
3.3 Ebene Kräftesysteme.....	101
3.4 Räumliche Kräftesysteme	106
Aufgaben	113



Für das Heben von Lasten müssen Seile so dimensioniert werden, dass sie für die gewählte Anordnung ihrer Befestigungspunkte nicht versagen. In diesem Kapitel wird gezeigt, wie man in solchen Fällen Seilkräfte berechnet.

Lernziele

- Einführung des Konzeptes des Freikörperbildes für einen Massenpunkt
- Lösen von Gleichgewichtsaufgaben mit Hilfe der Gleichgewichtsbedingungen

3.1 Gleichgewichtsbedingung für einen Massenpunkt

Ein Massenpunkt befindet sich im *Gleichgewicht*, wenn er sich in Ruhe befindet und ursprünglich in Ruhe war oder wenn er eine konstante Geschwindigkeit besitzt und ursprünglich in Bewegung war. Meist wird jedoch die Bezeichnung „Gleichgewicht“ oder genauer „statisches Gleichgewicht“ zur Beschreibung eines sich in Ruhe befindenden Gegenstandes benutzt. Zur Erhaltung des Gleichgewichts ist die Erfüllung des ersten Newton'schen Bewegungsgesetzes *erforderlich*. Es fordert, dass die *resultierende Kraft*, die auf einen Massenpunkt wirkt, gleich *null* ist. Diese Bedingung wird mathematisch in der Form

$$\sum \mathbf{F} = \mathbf{0} \quad (3.1)$$

geschrieben, wobei $\sum \mathbf{F}$ die *Vektorsumme aller Kräfte* ist, die am Körper angreifen.

Gleichung (3.1) ist nicht nur eine notwendige Bedingung für das Gleichgewicht, sie ist auch eine *hinreichende* Bedingung. Das folgt aus dem zweiten Newton'schen Bewegungsgesetz: $\sum \mathbf{F} = m\mathbf{a}$. Da das Kräftesystem Gleichung (3.1) erfüllt, gilt $m\mathbf{a} = \mathbf{0}$, die Beschleunigung des Massenpunkts ist also $\mathbf{a} = \mathbf{0}$. Folglich bewegt sich der Massenpunkt tatsächlich mit konstanter Geschwindigkeit oder befindet sich in Ruhe.

3.2 Freikörperbild

Zur Anwendung der Gleichgewichtsbedingung müssen wir *alle bekannten und unbekannten Kräfte* ($\sum \mathbf{F}$) berücksichtigen, die *am* Massenpunkt angreifen. Dazu zeichnet man am besten ein *Freikörperbild* des Massenpunkts. Dies ist eine schematische Darstellung, die den Massenpunkt „frei“ von seiner Umgebung mit *allen* angreifenden Kräften zeigt.

Betrachten wir vor der Darstellung einer formalen Vorgehensweise zur Erstellung eines Freikörperbildes zunächst zwei Ankopplungen an die Umgebung, auf die man bei Aufgaben zum Gleichgewicht von Massenpunkten häufig trifft.

Federn Wenn eine *linear elastische Feder* verwendet wird, verändert sich die Länge der Feder direkt proportional zur angreifenden Kraft. Ein Kennwert zur Bestimmung der „Elastizität“ einer Feder ist die *Federkonstante* oder *Steifigkeit* k . Wird eine linear elastische Feder der Steifigkeit k um den Weg s verformt (gedehnt oder gestaucht), dann beträgt die Kraft

$$F = ks \quad (3.2)$$

wobei s die Verformung relativ zur unbelasteten Stellung bezeichnet. Der Weg s wird bestimmt aus der Differenz der verformten Länge der Feder l und ihrer unverformten Länge l_0 , also gilt $s = l - l_0$. Wenn s positiv ist, „zieht“ $\mathbf{F}$ an der Feder, wohingegen bei negativem s , $\mathbf{F}$ darauf „drückt“. Die Feder in Abbildung 3.1 hat z.B. die unverformte Länge $l_0 = 0,4 \text{ m}$ und die Steifigkeit $k = 500 \text{ N/m}$. Zur Dehnung auf die Länge $l = 0,6 \text{ m}$ ist eine Kraft $F = ks = (500 \text{ N/m})(0,6 \text{ m} - 0,4 \text{ m}) = 100 \text{ N}$ erforderlich. Ebenso ist für die Stauchung auf eine Länge von $l = 0,2 \text{ m}$ eine Kraft von $F = ks = (500 \text{ N/m})(0,2 \text{ m} - 0,4 \text{ m}) = -100 \text{ N}$ erforderlich, siehe Abbildung 3.1.

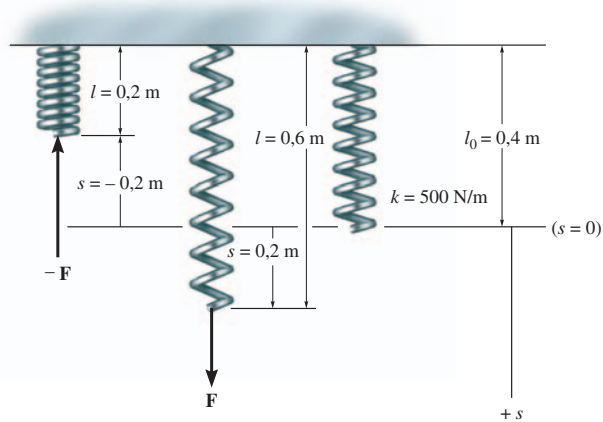
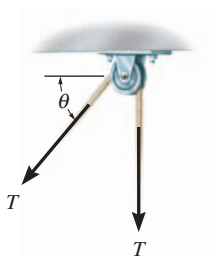


Abbildung 3.1



Seil unter Zug

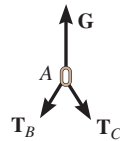
Abbildung 3.2

Seile und Rollen Im gesamten Buch, mit Ausnahme von *Abschnitt 7.4*, gehen wir von der Annahme aus, dass alle Seile (oder Schnüre) ein vernachlässigbares Gewicht haben und sich nicht dehnen können. Ein Seil kann auch *nur* eine Zugkraft (oder Zug) aufnehmen und die Wirkungslinie dieser Kraft verläuft immer in Richtung des Seils. In *Kapitel 5* wird gezeigt, dass die Zugkraft in einem Seil, das reibungslos über eine Rolle läuft, einen *konstanten* Betrag haben muss, damit das Seil im Gleichgewicht bleibt. Wie in Abbildung 3.2 dargestellt, gilt deshalb für jeden Winkel θ , dass eine konstante Zugkraft T über die gesamte Länge des Seiles wirkt.

Zeichnen eines Freikörperbildes

Bei Anwendung der Gleichgewichtsbedingungen müssen wir *alle Kräfte, die an einem Massenpunkt angreifen*, berücksichtigen. Deshalb kann nicht genügend betont werden, dass zunächst das Freikörperbild gezeichnet werden muss. Dabei sind die folgenden drei Schritte auszuführen:

- **Zeichnen der Umrisslinie** Stellen Sie sich durch Zeichnen der Umrisslinie den Massenpunkt von seiner Umgebung *isoliert* oder aus seiner Umgebung *freigeschnitten* vor.
- **Darstellung aller Kräfte** Zeichnen Sie in diese Skizze *alle* Kräfte ein, die *am Massenpunkt angreifen*. Diese Kräfte können *antreibende (aktive) Kräfte* sein, welche den Massenpunkt in eine Bewegung versetzen wollen, oder *Reaktionskräfte*, die als Ergebnis der Einspannungen oder Lager auftreten, die die Bewegung verhindern möchten. Um sicher zu sein, alle diese Kräfte berücksichtigt zu haben, kann es hilfreich sein, einmal um die Grenzen des Massenpunkts zu gehen und dabei jede Kraft, die angreift, einzuzichnen.
- **Kennzeichnen jeder Kraft** *Alle* Kräfte werden mit Buchstaben gekennzeichnet. Eventuell werden bekannte Kräfte dadurch hervorgehoben, dass ihre Beträge mit Zahlenwerten in das Freikörperbild eingetragen werden.

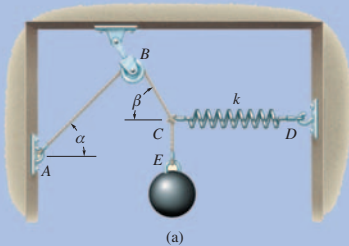


Betrachten wir die Kabeltrommel mit dem Gewicht G , die am Kranausleger aufgehängt ist. Zur Bestimmung der Kräfte in den Seilen AB und AC können wir das Freikörperbild des Rings im Punkt A betrachten, da diese Kräfte am Ring angreifen. Die Seile AD üben die resultierende Kraft G auf den Ring aus und die Gleichgewichtsbedingung wird zur Bestimmung von T_B und T_C verwendet.



Der Kübel wird vom Seil im Gleichgewicht gehalten und wir wissen intuitiv, dass die Kraft im Seil gleich dem Gewicht des Kübels sein muss. Durch Zeichnen des Freikörperbildes verstehen wir, warum das so ist. Diese Darstellung zeigt, dass es nur zwei Kräfte gibt, die *am Kübel angreifen*, nämlich das Gewicht G und die Seilkraft T . Im Gleichgewicht muss die Resultierende dieser Kräfte gleich null sein, also gilt $T = G$. Wichtig ist, dass durch *Freischnitten des Kübels* die unbekannte Seilkraft T „freigelegt“ wird und in der Bedingung für das Gleichgewicht berücksichtigt werden muss.

Beispiel 3.1



(a)

Die Kugel in Abbildung 3.3 hat die Masse m und wird im Schwerfeld der Erde (Erdbeschleunigung $g = 9,81 \text{ m/s}^2$) gehalten. Zeichnen Sie das Freikörperbild der Kugel, des Seils CE und des Knotens in C .

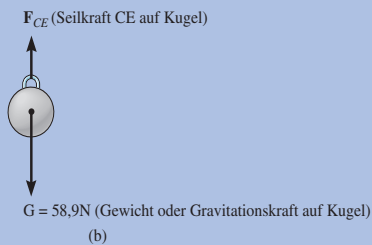
$$m = 6 \text{ kg}, \alpha = 45^\circ, \beta = 60^\circ$$

Lösung

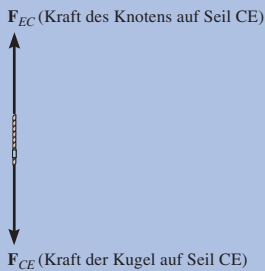
Kugel Man stellt fest, dass nur zwei Kräfte an der Kugel angreifen, nämlich das Gewicht und die Seilkraft CE . Die Kugel hat ein Gewicht $G = 6 \text{ kg}(9,81 \text{ m/s}^2) = 58,9 \text{ N}$. Das Freikörperbild ist in Abbildung 3.3b dargestellt.

Seil CE Wenn das Seil CE von seiner Umgebung freigeschnitten wird, zeigt die Skizze nur zwei Kräfte, die am Seil angreifen, nämlich die Kraft der Kugel und die Kraft des Knotens, siehe Abbildung 3.3c. Beachten Sie, dass die hier dargestellte Kraft $\mathbf{F}_{CE}$ gleich der in Abbildung 3.3b ist, aber dieser entgegengerichtet wirkt. Das folgt aus dem dritten Newton'schen Gesetz (actio = reactio). Auch die Kräfte $\mathbf{F}_{CE}$ und $\mathbf{F}_{EC}$ ziehen am Seil und halten es unter Zug. Für Gleichgewicht muss $F_{CE} = F_{EC}$ gelten.

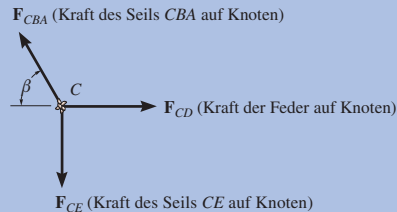
Knoten Am Knoten in C greifen drei Kräfte an, siehe Abbildung 3.3d. Sie werden von den Seilen CBA und CE sowie der Feder CD verursacht. Wie gefordert, zeigt das Freikörperbild alle diese Kräfte mit den Beträgen und Richtungen. Wichtig ist hier, dass das Gewicht der Kugel nicht direkt am Knoten angreift. Stattdessen übt das Seil CE diese Kraft am Knoten aus.



(b)



(c)



(d)

Abbildung 3.3

3.3 Ebene Kräftesysteme

Wenn an einem Massenpunkt ein System koplanarer Kräfte angreift, die in der x - y -Ebene liegen, siehe Abbildung 3.4, dann kann jede Kraft in ihre $\mathbf{i}$ - und $\mathbf{j}$ -Komponente zerlegt werden. Für das Gleichgewicht kann Gleichung (3.1) geschrieben werden als

$$\begin{aligned}\sum \mathbf{F} &= \mathbf{0} \\ \sum F_x \mathbf{i} + \sum F_y \mathbf{j} &= \mathbf{0}\end{aligned}$$

Damit diese Vektorgleichung erfüllt wird, müssen die x - und die y -Koordinaten von $\mathbf{F}$ gleich null sein, d.h.

$$\begin{aligned}\sum F_x &= 0 \\ \sum F_y &= 0\end{aligned}\tag{3.3}$$

Diese *skalaren Gleichgewichtsbedingungen* fordern, dass jeweils die *algebraische Summe* der x - und der y -Koordinaten aller Kräfte, die am Massenpunkt angreifen, gleich null ist. Demzufolge kann Gleichung (3.3) für maximal zwei Unbekannte gelöst werden, meist Winkel oder Beträge von Kräften im Freikörperbild des Massenpunktes.

Skalare Schreibweise Da jede der beiden Gleichgewichtsbedingungen die Zerlegung von Vektorkomponenten in Richtung einer vorgegebenen x - oder y -Achse fordert, verwenden wir zur Darstellung der Komponenten die skalare Schreibweise, wenn wir diese Gleichungen anwenden. Dabei wird der Richtungssinn jeder Komponente durch ein *algebraisches Zeichen* entsprechend der Pfeilspitzenrichtung der Komponente entlang jeder Achse dargestellt. Hat eine Kraft einen *unbekannten Betrag*, dann kann die Pfeilspitzenrichtung der Kraft im Freikörperbild angenommen werden. Da der Betrag einer Kraft immer positiv ist, bedeutet ein *negativer Skalar im Ergebnis*, dass die Kraft entgegengesetzt ist.

Betrachten wir z.B. das Freikörperbild des Massenpunktes in Abbildung 3.5, an dem zwei Kräfte angreifen. Hier wird *angenommen*, dass die *unbekannte Kraft F* zur Erhaltung des Gleichgewichts nach rechts wirkt. Bei Anwendung der Gleichgewichtsbedingung entlang der x -Achse erhalten wir

$$\sum F_x = 0; \quad +F + 10 \text{ N} = 0$$

Beide Ausdrücke sind „positiv“, da beide Kräfte in die positive x -Richtung wirken. Wenn diese Gleichung gelöst wird, ergibt sich $F = -10 \text{ N}$. Das *negative Vorzeichen* bedeutet, dass $\mathbf{F}$ nach links gerichtet sein muss, um den Massenpunkt im Gleichgewicht zu halten, siehe Abbildung 3.5.

Hinweis: Wenn die $+x$ -Achse in Abbildung 3.5 nach links gerichtet wäre, würden beide Ausdrücke in der obigen Gleichung negativ sein. Nach Lösen der Gleichung würde sich aber wiederum $F = -10 \text{ N}$ ergeben, was anzeigt, dass $\mathbf{F}$ nach links gerichtet ist.

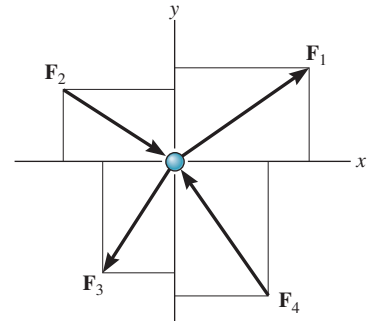


Abbildung 3.4

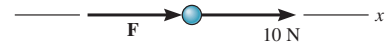
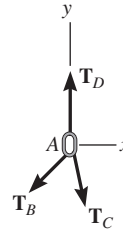
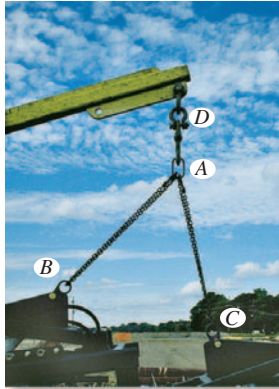


Abbildung 3.5



Die Ketten üben drei Kräfte auf den Ring in A aus. Der Ring bewegt sich nicht, oder bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit, wenn die Summe der Kräfte entlang der x - und der y -Achse gemäß dem Freikörperbild gleich null ist. Ist eine der drei Kräfte bekannt, ergeben sich die Beträge der anderen beiden Kräfte aus den beiden Gleichgewichtsbedingungen.

Lösungsweg

Gleichgewichtsaufgaben bei ebenen Kräftesystemen können folgendermaßen gelöst werden:

Freikörperbild

- Legen Sie die x - und y -Achse in der passenden Orientierung fest.
- Beschriften Sie alle bekannten und unbekannten Kraftbeträge und Kraftrichtungen im Bild.
- Der Richtungssinn einer Kraft mit unbekanntem Betrag kann beliebig angenommen werden.

Gleichgewichtsbedingungen

- Wenden Sie die Gleichgewichtsbedingungen $\sum F_x = 0$ und $\sum F_y = 0$ an.
- Koordinaten sind positiv, wenn sie entlang einer positiven Achse gerichtet sind, und negativ, wenn sie entlang einer negativen Achse gerichtet sind.
- Wenn es mehr als zwei Unbekannte und eine Feder in der Aufgabenstellung gibt, verwenden Sie die Gleichung $F = ks$, um den Zusammenhang zwischen Federkraft und Verformung s anzugeben.
- Ein negatives Ergebnis zeigt, dass der Richtungssinn der Kraft umgekehrt zu dem im Freikörperbild angenommenen ist.

Beispiel 3.2

Bestimmen Sie die Zugkraft in den Seilen AB und AD , wenn sich der Motor mit der Masse m in Abbildung 3.6a im Gleichgewicht befindet.

$$m = 250 \text{ kg}, \alpha = 30^\circ$$

Lösung

Freikörperbild Zur Lösung dieser Aufgabe untersuchen wir das Gleichgewicht des Rings in A , da an diesem „Massenpunkt“ die Kräfte beider Seile AB und AD angreifen. Beachten Sie aber zunächst, dass der Motor ein Gewicht von $G = (250 \text{ kg})(9,81 \text{ m/s}^2) = 2,452 \text{ kN}$ hat, das vom Seil CA getragen wird. Wie in Abbildung 3.6b gezeigt, gibt es daher drei Kräfte, die *am Ring angreifen*. Die Kräfte T_B und T_D haben unbekannte Beträge, aber bekannte Richtungen, und Seil AC übt eine nach unten gerichtete Kraft von $G = 2,452 \text{ kN}$ in A aus.

Gleichgewichtsbedingungen Die beiden unbekannten Beträge T_B und T_D ergeben sich aus den beiden skalaren Gleichgewichtsbedingungen $\sum F_x = 0$ und $\sum F_y = 0$. Dazu werden die x - und y -Achsen in das Freikörperbild eingezeichnet und T_B in die x - und y -Komponente zerlegt. Dies führt auf

$$\sum F_x = 0; \quad T_B \cos \alpha - T_D = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_y = 0; \quad T_B \sin \alpha - G = 0 \quad (2)$$

Auflösen der Gleichung (2) nach T_B und Einsetzen in Gleichung (1), um T_D zu bestimmen, ergibt

$$T_B = \frac{G}{\sin \alpha} = 4,9 \text{ kN}$$

$$T_D = T_B \cos \alpha = \frac{G}{\sin \alpha} \cos \alpha = 4,25 \text{ kN}$$

Die Genauigkeit dieser Ergebnisse hängt natürlich von der Genauigkeit der Werte ab, d.h. den Messungen von Geometrie und Lasten. Für die meisten ingenieurtechnischen Aufgaben mit solchen Fragestellungen reichen Werte mit bis zu drei Stellen Genauigkeit aus. Beachten Sie auch, dass wir hier die Gewichte der Seile vernachlässigt haben, eine vernünftige Annahme, denn sie wären im Vergleich zum Gewicht des Motors klein.

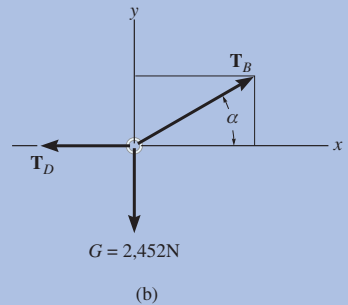
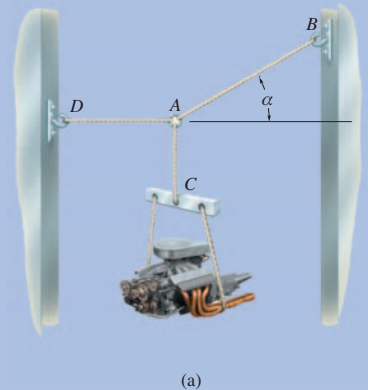
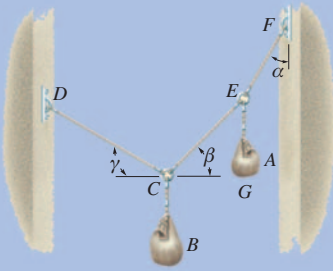
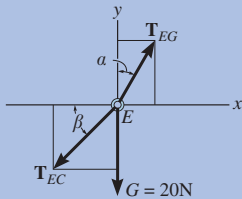


Abbildung 3.6

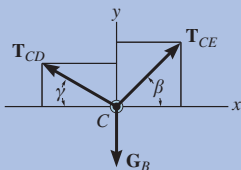
Beispiel 3.3



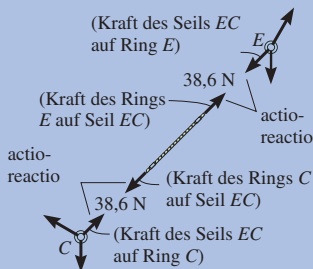
(a)



(b)



(c)



(d)

Abbildung 3.7

Der Sack A in Abbildung 3.7a hat ein Gewicht G . Bestimmen Sie das Gewicht des Sackes B und die Kraft in jedem Seil, die erforderlich ist, das System in der dargestellten Gleichgewichtsposition zu halten.

$$G = 20 \text{ N}, \alpha = 30^\circ, \beta = 45^\circ, \tan \gamma = \frac{3}{4}$$

Lösung

Da das Gewicht von A bekannt ist, kann die unbekannte Zugkraft in den beiden Seilen EG und EC durch Betrachtung des Gleichgewichts am Ring in E bestimmt werden. Warum?

Freikörperbild Drei Kräfte greifen in E an, siehe Abbildung 3.7b.

Gleichgewichtsbedingungen Festlegen der x - und y -Achsen und Zerlegen jeder Kraft in ihre x - und y -Koordinaten mit Hilfe der Trigonometrie ergibt

$$\sum F_x = 0; \quad T_{EG} \sin \alpha - T_{CE} \cos \beta = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_y = 0; \quad T_{EG} \cos \alpha - T_{CE} \sin \beta - G = 0 \quad (2)$$

Auflösen der Gleichung (1) nach T_{EG} in Abhängigkeit von T_{CE} und Einsetzen des Ergebnisses in Gleichung (2) führt auf T_{CE} . Danach erhält man T_{EG} aus Gleichung (1). Die Ergebnisse sind

$$T_{CE} = \frac{G \sin \alpha}{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta} = 38,6 \text{ N}$$

$$T_{EG} = \frac{G \cos \alpha}{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta} = 54,6 \text{ N}$$

Mit dem berechneten Ergebnis für T_{EC} kann nun das Gleichgewicht des Ringes in C untersucht und die Zugkraft in CD sowie das Gewicht von B bestimmt werden.

Freikörperbild Wie in Abbildung 3.7c dargestellt, „zieht“ die Kraft $T_{EC} = 38,6 \text{ N}$ an C . Der Grund dafür wird klar, wenn man das Freikörperbild des Seils CE zeichnet und sowohl Gleichgewicht wie auch das Reaktionsprinzip (actio = reactio), nämlich gleiche, aber entgegengerichtete Gegenkraft (drittes Newton'sches Gesetz) anwendet, siehe Abbildung 3.7d.

Gleichgewichtsbedingungen Nach Festlegen der x - und y -Achsen und Feststellung, dass die Komponenten von T_{CD} proportional zur Seilneigung sind, erhalten wir

$$\sum F_x = 0; \quad T_{CE} \cos \beta - T_{CD} \cos \gamma = 0 \quad (3)$$

$$\sum F_y = 0; \quad T_{CD} \sin \gamma - T_{CE} \sin \beta - G_B = 0 \quad (4)$$

Lösen der Gleichung (3) und Einsetzen des Ergebnisses in Gleichung (4) ergibt

$$T_{CD} = T_{EC} \frac{\cos \beta}{\cos \gamma} = 34,1 \text{ N}$$

$$G_B = T_{CD} \sin \gamma - T_{CE} \sin \beta = 47,8 \text{ N}$$

Beispiel 3.4

Bestimmen Sie die erforderliche Länge l_{AC} des Seils AC in Abbildung 3.8a, so dass die Lampe mit der Masse m in der dargestellten Position hängt. Die *unverformte* Länge der Feder AB ist l'_{AB} und die Feder hat eine Steifigkeit von k_{AB} . Der Abstand der Wände beträgt b .

$$m = 8 \text{ kg}, l'_{AB} = 0,4 \text{ m}, b = 2 \text{ m}, k_{AB} = 300 \text{ N/m}, \alpha = 30^\circ$$

Lösung

Wenn die Kraft in der Feder AB bekannt ist, kann die Dehnung aus $F = ks$ bestimmt werden. Über die Geometrie kann dann die erforderliche Länge von AC bestimmt werden.

Freikörperbild Die Lampe hat ein Gewicht $G = mg = 8 \text{ kg}(9,81 \text{ m/s}^2) = 78,5 \text{ N}$. Das Freikörperbild des Rings in A ist in Abbildung 3.8b dargestellt.

Gleichgewichtsbedingungen Mit den Achsen x und y folgt

$$\begin{aligned} \sum F_x &= 0; & T_{AB} - T_{AC} \cos \alpha &= 0 \\ \sum F_y &= 0; & T_{AC} \sin \alpha - G &= 0 \end{aligned}$$

Daraus erhält man

$$T_{AC} = \frac{G}{\sin \alpha} = \frac{78,5 \text{ N}}{\sin 30^\circ} = 157 \text{ N}$$

$$T_{AB} = T_{AC} \cos \alpha = 157 \text{ N} \cos 30^\circ = 136 \text{ N}$$

Die Dehnung der Feder AB ergibt sich zu

$$s_{AB} = \frac{T_{AB}}{k_{AB}} = \frac{136 \text{ N}}{300 \text{ N/m}} = 0,453 \text{ m}$$

Somit beträgt die gedehnte Länge

$$l_{AB} = l'_{AB} + s_{AB} = 0,4 \text{ m} + 0,453 \text{ m} = 0,853 \text{ m}$$

Der horizontale Abstand von C nach B , siehe Abbildung 3.8a, ist

$$b = l_{AC} \cos \alpha + l_{AB}$$

Daraus folgt für die gesuchte Länge l_{AC}

$$l_{AC} = \frac{b - l_{AB}}{\cos \alpha} = \frac{2 \text{ m} - 0,835 \text{ m}}{\cos 30^\circ} = 1,32 \text{ m}$$

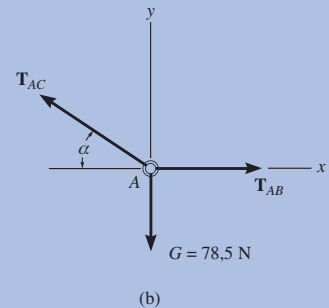
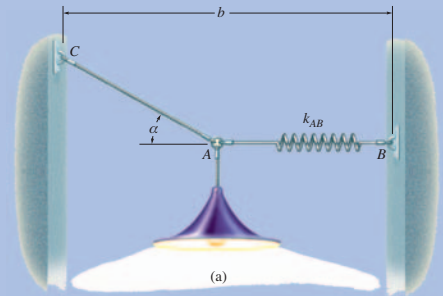


Abbildung 3.8

3.4 Räumliche Kräftesysteme

Für das Gleichgewicht eines Massenpunktes wird

$$\sum \mathbf{F} = \mathbf{0} \quad (3.4)$$

gefordert. Wenn die Kräfte in ihre **i**-, **j**- und **k**-Komponenten zerlegt werden, siehe Abbildung 3.9, erhalten wir

$$\sum F_x \mathbf{i} + \sum F_y \mathbf{j} + \sum F_z \mathbf{k} = \mathbf{0}$$

Für das Gleichgewicht müssen wir also fordern, dass die folgenden drei skalaren Koordinatengleichungen erfüllt werden:

$$\begin{aligned} \sum F_x &= 0 \\ \sum F_y &= 0 \\ \sum F_z &= 0 \end{aligned} \quad (3.5)$$

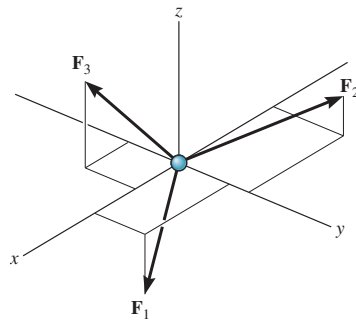
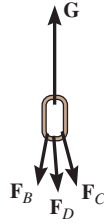
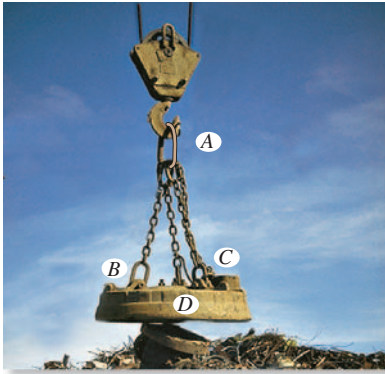


Abbildung 3.9

Diese Gleichungen stellen die algebraischen Summen der x-, y- und z-Kraftkoordinaten dar, die am Massenpunkt angreifen. Mit ihnen können wir Gleichungen mit bis zu drei Unbekannten lösen. Normalerweise sind dies Winkel oder Beträge von Kräften aus dem Freikörperbild.



Am Ring in A greifen die Kraft des Hakens sowie die drei Kettenkräfte an. Wenn der Elektromagnet und seine Last das Gewicht G haben, dann ist die Hakenkraft G , und die drei skalaren Gleichgewichtsbedingungen können für das Freikörperbild des Rings zur Bestimmung der Kettenkräfte F_B , F_C und F_D ausgewertet werden.

Lösungsweg

Räumliche Gleichgewichtsaufgaben für einen Massenpunkt können folgendermaßen gelöst werden:

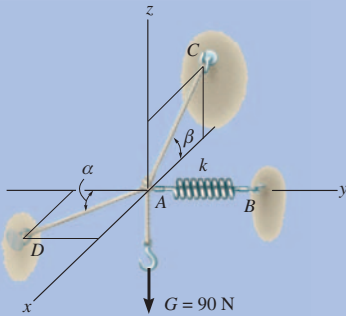
Freikörperbild

- Legen Sie die x -, y - und z -Achsen in einer passenden Orientierung fest.
- Beschriften Sie alle bekannten und unbekannten Beträge und Richtungen der Kräfte im Bild.
- Der Richtungssinn einer Kraft mit einem unbekannten Betrag kann beliebig angenommen werden.

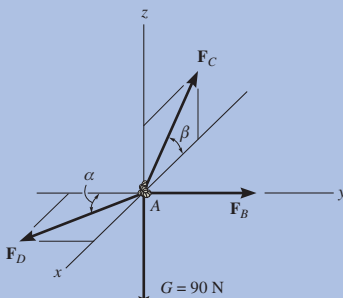
Gleichgewichtsbedingungen

- Verwenden Sie die skalaren Gleichgewichtsbedingungen $\sum F_x = 0$, $\sum F_y = 0$, $\sum F_z = 0$, wenn die Zerlegung der Kräfte in die x -, y - und z -Komponenten einfach ist.
- Wenn die dreidimensionale Geometrie schwierig ist, schreiben Sie zunächst jede Kraft als kartesischen Vektor, setzen diese Vektoren in die Gleichung $\sum \mathbf{F} = \mathbf{0}$ ein und setzen dann die $\mathbf{i}$ -, $\mathbf{j}$ - und $\mathbf{k}$ -Koordinaten der Summe gleich null.
- Wenn sich ein negatives Ergebnis ergibt, bedeutet dies, dass der Richtungssinn der Kraft demjenigen im Freikörperbild entgegengerichtet ist.

Beispiel 3.5



(a)



(b)

Abbildung 3.10

Eine Last G hängt am Haken in Abbildung 3.10a. Diese wird von zwei Seilen und einer Feder mit der Steifigkeit k gehalten. Bestimmen Sie die Kraft in den Seilen und die Dehnung der Feder im Gleichgewicht. Das Seil AD liegt in der x - y -Ebene und das Seil AC in der x - z -Ebene.

$$G = 90 \text{ N}, k = 500 \text{ N/m}, \tan \beta = \frac{3}{4}, \alpha = 30^\circ$$

Lösung

Die Dehnung der Feder kann nach der Bestimmung der Kraft in der Feder ermittelt werden.

Freikörperbild Punkt A wird zur Gleichgewichtsanalyse gewählt, da die Seilkräfte an diesem Punkt angreifen. Das Freikörperbild ist in Abbildung 3.10b dargestellt.

Gleichgewichtsbedingungen Eine Untersuchung ergibt, dass jede Kraft leicht in ihre x -, y - und z -Koordinaten zerlegt werden kann. Daher können die drei skalaren Gleichgewichtsbedingungen direkt angewandt werden. Wenn wir die Komponenten entlang den positiven Achsen als „positiv“ annehmen, erhalten wir

$$\sum F_x = 0; \quad F_D \sin \alpha - F_C \cos \beta = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_y = 0; \quad -F_D \cos \alpha + F_B = 0 \quad (2)$$

$$\sum F_z = 0; \quad F_C \sin \beta - G = 0 \quad (3)$$

Auflösen der Gleichung (3) nach F_C , dann der Gleichung (1) nach F_D und schließlich der Gleichung (2) nach F_B ergibt

$$F_C = \frac{G}{\sin \beta} = 150 \text{ N}$$

$$F_D = F_C \frac{\cos \beta}{\sin \alpha} = G \frac{\cos \beta}{\sin \alpha \sin \beta} = 240 \text{ N}$$

$$F_B = F_D \cos \alpha = G \frac{\cos \alpha \cos \beta}{\sin \alpha \sin \beta} = 208 \text{ N}$$

Die Dehnung der Feder ist daher

$$F_B = k s_{AB}$$

$$s_{AB} = \frac{F_B}{k} = \frac{208 \text{ N}}{500 \text{ N/m}} = 0,416 \text{ m}$$

Beispiel 3.6

Bestimmen Sie den Betrag und die Richtungswinkel der Kraft $\mathbf{F}$ in Abbildung 3.11a, die erforderlich ist, den Massenpunkt O im Gleichgewicht zu halten.

$$F_1 = 400 \text{ N}, F_2 = 800 \text{ N}, F_3 = 800 \text{ N}, a = 3 \text{ m}, b = 2 \text{ m}, c = 6 \text{ m}$$

Lösung

Freikörperbild Vier Kräfte greifen am Massenpunkt O an, siehe Abbildung 3.11b.

Gleichgewichtsbedingungen Jede Kraft kann als kartesischer Vektor geschrieben werden. Die Gleichgewichtsbedingungen können zur Bestimmung der x -, y - und z -Koordinaten von $\mathbf{F}$ verwendet werden. Die Koordinaten von B sind $B(-b, -a, c)$ und wir erhalten

$$\mathbf{F}_1 = F_1 \mathbf{j} = \{400 \mathbf{j}\} \text{ N}$$

$$\mathbf{F}_2 = -F_2 \mathbf{k} = \{-800 \mathbf{k}\} \text{ N}$$

$$\mathbf{F}_3 = F_3 \frac{\mathbf{r}_B}{r_B} = F_3 \frac{-a\mathbf{i} - b\mathbf{j} + c\mathbf{k}}{\sqrt{(-a)^2 + (-b)^2 + (c)^2}} = 700 \text{ N} \left(\frac{-2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 6\mathbf{k}}{\sqrt{(-2)^2 + (-3)^2 + (6)^2}} \right)$$

$$= \{-200\mathbf{i} - 300\mathbf{j} + 600\mathbf{k}\} \text{ N} = -F_{3x}\mathbf{i} - F_{3y}\mathbf{j} + F_{3z}\mathbf{k}$$

$$\mathbf{F} = F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j} + F_z \mathbf{k}$$

Im Gleichgewicht muss gelten

$$\sum \mathbf{F} = \mathbf{0}; \quad \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 + \mathbf{F} = \mathbf{0}$$

$$F_1 \mathbf{j} - F_2 \mathbf{k} - F_{3x} \mathbf{i} - F_{3y} \mathbf{j} + F_{3z} \mathbf{k} + F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j} + F_z \mathbf{k} = \mathbf{0}$$

Wir setzen die i -, j - und k -Koordinaten jeweils gleich null und erhalten

$$\sum F_x = 0; \quad -F_{3x} + F_x = 0 \quad F_x = F_{3x} = 200 \text{ N}$$

$$\sum F_y = 0; \quad F_1 - F_{3y} + F_y = 0 \quad F_y = -F_1 + F_{3y} = -100 \text{ N}$$

$$\sum F_z = 0; \quad -F_2 + F_{3z} + F_z = 0 \quad F_z = F_2 - F_{3z} = 200 \text{ N}$$

und somit

$$\mathbf{F} = \{200\mathbf{i} - 100\mathbf{j} + 200\mathbf{k}\} \text{ N}$$

$$F = \sqrt{(200 \text{ N})^2 + (-100 \text{ N})^2 + (200 \text{ N})^2} = 300 \text{ N}$$

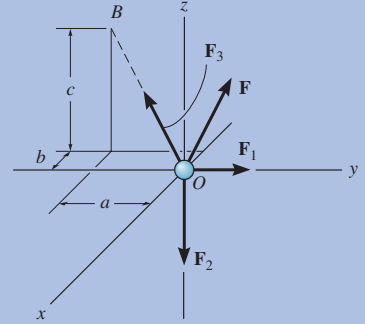
$$\mathbf{u}_F = \frac{\mathbf{F}}{F} = \frac{200}{300} \mathbf{i} - \frac{100}{300} \mathbf{j} + \frac{200}{300} \mathbf{k}$$

$$\alpha = \cos^{-1} \left(\frac{200}{300} \right) = 48,2^\circ$$

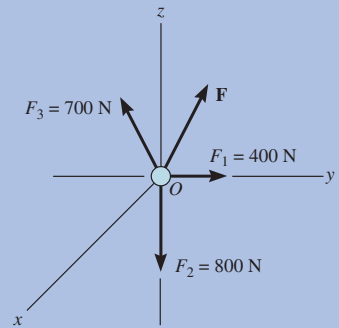
$$\beta = \cos^{-1} \left(\frac{-100}{300} \right) = 109^\circ$$

$$\gamma = \cos^{-1} \left(\frac{200}{300} \right) = 48,2^\circ$$

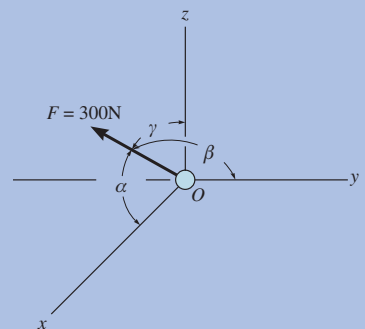
Der Betrag und die korrekte Richtung von $\mathbf{F}$ sind in Abbildung 3.11c dargestellt.



(a)



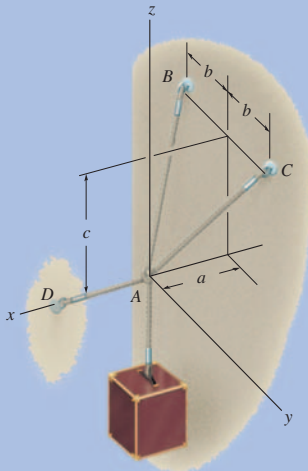
(b)



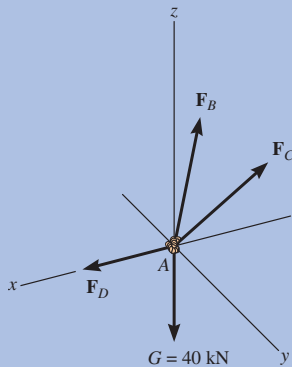
(c)

Abbildung 3.11

Beispiel 3.7



(a)



(b)

Abbildung 3.12

Bestimmen Sie die Kraft in den Seilen, welche die Kiste mit dem Gewicht G in Abbildung 3.12a tragen.

$$G = 40 \text{ kN}, a = 3 \text{ m}, b = 4 \text{ m}, c = 8 \text{ m}$$

Lösung

Freikörperbild Wie in Abbildung 3.12b dargestellt, wird das Freikörperbild von Punkt A betrachtet, um die drei unbekannten Seilkräfte zu äußeren Kräften zu machen.

Gleichgewichtsbedingungen Zunächst schreiben wir jede Kraft als kartesischen Vektor. Die Koordinaten der Punkte B und C sind $B(-a, -b, c)$ und $C(-a, b, c)$:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_B &= F_B \frac{\mathbf{r}_B}{r_B} = F_B \left[\frac{-a\mathbf{i} - b\mathbf{j} + c\mathbf{k}}{\sqrt{(-a)^2 + (-b)^2 + c^2}} \right] \\ &= F_B \left[\frac{-3\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 8\mathbf{k}}{\sqrt{(-3)^2 + (-4)^2 + 8^2}} \right] \\ &= F_B(-0,318\mathbf{i} - 0,424\mathbf{j} + 0,848\mathbf{k}) = F_B(-u_{Bx}\mathbf{i} - u_{By}\mathbf{j} + u_{Bz}\mathbf{k}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_C &= F_C \frac{\mathbf{r}_C}{r_C} = F_C \left[\frac{-a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}}{\sqrt{(-a)^2 + b^2 + c^2}} \right] \\ &= F_C \left[\frac{-3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 8\mathbf{k}}{\sqrt{(-3)^2 + 4^2 + 8^2}} \right] \\ &= F_C(-0,318\mathbf{i} + 0,424\mathbf{j} + 0,848\mathbf{k}) = F_C(-u_{Cx}\mathbf{i} + u_{Cy}\mathbf{j} + u_{Cz}\mathbf{k}) \end{aligned}$$

$$\mathbf{F}_D = F_D\mathbf{i}$$

$$\mathbf{G} = -G\mathbf{k} = \{-40\mathbf{k}\} \text{ kN}$$

Im Gleichgewicht muss gelten

$$\begin{aligned} \sum \mathbf{F} &= \mathbf{0}; \quad \mathbf{F}_B + \mathbf{F}_C + \mathbf{F}_D + \mathbf{G} = \mathbf{0} \\ F_B(-u_{Bx}\mathbf{i} - u_{By}\mathbf{j} + u_{Bz}\mathbf{k}) + F_C(-u_{Cx}\mathbf{i} + u_{Cy}\mathbf{j} + u_{Cz}\mathbf{k}) + F_D\mathbf{i} - G\mathbf{k} &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

Wir setzen die $\mathbf{i}$ -, $\mathbf{j}$ - und $\mathbf{k}$ -Koordinaten jeweils gleich null und erhalten

$$\sum F_x = 0; \quad -F_B u_{Bx} - F_C u_{Cx} + F_D = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_y = 0; \quad -F_B u_{By} + F_C u_{Cy} = 0 \quad (2)$$

$$\sum F_z = 0; \quad F_B u_{Bz} + F_C u_{Cz} - G = 0 \quad (3)$$

Aus Gleichung (2) folgt, dass $F_B = F_C$ ist. Auflösen der Gleichung (3) nach F_B und F_C und Einsetzen des Ergebnisses in Gleichung (1) zur Bestimmung von F_D führt zu

$$F_B = F_C = \frac{G}{u_{Bz} + u_{Cz}} = 23,6 \text{ kN}$$

$$F_D = \frac{G}{u_{Bz} + u_{Cz}} (u_{Bx} + u_{Cx}) = 15,0 \text{ kN}$$

Beispiel 3.8

Die Kiste mit der Masse m in Abbildung 3.13a wird von drei Seilen gehalten. Ein Seil ist mit einer Feder verbunden. Bestimmen Sie die Zugkraft in den Seilen AC und AD und die Dehnung der Feder.

$m = 100 \text{ kg}$, $a = 1 \text{ m}$, $b = 2 \text{ m}$, $k = 1,5 \text{ kN/m}$, $\alpha = 120^\circ$, $\beta = 135^\circ$, $\gamma = 60^\circ$

Lösung

Freikörperbild Die Kraft in jedem Seil kann durch Untersuchung des Gleichgewichts im Punkt A bestimmt werden. Das Freikörperbild ist in Abbildung 3.13b dargestellt. Das Gewicht der Kiste beträgt $G = mg = 100 \text{ kg} (9,81 \text{ m/s}^2) = 981 \text{ N}$.

Gleichgewichtsbedingungen Jeder Vektor im Freikörperbild wird zunächst als kartesischer Vektor geschrieben. Mit Gleichung (2.11) für $\mathbf{F}_C$ und den Koordinaten $D(-a, b, b)$ für $\mathbf{F}_D$ erhalten wir

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_B &= F_B \mathbf{i} \\ \mathbf{F}_C &= F_C (\cos \alpha \mathbf{i} + \cos \beta \mathbf{j} + \cos \gamma \mathbf{k}) \\ &= F_C (\cos 120^\circ \mathbf{i} + \cos 135^\circ \mathbf{j} + \cos 60^\circ \mathbf{k}) \\ &= F_C (-0,5 \mathbf{i} - 0,707 \mathbf{j} + 0,5 \mathbf{k}) = F_C (-u_{Cx} \mathbf{i} - u_{Cy} \mathbf{j} + u_{Cz} \mathbf{k}) \\ \mathbf{F}_D &= F_D \frac{\mathbf{r}_D}{r_D} = F_D \left[\frac{-a \mathbf{i} + b \mathbf{j} + b \mathbf{k}}{\sqrt{(-a)^2 + b^2 + b^2}} \right] \\ &= F_D \left[\frac{-1 \mathbf{i} + 2 \mathbf{j} + 2 \mathbf{k}}{\sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 2^2}} \right] \\ &= F_D (-0,333 \mathbf{i} + 0,667 \mathbf{j} + 0,667 \mathbf{k}) = F_D (-u_{Dx} \mathbf{i} + u_{Dy} \mathbf{j} + u_{Dz} \mathbf{k}) \\ \mathbf{G} &= -G \mathbf{k} = \{-981 \mathbf{k}\} \text{ N}\end{aligned}$$

Im Gleichgewicht muss gelten:

$$\begin{aligned}\sum \mathbf{F} &= \mathbf{0}; \quad \mathbf{F}_B + \mathbf{F}_C + \mathbf{F}_D + \mathbf{G} = \mathbf{0} \\ F_B \mathbf{i} + F_C (-u_{Cx} \mathbf{i} - u_{Cy} \mathbf{j} + u_{Cz} \mathbf{k}) + F_D (-u_{Dx} \mathbf{i} + u_{Dy} \mathbf{j} + u_{Dz} \mathbf{k}) - G \mathbf{k} &= \mathbf{0}\end{aligned}$$

Wir setzen die entsprechenden $\mathbf{i}$ -, $\mathbf{j}$ - und $\mathbf{k}$ -Koordinaten gleich null und erhalten

$$\sum F_x = 0; \quad F_B - F_C u_{Cx} - F_D u_{Dx} = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_y = 0; \quad -F_C u_{Cy} + F_D u_{Dy} = 0 \quad (2)$$

$$\sum F_z = 0; \quad F_C u_{Cz} + F_D u_{Dz} - G = 0 \quad (3)$$

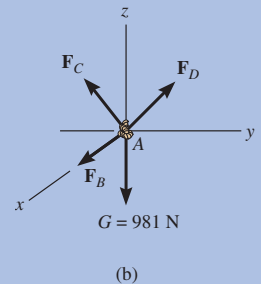
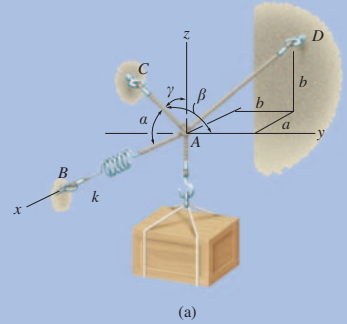


Abbildung 3.13

Auflösen der Gleichung (2) nach F_D in Abhängigkeit von F_C und Einsetzen in Gleichung (3) ergibt F_C . F_D wird aus Gleichung (2) bestimmt. Schließlich setzen wir die Ergebnisse in Gleichung (1) ein und erhalten F_B , also

$$F_C = \frac{G}{u_{Cz} + \frac{u_{Cy}}{u_{Dy}} u_{Dz}} = 813 \text{ N}$$

$$F_D = \frac{u_{Cy}}{u_{Dy}} F_C = 862 \text{ N}$$

$$F_B = F_C u_{Cx} + F_D u_{Dx} = 693,7 \text{ N}$$

Die Dehnung der Feder ist somit

$$F_B = ks$$

$$s = \frac{F_B}{k} = \frac{693,7 \text{ N}}{1500 \text{ N/m}} = 0,462 \text{ m}$$

Z U S A M M E N F A S S U N G

- **Gleichgewicht** Wenn sich ein Massenpunkt in Ruhe befindet oder mit konstanter Geschwindigkeit bewegt, ist er im Gleichgewicht. Dazu ist erforderlich, dass die Resultierende aller Kräfte, die am Massenpunkt angreifen, gleich null ist. Zur Berücksichtigung aller Kräfte ist das Zeichnen eines Freikörperbildes erforderlich. Dieses ist ein Freischnitt des Massenpunktes, in dem alle Kräfte mit ihren bekannten und unbekannten Beträgen und Richtungen eingetragen sind.
- **Ebene Kräftesysteme** Die beiden skalaren Gleichungen für das Kräftegleichgewicht $\sum F_x = 0$ und $\sum F_y = 0$ können benutzt werden, wenn ein entsprechendes Koordinatensystem mit x - und y -Achse festgelegt wurde. Liefert die Lösung für einen Kraftbetrag ein negatives Ergebnis, dann ist der Richtungssinn der Kraft entgegengesetzt zu dem im Freikörperbild eingezeichneten. Bei Einbeziehung einer linear elastischen Feder kann die Dehnung oder die Stauchung s der Feder mit der aufgebrachten Kraft über die Gleichung $F = ks$ verknüpft werden.
- **Räumliche Kräftesysteme** Die Darstellung dreidimensionaler geometrischer Anordnungen kann schwierig sein. Die Gleichgewichtsbedingung $\sum \mathbf{F} = \mathbf{0}$ sollte unter Zuhilfenahme kartesischer Vektoren ausgewertet werden. Dazu muss zunächst jede Kraft aus dem Freikörperbild als kartesischer Vektor geschrieben werden. Wenn die Kräfte summiert und gleich null gesetzt werden, sind auch die $\mathbf{i}$ -, $\mathbf{j}$ - und $\mathbf{k}$ -Koordinaten gleich null, also gilt $\sum F_x = 0$, $\sum F_y = 0$ und $\sum F_z = 0$.

Z U S A M M E N F A S S U N G

Aufgaben zu 3.3

3.1 Bestimmen Sie die Beträge von F_1 und F_2 , so dass sich der Massenpunkt P im Gleichgewicht befindet.

Gegeben: $F = 400 \text{ N}$, $\beta = 60^\circ$, $\alpha = 30^\circ$, $\tan \gamma = \frac{4}{3}$

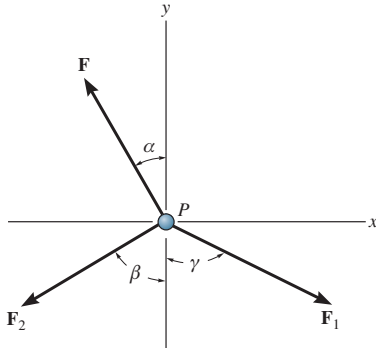


Abbildung A 3.1

3.2 Bestimmen Sie den Betrag und die Richtung θ von F , so dass sich der Massenpunkt im Gleichgewicht befindet.

Gegeben: $F_1 = 7 \text{ kN}$, $F_2 = 3 \text{ kN}$, $\tan \alpha = \frac{4}{3}$

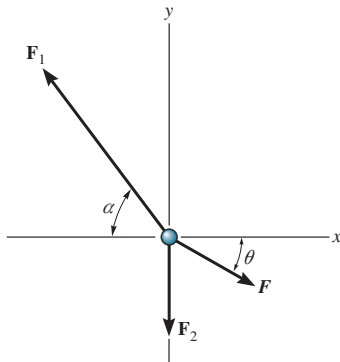


Abbildung A 3.2

3.3 Bestimmen Sie den Betrag und die Richtung θ von F_1 , so dass sich der Massenpunkt P im Gleichgewicht befindet.

Gegeben: $F_2 = 450 \text{ N}$, $F_3 = 300 \text{ N}$, $\beta = 20^\circ$, $\tan \gamma = \frac{12}{5}$

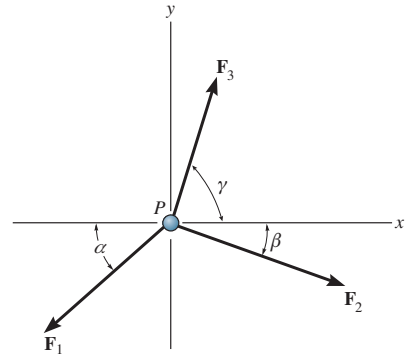


Abbildung A 3.3

***3.4** Bestimmen Sie den Betrag und den Winkel θ von F , so dass sich der Massenpunkt im Gleichgewicht befindet.

Gegeben: $F_1 = 2,25 \text{ kN}$, $F_2 = 7,5 \text{ kN}$, $F_3 = 4,5 \text{ kN}$, $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 30^\circ$

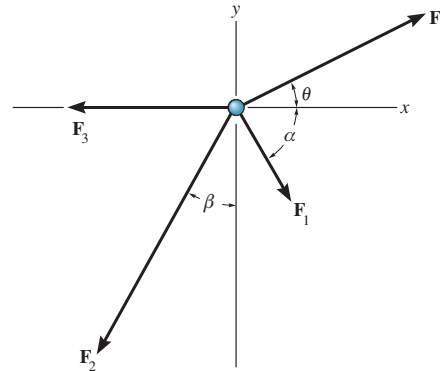


Abbildung A 3.4

3.5 Die Stäbe eines Fachwerks sind im Knoten O gelenkig verbunden. Bestimmen Sie die Beträge von F_1 und F_2 für Gleichgewicht.

Gegeben: $\theta = 60^\circ$, $F_3 = 7 \text{ kN}$, $F_4 = 5 \text{ kN}$, $\beta = 70^\circ$, $\gamma = 30^\circ$

3.6 Die Teile eines Fachwerks sind im Knoten O gelenkig verbunden. Bestimmen Sie den Betrag von F_1 und den Winkel θ im Gleichgewicht.

Gegeben: $F_2 = 6 \text{ kN}$, $F_3 = 7 \text{ kN}$, $F_4 = 7,5 \text{ kN}$, $\beta = 70^\circ$, $\gamma = 30^\circ$, $\tan \delta = \frac{3}{4}$

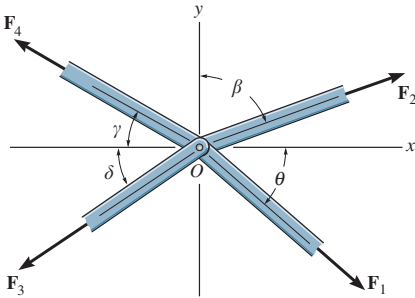


Abbildung A 3.5/3.6

3.7 Die dargestellte Vorrichtung dient zum Richten von Unfallautos. Bestimmen Sie die Zugkraft in jedem Segment der Kette, d.h. AB und AC . Die Kraft F_{DB} , die der Hydraulikzylinder DB auf Punkt B ausübt, ist gegeben.

Gegeben: $F_{DB} = 3,50 \text{ kN}$, $a = 400 \text{ mm}$, $b = 250 \text{ mm}$, $c = 450 \text{ mm}$

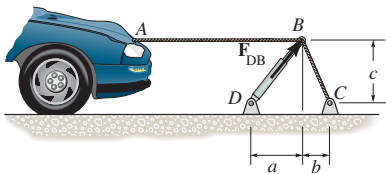


Abbildung A 3.7

***3.8** Bestimmen Sie die Kraft in den Seilen AB und AC , die zum Halten der Ampelanlage mit der Masse m erforderlich ist.

Gegeben: $m = 12 \text{ kg}$, $\beta = 12^\circ$, $\tan \alpha = \frac{7}{24}$

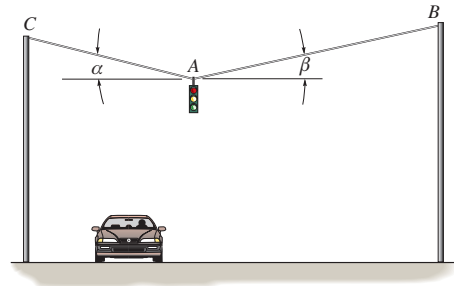


Abbildung A 3.8

3.9 Jedes der beiden Seile AB und AC kann eine maximale Zugkraft F_{max} aushalten. Der Zylinder hat ein Gewicht G . Bestimmen Sie den kleinsten Winkel θ , unter dem die Seile am Zylinder befestigt werden können.

Gegeben: $F_{max} = 8\,000 \text{ N}$, $G = 9\,000 \text{ N}$

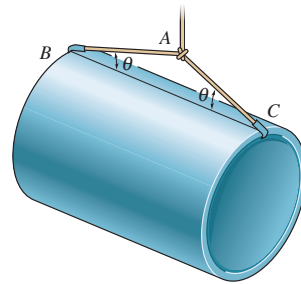


Abbildung A 3.9

3.10 Eine Kiste mit dem Gewicht G wird mit den Seilen AB und AC angehoben. Jedes Seil kann eine maximale Zugkraft F_{max} aushalten, bevor es reißt. AB soll immer in der horizontalen Lage bleiben. Bestimmen Sie den kleinsten Winkel θ , bis zu dem die Kiste angehoben werden kann.

Gegeben: $F_{max} = 2\,500 \text{ N}$, $G = 500 \text{ N}$

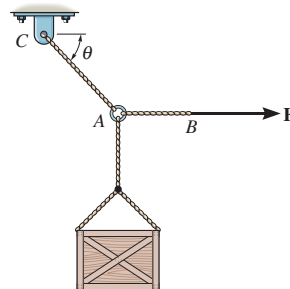


Abbildung A 3.10

3.11 Zwei elektrisch geladene Kugeln mit jeweils der Masse m sind an Fäden gleicher Länge aufgehängt. Bestimmen Sie resultierende horizontale Reaktionskraft F , die an jeder Kugel angreift. Der Abstand zwischen den Kugeln ist r .

Gegeben: $m = 0,2 \text{ g}$, $a = 150 \text{ mm}$, $b = 50 \text{ mm}$, $r = 200 \text{ mm}$

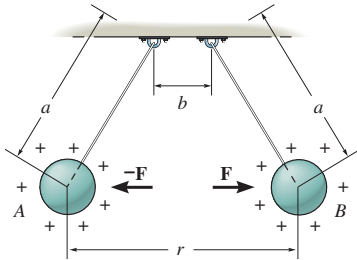


Abbildung A 3.11

***3.12** Der Betonrohrkrümmer hat das Gewicht G . Sein Schwerpunkt liegt im Punkt S . Bestimmen Sie die Kraft in den Seilen AB und CD .

Gegeben: $G = 2\,000 \text{ N}$, $\alpha = 45^\circ$, $a_C = a_D = 750 \text{ mm}$

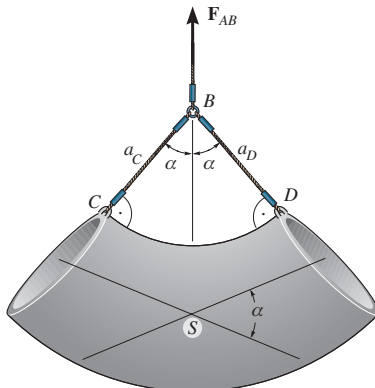


Abbildung A 3.12

3.13 Bestimmen Sie die Dehnung in jeder Feder für den Fall, dass der Klotz mit der Masse m im Gleichgewicht ist. Die Federn sind in der Gleichgewichtslage dargestellt.

Gegeben: $m = 2 \text{ kg}$, $a = 3 \text{ m}$, $b = 4 \text{ m}$, $h = 3 \text{ m}$, $k_{AC} = 20 \text{ N/m}$, $k_{AB} = 30 \text{ N/m}$, $k_{AD} = 40 \text{ N/m}$

3.14 Die ungedehnte Länge der Feder AB ist l_0 . Der Klotz wird in der Gleichgewichtslage gehalten. Bestimmen Sie die Masse des Klotzes in Punkt D .

Gegeben: $l_0 = 2 \text{ m}$, $a = 3 \text{ m}$, $b = 4 \text{ m}$, $h = 3 \text{ m}$, $k_{AC} = 20 \text{ N/m}$, $k_{AB} = 30 \text{ N/m}$, $k_{AD} = 40 \text{ N/m}$

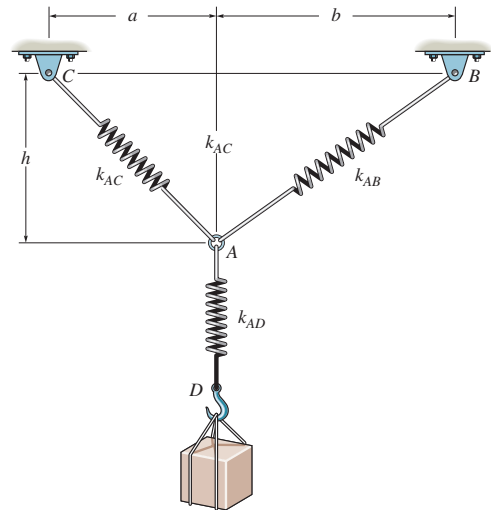


Abbildung A 3.13/3.14

3.15 Die Feder ABC hat die Steifigkeit k und eine ungedehnte Länge l_0 . An der Feder ist eine Rolle B befestigt, an der mit einem Seil gezogen wird. Bestimmen Sie die Kraft F im Seil für den Fall, dass die Verschiebung der Rolle von der Wand d ist.

Gegeben: $k = 500 \text{ N/m}$, $l_0 = 6 \text{ m}$, $d = 1,5 \text{ m}$

***3.16** Die Feder ABC hat die Steifigkeit k und eine ungedehnte Länge l_0 . Bestimmen Sie die Verschiebung d , wenn die Kraft F am Seil angreift.

Gegeben: $k = 500 \text{ N/m}$, $l_0 = 6 \text{ m}$, $F = 175 \text{ N}$

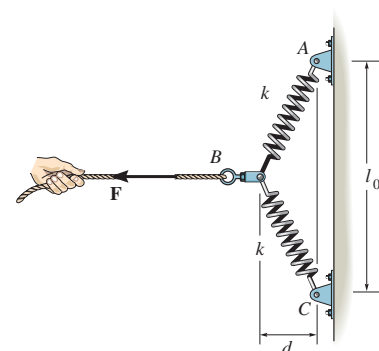


Abbildung A 3.15/3.16

3.17 Bestimmen Sie das maximale Gewicht des Blumentopfs, das von den Seilen AB und AC gehalten werden kann, ohne dass die maximale Seilkraft $F_{\max}$ in einem der Seile überschritten wird.

Gegeben: $F_{\max} = 250 \text{ N}$, $\alpha = 30^\circ$, $\tan \beta = \frac{3}{4}$

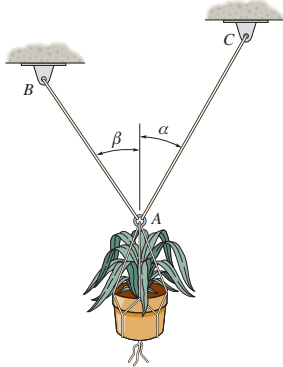


Abbildung A 3.17

3.18 Der Motor in B wickelt mit konstanter Geschwindigkeit das Seil auf, das an der Kiste mit einem Gewicht G befestigt ist. Bestimmen Sie die Kraft im Seil CD , das die Rolle hält, und den Winkel θ für Gleichgewicht. Vernachlässigen Sie die Größe der Rolle in C .

Gegeben: $G = 325 \text{ N}$, $\tan \beta = \frac{12}{5}$

3.19 Jedes Seil, BCA und CD , kann je eine maximale Last $F_{\max}$ aufnehmen. Bestimmen Sie das maximale Gewicht der Kiste, die mit konstanter Geschwindigkeit gehoben werden kann, und den Winkel θ im Gleichgewicht.

Gegeben: $F_{\max} = 500 \text{ N}$, $\tan \beta = \frac{12}{5}$

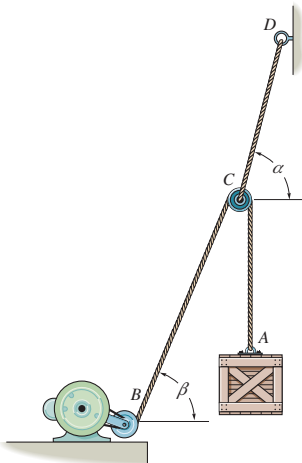


Abbildung A 3.18/3.19

***3.20** Bestimmen Sie die Kräfte in den Seilen AC und AB , die zum Halten des Balles mit einer Masse m im Gleichgewicht erforderlich sind.

Gegeben: $m = 20 \text{ kg}$, $F = 300 \text{ N}$, $d = 1 \text{ m}$, $a = 2 \text{ m}$, $h = 1,5 \text{ m}$

3.21 Der Ball D hat eine Masse m . Eine Kraft F greift horizontal am Ring in A an. Bestimmen Sie den größten Wert von d , für den die Seilkraft F_{AC} gleich null ist.

Gegeben: $m = 20 \text{ kg}$, $F = 100 \text{ N}$, $a = 2 \text{ m}$, $h = 1,5 \text{ m}$

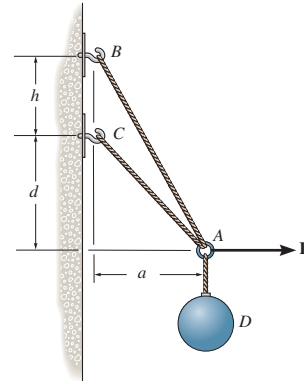


Abbildung A 3.20/3.21

3.22 Der Klotz hat das Gewicht G und wird mit gleichförmiger Geschwindigkeit gehoben. Bestimmen Sie den Winkel θ im Gleichgewicht und die erforderliche Kraft in jedem Seil.

Gegeben: $G = 20 \text{ N}$, $\alpha = 30^\circ$

3.23 Bestimmen Sie das maximale Gewicht G des Klotzes, der in der dargestellten Position aufgehängt werden kann, wenn jedes Seil einer maximalen Zugkraft $F_{\max}$ standhält. Wie groß ist der Winkel θ im Gleichgewicht?

Gegeben: $F_{\max} = 80 \text{ N}$, $\alpha = 30^\circ$

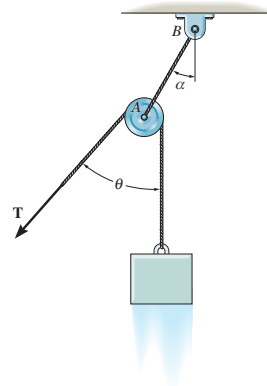


Abbildung A 3.22/3.23

***3.24** Bestimmen Sie den Betrag und die Richtung θ der Zwangskraft F_{AB} entlang dem Verbindungsstück AB , die von der dargestellten Zugvorrichtung ausgeübt wird. Die aufgehängte Masse ist m . Vernachlässigen Sie die Größe der Rolle in A .

Gegeben: $m = 10 \text{ kg}$, $\alpha = 75^\circ$, $\beta = 45^\circ$

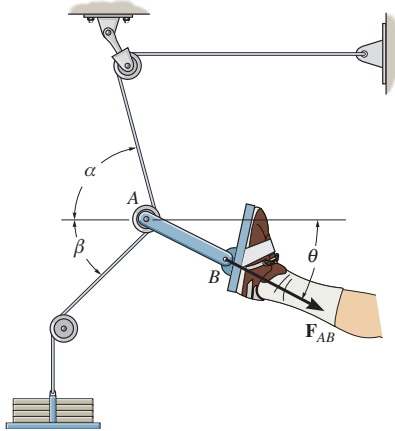


Abbildung A 3.24

3.25 Die Klötze D und F haben beide das Gewicht G , der Klotz E das Gewicht G_E . Bestimmen Sie den Durchhang s im Gleichgewicht. Vernachlässigen Sie die Größe der Rollen.

Gegeben: $G = 5 \text{ N}$, $G_E = 8 \text{ N}$, $a = 0,4 \text{ m}$

3.26 Die Klötze D und F haben beide das Gewicht G . Bestimmen Sie das Gewicht G_E des Klotzes E . Der Durchhang s ist gegeben. Vernachlässigen Sie die Größe der Rollen.

Gegeben: $G = 5 \text{ N}$, $s = 0,3 \text{ m}$, $a = 0,4 \text{ m}$

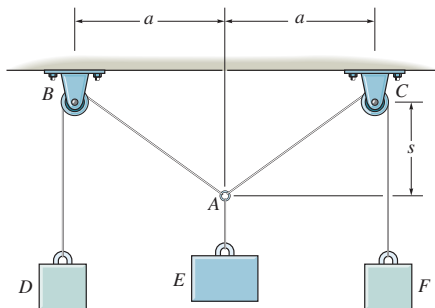


Abbildung A 3.25/3.26

3.27 Mit der Tragschlinge wird ein Container der Masse m gehoben. Bestimmen Sie die Kraft in jedem Seil AB und AC als Funktion von θ . Die maximal zulässige Zugkraft in jedem Seil beträgt $F_{\max}$. Bestimmen Sie die kürzesten Längen der Seile AB und AC , die für die Tragschlinge möglich sind. Der Schwerpunkt des Containers befindet sich im Punkt S .

Gegeben: $m = 500 \text{ kg}$, $F_{\max} = 5 \text{ kN}$, $a = 1,5 \text{ m}$

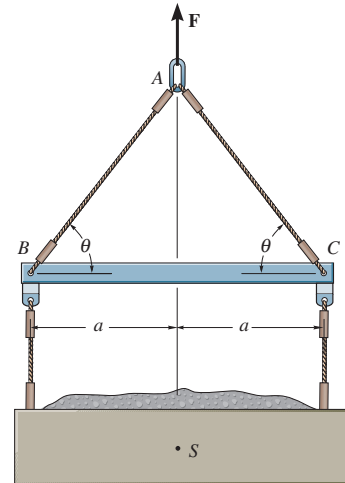


Abbildung A 3.27

***3.28** Die Last mit der Masse m wird vom dargestellten Rollensystem gehoben. Bestimmen Sie die Kraft F im Seil als Funktion des Winkels θ . Zeichnen Sie die Kraft F als Funktion des Winkels θ für $0 \leq \theta \leq 90^\circ$.

Gegeben: $m = 15 \text{ kg}$, $\alpha = 45^\circ$

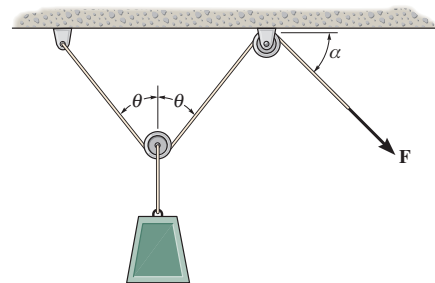


Abbildung A 3.28

3.29 Das Bild mit dem Gewicht G wird am Stift B aufgehängt. In den Punkten A und C am Rahmen wird eine Schnur befestigt, die maximale Tragkraft der Schnur beträgt $F_{\max}$. Ermitteln Sie die kürzeste Schnur, die man noch sicher verwenden kann.

Gegeben: $G = 50 \text{ N}$, $F_{\max} = 75 \text{ N}$, $a = 250 \text{ mm}$

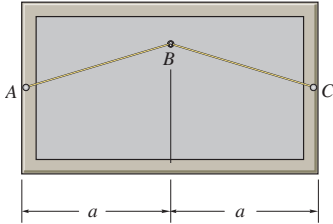


Abbildung A 3.29

3.30 Der Tank mit dem Gewicht G wird an einem Seil der Länge l aufgehängt, das an den Seiten des Tanks befestigt ist und über eine kleine Rolle im Punkt O läuft. Das Kabel kann in den Punkten A und B oder C und D befestigt werden. Bestimmen Sie, welche Befestigung zu geringeren Zugkräften im Seil führt. Wie groß ist diese Zugkraft?

Gegeben: $G = 400 \text{ N}$, $l = 3 \text{ m}$, $a = 1 \text{ m}$, $b = 0,5 \text{ m}$

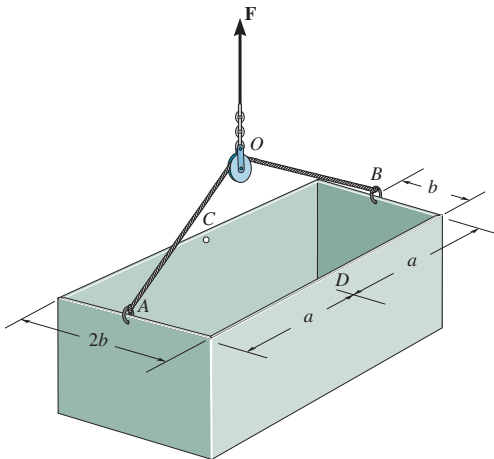


Abbildung A 3.30

3.31 Die vertikale Kraft P greift an den Enden Seils AB der Länge l und an der Feder AC an. Die Feder hat die ungedehnte Länge l_0 . Bestimmen Sie den Winkel θ für das Gleichgewicht.

Gegeben: $P = 10 \text{ N}$, $k = 150 \text{ N/m}$, $l_0 = 0,2 \text{ m}$, $a = 0,2 \text{ m}$

***3.32** Bestimmen Sie die ungedehnte Länge l_0 der Feder AC für eine Kraft P , die den Winkel im Gleichgewicht erzeugt. Das Seil AB hat die Länge a .

Gegeben: $P = 80 \text{ N}$, $\theta = 60^\circ$, $k = 500 \text{ N/m}$, $a = 0,2 \text{ m}$

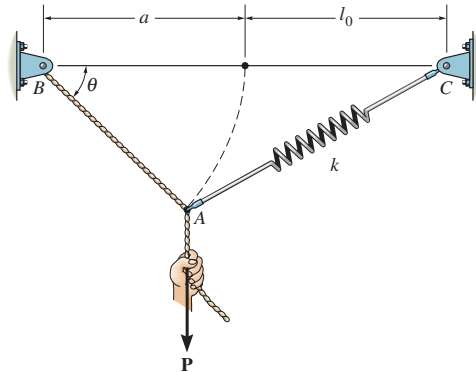


Abbildung A 3.31/3.32

3.33 Eine „Waage“ wird mit einem Seil der Länge l und einem Klotz D mit dem Gewicht G konstruiert. Das Seil ist an einem Stift in A befestigt und läuft über zwei kleine Rollen. Bestimmen Sie das Gewicht des aufgehängten Klotzes B , wenn das System im Gleichgewicht ist.

Gegeben: $G = 50 \text{ N}$, $l = 1,2 \text{ m}$, $a = 0,3 \text{ m}$, $s = 0,45 \text{ m}$

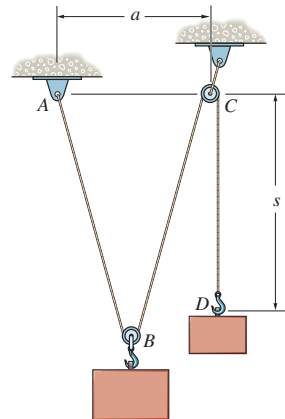


Abbildung A 3.33

- **3.34** Ein Auto wird mit der dargestellten Seilanordnung abgeschleppt. Die erforderliche Abschleppkraft beträgt F . Bestimmen Sie die Mindestlänge l des Seils AB , so dass die Zugkraft in keinem Seil $F_{\max}$ übersteigt. *Hinweis:* Verwenden Sie zur Bestimmung des erforderlichen Befestigungswinkels θ die Gleichgewichtsbedingung im Punkt A , bestimmen Sie dann trigonometrisch über das Dreieck ABC die Länge l .
Gegeben: $F = 3\,000\text{ N}$, $F_{\max} = 3\,750\text{ N}$, $a = 1,2\text{ m}$, $\alpha = 30^\circ$

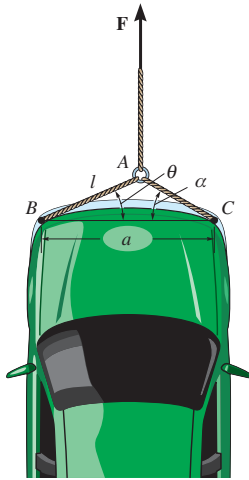


Abbildung A 3.34

- **3.35** Die Feder hat die Steifigkeit k und die ungedehnte Länge l_0 . Bestimmen Sie die Kraft in den Seilen BC und BD , wenn die Feder in der dargestellten Position gehalten wird.
Gegeben: $k = 800\text{ N/m}$, $l_0 = 200\text{ mm}$, $a = 500\text{ mm}$, $b = 400\text{ mm}$, $c = 300\text{ mm}$, $d = 400\text{ mm}$

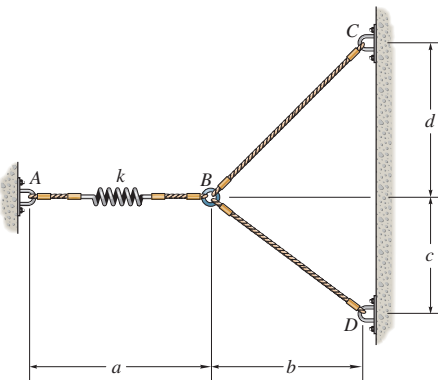


Abbildung A 3.35

- ***3.36** Mit dem Tragriemen BAC wird die Last F mit konstanter Geschwindigkeit angehoben. Bestimmen Sie die Kraft im Tragriemen und zeichnen Sie ihren Wert T (Ordinate) als Funktion der Richtung θ , wobei $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ gilt.
Gegeben: $F = 1\,000\text{ N}$

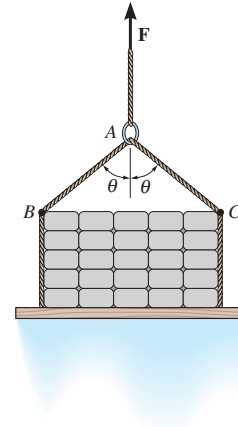


Abbildung A 3.36

- **3.37** Die Leuchte mit dem Gewicht G ist an zwei Federn aufgehängt, die eine ungedehnte Länge l_0 und eine Steifigkeit k haben. Bestimmen Sie den Winkel θ im Gleichgewicht.
Gegeben: $G = 45\text{ kN}$, $k = 75\text{ N/m}$, $l_0 = 1,2\text{ m}$, $a = 1,2\text{ m}$

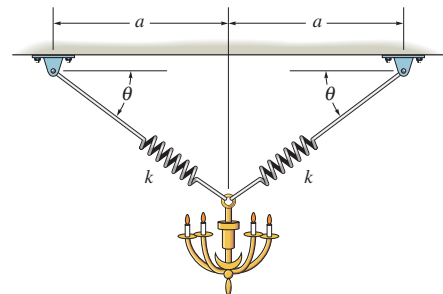


Abbildung A 3.37

3.38 Der K bel mit Inhalt hat die Masse m . Das Seil hat die Länge l . Bestimmen Sie den Abstand y der Rolle im Gleichgewicht. Vernachlässigen Sie die Größe der Rolle in A.

Gegeben: $m = 60 \text{ kg}$, $l = 15 \text{ m}$, $a = 10 \text{ m}$, $h = 2 \text{ m}$

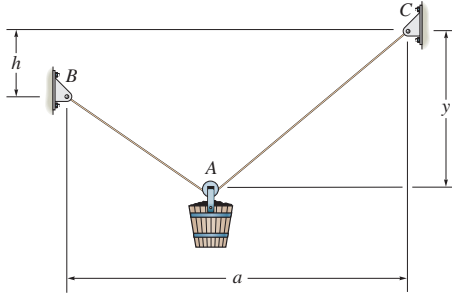


Abbildung A 3.38

3.39 Eine Kugel mit der Masse m ruht auf einer glatten parabolischen Oberfläche. Bestimmen Sie die Normalkraft, die sie auf die Oberfläche ausübt, und die Masse m_B des Klotzes B, die erforderlich ist, sie in der dargestellten Gleichgewichtsposition zu halten.

Gegeben: $m = 4 \text{ kg}$, $h = 0,4 \text{ m}$, $a = 0,4 \text{ m}$, $\alpha = 60^\circ$

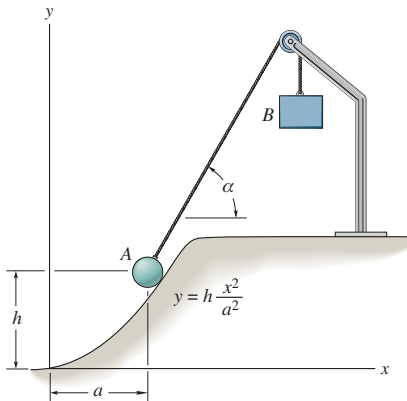


Abbildung A 3.39

***3.40** Das Rohr mit der Masse m wird von fünf Seilen im Punkt A gehalten. Bestimmen Sie die Kraft in jedem Seil für den Fall, dass Gleichgewicht vorliegt.

Gegeben: $m = 30 \text{ kg}$, $\alpha = 60^\circ$, $\tan \beta = \frac{3}{4}$

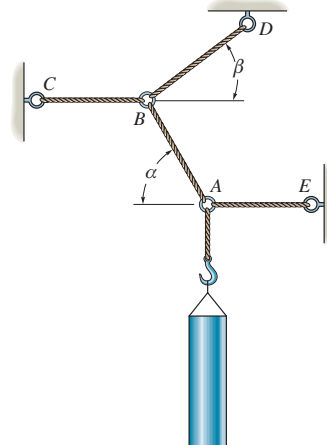


Abbildung A 3.40

Aufgaben zu 3.4

3.41 Bestimmen Sie den zur Erhaltung des Gleichgewichts im Kräftesystem erforderlichen Betrag von F_1 .

Gegeben: $P(-2\text{ m}, -6\text{ m}, 3\text{ m})$, $F_2 = 500\text{ N}$,
 $F_3 = 400\text{ N}$, $F_4 = 300\text{ N}$, $F_5 = 450\text{ N}$, $\alpha = 30^\circ$

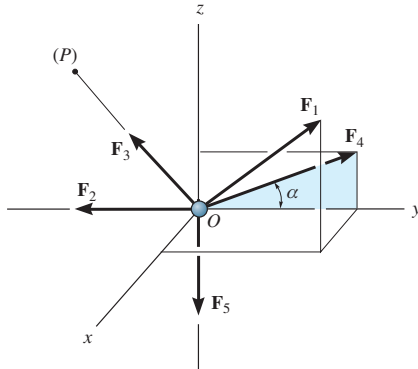


Abbildung A 3.41

3.42 Bestimmen Sie die Beträge von F_1 , F_2 und F_3 , wenn der Massenpunkt im Gleichgewicht ist.

Gegeben: $F_4 = 800\text{ N}$, $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 30^\circ$, $\gamma = 30^\circ$,
 $\tan \delta = \frac{3}{4}$

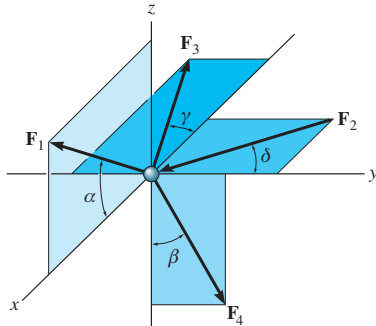


Abbildung A 3.42

3.43 Bestimmen Sie die Beträge von F_1 , F_2 und F_3 im Gleichgewicht.

Gegeben: $F_4 = 2,8\text{ kN}$, $F_5 = 8,5\text{ kN}$, $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 15^\circ$,
 $\tan \gamma = \frac{7}{24}$

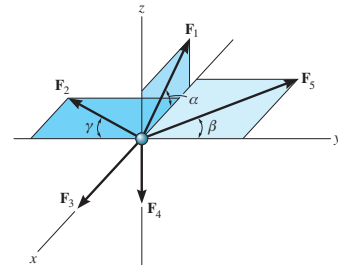


Abbildung A 3.43

***■ 3.44** Bestimmen Sie den zur Erhaltung des Gleichgewichts im Kräftesystem erforderlichen Betrag und die Richtung der Kraft P .

Gegeben: $P(-2\text{ m}, -6\text{ m}, 3\text{ m})$, $F_1 = 2\text{ kN}$,
 $F_2 = 0,75\text{ kN}$, $F_3 = 0,5\text{ kN}$, $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 60^\circ$, $\gamma = 120^\circ$

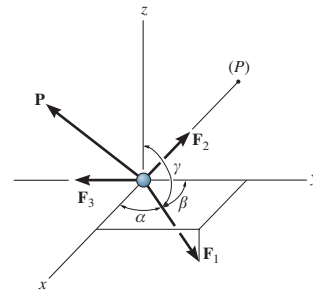


Abbildung A 3.44

3.45 Drei Kabel halten die Lampe mit dem Gewicht G . Bestimmen Sie jede Seilkraft im Gleichgewicht.

Gegeben: $G = 800\text{ N}$, $h = 4\text{ m}$, $a = 2\text{ m}$, $b = 4\text{ m}$

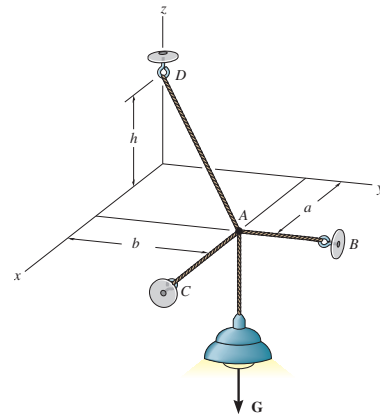


Abbildung A 3.45

3.46 Im Seil AB wirkt eine Zugkraft F_{AB} . Bestimmen Sie die Zugkräfte in den Seilen AC und AD und den Betrag der vertikalen Kraft F .

Gegeben: $F_{AB} = 700 \text{ N}$, $h = 6 \text{ m}$, $a_1 = 3 \text{ m}$, $a_2 = 1,5 \text{ m}$, $a_3 = 2 \text{ m}$, $b_1 = 6 \text{ m}$, $b_2 = 2 \text{ m}$, $b_3 = 3 \text{ m}$

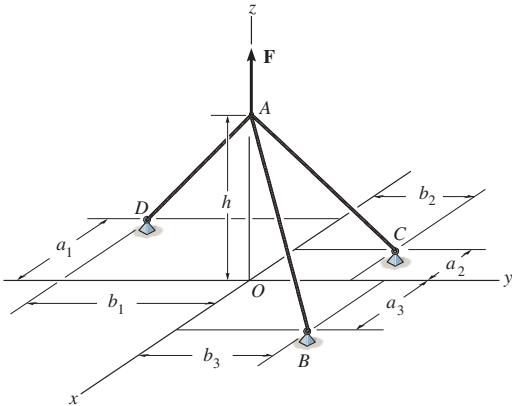


Abbildung A 3.46

3.47 Bestimmen Sie die Längenänderungen der beiden Federn, die zum Halten der Kiste mit der Masse m in der dargestellten Gleichgewichtslage erforderlich sind. Jede Feder hat die ungedehnte Länge l_0 und die Steifigkeit k .

Gegeben: $m = 20 \text{ kg}$, $l_0 = 2 \text{ m}$, $k = 300 \text{ N/m}$, $h = 12 \text{ m}$, $a = 6 \text{ m}$, $b = 4 \text{ m}$

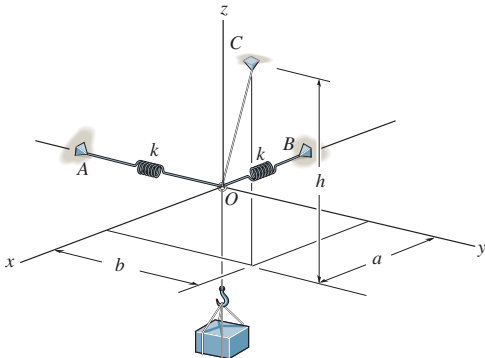


Abbildung A 3.47

***3.48** Der Eimer mit Inhalt hat ein Gesamtgewicht G . Bestimmen Sie die Kraft in den Halteseilen DA , DB und DC . Gegeben: $G = 200 \text{ N}$, $h_1 = 3 \text{ m}$, $h_2 = 3 \text{ m}$, $a_1 = 4,5 \text{ m}$, $a_3 = 1,5 \text{ m}$, $b_2 = 2,5 \text{ m}$, $b_3 = 1,5 \text{ m}$

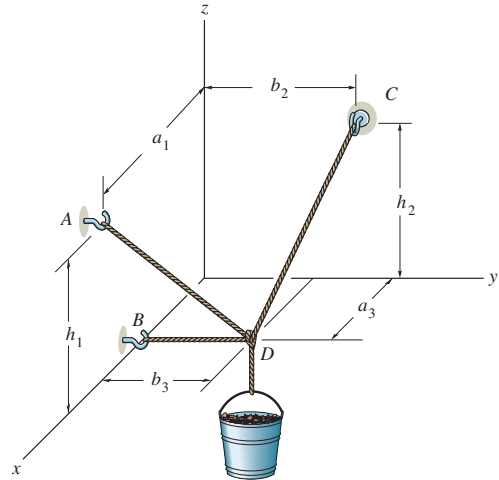


Abbildung A 3.48

■ **3.49** Die Kiste mit dem Gewicht G soll durch die dargestellte Seilanordnung mit konstanter Geschwindigkeit aus dem Laderaum eines Schiffes gehoben werden. Bestimmen Sie die Zugkraft in den drei Seilen im Gleichgewichtszustand.

Gegeben: $G = 2\,500 \text{ N}$, $F = 2\,500 \text{ N}$, $h = 3 \text{ m}$, $a_1 = 1 \text{ m}$, $a_2 = 0,75 \text{ m}$, $b_1 = 3 \text{ m}$, $b_2 = 1,5 \text{ m}$, $b_3 = 1 \text{ m}$

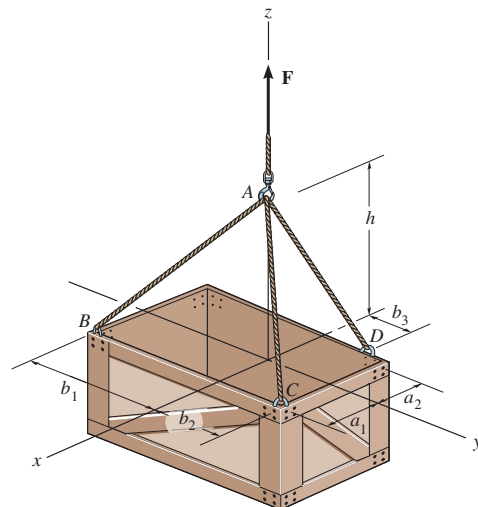


Abbildung A 3.49

■ **3.50** Die Lampe hat die Masse m und wird vom Rundstab AO und den Seilen AB und AC gehalten. Die Wirkungslinie der Kraft im Rundstab verläuft entlang seiner Achse. Bestimmen Sie die Kräfte in AO , AB und AC für den Gleichgewichtsfall.

Gegeben: $m = 15 \text{ kg}$, $h = 6 \text{ m}$, $a_1 = 2 \text{ m}$, $a_2 = 4 \text{ m}$, $b_1 = 1,5 \text{ m}$, $b_2 = 1,5 \text{ m}$, $b_3 = 1,5 \text{ m}$

3.51 Die Seile AB und AC können einer maximalen Zugkraft $F_{\max}$ standhalten und der Rundstab kann einen maximalen Druck $P_{\max}$ aushalten. Bestimmen Sie das maximale Gewicht der Lampe, die in der dargestellten Position gehalten werden kann. Die Wirkungslinie der Kraft im Rundstab verläuft entlang seiner Achse.

Gegeben: $F_{\max} = 500 \text{ N}$, $P_{\max} = 300 \text{ N}$, $h = 6 \text{ m}$, $a_1 = 2 \text{ m}$, $a_2 = 4 \text{ m}$, $b_1 = 1,5 \text{ m}$, $b_2 = 1,5 \text{ m}$, $b_3 = 1,5 \text{ m}$

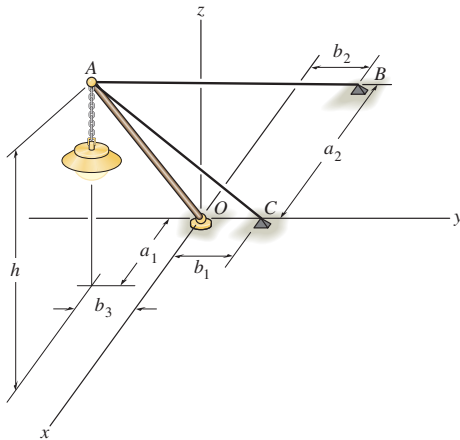


Abbildung A 3.50/3.51

***3.52** Bestimmen Sie bei Gleichgewicht die Zugkräfte in den Seilen AB , AC und AD , welche die Kiste mit dem Gewicht G halten.

Gegeben: $G = 300 \text{ N}$, $h_1 = 3 \text{ m}$, $h_2 = 4 \text{ m}$, $a_1 = 6 \text{ m}$, $a_2 = 3 \text{ m}$, $b_1 = 2 \text{ m}$, $b_2 = 4,5 \text{ m}$, $b_3 = 1,5 \text{ m}$

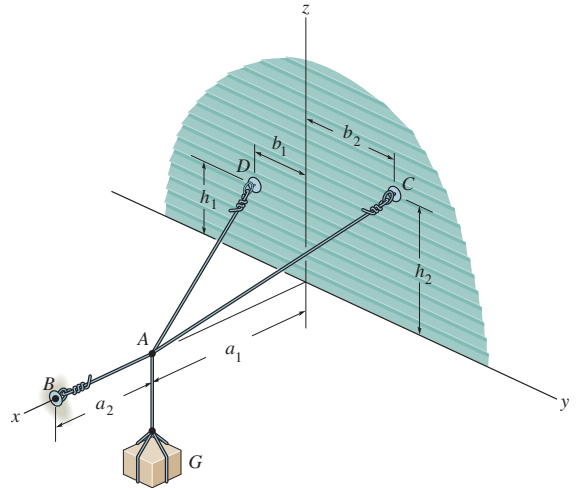


Abbildung A 3.52

3.53 Der Kranarm trägt einen Kübel mit Inhalt und einer Gesamtmasse m . Bestimmen Sie die Kräfte in den Stützen AD und AE und die Zugspannung im Seil AB im Gleichgewicht. Die Kräfte in den Stützen verlaufen jeweils entlang ihrer Achse.

Gegeben: $m = 300 \text{ kg}$, $h_1 = 6 \text{ m}$, $h_2 = 7,25 \text{ m}$, $a_1 = 2 \text{ m}$, $a_2 = 2 \text{ m}$, $b_1 = 3 \text{ m}$

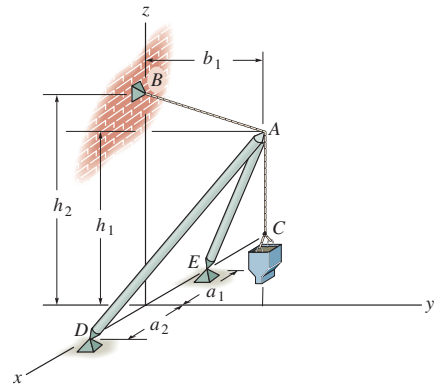


Abbildung A 3.53

3.54 Bestimmen Sie die zum Heben der Zugmaschine erforderliche Kraft in jedem Seil. Ihre Masse beträgt m .

Gegeben: $m = 8 \text{ Mg}$, $h = 3 \text{ m}$, $a_1 = 2 \text{ m}$, $a_2 = 1 \text{ m}$,
 $b_1 = 1,25 \text{ m}$, $b_2 = 1,25 \text{ m}$

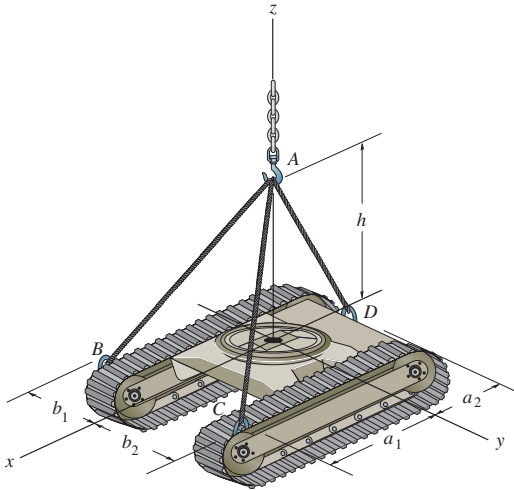


Abbildung A 3.54

3.55 Bestimmen Sie die Kräfte längs der Achsen der drei Stützen, die den Klotz mit der Masse m halten.

Gegeben: $m = 500 \text{ kg}$, $h = 2,5 \text{ m}$, $a_1 = 0,75 \text{ m}$,
 $a_2 = 1,25 \text{ m}$, $b_1 = 3 \text{ m}$, $b_2 = 2 \text{ m}$

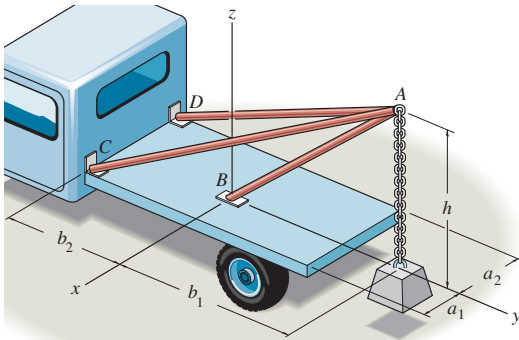


Abbildung A 3.55

***3.56** Der Blumentopf mit der Masse m wird von drei Seilen in A gehalten. Bestimmen Sie die Seilkräfte, wenn Gleichgewicht vorliegt.

Gegeben: $m = 50 \text{ kg}$, $d = 2,5 \text{ m}$, $a_1 = 6 \text{ m}$, $a_2 = 6 \text{ m}$,
 $b_1 = 2 \text{ m}$, $b_2 = 2 \text{ m}$, $h = 3 \text{ m}$

3.57 Bestimmen Sie die Höhe d des Seils AB, so dass die Kräfte in den Seilen AD und AC halb so groß sind wie die Kraft in Seil AB. Wie groß ist dann die Kraft in jedem Seil? Der Blumentopf hat die Masse m .

Gegeben: $m = 50 \text{ kg}$, $a_1 = 6 \text{ m}$, $a_2 = 6 \text{ m}$, $b_1 = 2 \text{ m}$,
 $b_2 = 2 \text{ m}$, $h = 3 \text{ m}$

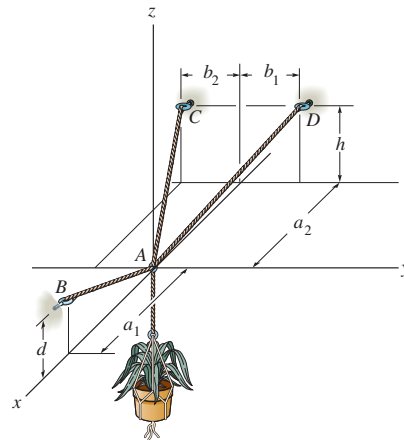


Abbildung A 3.56/3.57

3.58 Der Kronleuchter hat das Gewicht G und wird von drei Drähten gehalten. Bestimmen Sie für Gleichgewicht die Kraft in jedem Draht.

Gegeben: $G = 400 \text{ N}$, $R = 0,3 \text{ m}$, $h = 0,72 \text{ m}$,
 $\alpha = 90^\circ$, $\beta = 135^\circ$

3.59 Jeder Draht trägt maximal $F_{\max}$, bevor er reißt. Bestimmen Sie das größtmögliche Gewicht des Kronleuchters in der dargestellten Position.

Gegeben: $F_{\max} = 600 \text{ N}$, $R = 0,3 \text{ m}$, $h = 0,72 \text{ m}$, $\alpha = 90^\circ$, $\beta = 135^\circ$

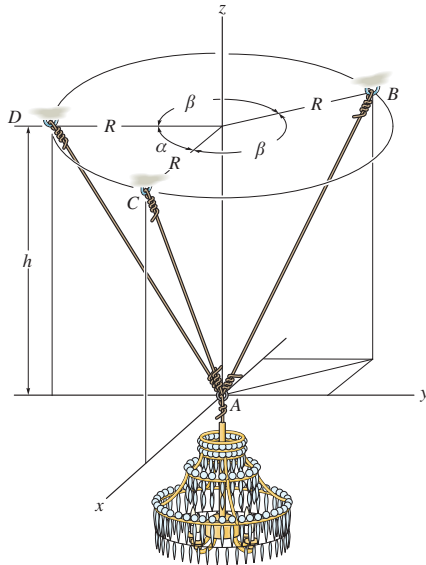


Abbildung A 3.58/3.59

***3.60** Drei Seile tragen den Ring mit dem Gewicht G . Bestimmen Sie für den Gleichgewichtsfall die Zugkraft in jedem Seil.

Gegeben: $G = 900 \text{ N}$, $R_1 = 2 \text{ m}$, $R_2 = 3 \text{ m}$, $h = 4 \text{ m}$, $\alpha = 120^\circ$

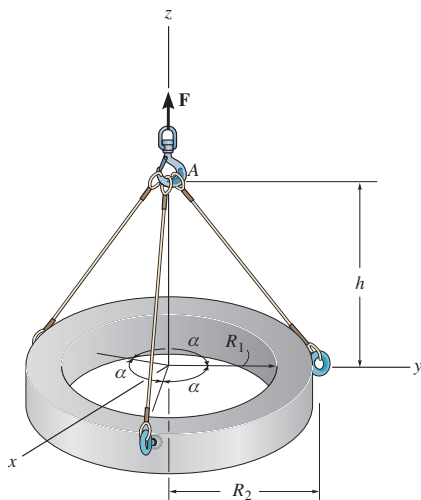


Abbildung A 3.60

3.61 Der Zylinder mit der Masse m wird von drei Ketten getragen. Bestimmen Sie jede Kettenkraft im Gleichgewicht.

Gegeben: $m = 80 \text{ kg}$, $r = 1 \text{ m}$, $d = 1 \text{ m}$, $\alpha = 135^\circ$, $\beta = 90^\circ$

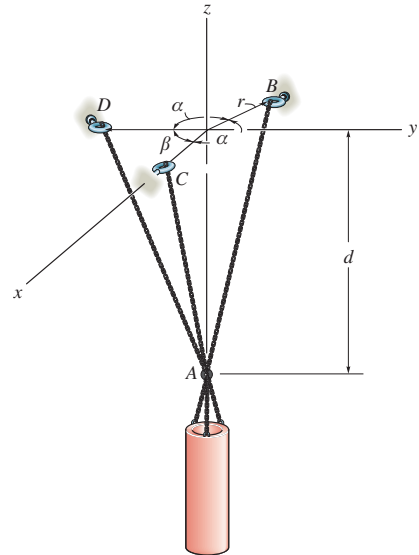


Abbildung A 3.61

3.62 Ein Stift ruht auf einer Feder in einem glatten Rohr. Wenn die Feder auf die Länge s zusammengedrückt wird, übt die Feder eine nach oben gerichtete Kraft F auf den Stift aus. Bestimmen Sie den Befestigungspunkt $A(x, y, 0)$ des Seils PA , so dass die Zugkraft in den Seilen PB und PC gleich F_{PB} bzw. F_{PC} ist.

Gegeben: $s = 0,15 \text{ m}$, $F = 60 \text{ N}$, $F_{PB} = 30 \text{ N}$, $F_{PC} = 50 \text{ N}$, $a = 0,3 \text{ m}$, $b_1 = 0,4 \text{ m}$, $b_2 = 0,2 \text{ m}$

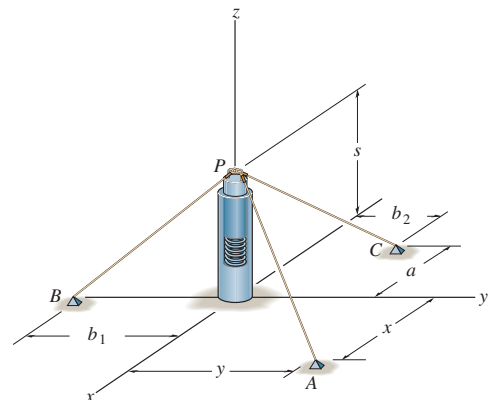


Abbildung A 3.62

3.63 Bestimmen Sie die zum Tragen der Plattform mit dem Gewicht G erforderliche Kraft in jedem Seil.

Gegeben: $d = 2 \text{ m}$, $G = 17\,500 \text{ N}$, $a = 2 \text{ m}$,
 $b = 1,5 \text{ m}$, $c = 1 \text{ m}$, $h = 5 \text{ m}$

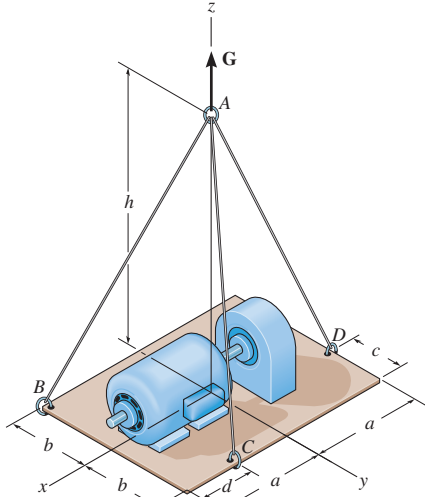


Abbildung A 3.63

* **3.64** Eine Kugel mit dem Gewicht G ist mit drei Federn am horizontalen Ring aufgehängt. Jede Feder hat die ungedehnte Länge l_0 und die Steifigkeit k . Bestimmen Sie für den Gleichgewichtsfall den vertikalen Abstand h vom Ring zum Punkt A.

Gegeben: $G = 400 \text{ N}$, $k = 1\,000 \text{ N/m}$, $\alpha = 120^\circ$,
 $R = 0,5 \text{ m}$, $l_0 = 0,5 \text{ m}$

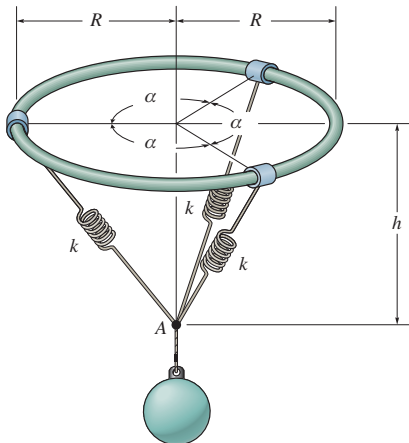


Abbildung A 3.64

3.65 Bestimmen Sie die zum Tragen der Kiste der Masse m erforderliche Zugkraft in den Seilen OD und OB und der Stütze OC . Die Feder OA hat eine ungedehnte Länge l_0 und die Steifigkeit k_{OA} . Die Wirkungslinie der Kraft in der Stütze verläuft entlang der Achse der Stütze.

Gegeben: $m = 50 \text{ kg}$, $l_0 = 0,8 \text{ m}$, $k_{OA} = 1,2 \text{ kN/m}$,
 $h_1 = 4 \text{ m}$, $h_2 = 3 \text{ m}$, $h_3 = 4 \text{ m}$, $a_1 = 2 \text{ m}$, $a_2 = 2 \text{ m}$,
 $b = 4 \text{ m}$, $c = 1 \text{ m}$

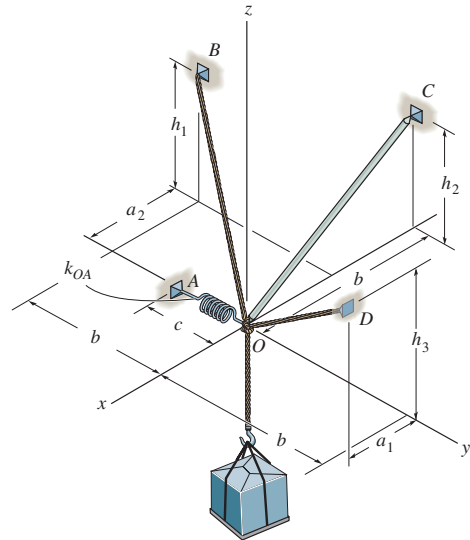


Abbildung A 3.65

Vermischte Aufgaben

3.66 Das Rohr wird vom Schraubstock gehalten. Die Schraube greift mit einer Kraft F in der dargestellten Richtung am Rohr an. Bestimmen Sie die Kräfte F_A und F_B , welche die glatten Kontakte in den Punkten A und B auf das Rohr ausüben.
Gegeben: $F = 250 \text{ N}$, $\alpha = 30^\circ$, $\tan \beta = \frac{3}{4}$

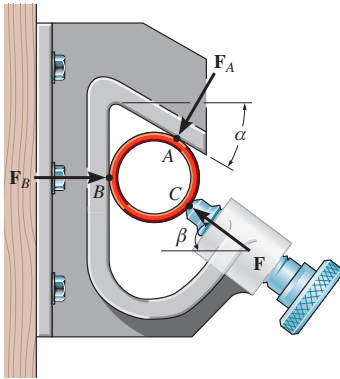


Abbildung A 3.66

3.67 Wenn y gleich null ist, beträgt die Kraft in den Federn F_0 . Bestimmen Sie den Betrag der aufgebrauchten vertikalen Kräfte F und $-F$, so dass Punkt A von Punkt B die Strecke y entfernt ist. Die Enden der Seile CAD und CBD sind an den Ringen in C und D angebracht.

Gegeben: $F_0 = 300 \text{ N}$, $k = 400 \text{ kN/m}$, $y = 0,2 \text{ m}$, $\alpha = 0,2 \text{ m}$

***3.68** Wenn y gleich null ist, werden die Federn um s gedehnt. Bestimmen Sie den Abstand y , wenn wie dargestellt die Kraft F an den Punkten A und B angreift. Die Enden der Seile CAD und CBD sind an den Ringen in C und D angebracht.

Gegeben: $F = 300 \text{ N}$, $k = 400 \text{ kN/m}$, $s = 0,15 \text{ m}$, $\alpha = 0,2 \text{ m}$

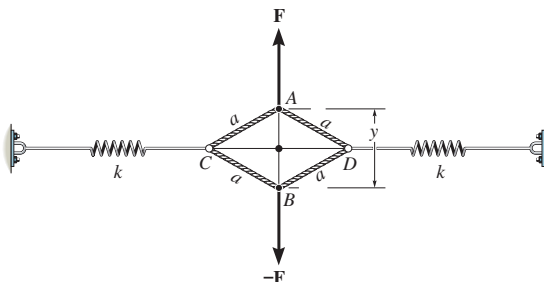


Abbildung A 3.67/3.68

3.69 Romeo möchte mit konstanter Geschwindigkeit am Seil, das in Punkt A angeknüpft ist, zu Julia hinaufklettern. Jeder der drei Seilabschnitte hält eine maximale Kraft $F_{\max}$. Kann Romeo mit der Masse m_R das Seil heraufklettern? Wenn dies der Fall ist, kann er dann mit seiner Julia mit der Masse m_J auch wieder mit konstanter Geschwindigkeit herunterklettern?
Gegeben: $F_{\max} = 2 \text{ kN}$, $m_R = 65 \text{ kg}$, $m_J = 60 \text{ kg}$, $\alpha = 60^\circ$

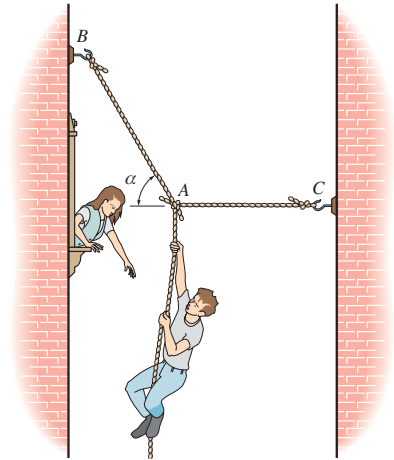


Abbildung A 3.69

■ 3.70 Bestimmen Sie die Beträge der Kräfte F_1 , F_2 und F_3 , die notwendig sind, um die Kraft F im Gleichgewicht zu halten.
Gegeben: $F = \{-9\mathbf{i} - 8\mathbf{j} - 5\mathbf{k}\} \text{ kN}$, $\alpha_1 = 60^\circ$, $\alpha_2 = 30^\circ$, $\beta_1 = 60^\circ$, $\beta_2 = 60^\circ$, $\gamma = 135^\circ$, $P(4 \text{ m}, 4 \text{ m}, -2 \text{ m})$

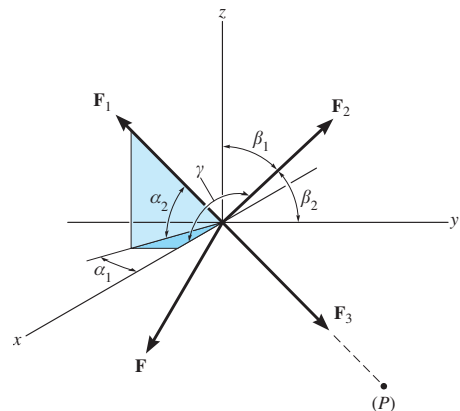


Abbildung A 3.70

3.71 Der Mann versucht, den Baumstamm in C mit Hilfe der drei Stricke zu ziehen. Bestimmen Sie die Richtung θ , in die er mit der Kraft F an seinem Seil ziehen sollte, so dass die Kraft auf den Baumstamm maximal wird. Wie groß ist diese Kraft? Bestimmen Sie auch die Richtung, in die er ziehen sollte, damit die Kraft im an B befestigten Seil maximal wird. Wie groß ist diese Maximalkraft?

Gegeben: $F = 400 \text{ N}$, $\alpha = 150^\circ$

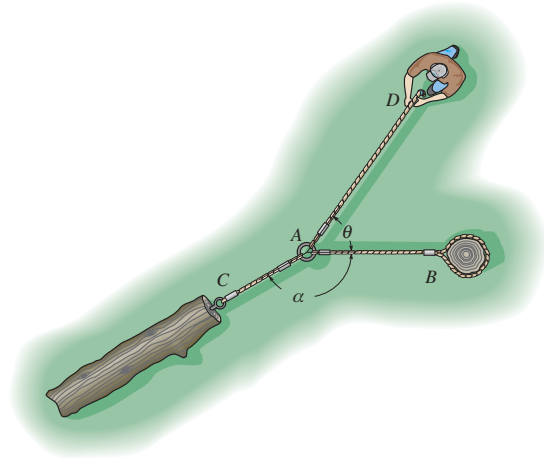


Abbildung A 3.71

***■ 3.72** An einem Ring vernachlässigbarer Größe greift eine vertikale Kraft F an. Bestimmen Sie die erforderliche Länge l der Schnur AC , so dass die Zugkraft in AC gerade F_{AC} beträgt. Wie groß ist außerdem die Kraft in der Schnur AB ? *Hinweis:* Bestimmen Sie den erforderlichen Befestigungswinkel θ mit Hilfe der Gleichgewichtsbedingung, bestimmen Sie dann l trigonometrisch aus dem Dreieck ABC .

Gegeben: $F = 200 \text{ N}$, $F_{AC} = 160 \text{ N}$, $\alpha = 40^\circ$, $a = 0,2 \text{ m}$

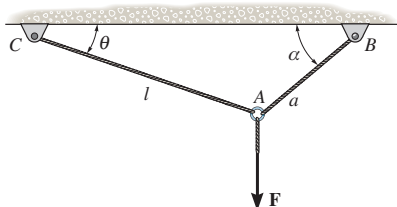


Abbildung A 3.72

3.73 Bestimmen Sie das maximal mögliche Gewicht G des Motors, ohne dass die Zugkraft F_{AB} in Kette AB und F_{AC} in Kette AC überschritten wird.

Gegeben: $F_{AB} = 900 \text{ N}$, $F_{AC} = 960 \text{ N}$, $\alpha = 30^\circ$

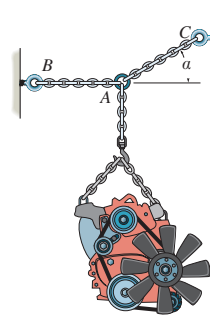


Abbildung A 3.73

3.74 Bestimmen Sie die zum Tragen der Last G erforderliche Kraft in jedem Seil.

Gegeben: $G = 500 \text{ N}$, $h = 0,8 \text{ m}$, $a_1 = 0,2 \text{ m}$, $a_2 = 0,2 \text{ m}$, $b_1 = 0,6 \text{ m}$, $b_2 = 0,6 \text{ m}$

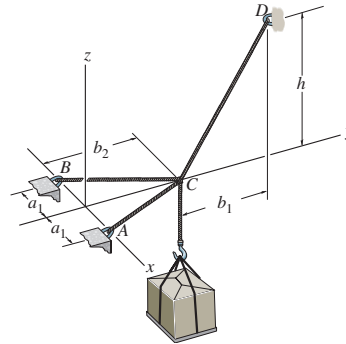


Abbildung A 3.74

3.75 Am Knoten eines räumlichen Fachwerks greifen vier Kräfte an. Stab OA liegt in der x - y -Ebene, Stab OB in der y - z -Ebene. Bestimmen Sie für das Gleichgewicht des Knotens die Kraft in jedem Stab.

Gegeben: $F_4 = 200 \text{ N}$, $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 40^\circ$

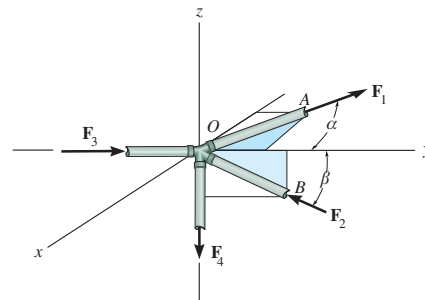


Abbildung A 3.75