Manfred Albach

Grundlagen der Elektrotechnik 1

Erfahrungssätze, Bauelemente, Gleichstromschaltungen

ein Imprint von Pearson Education
München • Boston • San Francisco • Harlow, England
Don Mills, Ontario • Sydney • Mexico City
Madrid • Amsterdam

Kapitel 3

Einfache elektrische Netzwerke

Bei der Analyse von elektronischen Schaltungen geht man in der Regel so vor, dass in einem ersten Schritt die realen Bauelemente durch einfache Ersatzschaltbilder (Modelle) ersetzt werden. Die Ableitung der Modellparameter haben wir bereits für einfache geometrische Anordnungen, z.B. bei der Berechnung der Kapazität eines Vielschichtkondensators kennen gelernt. Mit Hilfe von geeigneten Rechenverfahren und unter Zuhilfenahme vereinfachender Annahmen werden die im allgemeinen Fall komplizierten dreidimensionalen Feldverteilungen zurückgeführt auf die integralen Größen, wie z.B. R und C. Diese Modellierung der Komponenten ist im Wesentlichen Aufgabe der Bauelementehersteller, die die benötigten Informationen in Datenblättern zur Verfügung stellen. Die Aufgabe für den Schaltungsentwickler besteht darin, aus den bekannten Komponenten gezielt Netzwerke für bestimmte Zwecke zusammenzubauen.

Die Berechnung von Netzwerken spielt daher in der Elektrotechnik eine zentrale Rolle. Bevor wir uns mit dem einfachsten Fall der Gleichstromnetzwerke beschäftigen, sollen einige immer wiederkehrende Begriffe definiert werden.

Zweipole:

Unter einem Zweipol versteht man ein Bauelement mit zwei Anschlussklemmen. Für die Behandlung von Zweipolen in den Netzwerken ist nur noch ihr **Klemmenverhalten** (gemeint ist der Zusammenhang zwischen den Größen Strom und Spannung an dem betreffenden Bauelement) von Interesse, die praktische Realisierung durch eine dreidimensionale Anordnung und die ortsabhängige Verteilung der Feldgrößen spielen keine Rolle mehr. Die Beschreibung erfolgt durch einfache skalare Beziehungen zwischen den an den Klemmen zugänglichen Größen Strom und Spannung. Als Beispiel sei an den Kugelkondensator in Abb. 1.31 erinnert, der lediglich durch seine Kapazität (1.76) charakterisiert wird.

Schaltkreise:

Durch die Zusammenschaltung von Bauelementen entstehen elektrische Netzwerke (Schaltkreise). Zur vollständigen Beschreibung eines Netzwerks muss neben dem Klemmenverhalten aller Komponenten auch die Verknüpfung der Bauelemente untereinander bekannt sein. Die Zusammenschaltung bezeichnet man als **Topologie** bzw. **Schaltungstopologie**.

Schaltbilder:

Die grafische Darstellung von Netzwerken bezeichnet man als Schaltbilder. Zur Darstellung der Bauelemente werden die Schaltsymbole verwendet. Die leitende Verbindung zwischen den Bauelementen (in der Praxis z.B. durch dünne leitende Drähte realisiert) wird als idealer (widerstandsloser) Leiter angesehen und spielt bei der Schaltungsanalyse keine Rolle. Die einzelnen Verbindungen sollten möglichst geradlinig, kreuzungsfrei und ohne Richtungsänderungen dargestellt werden. Gleichzeitig sollte die Wirkungsrichtung bzw. die Signalflussrichtung den Normen entsprechend von links nach rechts oder von oben nach unten verlaufen.

3.1 Zählpfeile

Erinnern wir uns noch einmal an die Definition der elektrischen Spannung nach Gl. (1.30) als das Wegintegral der elektrischen Feldstärke

$$U_{12} = \varphi_e(\mathrm{P}_1) - \varphi_e(\mathrm{P}_2) = \int_{\mathrm{P}_1}^{\mathrm{P}_2} \vec{\mathbf{E}} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathbf{s}}$$

Die beiden Indizes bei der Spannung verdeutlichen die Richtung, in der die Feldstärke integriert wird. Wenden wir diese Beziehung auf die zylindrische Anordnung in der Abb. 2.16 an, dann wird die Feldstärke von einem in der Äquipotentialfläche φ_{e1} liegenden Punkt P_1 bis zu einem in der Äquipotentialfläche φ_{e2} liegenden Punkt P_2, d.h. in Richtung der x-Koordinate integriert. Die Spannung wird dann ebenfalls in der gleichen Richtung positiv gezählt und in einem Schaltbild mit einem Zählpfeil versehen. Eine spezielle Kennzeichnung der beiden Anschlussklemmen mit den Zahlen 1 und 2 ist dann nicht mehr notwendig. Ist der Wert der Spannung auf der rechten Seite der Abb. 3.1 positiv, dann stimmt die Richtung des elektrischen Feldes mit der Integrationsrichtung und damit auch mit der Zählrichtung für die Spannung überein, und der Pfeil zeigt von positiven Ladungen zu negativen Ladungen.

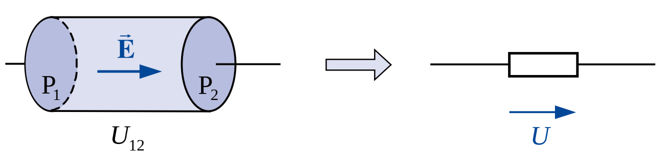

Abbildung 3.1: Kennzeichnung der Spannung durch Zählpfeile

Auf ähnliche Weise wird ein Zählpfeil für den Strom vereinbart. In Kap. 2.2 hatten wir bereits die Richtung der Stromdichte durch die Bewegungsrichtung der positiven Ladungsträger in Gl. (2.9) definiert. Den Strom erhält man nach Gl. (2.11), indem man das Skalarprodukt aus der gerichteten Stromdichte mit dem vektoriellen Flächenelement über die zu betrachtende Fläche integriert. Je nach Orientierung der vektoriellen Fläche ergeben sich unterschiedliche Vorzeichen für den Strom. Betrachten wir auch hier wieder die in der Abb. 2.16 dargestellte Anordnung. Nach Festlegung der Richtung von $d\vec{\mathbf{A}}$ kann dem Strom eindeutig ein Zählpfeil in diese Richtung zugeordnet werden (vgl. Abb. 3.2). Besitzt der Strom I auf der rechten Seite des Bildes einen positiven Wert, dann bewegen sich die positiven Ladungsträger in Richtung des vektoriellen Flächenelementes. Entsprechend bedeutet ein negativer Wert von I, dass sich die positiven Ladungsträger entgegen der Flächenorientierung bewegen.

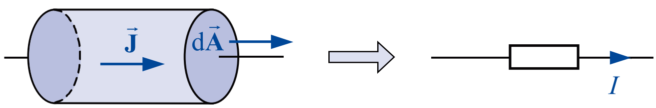

Abbildung 3.2: Kennzeichnung des Stromes durch Zählpfeile

Strom und Spannung sind skalare Größen. Dennoch werden ihnen in Schaltungen Pfeile zugeordnet. Diese Pfeile dienen der Zählweise und dürfen nicht mit Vektoren verwechselt werden.

Ein Spannungspfeil in Richtung der elektrischen Feldstärke zeigt positive Spannungen an. Ein Strompfeil in Bewegungsrichtung der positiven Ladungsträger zeigt positive Ströme an.

3.2 Spannungs- und Stromquellen

Zur Aufrechterhaltung eines Gleichstromes in einer Schaltung müssen Quellen vorhanden sein, die die von den Elektroden abfließenden Ladungsträger immer wieder nachliefern. Betrachten wir zunächst die Abb. 3.3, bei der sich auf den Platten eines Kondensators die Ladungen $\pm Q$ befinden. An den Kondensator wird ein Verbraucher, symbolisiert durch einen Widerstand, angeschlossen, an den die im Kondensator gespeicherte Energie abgegeben werden soll. Da die auf der negativ geladenen Platte befindlichen Elektronen durch die angeschlossenen Drähte und den Widerstand zur positiv geladenen Platte fließen können, wird die anfänglich vorhandene Kondensatorspannung stetig abnehmen. Die aus dem Kondensator entnommene Energie wird im Widerstand in Wärme umgewandelt[1].

[1] Strenggenommen wird bei diesem zeitabhängigen Vorgang auch ein geringer Teil der Energie durch Wellenausbreitung in den freien Raum abgestrahlt. Dieser Anteil tritt aber bei den im Folgenden behandelten Gleichstromnetzwerken nicht auf und wird daher auch nicht weiter betrachtet.

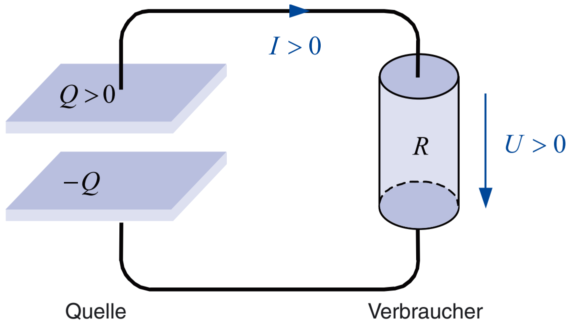

Abbildung 3.3: Spannungsquelle und Verbraucher

Der Kondensator in der vorliegenden Anordnung ist nur bedingt als Spannungsquelle einsetzbar. Einerseits nimmt seine Spannung zeitlich ab, und andererseits kann er nur für einen begrenzten Zeitabschnitt Leistung abgeben, da lediglich die zuvor im elektrischen Feld zwischen den Kondensatorplatten gespeicherte Energie zur Verfügung steht. Der üblicherweise verwendete Begriff Quelle ist etwas irreführend, da keine Energieerzeugung, sondern immer nur Energiewandlung stattfindet. In einem Akkumulator wird beispielsweise chemische Energie in elektrische Energie umgewandelt, im betrachteten Beispiel wird die elektrische Energie des Kondensators in Wärmeenergie am Widerstand umgewandelt.

Von einer idealen Gleichspannungsquelle wird jedoch erwartet, dass sie die Spannung unabhängig von dem Belastungswiderstand zeitlich konstant hält. Eine Batterie bzw. ein Akkumulator[2] mit hinreichend großer Energiereserve kommt dieser Situation schon sehr nahe. Mit elektronischen Schaltungen, die die vom 230V-Netz angebotene Energie in eine Gleichspannung umwandeln, lassen sich nahezu ideale Spannungsquellen realisieren. Für eine solche ideale Spannungsquelle gilt:

- die Ausgangsspannung ist unabhängig von dem angeschlossenen Netzwerk,
- der Strom hängt von dem angeschlossenen Netzwerk ab und stellt sich z.B. im Falle eines ohmschen Widerstandes entsprechend der Beziehung $I = U/R$ ein.

Ein völlig anderes Verhalten zeigen die Stromquellen, die ebenfalls mit Hilfe elektronischer Schaltungen realisiert werden können. Für eine ideale Stromquelle gilt:

- der Ausgangsstrom ist unabhängig von dem angeschlossenen Netzwerk,
- die Ausgangsspannung hängt von dem angeschlossenen Netzwerk ab und stellt sich im Falle eines ohmschen Widerstandes entsprechend der Beziehung $U = RI$ ein.

[2] Ein Akkumulator wird genauso wie ein Kondensator durch seine Kapazität gekennzeichnet. Allerdings hat dieser Begriff beim Akkumulator eine etwas andere Bedeutung. Er bezeichnet nicht das Verhältnis von aufgenommener Ladung zu angelegter Spannung [As/V] entsprechend Gl. (1.70), sondern den über einen Zeitraum zur Verfügung stehenden Entladestrom. Die Kapazität des Akkumulators wird daher in Ah oder mAh angegeben. Die Bezeichnung h steht als Abkürzung für Stunde (*hour*).

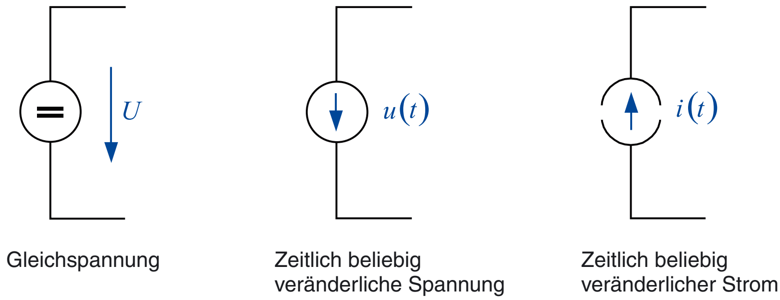

Abbildung 3.4: Ideale Spannungs- und Stromquellen

Für die Spannungs- und Stromquellen werden die in der Abb. 3.4 dargestellten Symbole verwendet. Dabei sind auch bereits die Fälle dargestellt, bei denen Strom und Spannung zeitlich veränderlich sind.

3.3 Zählpfeilsysteme

In Abschnitt 3.1 haben wir bereits ein Zählpfeilsystem am ohmschen Widerstand (**Verbraucherzählpfeilsystem**) kennen gelernt (rechte Seite der Abb. 3.5), bei dem Strom und Spannung gleich gerichtet sind. Für $U > 0$ wird der in die positive Anschlussklemme hineinfließende Strom positiv gezählt. Für die Quellen verwendet man üblicherweise das **Generatorzählpfeilsystem**, bei dem Spannung und Strom entgegengesetzt gerichtet sind. Der aus der positiven Anschlussklemme herausfließende Strom wird positiv gezählt. Diese Festlegung ist angepasst an den physikalischen Hintergrund, dass der Generator (Quelle) die Energie liefert, während der Verbraucher die Energie aufnimmt.

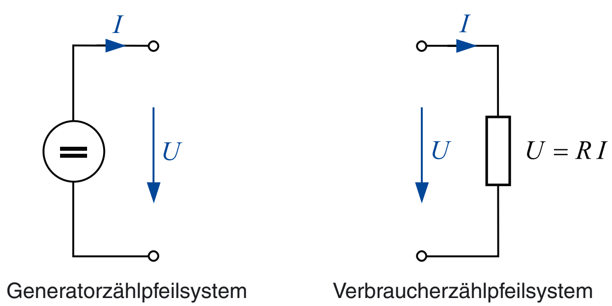

Abbildung 3.5: Generator- und Verbraucherzählpfeilsystem

3.4 Die Kirchhoff'schen Gleichungen

Eine der Hauptaufgaben der Netzwerkanalyse besteht darin, die Ströme und Spannungen an den einzelnen Zweipolen auszurechnen, sofern die verwendeten Bauelemente (Widerstände, Kondensatoren usw.), ihre Verknüpfungen untereinander sowie die Quellen innerhalb des Netzwerks bekannt sind. Betrachten wir das an eine Spannungsquelle angeschlossene, allein aus ohmschen Widerständen aufgebaute Netzwerk der Abb. 3.6, dann wird deutlich, dass zur Berechnung der gesuchten Größen das Ohm'sche Gesetz allein nicht ausreicht.[3] Zwar kann mit dem Ohm'schen Gesetz an jedem Widerstand der Strom durch die Spannung oder die Spannung durch den Strom ausgedrückt werden, dennoch bleibt an jedem Zweipol eine Größe unbestimmt. Dies gilt auch für den Zweipol mit der Spannungsquelle, in dem der Strom zunächst unbekannt ist.

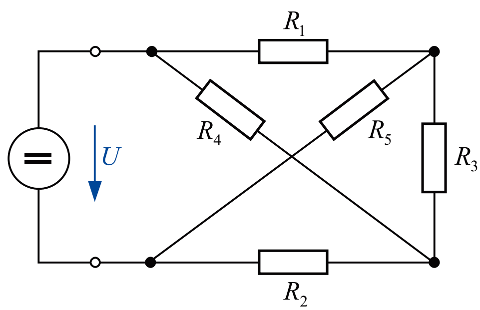

Abbildung 3.6: Einfaches Netzwerk

Zur allgemeinen Netzwerkanalyse werden offenbar weitere Bestimmungsgleichungen benötigt. Einen ersten Zusammenhang erhalten wir aus der Bedingung (1.22). Diese besagt, dass das Umlaufintegral der elektrischen Feldstärke entlang eines geschlossenen Weges verschwinden muss. Zur Verdeutlichung dieses Zusammenhangs betrachten wir eine beliebige **Masche** aus dem in Abb. 3.6 dargestellten Netzwerk. Nummeriert man die Verbindungspunkte in der in Abb. 3.7 angegebenen Weise, dann kann die Gl. (1.22) mit den Feldstärken folgendermaßen geschrieben werden

[3] **Vereinbarung:** Die schwarz ausgefüllten Markierungspunkte (*Knoten*) in dem Netzwerk zeigen an, dass die Leitungen an dieser Stelle elektrisch leitend miteinander verbunden sind, z.B. durch Zusammenschrauben oder Verlöten. Die Kreisringe markieren diejenigen Punkte im Netzwerk, zwischen denen die eingezeichnete Spannung gemessen wird.

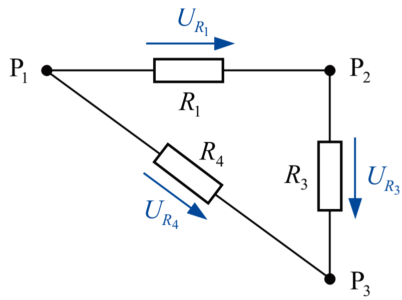

Abbildung 3.7: Maschenregel

$$\oint_C \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} = \int_{P_1}^{P_2} \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} + \int_{P_2}^{P_3} \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} + \int_{P_3}^{P_1} \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} = 0 \ . \tag{3.2}$$

Diese Gleichung lässt sich mit den in der Abb. 3.7 eingetragenen Spannungen und den ihnen willkürlich zugeordneten Zählpfeilen folgendermaßen schreiben

$$U_{R_1} + U_{R_3} - U_{R_4} = 0 \cdot \tag{3.3}$$

Verläuft der Integrationsweg $d\vec{\mathbf{s}}$ entgegen der willkürlich angenommenen Zählrichtung bei der Spannung, dann ist diese mit negativem Vorzeichen einzusetzen. Dieser hier an einem Beispiel gezeigte Zusammenhang wird als **Maschenregel** bezeichnet und lässt sich für jede geschlossene Masche in der allgemeinen Form

$$\sum_{Masche} U = 0 \tag{3.4}$$

darstellen. Damit gilt die Aussage:

Die Summe aller Spannungen beim Umlauf in einer geschlossenen Masche ist Null.

Spannungen, deren Zählpfeil in Umlaufrichtung (entgegen der Umlaufrichtung) verläuft, werden mit positivem (negativem) Vorzeichen eingesetzt.

Einen weiteren Zusammenhang erhalten wir aus dem Hüllflächenintegral der Stromdichte, das im stationären Strömungsfeld nach Gl. (2.13) verschwindet

$$\oiint_A \vec{\mathbf{J}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} = 0 \cdot \tag{3.5}$$

Zur Verdeutlichung dieses Zusammenhangs betrachten wir den in Abb. 3.8 dargestellten **Knoten** aus dem Netzwerk der Abb. 3.6. Die Gl. (3.5) besagt, dass im stationären Zustand die Zahl der Ladungsträger innerhalb des markierten Bereiches konstant sein muss, d.h. die Summe der zu dem Knoten hinfließenden Ladungsträger muss gleich sein zu der Summe der vom Knoten wegfließenden Ladungsträger.

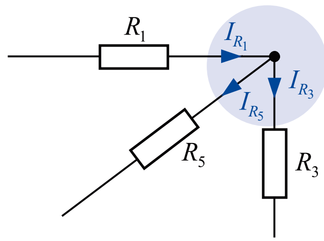

Abbildung 3.8: Knotenregel

Dieser Sachverhalt lässt sich mit den Strömen gemäß Abb. 3.8 und den ihnen zugeordneten Zählpfeilen folgendermaßen schreiben

$$I_{R_1} - I_{R_3} - I_{R_5} = 0$$

Die Zählrichtung für die Ströme durch die Widerstände R_1 und R_3 ist nicht mehr frei wählbar. Sie muss in Übereinstimmung mit den bereits festgelegten Zählpfeilen für die Spannungen in Abb. 3.7 entsprechend dem Verbraucherzählpfeilsystem festgelegt werden.

Der hier an einem Beispiel gezeigte Zusammenhang wird als **Knotenregel** bezeichnet und lässt sich für jeden Knoten in der allgemeinen Form

$$\sum_{Knoten} I = 0 \tag{3.7}$$

schreiben. Damit gilt die Aussage:

Die Summe aller zu einem Knoten hinfließenden Ströme ist gleich der Summe aller von dem Knoten wegfließenden Ströme.

Die beiden Gleichungen (3.4) und (3.7) werden als **Kirchhoff'sche Gleichungen** bezeichnet (nach Gustav Robert Kirchhoff, 1824-1887).

Der Begriff Knoten gilt nicht nur für die bisher betrachtete leitende Verbindung zwischen den Drähten entsprechend der Abb. 3.8, sondern er schließt, wie in Abb. 3.9 dargestellt, die Möglichkeit ein, einzelne Bauelemente oder auch größere Teile einer Schaltung als Bestandteile des Knotens anzusehen.

Die Knotenregel bezieht sich auch in diesem Fall auf alle durch die Hüllfläche in den Knoten hinein- bzw. aus dem Knoten herausfließenden Ströme. Mit den in Abb. 3.9 definierten Strömen erhält man z.B. die zur Gl. (3.6) identische Beziehung

$$I_{R_1} + I_{R_4} = I_{R_3} + I_{R_4} + I_{R_5}$$

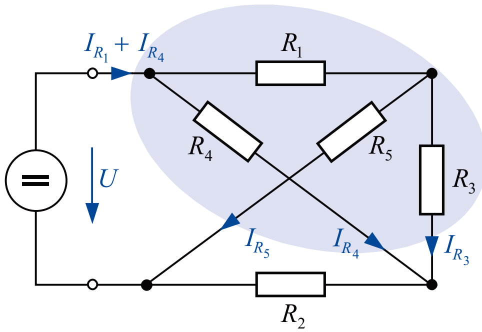

Abbildung 3.9: Zur Verallgemeinerung des Begriffes Knoten

Wir betrachten jetzt noch einmal die Abb. 3.5, wobei wir aber Generator und Verbraucher entsprechend Abb. 3.10 zusammenschalten.

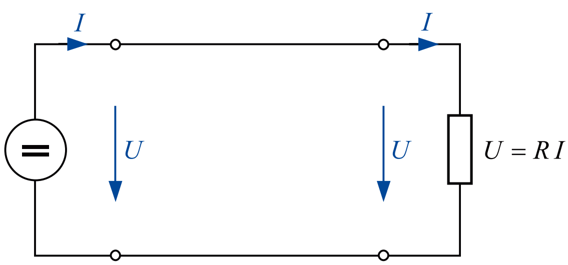

Abbildung 3.10: Zusammenspiel von Zählpfeilsystemen und Kirchhoff'schen Gleichungen

Der Maschenumlauf (3.4) liefert das richtige Ergebnis $U - U = 0$ und der Strom hat in der gesamten Masche die gleiche Zählrichtung, d.h. jeder beliebige grau hinterlegte und als Knoten deklarierte Bereich liefert entsprechend Gl. (3.7) das Ergebnis $I - I = 0$.

3.5 Einfache Widerstandsnetzwerke

In vielen Fällen kann die Netzwerkanalyse dadurch vereinfacht werden, dass einzelne Teile eines Netzwerks vorab zusammengefasst werden. Dabei muss lediglich darauf geachtet werden, dass sich das Klemmenverhalten des neuen vereinfachten Netzwerks gegenüber dem ursprünglichen Netzwerk nicht ändert, d.h. beim Anlegen der gleichen Spannung an die Klemmen muss in beiden Fällen der gleiche Strom fließen. Ähnlich wie bei der Zusammenschaltung von Kondensatoren in Kap. 1.18 wollen wir an dieser Stelle die beiden Möglichkeiten der Reihenschaltung (*Serienschaltung*) und Parallelschaltung von Widerständen untersuchen.

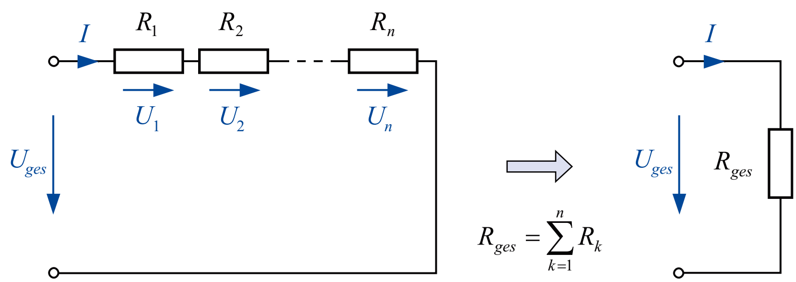

Abbildung 3.11: Reihenschaltung von Widerständen

Bei der in Abb. 3.11 dargestellten **Reihenschaltung** werden nach Gl. (3.7) alle Widerstände von dem gleichen Strom durchflossen. Entsprechend dem Maschenumlauf nach Gl. (3.4) setzt sich die gesamte an den Eingangsanschlüssen anliegende Spannung aus den Teilspannungen an den einzelnen Widerständen zusammen

$$U_{ges} \overset{(3.4)}{=} \sum_{k=1}^{n} U_k \overset{(2.29)}{=} \sum_{k=1}^{n} R_k\, I = R_{ges}\, I$$

Der Vergleich mit dem Netzwerk mit nur einem Gesamtwiderstand liefert unmittelbar das Ergebnis

$$\boxed{R_{ges} = \sum_{k=1}^{n} R_k} \,. \tag{3.10}$$

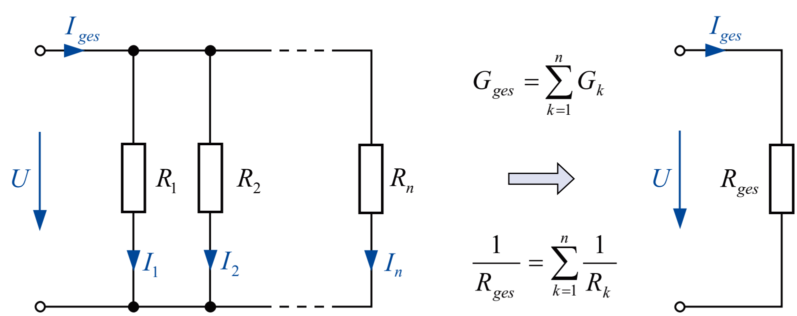

Abbildung 3.12: Parallelschaltung von Widerständen

Bei der **Parallelschaltung** ist die Spannung an allen Widerständen gleich groß und der gesamte Eingangsstrom setzt sich nach Gl. (3.7) aus den Strömen durch die einzelnen Widerstände zusammen

$$I_{ges} \overset{(3.7)}{=} \sum_{k=1}^{n} I_k \overset{(2.29)}{=} \sum_{k=1}^{n} \frac{U}{R_k} = U \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{R_k} = \frac{U}{R_{ges}} \,. \tag{3.11}$$

In diesem Fall liefert der Vergleich mit dem Ersatznetzwerk das Ergebnis

$$\frac{1}{R_{ges}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{R_k} . \tag{3.12}$$

Für den Sonderfall mit nur zwei parallel geschalteten Widerständen gilt dann

$$R_{ges} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} . \tag{3.13}$$

Ein weiterer Sonderfall ist die Parallelschaltung von n gleichen Widerständen. Der resultierende Gesamtwiderstand nimmt in diesem Fall den Wert

$$R_{ges} = \frac{R}{n} \tag{3.14}$$

an. Bei der Parallelschaltung ist die Verwendung der Leitwerte (2.32) sinnvoll, für die der Zusammenhang direkt aus Gl. (3.12) abgelesen werden kann

$$G_{ges} = \sum_{k=1}^{n} G_k . \tag{3.15}$$

Bei der Reihenschaltung von Widerständen addieren sich die Werte der einzelnen Widerstände, bei der Parallelschaltung berechnet sich der gesamte Leitwert aus der Summe der einzelnen Leitwerte.

In einem elektrischen Netzwerk können also in Reihe liegende Widerstände durch den nach Gl. (3.10) berechneten und parallel liegende Widerstände durch den nach Gl. (3.12) berechneten resultierenden Gesamtwiderstand ersetzt werden. Während bei der Reihenschaltung der Gesamtwiderstand stets größer als der größte Einzelwiderstand ist, gilt für die Parallelschaltung, dass der Gesamtwiderstand stets kleiner als der kleinste Einzelwiderstand ist.

Beispiel 3.1: Widerstand einer Hohlkugel

In Kap. 2.6 haben wir den exakten Widerstand einer Hohlkugel mit Hilfe der Feldverteilung innerhalb der Hohlkugel berechnet. In diesem Beispiel betrachten wir eine alternative Möglichkeit zur Berechnung des gleichen Ergebnisses. Da der Strom nach Voraussetzung radialsymmetrisch von der inneren zur äußeren Kugelschale fließt, können wir uns die gesamte Hohlkugel aufgebaut denken aus einer Reihenschaltung von übereinander liegenden dünnen Hohlkugeln.

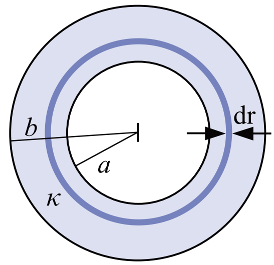

Abbildung 3.13: Widerstand einer Hohlkugel

Betrachten wir die markierte Kugelschale in Abb. 3.13 mit der elementaren Dicke dr und der Querschnittsfläche $4\pi\,\mathrm{r}^2$, dann besitzt diese nach Gl. (2.27) den elementaren Widerstand

$$\mathrm{d}R = \frac{\mathrm{dr}}{\kappa\, 4\pi\, \mathrm{r}^2}\,. \tag{3.16}$$

Die Krümmung spielt wegen der kleinen Dicke keine Rolle mehr. Gemäß der Reihenschaltung der übereinander liegenden dünnen Hohlkugeln müssen deren Widerstände nach Gl. (3.10) addiert bzw. im Grenzübergang $\mathrm{dr} \to 0$ von $\mathrm{r} = a$ bis $\mathrm{r} = b$ integriert werden. Diese Rechnung liefert das mit Gl. (2.36) übereinstimmende Ergebnis

$$R = \int_a^b \mathrm{d}R = \frac{1}{4\pi\,\kappa}\int_a^b \frac{\mathrm{dr}}{\mathrm{r}^2} = \frac{1}{4\pi\,\kappa}\,\frac{b-a}{ba}\,. \tag{3.17}$$

3.5.1 Der Spannungsteiler

Die Reihenschaltung von Widerständen kann benutzt werden, um eine gegebene Spannung U mit hoher Genauigkeit in kleinere Teilspannungen umzuwandeln. Für den fest eingestellten Spannungsteiler in Abb. 3.14 wollen wir das Spannungsverhältnis U_1/U_2 sowie das Verhältnis von Ausgangsspannung zu Eingangsspannung U_2/U bestimmen.

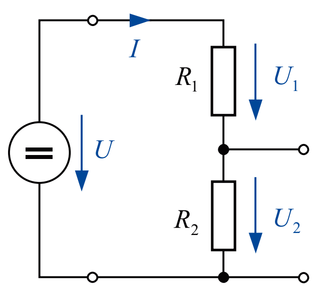

Abbildung 3.14: Schaltung zur Spannungsteilung

Die Schaltung besteht aus einer einzigen Masche, in der überall der gleiche Strom I fließt. Aus dem Ohm'schen Gesetz (2.29) und mit der Maschenregel (3.4) erhält man die Beziehungen

$$U_1 = R_1 I, \quad U_2 = R_2 I \quad \text{und} \quad U = U_1 + U_2 = (R_1 + R_2) I, \tag{3.18}$$

mit deren Hilfe die gesuchten Spannungsverhältnisse durch Quotientenbildung direkt angegeben werden können

$$\boxed{\frac{U_1}{U_2} = \frac{R_1}{R_2}} \quad \text{und} \quad \boxed{\frac{U_2}{U} = \frac{R_2}{R_1 + R_2}}\,. \tag{3.19}$$

Aus der Gl. (3.19) lässt sich die Schlussfolgerung ziehen:

Fließt der gleiche Strom durch mehrere in Reihe geschaltete Widerstände, dann stehen die Teilspannungen im gleichen Verhältnis wie die Teilwiderstände, an denen sie abfallen.

Die an den Widerständen in Wärme umgewandelte Leistung berechnet sich nach Gl. (2.49) aus dem Produkt von Strom und Spannung. Infolge des gleichen Stromes stehen die Leistungen an den Widerständen im gleichen Verhältnis zueinander wie die Spannungen und nach Gl. (3.19) auch wie die Widerstände.

Die an einem Widerstand entstehende Teilspannung wird als **Spannungsabfall** bezeichnet. Dieser Begriff lässt sich mit Hilfe der Abb. 3.15 leicht veranschaulichen. Definiert man das Potential am Minusanschluss der Spannungsquelle in Abb. 3.14 als Bezugswert $\varphi_e = 0$, dann besitzt das Potential am positiven Anschluss den Wert $\varphi_e = U$. Mit einem ortsunabhängigen Feldstärkeverlauf innerhalb der Widerstände nimmt das Potential linear ab und man erhält entlang der Reihenschaltung den in Abb. 3.15 für ein angenommenes Widerstandsverhältnis dargestellten Potentialverlauf.

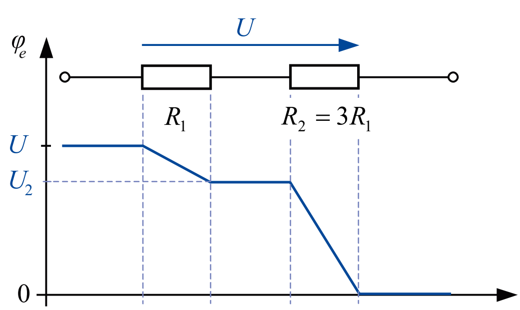

Abbildung 3.15: Potentialverlauf an einer Reihenschaltung

3.5.2 Der belastete Spannungsteiler

Die Spannung an dem Schleifkontakt eines Potentiometers soll gemäß Abb. 3.16 mit einem realen Spannungsmessgerät (*Voltmeter*) gemessen werden. Dabei ist zu beachten, dass fast alle Spannungsmessgeräte von einem kleinen Strom durchflossen werden, der die in Gl. (3.19) berechnete Spannungsteilung beeinflusst und das Messergebnis verfälscht. Diesen Einfluss können wir erfassen, indem wir das reale Messgerät durch ein ideales Messgerät mit unendlich großem Innenwiderstand und zusätzlich einen parallel geschalteten Widerstand R_M ersetzen.

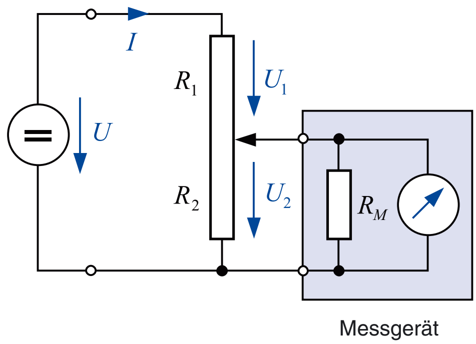

Abbildung 3.16: Belasteter Spannungsteiler

Die Berechnung der resultierenden Spannung U_2 wird wesentlich vereinfacht, wenn wir die Parallelschaltung der beiden Widerstände R_2 und R_M durch einen neuen Widerstand R_{par} ersetzen und die Spannung U_2 aus der Reihenschaltung von R_1 und R_{par} bestimmen

$$R_{par} \overset{(3.13)}{=} \frac{R_2 \, R_M}{R_2 + R_M} \qquad \to \qquad \frac{U_2}{U} \overset{(3.19)}{=} \frac{R_{par}}{R_1 + R_{par}} = \frac{R_2 \, R_M}{R_1 \left(R_2 + R_M\right) + R_2 \, R_M} \,. \tag{3.20}$$

Zur Darstellung dieses Ergebnisses werten wir ein Zahlenbeispiel aus. Der Gesamtwiderstand des Potentiometers soll $R_1 + R_2 = 10\text{k}\Omega$ betragen. In Abhängigkeit von der Position des Schleifkontaktes durchläuft der Widerstand R_2 den Wertebereich $0 \le R_2 \le 10\text{k}\Omega$. Die Abb. 3.17 zeigt das Spannungsverhältnis (3.20) als Funktion des Widerstandes R_2. Die Gerade entspricht der Gl. (3.19), d.h. dem Sonderfall $R_M \to \infty$. Mit kleiner werdendem Widerstand R_M geht die Linearität zwischen der Position des Schleifkontaktes und der Ausgangsspannung U_2 mehr und mehr verloren. Ideal wäre also ein Voltmeter mit einem unendlich großen Innenwiderstand.

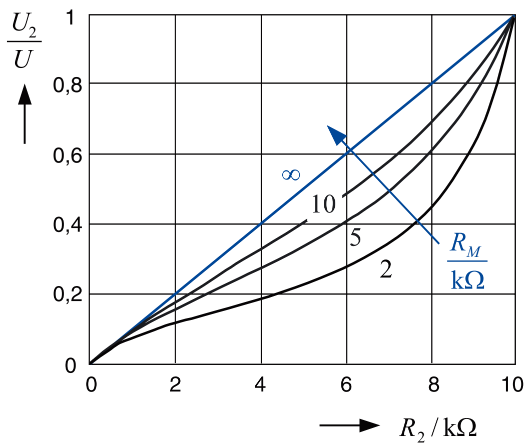

Abbildung 3.17: Ausgangsspannung am belasteten Spannungsteiler

3.5.3 Messbereichserweiterung eines Spannungsmessgerätes

Ein Anwendungsbeispiel für den Spannungsteiler ist die Messbereichserweiterung eines Voltmeters. Soll mit dem Messgerät in Abb. 3.18 eine Spannung U gemessen werden, die die maximal zulässige Spannung am Voltmeter $U_{\max}$ überschreitet, dann kann die zu messende Spannung mit einem Vorwiderstand R_V heruntergeteilt werden.

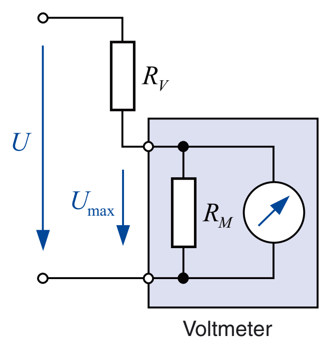

Abbildung 3.18: Voltmeter mit Vorwiderstand

Der Wert des Vorwiderstandes kann mit Hilfe der Gl. (3.19) berechnet werden

$$\frac{U_{\max}}{U} = \frac{R_M}{R_V + R_M} \quad \rightarrow \quad R_V = \left(\frac{U}{U_{\max}} - 1\right) R_M \,. \tag{3.21}$$

Beispiel 3.2: Zahlenbeispiel

Ein Voltmeter mit einem Innenwiderstand $R_M = 10\text{k}\Omega$ hat einen Messbereich von maximal 10 V. Welcher Vorwiderstand R_V ist erforderlich, um Spannungen bis 200 V messen zu können?

Aus der Gl. (3.21) folgt unmittelbar das Ergebnis

$$R_V = \left(\frac{200}{10} - 1\right) 10\text{k}\Omega = 190\text{k}\Omega \,. \tag{3.22}$$

3.5.4 Der Stromteiler

Zur Aufteilung eines Gesamtstromes in mehrere Teilströme werden Widerstände parallel geschaltet. Für die Schaltung in Abb. 3.19 wollen wir das Verhältnis I_1/I_2 sowie das Verhältnis von Ausgangsstrom zu Quellenstrom I_2/I bestimmen.

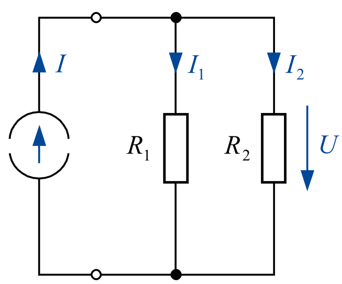

Abbildung 3.19: Schaltung zur Stromteilung

Mit der gleichen Spannung an den beiden parallel liegenden Widerständen gelten nach dem Ohm'schen Gesetz (2.29) die Beziehungen

$$I_1 = \frac{U}{R_1} \qquad \text{und} \qquad I_2 = \frac{U}{R_2} \,. \tag{3.23}$$

Mit der Knotenregel (3.7)

$$I = I_1 + I_2 = U\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) = U\,\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} \tag{3.24}$$

erhält man die gesuchten Verhältnisse durch Quotientenbildung

$$\boxed{\frac{I_1}{I_2} = \frac{R_2}{R_1} = \frac{G_1}{G_2}} \qquad \text{und} \qquad \boxed{\frac{I_2}{I} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} = \frac{G_2}{G_1 + G_2}} \,. \tag{3.25}$$

Liegt die gleiche Spannung an mehreren parallel geschalteten Widerständen, dann stehen die Ströme im gleichen Verhältnis wie die Leitwerte, die sie durchfließen.

Die Leistungen an den Widerständen verhalten sich wegen der gleichen Spannung wie die Ströme durch die Widerstände und stehen nach Gl. (3.25) im gleichen Verhältnis wie die Leitwerte.

3.5.5 Messbereichserweiterung eines Strommessgerätes

Zur Messung eines Stromes wird das Messgerät (*Amperemeter*) in den Strompfad geschaltet, sein Innenwiderstand R_M sollte daher möglichst gering sein, um das Messergebnis nur wenig zu beeinflussen. Soll ein Strom gemessen werden, der den maximal zulässigen Bereich des Amperemeters $I_{\max}$ überschreitet, dann kann der Gesamtstrom I durch einen parallel geschalteten Widerstand (*shunt*) heruntergeteilt werden.

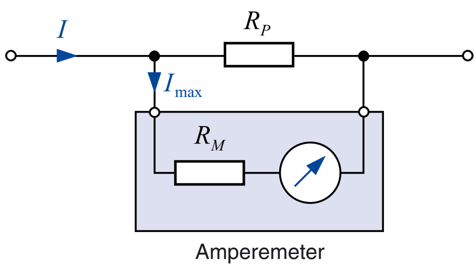

Abbildung 3.20: Amperemeter mit Parallelwiderstand

Der Wert des Parallelwiderstandes kann mit Hilfe der Gl. (3.25) berechnet werden

$$\frac{I_{\max}}{I} = \frac{R_P}{R_P + R_M} \quad \rightarrow \quad R_P = \frac{I_{\max}}{I - I_{\max}} R_M \,. \tag{3.26}$$

Beispiel 3.3: Zahlenbeispiel

Ein Amperemeter mit einem Innenwiderstand von $R_M = 5\Omega$ hat einen Messbereich von maximal 100 mA. Welcher Parallelwiderstand R_P ist erforderlich, um Ströme bis 1 A messen zu können?

Aus der Gl. (3.26) folgt unmittelbar $R_P = R_M/9 \approx 0{,}55\Omega$.

3.6 Reale Spannungs- und Stromquellen

In der Abb. 3.4 haben wir die Schaltzeichen für *ideale* Spannungs- und Stromquellen definiert. Man kann sich jedoch leicht vorstellen, dass *reale* Quellen durch die alleinige Angabe des Spannungs- oder Stromwertes nach Abb. 3.4 nicht vollständig beschrieben werden können. Wird eine Spannungsquelle durch einen Verbraucher belastet, dann ruft der Strom innerhalb der Quelle, z.B. an den internen Anschlussleitungen, einen Spannungsabfall und damit Verluste hervor. Dieser Einfluss wird durch einen zur idealen **Quellenspannung** U_0 in Reihe liegenden **Innenwiderstand** R_i erfasst. In der Praxis kann die Beschreibung des Quellenverhaltens durch Ersatznetzwerke noch wesentlich komplizierter werden, insbesondere wenn zeitabhängige Ströme und Spannungen betrachtet werden, dies soll uns aber hier nicht weiter beschäftigen.

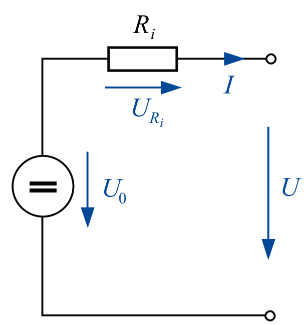

Abbildung 3.21: Spannungsquelle mit Innenwiderstand

Die Berücksichtigung der Verlustmechanismen führt auf das in Abb. 3.21 dargestellte einfache Ersatzschaltbild (Modell) einer Spannungsquelle. Wird kein Verbraucher angeschlossen, dann fließt kein Strom und die an den Anschlussklemmen vorliegende Spannung $U = U_L = U_0$ wird als **Leerlaufspannung** U_L (= Quellenspannung) bezeichnet.

Verbindet man die beiden Anschlussklemmen miteinander (**Kurzschluss**), dann wird der **Kurzschlussstrom**

$$I_K = U_0/R_i \tag{3.27}$$

nur durch den Innenwiderstand begrenzt. Die gesamte von der Quelle abgegebene Energie wird in diesem Fall am Innenwiderstand in Wärme umgewandelt, d.h. Spannungsquellen sollten nicht im Kurzschluss betrieben werden.

Die Spannungsquelle in der Abb. 3.21 wird durch Angabe von Leerlaufspannung $U_L = U_0$ und Innenwiderstand R_i oder durch Angabe von Leerlaufspannung $U_L = U_0$ und Kurzschlussstrom I_K eindeutig beschrieben.

Ein geladener Kondensator, der seine Energie gemäß Abb. 3.3 an einen Widerstand abgibt, verhält sich wie eine Spannungsquelle. Der Wert der Spannung ist nach Gl. (1.85) durch die im Kondensator gespeicherte *elektrische* Energie gegeben und der Strom durch einen angeschlossenen Widerstand stellt sich in Abhängigkeit von dem Wert des Widerstandes ein.

Im Gegensatz dazu werden wir in Kap. 5 als weiteres Bauelement die Spule kennen lernen, deren Verhalten dem einer Stromquelle vergleichbar ist. In diesem Fall wird der Strom durch die *magnetische* Energie in der Spule bestimmt und die Spannung stellt sich in Abhängigkeit von dem Wert eines angeschlossenen Widerstandes entsprechend dem Ohm'schen Gesetz ein.

Die Abb. 3.22 zeigt eine Stromquelle mit dem **Quellenstrom** I_0 und dem Innenwiderstand R_i. Da der Strom vorgegeben ist, muss immer ein geschlossener Strompfad vorhanden sein. Bei geöffneten Anschlussklemmen fließt der gesamte Strom I_0 durch den parallel zur Quelle liegenden Innenwiderstand und die von der Quelle abgegebene Energie wird an R_i in Wärme umgewandelt, d.h. Stromquellen sollten nicht im Leerlauf betrieben werden.

Der an den Anschlussklemmen im Kurzschlussbetrieb zur Verfügung stehende Strom $I = I_K = I_0$ wird als **Kurzschlussstrom** I_K (= Quellenstrom) bezeichnet.

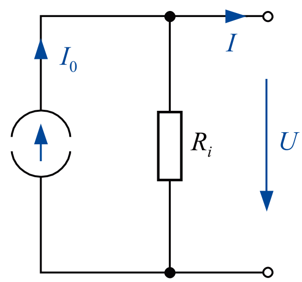

Abbildung 3.22: Stromquelle mit Innenwiderstand

Für die Leerlaufspannung gilt

$$U_L = I_0 R_i. \tag{3.28}$$

Bezüglich ihres Klemmenverhaltens können Spannungs- und Stromquelle ineinander umgerechnet werden. Dazu muss sichergestellt werden, dass beide Quellen die gleiche Leerlaufspannung und den gleichen Kurzschlussstrom aufweisen. Beide Forderungen werden erfüllt, wenn der Zusammenhang

$$U_0 = I_0 R_i \tag{3.29}$$

zwischen Quellenstrom und Quellenspannung gilt. Unter dieser Voraussetzung verhalten sich beide Quellen bezüglich ihrer Anschlussklemmen gleich und der Strom I durch einen beliebigen Verbraucher R hat in beiden Fällen den gleichen Wert $I = U_0/(R + R_i)$. Das Ergebnis lässt sich mit den beiden äquivalenten Schaltungen in Abb. 3.23 leicht bestätigen.

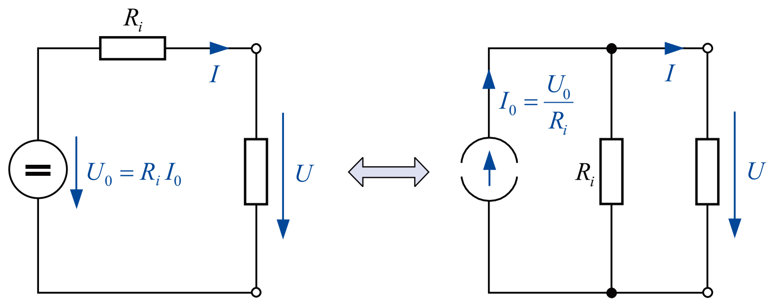

Abbildung 3.23: Äquivalente Quellen

3.7 Wechselwirkungen zwischen Quelle und Verbraucher

Die Zusammenschaltung von Quellen und Verbrauchern wirft naturgemäß einige Fragen auf. In den folgenden Abschnitten werden die Besonderheiten bei der Verwendung mehrerer Quellen betrachtet und die Fragen nach der maximal von einer Quelle zur Verfügung gestellten Leistung sowie nach dem Wirkungsgrad beantwortet.

3.7.1 Zusammenschaltung von Spannungsquellen

In vielen Anwendungen findet man Reihenschaltungen von Spannungsquellen zur Erhöhung der Gesamtspannung oder auch Parallelschaltungen zur Erhöhung des verfügbaren Stromes oder zur Erhöhung der Kapazität, z.B. um einen Verbraucher über einen längeren Zeitraum mit Energie versorgen zu können.

Die damit zusammenhängenden Probleme wollen wir an einem einfachen Beispiel diskutieren. Wir betrachten zwei Spannungsquellen mit den gleichen Innenwiderständen R_i, aber mit unterschiedlichem Ladezustand. Aus den beiden parallel geschalteten Quellen mit den Leerlaufspannungen U_{10} und U_{20} soll ein Verbraucher R mit Energie versorgt werden (Abb. 3.24).

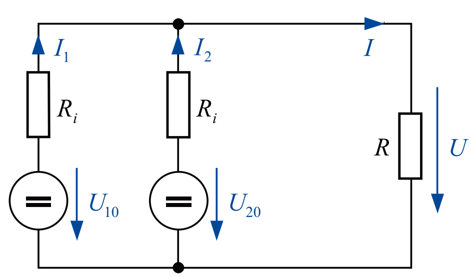

Abbildung 3.24: Parallel geschaltete Spannungsquellen

Aus den Kirchhoff'schen Gleichungen folgen unmittelbar die Zusammenhänge

$$U = RI \overset{(3.7)}{=} R(I_1 + I_2) \overset{(3.4)}{=} U_{10} - R_i I_1 \overset{(3.4)}{=} U_{20} - R_i I_2 \,, \tag{3.30}$$

aus denen die beiden Ströme

$$I_1 = \frac{1}{R_i^2 + 2RR_i}\left[(R_i + R)\,U_{10} - RU_{20}\right] \text{ und } I_2 = \frac{1}{R_i^2 + 2RR_i}\left[(R_i + R)\,U_{20} - RU_{10}\right] \tag{3.31}$$

berechnet werden können. Die Richtigkeit dieser Ergebnisse kann durch Einsetzen der Gln. (3.31) in (3.30) leicht bestätigt werden. Setzen wir als Beispiel die Zahlenwerte U_{10} = 12,8V, U_{20} = 11,8V, R_i = 1Ω und R = 20Ω ein, dann nehmen die beiden Ströme die Werte I_1= 0,8A und I_2 = –0,2A an. Infolge der unterschiedlichen Leerlaufspannungen wird in dem betrachteten Netzwerk die Quelle 2 zum Verbraucher. Die aus der Spannungsquelle U_{10} entnommene Energie wird teilweise an den Widerstand R abgegeben und teilweise zum Nachladen der zweiten Spannungsquelle U_{20} verwendet. Eine gleichmäßig aufgeteilte Energieabgabe ist nur möglich bei identischen Quellen.

Fassen wir die Ergebnisse zusammen:

- Die Leistungsabgabe von parallel geschalteten Spannungsquellen ist unterschiedlich, wenn die Leerlaufspannungen oder die Innenwiderstände unterschiedlich sind.
- In einem Netzwerk mit mehreren Quellen kann ein Teil der Quellen als Verbraucher wirken, wenn sie nämlich die von anderen Quellen abgegebene Energie aufnehmen. Dieser Zustand ist gewollt beim Nachladen einer Batterie.

3.7.2 Leistungsanpassung

Eine weitere wichtige Frage im Zusammenwirken von Quelle und Verbraucher ist die Frage nach der maximal von einer Quelle zur Verfügung gestellten Leistung. Ausgehend von der Schaltung in Abb. 3.25, in der ein Verbraucher (Lastwiderstand) R_L an eine durch die Leerlaufspannung U_0 und den Innenwiderstand R_i charakterisierte Spannungsquelle angeschlossen ist, soll die Bedingung für maximale Leistungsabgabe an den Verbraucher abgeleitet werden.

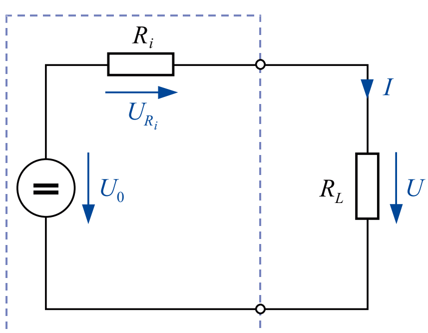

Abbildung 3.25: Berechnung der maximalen Ausgangsleistung

Gesucht ist also derjenige Wert für R_L, für den die Leistung P_L an diesem Verbraucher den Maximalwert erreicht. Für die Leistung gilt mit Gl. (2.49)

$$P_L = I^2 R_L = \left(\frac{U_0}{R_i + R_L} \right)^2 R_L \,. \tag{3.32}$$

Die maximale Leistung in Abhängigkeit von dem Wert R_L erhält man aus der Forderung nach dem Verschwinden der ersten Ableitung

$$\frac{\mathrm{d}P_L}{\mathrm{d}R_L} = U_0{}^2 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}R_L} \frac{R_L}{(R_i + R_L)^2} = U_0{}^2 \frac{R_i - R_L}{(R_i + R_L)^3} \stackrel{!}{=} 0 \,. \tag{3.33}$$

Daraus folgt unmittelbar

$$R_L = R_i \,. \tag{3.34}$$

Eine Gleichspannungsquelle gibt die maximale Leistung bei Widerstandsanpassung $R_L = R_i$ ab.

Die maximale Ausgangsleistung (**verfügbare Leistung**) beträgt dann mit Gl. (3.32)

$$P_{L\max} = \frac{U_0{}^2}{4R_i} \,. \tag{3.35}$$

Das Verhältnis aus der an den Widerstand R_L abgegebenen Leistung (3.32) zu der verfügbaren Leistung (3.35)

$$\frac{P_L}{P_{L\max}} = \frac{4R_i R_L}{(R_i + R_L)^2} = \frac{4R_L / R_i}{(1 + R_L / R_i)^2} \tag{3.36}$$

ist für den gesamten Wertebereich zwischen Kurzschluss und Leerlauf $0 \le R_L \le \infty$ in Abb. 3.26 dargestellt.

Zur besseren Übersicht wird auf der Abszisse aber nicht der Wertebereich von R_L zwischen Null und unendlich aufgetragen. Das Ergebnis lässt sich nämlich anschaulicher darstellen, wenn der von der Quelle abgegebene Strom

$$I = \frac{U_0}{R_i + R_L} \tag{3.37}$$

für die Achseneinteilung verwendet wird. Dieser Strom nimmt seinen Maximalwert

$$I_{\max} = \frac{U_0}{R_i} \tag{3.38}$$

im Kurzschlussfall, d.h. bei $R_L = 0$ an. Das Verhältnis der beiden Ströme

$$\frac{I}{I_{\max}} = \frac{R_i}{R_i + R_L} = \frac{1}{1 + R_L / R_i} \tag{3.39}$$

ändert sich also von 0 auf 1, wenn sich der Lastwiderstand von Leerlauf ($R_L = \infty$) auf Kurzschluss ($R_L = 0$) reduziert.

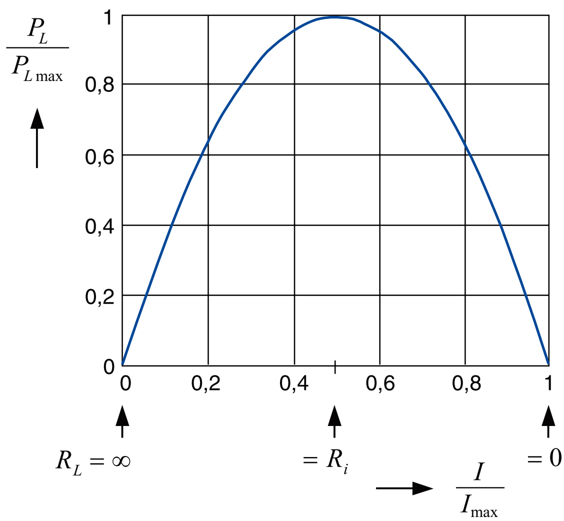

Abbildung 3.26: Normierte Ausgangsleistung als Funktion des normierten Stromes

Die Kurve in Abb. 3.26 lässt sich leicht berechnen, indem für verschiedene Zahlenverhältnisse R_L/R_i mit Gl. (3.39) der Abszissenwert und mit Gl. (3.36) der jeweils zugehörige Ordinatenwert berechnet wird. Alternativ kann auch die Gl. (3.39) nach dem Widerstandsverhältnis R_L/R_i aufgelöst und das Ergebnis in Gl. (3.36) eingesetzt werden. Damit erhält man direkt den gesuchten Zusammenhang

$$\frac{P_L}{P_{L\max}} = \frac{4I}{I_{\max}} \left(1 - \frac{I}{I_{\max}} \right). \tag{3.40}$$

Die drei interessantesten Zustände, nämlich Leerlauf, Widerstandsanpassung und Kurzschluss sind in der Abbildung besonders gekennzeichnet. Bei Widerstandsanpassung $R_L = R_i$ nimmt die Ausgangsleistung ihren Maximalwert $P_L = P_{L\max}$ an. Weicht der Widerstand R_L von dem Wert R_i ab, dann wird weniger Leistung von der Quelle an den Verbraucher abgegeben. An den beiden Grenzen Leerlauf und Kurzschluss verschwinden entweder Strom oder Spannung am Verbraucher, so dass die Leistung $P_L = UI$ ebenfalls in beiden Fällen verschwindet.

3.7.3 Wirkungsgrad

Mit kleiner werdendem Lastwiderstand in der Abb. 3.25 steigt der Strom kontinuierlich an. Obwohl die von der Quelle gelieferte Leistung $U_0 I$ damit ebenfalls ansteigt, nimmt die Leistung an dem Verbraucher in dem Bereich $R_L < R_i$ nach Abb. 3.26 kontinuierlich ab. In diesem Zusammenhang stellt sich die Frage nach dem **Wirkungsgrad** η. Darunter versteht man das Verhältnis von der an dem Lastwiderstand verbrauchten Leistung P_L (*Nutzleistung*) zu der gesamten von der Quelle abgegebenen Leistung P_{ges}

$$\eta = \frac{P_L}{P_{ges}} \cdot 100\% \overset{(2.49)}{=} \frac{I^2 R_L}{I^2 (R_i + R_L)} \cdot 100\% = \frac{R_L / R_i}{1 + R_L / R_i} \cdot 100\% \,. \tag{3.41}$$

Setzt man die nach dem Widerstandsverhältnis R_L/R_i aufgelöste Beziehung (3.39) in Gl. (3.41) ein, dann kann der Wirkungsgrad als Funktion des Stromverhältnisses angegeben werden

$$\eta = \left(1 - \frac{I}{I_{\max}}\right) \cdot 100\% \,. \tag{3.42}$$

Diese linear abfallende Funktion ist in Abb. 3.27 dargestellt. Man erkennt, dass der Wirkungsgrad mit zunehmendem Strom aus der Quelle geringer wird. Bei Widerstandsanpassung beträgt der Wirkungsgrad nur 50%, d.h. am Innenwiderstand der Quelle wird genau soviel Leistung verbraucht wie am Lastwiderstand.

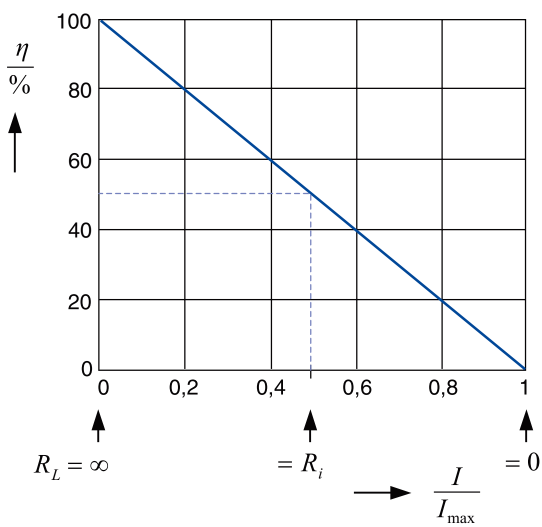

Abbildung 3.27: Wirkungsgrad

Die Wirkungsgradfrage ist von besonderem Interesse bei Energieübertragungssystemen. Die im Kraftwerk erzeugte Energie soll möglichst verlustarm zum Verbraucher transportiert werden. Bei vorgegebener Verbraucherleistung $P_L = UI$ und ebenfalls vorgegebenem

Innenwiderstand R_i (dazu gehört nicht nur der Innenwiderstand des Generators, sondern auch der gesamte Widerstand der Übertragungsleitungen) lässt sich der Wirkungsgrad steigern, wenn der Strom möglichst klein und als Konsequenz die Spannung entsprechend groß wird. In der Praxis erfolgt die Energieübertragung auf Hochspannungsleitungen mit Spannungen im Bereich von einigen hundert kV.

3.8 Das Überlagerungsprinzip

Enthält eine Schaltung mehrere Quellen, dann können die Ströme und Spannungen in den einzelnen Zweigen des Netzwerks durch die Überlagerung von Teillösungen berechnet werden. Voraussetzung dafür ist, dass an den einzelnen Netzwerkelementen *lineare* Beziehungen zwischen Strom und Spannung gelten. Zur Berechnung einer Teillösung wird nur eine einzige Quelle betrachtet, die anderen Quellen werden *zu Null gesetzt*. Für diese Quelle wird dann die Netzwerkanalyse durchgeführt, d.h. es werden die Ströme und Spannungen in den interessierenden Zweigen berechnet.

Bei dieser Vorgehensweise muss sichergestellt werden, dass nach der Überlagerung der Teillösungen in jedem Zweig, der eine Stromquelle enthält, genau der vorgegebene Quellenstrom fließt, und dass in jedem Zweig mit einer Spannungsquelle genau die vorgegebene Spannung vorliegt. Bei der Überlagerung dürfen keine zusätzlichen Ströme zu einer Stromquelle und keine zusätzlichen Spannungen zu einer Spannungsquelle addiert werden. Null setzen der Quellen bedeutet also, dass eine Spannungsquelle durch einen Kurzschluss (keine Spannung in dem Zweig, d.h. $U = 0$) und eine Stromquelle durch einen Leerlauf (kein Strom in dem Zweig, d.h. $I = 0$) ersetzt wird.

Ist die Netzwerkanalyse in dieser Weise für jede Quelle einzeln durchgeführt, dann ist der gesamte Strom in einem Zweig des Netzwerks bei Vorhandensein aller Quellen gleich der Summe aller vorher berechneten Teilströme in diesem Zweig.

Zur Veranschaulichung der Vorgehensweise betrachten wir das Netzwerk in Abb. 3.28 mit jeweils einer Strom- und einer Spannungsquelle. Wir wollen mit der beschriebenen Methode den Strom I_2 durch den Widerstand R_2 berechnen. (Zum Vergleich kann das Netzwerk auch durch Aufstellung von Maschen- und Knotengleichungen direkt gelöst werden).

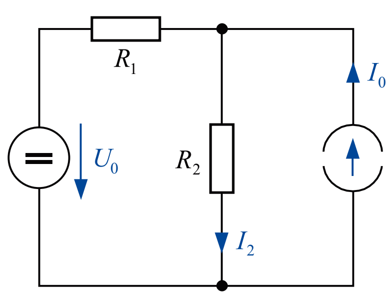

Abbildung 3.28: Überlagerung von Quellen

In der ersten Teillösung soll der Beitrag der Spannungsquelle U_0 zum gesuchten Strom berechnet werden. Wird die Stromquelle durch einen Leerlauf ersetzt, dann vereinfacht sich das Netzwerk wie in Abb. 3.29a) dargestellt. Der Strom I_{2a} durch den Widerstand R_2 kann für diese Teillösung mit dem Ohm'schen Gesetz unmittelbar angegeben werden

$$I_{2a} = \frac{U_0}{R_1 + R_2}\,. \tag{3.43}$$

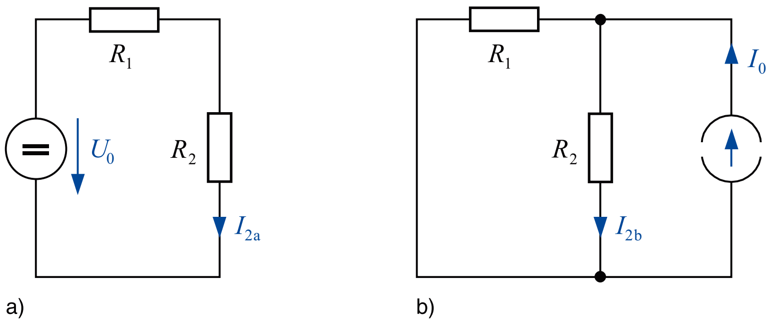

Abbildung 3.29: Netzwerke für die beiden Teillösungen

In der zweiten Teillösung wird nur die Stromquelle I_0 betrachtet, wobei die Spannungsquelle durch einen Kurzschluss ersetzt werden muss. Das resultierende Netzwerk in Abb. 3.29b) ist aber identisch zu dem Stromteiler in Abb. 3.19, so dass der Strom durch R_2 mit Gl. (3.25) ebenfalls direkt angegeben werden kann

$$I_{2b} = \frac{R_1 I_0}{R_1 + R_2}. \tag{3.44}$$

Damit ist der Gesamtstrom für das Ausgangsnetzwerk in Abb. 3.28 bekannt

$$I_2 = I_{2a} + I_{2b} = \frac{U_0 + R_1 I_0}{R_1 + R_2}\,. \tag{3.45}$$

Am Anfang dieses Abschnitts haben wir als Voraussetzung für die Überlagerung einen linearen Zusammenhang zwischen Strom und Spannung an den Komponenten gefordert. Als Gegenbeispiel betrachten wir die Gleichung für die Leistung an dem Widerstand R_2, in der der Strom nicht mehr linear, sondern quadratisch vorkommt

$$P_2 \overset{(2.49)}{=} I_2^{\,2} R_2 = \left(I_{2a} + I_{2b}\right)^2 R_2 = \left(I_{2a}^{\,2} + 2 I_{2a} I_{2b} + I_{2b}^{\,2}\right) R_2\,. \tag{3.46}$$

Bei linearer Überlagerung der einzelnen Beiträge fällt das gemischte Glied weg

$$P_{2a} + P_{2b} = I_{2a}^{\,2} R_2 + I_{2b}^{\,2} R_2 \overset{(3.46)}{=} P_2 - 2 I_{2a} I_{2b} R_2 \overset{!}{\neq} P_2 \tag{3.47}$$

und man erhält ein falsches Ergebnis.

Vorsicht

Wegen des nichtlinearen Zusammenhangs zwischen Strom und Leistung darf die Leistung an einem Widerstand nicht durch Summation der Teilleistungen infolge der Teilströme berechnet werden.

3.9 Analyse umfangreicher Netzwerke

Nachdem wir uns in den bisherigen Kapiteln ausschließlich mit sehr einfachen Netzwerken beschäftigt haben, wollen wir uns jetzt den Fragen im Zusammenhang mit der Analyse umfangreicher Netzwerke zuwenden. Diese können Spannungsquellen, Stromquellen und Widerstände enthalten. Wir werden den folgenden Betrachtungen lineare Netzwerke zugrunde legen, d.h. an allen im Netzwerk vorhandenen Widerständen sind Spannung und Strom proportional zueinander. Die Gleichungen zur Beschreibung der Netzwerke sind dann ebenfalls linear. Unabhängig von dieser Einschränkung gelten die folgenden Überlegungen allgemein auch für nichtlineare Netzwerke. Der Unterschied besteht lediglich in dem erhöhten mathematischen Aufwand bei der Auflösung der sich ergebenden nichtlinearen Gleichungssysteme.

Ausgangspunkt für die weiteren Betrachtungen ist die Schaltung in Abb. 3.6. Wir haben bereits in Kap. 3.4 festgestellt, dass wir mit Hilfe des Ohm'schen Gesetzes die Anzahl der Unbekannten auf die Anzahl der Zweipole reduzieren können. An jedem Widerstand bleibt entweder Spannung oder Strom unbestimmt, an einer Spannungsquelle ist der Strom unbekannt und an einer Stromquelle die Spannung. In Abb. 3.30 sind einige Beispiele für zusammengesetzte Zweipole dargestellt. Auch in diesen Fällen verbleibt immer genau eine Unbekannte. Ist beispielsweise der Strom im mittleren Zweipol bekannt, dann lässt sich daraus die Spannung am Widerstand berechnen.

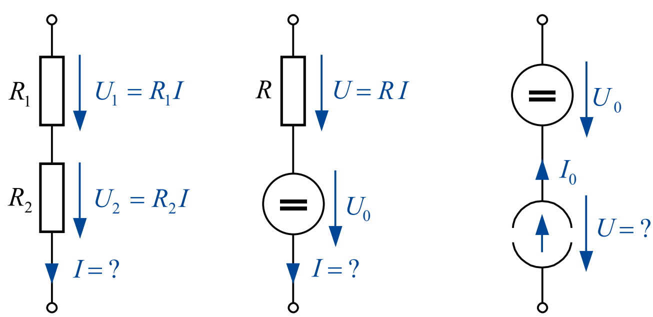

Abbildung 3.30: Zweipolnetzwerke

Unabhängig von dem Aufbau der Zweipole können wir feststellen, dass die Anzahl der Zweipole in einem Netzwerk identisch ist mit der Anzahl der unbekannten Größen. In der Netzwerktheorie spricht man allgemein von **Zweigen** und meint damit die beliebig zusammengesetzten Zweipole, die zwischen zwei Knoten des Netzwerks liegen. Fassen wir die bisherigen Ergebnisse noch einmal zusammen:

- Unter Zuhilfenahme der an den Komponenten geltenden Beziehungen zwischen Strom und Spannung[4] kann die Anzahl der unbekannten Ströme und Spannungen für jeden Zweig auf eine Unbekannte reduziert werden.
- Setzt sich ein Netzwerk aus z Zweigen zusammen, dann werden genau z linear unabhängige Gleichungen zur Bestimmung der verbleibenden Unbekannten benötigt.
- Zur Aufstellung der Gleichungen stehen uns die Kirchhoff'schen Sätze, nämlich die Maschenregel (3.4) und die Knotenregel (3.7) zur Verfügung.

Die vor uns liegende Aufgabe besteht offenbar darin, mit Hilfe einer systematischen Vorgehensweise genau z linear unabhängige Gleichungen aufzustellen. Eine Gleichung ist allgemein *linear unabhängig* von anderen Gleichungen, wenn sie sich nicht durch lineare Überlagerung wie Addition oder Subtraktion aus den anderen Gleichungen herleiten lässt. Am einfachsten lässt sich diese Eigenschaft erkennen, wenn eine Gleichung eine Größe enthält, die in den anderen Gleichungen nicht vorkommt.

Die schematisierte Vorgehensweise bei der Netzwerkanalyse erfolgt in mehreren Teilschritten, die wir am Beispiel der ausgewählten Schaltung nach Abb. 3.6 nacheinander betrachten wollen.

1. Schritt: Darstellung des Netzwerkgraphen

Das Netzwerk wird ohne die Komponenten nochmals dargestellt. In dieser als **Netzwerkgraph** bezeichneten Darstellung in Abb. 3.31 ist die Struktur des Netzwerks, d.h. welche Zweige an welchen Knoten miteinander verbunden sind, besonders gut zu erkennen.

2. Schritt: Festlegung der Zählrichtungen

Für jeden Zweig wird vereinbart, in welcher Richtung der Strom positiv gezählt werden soll. Diese Festlegung ist willkürlich und hat keinen Einfluss auf das Ergebnis, sie muss aber für die gesamte Analyse konsequent beibehalten werden. Die tatsächliche Stromrichtung ist erst nach Auflösung des Gleichungssystems bekannt. Hat der Strom dann einen positiven Wert, dann stimmt seine tatsächliche Richtung mit der gewählten Richtung überein, hat er dagegen einen negativen Wert, dann fließt er entgegengesetzt zur gewählten Richtung. Die Zählrichtung für die Spannung wird am Verbraucher in Richtung des Stromes gewählt, am Generator entgegengesetzt.

---

[4] Bisher verwenden wir nur das Ohm'sche Gesetz am Widerstand, später kommen entsprechende Beziehungen an anderen Komponenten, wie z.B. am Kondensator hinzu.

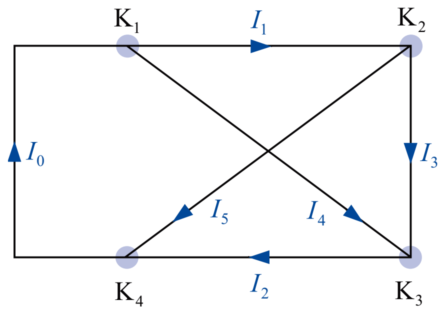

Abbildung 3.31: Netzwerkgraph

3. Schritt: Aufstellung der Knotengleichungen

Zur Vermeidung linear abhängiger Gleichungen betrachtet man üblicherweise nur Knoten entsprechend Abb. 3.8, in denen keine Komponenten enthalten sind. Wir haben nämlich bereits in den Abbildungen 3.8 und 3.9 festgestellt, dass scheinbar unterschiedliche Knoten auf identische und damit linear abhängige Gleichungen führen. Unter Berücksichtigung dieser Einschränkung besitzt das zu betrachtende Netzwerk in Abb. 3.31 die eingezeichneten vier Knoten. Da die Summe aller Ströme in allen Knoten immer Null ergibt, ist eine der Knotengleichungen linear von den anderen drei abhängig. Allgemein gilt: Besitzt ein Netzwerk k Knoten, dann können immer $k-1$ linear unabhängige Knotengleichungen aufgestellt werden. Die Auswahl des nicht zu berücksichtigenden Knotens hat keinen Einfluss auf das Ergebnis. Für das betrachtete Beispiel gilt

$$\begin{aligned} \mathrm{K}_1&: \quad I_0 - I_1 \qquad\qquad - I_4 \qquad &= 0 \\ \mathrm{K}_2&: \quad \;\; + I_1 \quad - I_3 \qquad\quad - I_5 &= 0 \\ \mathrm{K}_3&: \qquad\quad - I_2 + I_3 + I_4 \qquad &= 0. \end{aligned} \tag{3.48}$$

Die lineare Unabhängigkeit dieser Gleichungen erkennt man unmittelbar daran, dass in jeder Gleichung ein Strom enthalten ist, der in den anderen Gleichungen nicht auftritt. Auf der anderen Seite ist die lineare Abhängigkeit der Gleichung am Knoten K_4 leicht zu überprüfen, da diese Gleichung identisch ist zur Summe der bereits angegebenen Gleichungen.

4. Schritt: Aufstellung der Maschengleichungen

Die Anzahl m der noch benötigten Maschengleichungen beträgt $m = z - (k - 1)$. Im betrachteten Beispiel müssen somit $m = 6 - 3$ unabhängige Maschengleichungen aufgestellt werden. Während die Aufstellung der $k-1$ Knotengleichungen völlig unproblematisch ist, müssen bei der Auswahl der Maschen bestimmte Vorgehensweisen eingehalten werden. Es gibt verschiedene Möglichkeiten, die Maschen so auszuwählen, dass die resultierenden Gleichungen zwangsläufig linear unabhängig sind. Die unterschiedlichen Methoden laufen im Prinzip darauf hinaus, sicherzustellen, dass in jeder Masche ein Zweig enthalten ist, der in keiner anderen Masche vorkommt. Im Folgenden werden zwei unterschiedliche Methoden vorgestellt.

Die erste Methode wird als **vollständiger Baum** bezeichnet. Zunächst werden alle k Netzwerkknoten entlang der Zweige so miteinander verbunden, dass keine geschlossene Masche entsteht. Bei k Knoten werden genau $k - 1$ Zweige für die Verbindungen benötigt. Die Abb. 3.32 zeigt nur zwei der Möglichkeiten, für das gegebene Netzwerk einen vollständigen Baum zu konstruieren.

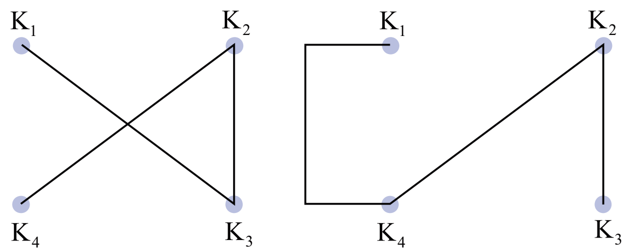

Abbildung 3.32: Vollständiger Baum

Von den insgesamt z Zweigen des Netzwerks gehören damit $k - 1$ Zweige zu dem vollständigen Baum und $z - (k - 1) = m$ Zweige, die so genannten **Verbindungszweige**, sind unabhängig von dem vollständigen Baum. Da die Anzahl der Verbindungszweige identisch ist zu der noch benötigten Anzahl unabhängiger Maschengleichungen, werden die Maschen jetzt so gewählt, dass jeder Verbindungszweig in genau einer Masche enthalten ist. Dazu muss jeder Verbindungszweig über den vollständigen Baum zu einer Masche geschlossen werden. Die Vorgehensweise wird am rechten Beispiel der Abb. 3.32 demonstriert.

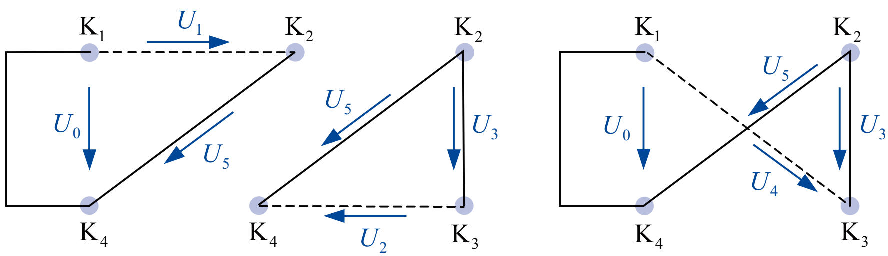

Abbildung 3.33: Aufstellung der Maschengleichungen beim vollständigen Baum

Die drei in der Abb. 3.33 dargestellten Maschen führen auf die Gleichungen

$$\begin{aligned}
M_1:&\quad U_1 \qquad\qquad\quad +U_5 &= U_0\\
M_2:&\quad \quad U_2 + U_3 \qquad -U_5 &= 0\\
M_3:&\quad \qquad -U_3 + U_4 + U_5 &= U_0.
\end{aligned} \tag{3.49}$$

Zusammen mit den Ohm'schen Beziehungen an den fünf Widerständen liegen jetzt elf Gleichungen zur Bestimmung aller unbekannten Ströme und Spannungen in dem Netzwerk vor[5]. Zur Reduzierung des Gleichungssystems können die Zweigspannungen in Gl. (3.49) mit Hilfe des Ohm'schen Gesetzes durch die Zweigströme ersetzt werden

$$\begin{aligned}
\mathrm{M}_1&:\ R_1 I_1 & & +R_5 I_5 &= U_0\\
\mathrm{M}_2&: & R_2 I_2 + R_3 I_3 & - R_5 I_5 &= 0\\
\mathrm{M}_3&: & - R_3 I_3 + R_4 I_4 & + R_5 I_5 &= U_0.
\end{aligned} \tag{3.50}$$

Mit den Gleichungen (3.48) und (3.50) liegen jetzt genau $z = 6$ Bestimmungsgleichungen vor, aus denen alle Zweigströme $I_0..I_5$ eindeutig berechnet werden können. Mit den Strömen sind auch alle Zweigspannungen bekannt und das Problem ist vollständig gelöst.

Wir wollen noch eine zweite Methode zur Aufstellung der Maschengleichungen vorstellen, die als **Auftrennung der Maschen** bezeichnet wird. Die Vorgehensweise ist relativ einfach. Man wählt einen beliebigen Maschenumlauf und stellt die zugehörige Gleichung auf. Diese Masche wird jetzt an einem beliebigen Zweig aufgetrennt, der in den folgenden Maschen nicht mehr verwendet werden darf.

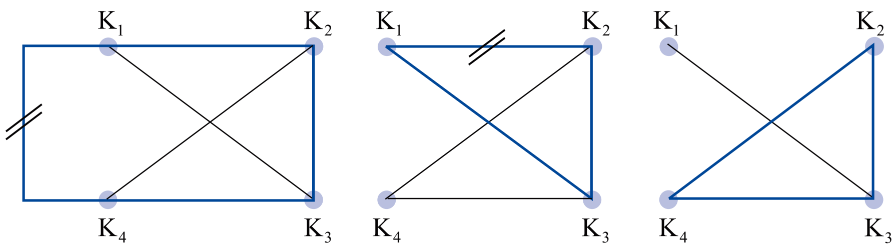

Abbildung 3.34: Auftrennung der Maschen

Ausgehend von dem verbleibenden Netzwerk stellt man wieder eine Maschengleichung auf und trennt diese Masche ebenfalls auf. Die fortgesetzte Anwendung dieser Methode liefert ebenfalls die benötigten $m = z - (k - 1)$ Gleichungen. Die lineare Unabhängigkeit dieser Gleichungen ist leicht einzusehen. Beginnt man die Überprüfung bei der zuletzt aufgestellten Beziehung, dann erkennt man unmittelbar, dass die jeweils zuvor aufgestellte Gleichung einen weiteren Zweig enthält, der nachher nicht mehr verwendet wurde, d.h. jede Gleichung ist infolge der Maschenauftrennung zwangsläufig linear unabhängig von den nachfolgend aufgestellten Gleichungen.

[5] Bei z Zweigen liegen normalerweise $2z$ Unbekannte vor (z Ströme und z Spannungen). Da aber in dem betrachteten Beispiel ein Zweig nur eine Quelle mit bereits bekannter Spannung enthält, reduziert sich die Anzahl der Unbekannten um eins.