Kapitel 3 Mengenlehre

Die Mengenlehre ist einer der Eckpfeiler der Mathematik, und sie ermöglicht eine einfache Sprache zur Beschreibung vieler Konzepte der Mathematik und der Informatik.

In diesem Kapitel führen wir den Begriff der Menge ein und beschreiben verschiedene Arten, Mengen zu kombinieren, um neue Mengen zu erzeugen. Die entsprechenden Operationen, mittels derer die Vereinigung, die Schnittmenge, das Komplement und die symmetrische Differenz gebildet werden, werden unter Verwendung von Venn-Diagrammen illustriert. Es wird eine Analogie zwischen Operationen auf Mengen und den in Kapitel 2 vorgestellten logischen Operatoren hergestellt, wodurch wir in die Lage kommen, bestimmte grundlegende Mengenidentitäten zu beweisen. Eine Reihe dieser grundlegenden Identitäten wird zusammengenommen, um die Gesetze einer Mengenalgebra aufzustellen, die ihrerseits verwendet werden können, um kompliziertere Identitäten zu beweisen. Es wird eine Reihe von Konzepten eingeführt, die in späteren Kapiteln benötigt werden, beispielsweise das Prinzip von Inklusion–Exklusion, geordnete Paare und kartesische Produkte. Das kartesische Produkt wird verwendet, um Operationen auf Mengen durch Manipulationen von Bitketten zu simulieren.

In der Informatikanwendung werden Prädikate und Mengen verwendet, um ein einfaches **wissensbasiertes System** aufzubauen, mit dem sich aus einer Datenbasis zu den britischen Königen und Königinnen seit Georg I. Informationen gewinnen lassen.

3.1 Mengen und Operationen auf Mengen

Eine **Menge** ist eine Zusammenfassung von Objekten, die als **Elemente** der Menge bezeichnet werden. Zum Beispiel:

- {Essex, Yorkshire, Devon}
- {2, 3, 5, 7, 11}
- {Käse, Eier, Milch, Sahne}

In den vorstehenden Beispielen haben wir die Elemente einer jeden Menge niedergeschrieben und in **geschweiften Klammern** { } eingeschlossen. Um uns auf eine bestimmte Menge zu beziehen, bezeichnen wir sie gewöhnlich mit einem Großbuchstaben. Beispielsweise ist $S = \{3, 2, 11, 5, 7\}$ die Menge S, die die aufgeführten Elemente enthält. Man beachte, dass diese Menge mit einer der oben aufgelisteten Beispielmengen übereinstimmt, da die Reihenfolge, in der die Elemente niedergeschrieben sind, keine Rolle spielt.

Wir schreiben im Allgemeinen $a \in S$, um auszudrücken, dass das Objekt a ein Element der Menge S ist. Wenn a kein Element von S ist, so schreiben wir $a \notin S$.

Bei einer großen Menge, inbesondere im Fall einer unendlichen Menge, können wir nicht alle Elemente niederschreiben und definieren die Menge daher mittels eines geeigneten Prädikats.

Formal schreiben wir

$S = \{x : \mathrm{P}(x)\}$

um die Menge der Objekte x zu bezeichnen, für die das Prädikat $\mathrm{P}(x)$ wahr ist.
Zum Beispiel beschreibt

$S = \{x : x \text{ ist eine ungerade natürliche Zahl}\}$

die Menge

$S = \{1, 3, 5, 7, \ldots\}$

Da sich jede ungerade natürliche Zahl in der Form $2n - 1$ schreiben lässt, wobei n eine natürliche Zahl ist, ist auch

$S = \{2n - 1 : n \text{ ist eine natürliche Zahl}\}$

eine geeignete Beschreibung derselben Menge.

BEISPIEL 3.1

Geben Sie einfachere Beschreibungen der folgenden Mengen, indem Sie ihre Elemente aufzählen:

(a) $A = \{x : x \text{ ist eine ganze Zahl und } x^2 + 4x = 12\}$

(b) $B = \{x : x \text{ ist ein Wochentag, der den Buchstaben s nicht enthält}\}$

(c) $C = \{n^2 : n \text{ ist eine ganze Zahl}\}$

LÖSUNG

(a) Wenn $x^2 + 4x = 12$, dann ist $x(x + 4) = 12$. Da x eine ganze Zahl ist und die Teiler von 12 $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6$ und ± 12 sind, kommen für x nur $x = -6$ und $x = 2$ in Frage. Alternativ kann man die quadratische Gleichung $x^2 + 4x - 12 = 0$ lösen und erhält dann $x = -6$ oder $x = 2$. Daher ist $A = \{-6, 2\}$.

(b) $B = \{\text{Montag, Mittwoch, Freitag}\}$

(c) $C = \{0, 1, 4, 9, 16, \ldots\}$

Bestimmte Mengen, insbesondere Mengen von Zahlen, treten so häufig auf, dass sie einen allgemein üblichen Namen haben und mit einem besonderen Symbol bezeichnet werden:

$\emptyset$ oder $\{\ \}$ ist die **leere Menge** .

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ ist die Menge der **natürlichen Zahlen**.

$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots\}$ ist die Menge der **ganzen Zahlen**.

$\mathbb{Q} = \{p/q : p, q \text{ ganze Zahlen}, q \neq 0\}$ ist die Menge der **rationalen Zahlen**.

$\mathbb{R} = \{\text{alle Dezimalzahlen}\}$ ist die Menge der **reellen Zahlen**.

Der Leser sollte sich darüber im Klaren sein, dass die Menge $\mathbb{N}$ in manchen Texten auch die Zahl 0 enthält.

Moderne Programmiersprachen verlangen, dass Variablen als einem bestimmten **Datentyp** zugehörig deklariert werden; ein Datentyp besteht aus einer Menge von Objekten sowie einer Liste von Standardoperationen auf diesen Objekten. Die Angabe des Typs einer Variablen ist gleichbedeutend mit der Angabe der Menge, in der die Werte der Variablen liegen.

Sind zwei beliebige Mengen gegeben, so gibt es verschiedene Möglichkeiten sie zu kombinieren, um neue Mengen zu erzeugen. Wir werden diese **Operationen** auf Mengen gleich beschreiben. Zunächst sei darauf hingewiesen, dass bei den Beispielen für Mengen, die wir bisher gesehen haben, einige auf natürliche Weise in anderen enthalten sind. Beispielsweise ist die Menge $A = \{2, 3, 5, 7, 11\}$ in der Menge $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ enthalten, und zwar in dem Sinn, dass jedes Element von A automatisch ein Element der Menge $\mathbb{N}$ ist.

Eine Menge A heißt eine **Teilmenge** einer Menge S, wenn jedes Element von A ein Element von S ist. Dieser Zusammenhang wird mit $A \subseteq S$ bezeichnet und lässt sich bildlich darstellen, wie es in Abbildung 3.1 gezeigt ist. Solch eine Diagrammdarstellung heißt **Venn-Diagramm**.

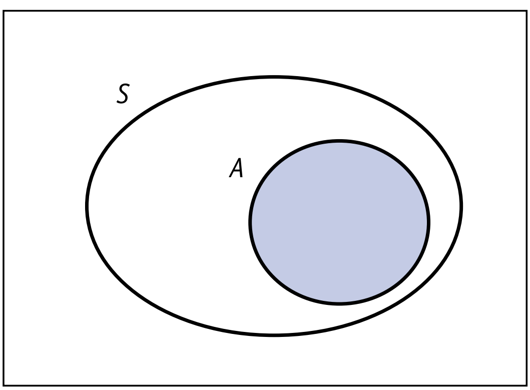

Abbildung 3.1 Venn-Diagramm für $A \subseteq S$

Zwei Mengen sind **gleich**, wenn jede von ihnen Teilmenge der anderen ist. Wollen wir also zeigen, dass zwei Mengen gleich sind, so müssen wir zeigen, dass sie dieselben Elemente enthalten. Daher ist $A = B$, wenn sowohl $(x \in A \Rightarrow x \in B)$ als auch $(x \in B \Rightarrow x \in A)$ wahr ist.

BEISPIEL 3.2

Seien $A = \{n : n^2$ ist eine ungerade ganze Zahl$\}$ und $B = \{n : n$ ist eine ungerade ganze Zahl$\}$. Zeigen Sie, dass $A = B$.

LÖSUNG

Wenn $x \in A$, dann ist x^2 eine ungerade ganze Zahl. Nach Beispiel 2.11 ist x eine ungerade ganze Zahl. Somit gilt $x \in B$ und daher $A \subseteq B$. Ist umgekehrt $x \in B$, so ist x eine ungerade Zahl. Nach Beispiel 2.10 ist x^2 eine ungerade ganze Zahl. Somit gilt $x \in A$ und daher $B \subseteq A$. Also ist $A = B$.

Die **Vereinigung** zweier Mengen A und B ist die Menge

$A \cup B = \{x : x \in A$ **oder** $x \in B\}$

Diese Menge besteht aus den Objekten, die in der Menge A oder in der Menge B oder eventuell in beiden Mengen enthalten sind. Das entsprechende Venn-Diagramm ist in Abbildung 3.2 gezeigt.

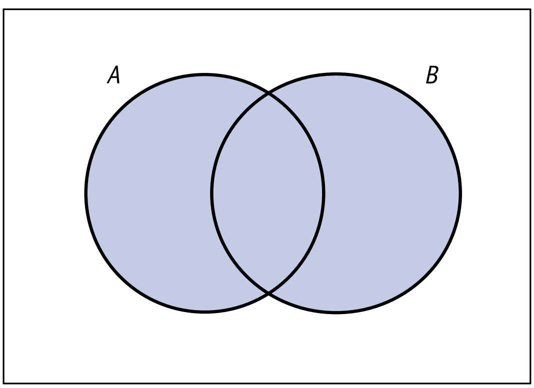

Abbildung 3.2 Venn-Diagramm für $A \cup B$

Die **Schnittmenge** (der **Durchschnitt**) zweier Mengen A und B ist die Menge

$A \cap B = \{x : x \in A$ **und** $x \in B\}$

Diese Menge besteht aus den Objekten, die sowohl in der Menge A als auch in der Menge B enthalten sind. Das entsprechende Venn-Diagramm ist in Abbildung 3.3 gezeigt.

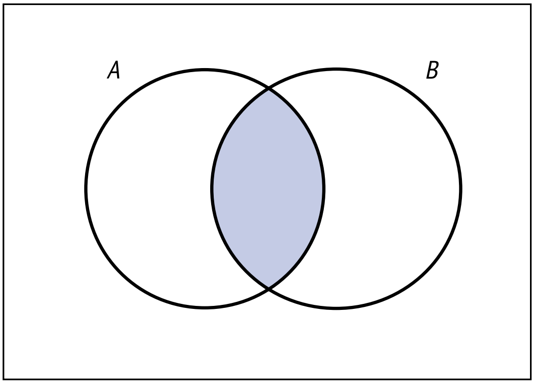

Abbildung 3.3 Venn-Diagramm für $A \cap B$

Das **Komplement einer Menge *B* bezüglich einer Menge *A*** ist die Menge

$$A - B = \{x : x \in A \textbf{ und } x \notin B\}$$

Diese Menge besteht aus den Objekten, die in A enthalten sind, nicht jedoch in der Menge B. Das entsprechende Venn-Diagramm ist in Abbildung 3.4 gezeigt.

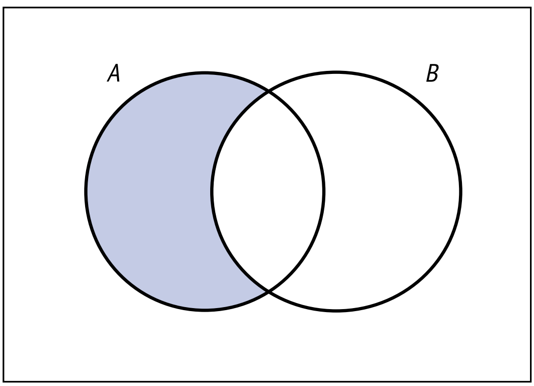

Abbildung 3.4 Venn-Diagramm für $A - B$

Wenn wir es mit den Teilmengen einer großen Menge U zu tun haben, nennen wir U die **Universalmenge** (**Grundmenge**) zu dem betrachteten Problem. In unseren Venn-Diagrammen wird das Rechteck mit U bezeichnet.

Ist A Teilmenge der Universalmenge U, so können wir das Komplement von A bezüglich U bilden. Dies ist die Menge $U - A$, für die wir einfach $\sim A$ schreiben. Vorausgesetzt also, dass wir uns innerhalb der Universalmenge U bewegen, gilt $\sim A = \{x : x \notin A\}$. Somit ist das **Komplement** einer Menge A die Menge

$$\sim A = \{x : \textbf{ nicht}(x \in A)\}$$

Diese Menge besteht aus den Objekten, die nicht in der Menge A enthalten sind. Das entsprechende Venn-Diagramm ist in Abbildung 3.5 gezeigt.

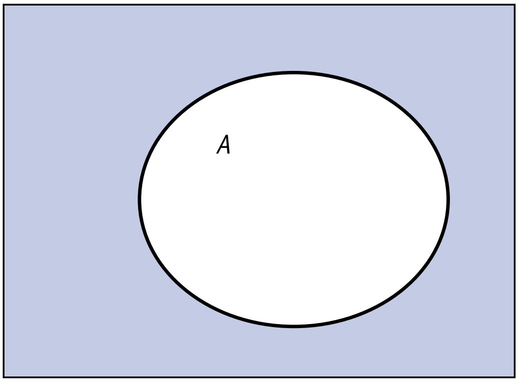

Abbildung 3.5 Venn-Diagramm für $\sim A$

Die **symmetrische Differenz** zweier Mengen A und B ist die Menge

$A \,\Delta\, B = \{x : (x \in A \textbf{ und } x \notin B) \textbf{ oder } (x \in B \textbf{ und } x \notin A)\}.$

Diese Menge besteht aus den Objekten, die entweder in der Menge A, jedoch nicht in der Menge B oder in der Menge B, jedoch nicht in der Menge A enthalten sind; anders gesagt, Objekten, die entweder in A oder B (jedoch nicht in beiden Mengen) enthalten sind. Das entsprechende Venn-Diagramm ist in Abbildung 3.6 gezeigt.

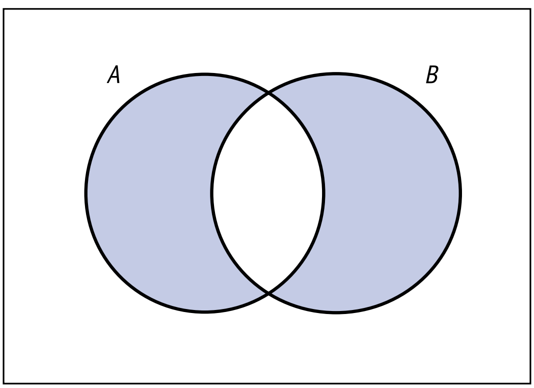

Abbildung 3.6 Venn-Diagramm für $A \,\Delta\, B$

BEISPIEL 3.3

Seien

$$A = \{1, 3, 5, 7\} \quad B = \{2, 4, 6, 8\} \quad C = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

Bestimmen Sie $A \cup C$, $B \cap C$, $A - C$ und $B \,\Delta\, C$.

LÖSUNG

$$\begin{aligned} A \cup C &= \{1, 3, 5, 7, 2, 4\} \\ B \cap C &= \{2, 4\} \\ A - C &= \{7\} \\ B \,\Delta\, C &= (B - C) \cup (C - B) = \{6, 8\} \cup \{1, 3, 5\} = \{6, 8, 1, 3, 5\} \end{aligned}$$

BEISPIEL 3.4

Seien

$$\begin{aligned} A &= \{x : 1 \leq x \leq 12 \textbf{ und } x \text{ ist eine gerade ganze Zahl}\} \\ B &= \{x : 1 \leq x \leq 12 \textbf{ und } x \text{ ist ein ganzzahliges Vielfaches von } 3\} \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass $\sim (A \cap B) =\sim A \cup \sim B$.

LÖSUNG

Zunächst ist

$$A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\} \text{ und } B = \{3, 6, 9, 12\}$$

Weiter gilt:

$$\sim (A \cap B) = \sim \{6, 12\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 11\}$$

und

$$\begin{aligned} \sim A \cup \sim B &= \{1, 3, 5, 7, 9, 11\} \cup \{1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11\} \\ &= \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 11\} \end{aligned}$$

Daher gilt $\sim (A \cap B) = \sim A \cup \sim B$.

3.2 Mengenalgebra

Zahlreiche Eigenschaften von Mengen lassen sich unter Verwendung der oben erklärten Operationen auf Mengen herleiten. Einige scheinen mehr, andere weniger ‚offensichtlich‘, doch sie bedürfen alle eines Beweises. Für die Beweise wird von den folgenden Entsprechungen zwischen Operationen auf Mengen und logischen Operationen auf Prädikaten Gebrauch gemacht.

Operation auf Mengen	Logische Operation
$\sim$	**nicht**
$\cup$	**oder**
$\cap$	**und**
$\subseteq$	$\Rightarrow$

BEISPIEL 3.5

Beweisen Sie für beliebige Mengen A und B, dass $\sim (A \cap B) = \sim A \cup \sim B$.

LÖSUNG

$$\begin{aligned}
\sim (A \cap B) &= \{x : x \notin (A \cap B)\} \\
&= \{x : \ \textbf{nicht}(x \in (A \cap B))\} \\
&= \{x : \ \textbf{nicht}((x \in A) \ \textbf{und} \ (x \in B))\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sim A \cup \sim B &= \{x : (x \notin A) \ \textbf{oder} \ (x \notin B)\} \\
&= \{x : (\textbf{nicht}(x \in A)) \ \textbf{oder} \ (\textbf{nicht}(x \in B))\}
\end{aligned}$$

Für beliebige Aussagen P und Q lässt sich eine Wahrheitstafel aufstellen, um die logische Äquivalenz der zusammengesetzten Aussagen **nicht**(P **und** Q) und (**nicht** P) **oder** (**nicht** Q) zu zeigen. Die Prädikate, die $\sim (A \cap B)$ und $\sim A \cup \sim B$ definieren, sind also äquivalent. Daher gilt $\sim (A \cap B) = \sim A \cup \sim B$.

Die in Beispiel 3.5 bewiesene Eigenschaft ist eines der *de Morganschen* Gesetze. Grundlegende Eigenschaften wie diese stellen die Gesetze der **Mengenalgebra** dar. Diese Gesetze sind unten aufgelistet, und jedes von ihnen lässt sich mittels eines ähnlichen logischen Beweisgangs wie in Beispiel 3.5 beweisen.

Eine Betrachtung des Kastens ergibt, dass die Gesetze auf der rechten Seite aus denen auf der linken Seite erhalten werden können, indem man $\cap$ und $\cup$ sowie $\emptyset$ und U gegeneinander austauscht. Jede Mengenidentität auf der rechten Seite wird als zur entsprechenden Identität auf der linken Seite **duale** Identität bezeichnet.

Wenn wir unter Verwendung der Gesetze eine weitere Identität von Mengen beweisen, so beweisen wir daher stets auch eine weitere zu ihr duale Identität.

Mengenalgebra

Assoziativgesetze

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C \qquad A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

Kommutativgesetze

$$A \cup B = B \cup A \qquad A \cap B = B \cap A$$

Identitätsgesetze

$$A \cup \emptyset = A \qquad A \cap U = A$$
$$A \cup U = U \qquad A \cap \emptyset = \emptyset$$

Idempotenzgesetze

$$A \cup A = A \qquad A \cap A = A$$

Distributivgesetze

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \qquad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

Komplementgesetze

$$A \cup \sim A = U \qquad A \cap \sim A = \emptyset$$
$$\sim U = \emptyset \qquad \sim \emptyset = U$$
$$\sim (\sim A) = A \qquad \sim (\sim A) = A$$

de Morgansche Gesetze

$$\sim (A \cup B) = \sim A \cap \sim B \qquad \sim (A \cap B) = \sim A \cup \sim B$$

BEISPIEL 3.6

Verwenden Sie die Gesetze der Mengenalgebra, um zu beweisen, dass für beliebige Mengen A und B gilt:

$$A \,\Delta\, B = (A \cup B) \cap \sim (A \cap B).$$

LÖSUNG

Laut Definition gilt

$$A \,\Delta\, B = (A \cap \sim B) \cup (B \cap \sim A)$$

Nun ist

$$
\begin{aligned}
&(A \cup B) \cap \sim (A \cap B) \\
&\quad = (A \cup B) \cap ((\sim A) \cup (\sim B)) && \text{[de Morgansche Gesetze]} \\
&\quad = ((A \cup B) \cap (\sim A)) \cup ((A \cup B) \cap (\sim B)) && \text{[Distributivgesetze]} \\
&\quad = ((\sim A) \cap (A \cup B)) \cup ((\sim B) \cap (A \cup B)) && \text{[Kommutativgesetze]} \\
&\quad = (((\sim A) \cap A) \cup ((\sim A) \cap B)) \cup (((\sim B) \cap A) \cup ((\sim B) \cap B)) \\
& && \text{[Distributivgesetze]} \\
&\quad = ((A \cap (\sim A)) \cup (B \cap (\sim A))) \cup ((A \cap (\sim B) \cup (B \cap (\sim B))) \\
& && \text{[Kommutativgesetze]} \\
&\quad = ((\emptyset \cup (B \cap (\sim A))) \cup ((A \cap (\sim B)) \cup \emptyset) && \text{[Komplementgesetze]} \\
&\quad = (A \cap \sim B) \cup (B \cap (\sim A)) && \text{[Kommutativgesetze und Identitätsgesetze]}
\end{aligned}
$$

Also gilt die Behauptung

$$A \,\Delta\, B = (A \cup B) \cap \sim (A \cap B)$$

3.3 Weitere Eigenschaften von Mengen

In Kapitel 6 werden wir uns mit der **Kombinatorik** beschäftigen, einem Zweig der Mathematik, in dem es um das Zählen geht. Fragen, die das Zählen betreffen, spielen stets eine wichtige Rolle, wenn nur endliche Ressourcen zur Verfügung stehen. Beispiele für solche Fragen sind: Wie viele Benutzer kann ein Computernetz verkraften? Wie viele Rechenschritte erfordert ein Algorithmus?

Die **Mächtigkeit** (Kardinalität) einer endlichen Menge S ist die Anzahl der in S enthaltenen Elemente und wird mit $|S|$ bezeichnet.

Der folgende Satz ergibt eine einfache Regel für das Abzählen der Vereinigung zweier Mengen. Er lässt sich durch vollständige Induktion auf die Vereinigung einer beliebigen endlichen Anzahl von Mengen erweitern.

Prinzip von Inklusion–Exlusion

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Beweis

Wie in Abbildung 3.7 dargestellt, ist die Menge $A \cup B$ die Vereinigung der Mengen $A - B$, $A \cap B$ und $B - A$, welches Mengen sind, die keine gemeinsamen Elemente besitzen.

Sei nun

$$|A - B| = m, \ |A \cap B| = n \text{ und } |B - A| = p$$

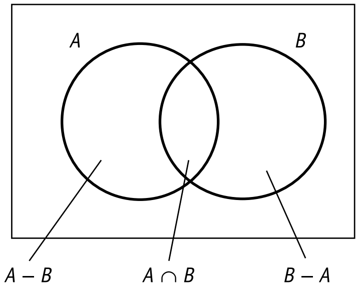

Abbildung 3.7

Dann erhalten wir:

$$\begin{aligned} |A \cup B| &= m + n + p \\ &= (m+n) + (n+p) - n \\ &= |A| + |B| - |A \cap B| \end{aligned}$$

BEISPIEL 3.7

Jeder der 63 Studenten, die an der Universität von Poppleton im ersten Jahr Informatik studieren, kann eine Reihe von Wahlfächern belegen. Angenommen, es haben 16 Studenten Rechnungswesen, 37 Studenten Betriebswirtschaft und fünf Studenten beide Fächer gewählt. Wie viele Studenten haben dann weder Rechnungswesen noch Betriebswirtschaft belegt?

LÖSUNG

Seien

$$\begin{aligned} A &= \{\text{Informatikstudenten, die Rechnungswesen belegt haben}\} \\ B &= \{\text{Informatikstudenten, die Betriebswirtschaft belegt haben}\} \end{aligned}$$

Dann ist:

$$|A| = 16,\ |B| = 37 \text{ und } |A \cap B| = 5$$

Daher ist:

$$|A \cup B| = 16 + 37 - 5 = 48$$

Also haben $63 - 48 = 15$ Studenten keines von beiden Fächern belegt.

Das Prinzip lässt sich auf eine endliche Anzahl von Mengen erweitern, und der Fall von drei Mengen wird in den Übungsaufgaben am Ende des Kapitels behandelt.

Bei der Diskussion von endlichen Mengen ist die Reihenfolge, in der Elemente aufgelistet werden, unwichtig. Um geordnete Listen von Objekten zu handhaben, führen wir zunächst den Begriff des geordneten Paars ein.

Ein **geordnetes Paar** ist ein Objekt der Form (a, b), wobei a ein Element einer Menge A und b ein Element einer Menge B ist.

Die Menge aller geordneten Paare dieser Form heißt **kartesisches Produkt** der beiden Mengen A und B und wird mit $A \times B$ bezeichnet.

Es ist also $A \times B = \{(a, b) : a \in A \text{ } \textbf{und} \text{ } b \in B\}$. Diese Operation ist von besonderer Bedeutung, da sie auf die Konzepte von **Relationen** und **Funktionen** führt, die in der Computerwissenschaft eine herausragende Rolle spielen und Gegenstand späterer Kapitel sein werden.

BEISPIEL 3.8

Seien $A = \{x, y\}$ und $B = \{1, 2, 3\}$. Geben Sie die kartesischen Produkte $A \times B$, $B \times A$ und $B \times B$ an.

LÖSUNG

Das kartesische Produkt $A \times B$ ist die Menge

$$\{(x, 1), (x, 2), (x, 3), (y, 1), (y, 2), (y, 3)\}$$

Das kartesische Produkt $B \times A$ ist die Menge

$$\{(1, x), (2, x), (3, x), (1, y), (2, y), (3, y)\}$$

Es ist zu beachten, dass diese Menge nicht dieselbe wie $A \times B$ ist.

Das kartesische Produkt $B \times B$ ist die Menge

$$\{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$$

Wie die Produkte in Beispiel 3.8 zeigen, gilt für endliche Mengen A und B: Wenn $|A| = m$ und $|B| = n$, so ist $|A \times B| = mn$. Ist wenigstens eine der beiden Mengen unendlich, so enthält das kartesische Produkt eine unendliche Zahl von Paaren.

Wie bei den vorigen Operationen auf Mengen können wir ein Venn-Diagramm zeichnen, um die Operation der Produktbildung darzustellen. Als Beispiel ist in Abbildung 3.8 die Menge $A \times B$ aus Beispiel 3.8 gezeigt.

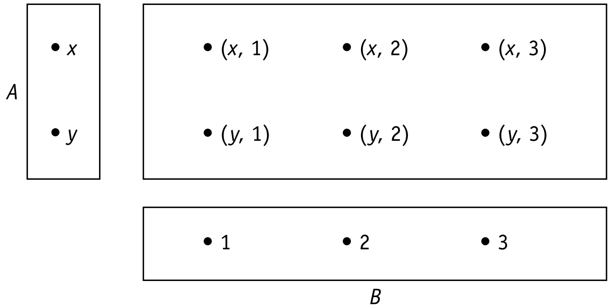

Abbildung 3.8

Als weiteres Beispiel betrachten wir das kartesische Produkt der Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen mit sich selbst. Die Menge $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, die häufig auch $\mathbb{R}^2$ geschrieben wird, besteht aus allen Paaren (x, y) von reellen Zahlen. Diese Paare können als die Koordinaten von Punkten im zweidimensionalen Raum dargestellt werden. $\mathbb{R}^2$ heißt **kartesische Ebene**. Diese Ebene ist in Abbildung 3.9 illustriert.

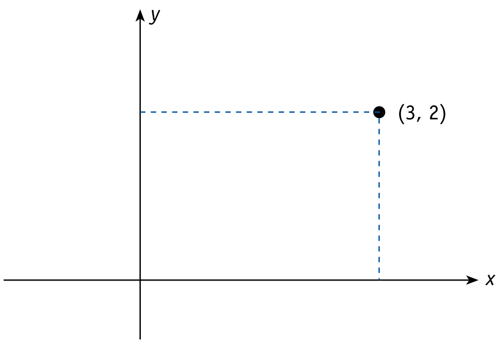

Abbildung 3.9

Das kartesische Produkt einer beliebigen Anzahl von Mengen $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ist die Menge

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) : a_i \in A_i, i = 1, 2, \ldots, n\}$$

Die Elemente dieser Menge sind einfach *endliche Listen* und sie sind die Objekte, die in vielen Programmiersprachen verarbeitet werden. Teilmengen des kartesischen Produkts von Mengen stellen auch die Objekte dar, die in Datenbanken verarbeitet werden. Diese beiden Anwendungen werden in späteren Kapiteln behandelt.

Wenn $A_1, A_2, \ldots A_n$ alle dieselbe Menge A sind, so schreiben wir A^n für das kartesische Produkt von n Exemplaren der Menge A.

BEISPIEL 3.9

Sei $B = \{0, 1\}$. Beschreiben Sie die Menge B^n.

LÖSUNG

Die Elemente von B^n sind Listen von Nullen und Einsen der Länge n. Diese heißen **Bitketten** der Länge n.

Wir beschließen unsere Dikussion von Mengen, indem wir zeigen, wie Bitketten verwendet werden können, um Operationen auf endlichen Mengen zu modellieren. Sei $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$, wobei die Elemente nur zum Zweck der Bezugnahme mit Zahlen als Indices versehen wurden. Wenn $A \subseteq S$, so ordnen wir A eine Bitkette $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ der Länge n zu, wobei $b_i = 1$, wenn $s_i \in A$, und ansonsten $b_i = 0$. Diese Bitkette heißt **charakteristischer Vektor** von A. Operationen auf Mengen können jetzt durch die Ausführung logischer Operationen auf den Komponenten der entsprechenden charakteristischen Vektoren simuliert werden, wenn wir 1 als W und 0 als F interpretieren.

BEISPIEL 3.10

Seien $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A = \{1, 3, 5\}$ und $B = \{3, 4\}$. Schreiben Sie die charakteristischen Vektoren von A und B nieder, und bestimmen Sie dann die charakteristischen Vektoren von $A \cup B$, $A \cap B$ und $\sim B$.

LÖSUNG

Der charakteristische Vektor von A ist $a = (1, 0, 1, 0, 1)$ und der charakteristische Vektor von B ist $b = (0, 0, 1, 1, 0)$. Weiter ergibt sich:

$$a \textbf{ oder } b = (1, 0, 1, 0, 1) \textbf{ oder } (0, 0, 1, 1, 0) = (1, 0, 1, 1, 1)$$

$$a \textbf{ und } b = (1, 0, 1, 0, 1) \textbf{ und } (0, 0, 1, 1, 0) = (0, 0, 1, 0, 0)$$

$$\textbf{nicht } b = \textbf{nicht } (0, 0, 1, 1, 0) = (1, 1, 0, 0, 1)$$

Diese Vektoren erlauben es uns dann, die Elemente der Mengen $A \cup B$, $A \cap B$ und $\sim B$ ‚abzulesen'. Die Ergebnisse lauten $\{1, 3, 4, 5\}$, $\{3\}$ bzw. $\{1, 2, 5\}$.

3.4 Übungsaufgaben Gruppe 3

3.1 (a) Zählen Sie die Elemente der folgenden Mengen auf:

$$\begin{aligned}
A &= \{x : x \in \mathbb{Z} \text{ und } 10 \leq x \leq 17\} \\
B &= \{x : x \in \mathbb{Z} \text{ und } x^2 < 24\} \\
C &= \{x : x \in \mathbb{Z} \text{ und } 6x^2 + x - 1 = 0\} \\
D &= \{x : x \in \mathbb{R} \text{ und } 6x^2 + x - 1 = 0\}
\end{aligned}$$

[Hinweis: $6x^2 + x - 1 = (3x - 1)(2x + 1)$]

(b) Schreiben Sie eine Mengenspezifikation in Prädikatform für die folgenden Mengen:

$$\begin{aligned} S &= \{2, 5, 8, 11, \ldots\} \\ T &= \{1, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{7}, \tfrac{1}{15}, \ldots\} \end{aligned}$$

In dieser Aufgabe lautet die Universalmenge {p, q, r, s, t, u, v, w}. **3.2**

Seien A = {p, q, r, s}, B = {r, t, v} und C = {p, s, t, u}. Geben Sie die Elemente der folgenden Mengen an:

(a) $B \cap C$

(b) $A \cup C$

(c) $\sim C$

(d) $A \cap B \cap C$

(e) $(A \cup B) \cap (A \cap C)$

(f) $\sim (A \cup B)$

(g) $B - C$

(h) $B \,\Delta\, C$

Betrachten Sie die folgenden Teilmengen eines Standardwörterbuchs der deutschen Sprache: **3.3**

$$\begin{aligned} A &= \{x : x \text{ ist ein Wort, das vor } \textit{Dachs} \text{ kommt}\} \\ B &= \{x : x \text{ ist ein Wort, das nach } \textit{Chamäleon} \text{ kommt}\} \\ C &= \{x : x \text{ ist ein Wort, das zwei aufeinander folgende gleiche Buchstaben enthält}\} \end{aligned}$$

Entscheiden Sie, welche der folgenden Behauptungen wahr sind:

(a) $C \subseteq A \cup B$

(b) *Aal* $\in (\sim B) \cap C$

(c) *Moorschneehuhn* $\in B \,\Delta\, C$

(d) $A \cap B = \emptyset$

Beschreiben Sie in Worten die Elemente der folgenden Mengen:

(e) $A \cap B \cap C$

(f) $(A \cup B) \cap (\sim C)$

3.4 Betrachten Sie die folgenden Teilmengen von $\mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} A &= \{3n : n \in \mathbb{Z} \text{ und } n \geq 4\} \\ B &= \{2n : n \in \mathbb{Z}\} \\ C &= \{n : n \in \mathbb{Z} \text{ und } n^2 \leq 100\} \end{aligned}$$

(a) Drücken Sie jede der folgenden Mengen unter Verwendung von Mengenoperationen auf Mengen durch A, B und C aus:

(i) Die Menge aller ungeraden ganzen Zahlen

(ii) $\{-10, -8, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, 8, 10\}$

(iii) $\{6n : n \in \mathbb{Z} \text{ und } n \geq 2\}$

(iv) $\{-9, -7, -5, -3, -1, 1, 3, 5, 7, 9\}$

(b) Schreiben Sie eine Mengenspezifikation der Menge $A - B$ in Prädikatform.

3.5 Erstellen Sie eine Folge von Venn-Diagrammen, um das Distributivgesetz

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

zu illustrieren. Beweisen Sie, dass das Gesetz für alle Mengen A, B und C gilt.

3.6 Erstellen Sie eine Folge von Venn-Diagrammen, um die Mengenidentität

$$A \cap (B \,\Delta\, C) = (A \cap B) \,\Delta\, (A \cap C)$$

zu illustrieren. Zeigen Sie anhand eines Beispiels, dass die Menge $A \cup (B \,\Delta\, C)$ nicht notwendigerweise gleich der Menge $(A \cup B)\Delta(A \cup C)$ ist.

3.7 Beweisen Sie unter Verwendung der Gesetze der Mengenalgebra die folgenden Behauptungen:

(a) $\sim (A \cap \sim B) \cup B = \sim A \cup B$

(b) $\sim (\sim A \cap \sim (B \cup C)) = A \cup B \cup C$

(c) $(A \cup B \cup C) \cap (A \cup \sim B \cup C) \cap \sim (A \cup C) = \emptyset$

(d) $(A - B) - C = A - (B \cup C)$

(e) $A \,\Delta\, A \,\Delta\, A = A$

Der Operator $*$ sei definiert durch: **3.8**

$$A * B = \sim (A \cap B).$$

Zeichnen Sie das Venn-Diagramm, das $A * B$ entspricht.

Beweisen Sie unter Verwendung der Gesetze der Mengenalgebra die folgenden Behauptungen:

(a) $A * A = \sim A$

(b) $(A * A) * (B * B) = A \cup B$

(c) $(A * B) * (A * B) = A \cap B$

(a) Zeigen Sie mit der Hilfe von Venn-Diagrammen, dass für endliche Mengen A, B und C gilt: **3.9**

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

(b) Studenten, die an der Universität von Poppleton im ersten Jahr Informatik studieren, können eine Reihe von Wahlfächern belegen. Im vergangen Jahr wählten 25 Studenten Rechnungswesen, 27 Studenten Betriebswirtschaft und zwölf Studenten Touristik. Es gab 20 Studenten, die sowohl Rechnungswesen als auch Betriebswirtschaft belegten, fünf Studenten, die Rechnungswesen und Touristik wählten, und drei Studenten, die Kurse in Betriebswirtschaft und Touristik besuchten. Kein Student belegte alle drei Wahlfächer. Wie viele Studenten haben wenigstens ein Wahlfach belegt? Wie viele der beteiligten Studenten haben nur Touristik belegt?

Was lässt sich über die nicht leeren Mengen A und B sagen, wenn $A \times B = B \times A$? **3.10**

Nicht leere Mengen A, B und C erfüllen $A \times B = A \times C$. Folgt daraus notwendigerweise, dass $B = C$? Erklären Sie Ihre Antwort.

Beweisen Sie die folgenden Behauptungen für beliebige Mengen A, B und C: **3.11**

(a) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

(b) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$

3.12 Die **Potenzmenge** $\wp(A)$ einer beliebigen Menge A ist die Menge aller Teilmengen von A. Anders gesagt ist $\wp(A) = \{C : C \subseteq A\}$.

Bestimmen Sie $\wp(A)$ für $A = \{1, 2, 3\}$.

Beweisen Sie, dass $\wp(A) \cap \wp(B) = \wp(A \cap B)$ für beliebige Mengen A und B.

Zeigen Sie anhand eines Beispiels, dass $\wp(A) \cup \wp(B)$ nicht notwendigerweise gleich $\wp(A \cup B)$ ist.

3.13 Sei die Universalmenge durch $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ gegeben. Schreiben Sie die charakteristischen Vektoren von $A = \{1, 2, 4, 5\}$ und $B = \{3, 5\}$ nieder.

Bestimmen Sie die charakteristischen Vektoren der Mengen $A \cup \sim B$ und $A \,\Delta\, B$, und schreiben Sie dann die Elemente der beiden Mengen nieder.

ZUSAMMENFASSUNG

Eine **Menge** ist eine Zusammenfassung von Objekten, die **Elemente** der Menge heißen.

$\emptyset$ bzw. $\{\}$ bezeichnet die **leere Menge,** und U bezeichnet die Universalmenge.

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ bezeichnet die Menge der **natürlichen Zahlen**.

$\mathbb{Z} = \{1, \pm 2, \pm 3, \ldots\}$ bezeichnet die Menge der **ganzen Zahlen**.

$\mathbb{Q} = \{p/q : p, q \text{ ganze Zahlen}, q \neq 0\}$ bezeichnet die Menge der **rationalen Zahlen**.

$\mathbb{R} = \{\text{alle Dezimalzahlen}\}$ bezeichnet die Menge der **reellen Zahlen**.

Eine **Teilmenge** einer Menge S ist eine Menge A, für die gilt: Wenn $x \in A$, so ist $x \in S$. Dieses Verhältnis wird mit $A \subseteq S$ bezeichnet.

Zwei Mengen sind genau dann **gleich,** wenn jede der beiden Mengen Teilmenge der anderen Menge ist.

Die **Vereinigung** zweier Mengen A und B ist die Menge $A \cup B = \{x : x \in A \textbf{ oder } x \in B\}$.

Die **Schnittmenge** zweier Mengen A und B ist die Menge $A \cap B = \{x : x \in A \textbf{ und } x \in B\}$.

Das **Komplement einer Menge *B* bezüglich einer Menge *A*** ist die Menge
$A - B = \{x : x \in A \textbf{ und } x \notin B\}$.

Das **Komplement** einer Menge A (bezüglich der Universalmenge U) ist die Menge $\sim A = \{x : x \notin A\}$.

Die **symmetrische Differenz** zweier Mengen A und B ist die Menge $A \Delta B = \{x : (x \in A \textbf{ und } x \notin B) \textbf{ oder } (x \in B \textbf{ und } x \notin A)\}$.

Mengen und Operationen auf Mengen erfüllen die folgenden **Gesetze der Mengenalgebra**:

Assoziativgesetze

$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C \qquad A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

Kommutativgesetze

$A \cup B = B \cup A \qquad A \cap B = B \cap A$

Identitätsgesetze

$A \cup \emptyset = A \qquad A \cap U = A$

$A \cup U = U \qquad A \cap \emptyset = \emptyset$

Idempotenzgesetze

$A \cup A = A \qquad A \cap A = A$

Distributivgesetze

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \qquad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Komplementgesetze

$A \cup \sim A = U \qquad A \cap \sim A = \emptyset$

$\sim U = \emptyset \qquad \sim \emptyset = U$

$\sim (\sim A) = A \qquad \sim (\sim A) = A$

de Morgansche Gesetze

$\sim (A \cup B) = \sim A \cap \sim B \qquad \sim (A \cap B) = \sim A \cup \sim B$

Die zu einer Mengenidentität **duale** Identität erhält man, indem man $\cap$ und $\cup$ sowie $\emptyset$ und U gegeneinander austauscht.

Die **Mächtigkeit** (Kardinalität) einer endlichen Menge S ist die Anzahl der in S enthaltenen Elemente und wird mit $|S|$ bezeichnet.

Das **Prinzip von Inklusion-Exklusion** besagt, dass $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.

Das **kartesische Produkt** zweier Mengen A und B ist die Menge $A \times B = \{(a, b) : a \in A \textbf{ und } b \in B\}$.
Elemente von $A \times B$ heißen **geordnete Paare**.

Die Menge $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{R}^2$ heißt **kartesische Ebene**.

Eine **Bitkette** (der Länge n) ist ein Element von B^n, wobei $B = \{0, 1\}$.

3.5 Anwendung: Wissensbasierte Systeme

Ein **Expertensystem** dient der Verwahrung der Kenntnisse und der Erfahrung von Experten in einem bestimmten Bereich. Dies geschieht durch Aufbau einer **Wissensbasis** bekannter Fakten und einer Menge von **Inferenzregeln**. An das System gerichtete Anfragen können dann unter Rückgriff auf die Wissensbasis abgeleitet (oder direkt beantwortet) werden.

Wir bauen ein einfaches Expertensystem auf, **DIE KÖNIGLICHE FAMILIE**, um Anfragen zu britischen Königen und Königinnen ab Georg I. und deren Familien zu beantworten.

Zunächst stellen wir eine Liste von Fakten bereit, wobei wir die Prädikate *Elternteil* und *Gattin* verwenden.

Elternteil(Georg 1, Georg 2)
Elternteil(Georg 3, Georg 4)
Elternteil(Georg 3, Wilhelm 4)
Elternteil(Georg 3, Eduard)
Elternteil(Eduard, Victoria)
Elternteil(Victoria, Eduard 7)
Elternteil(Eduard 7, Georg 5)
Elternteil(Georg 5, Eduard 8)
Elternteil(Georg 5, Georg 6)
Elternteil(Georg 6, Elisabeth 2)
Elternteil(Victoria, Alice)
Elternteil(Alice, Victoria Alberta)
Elternteil(Victoria Alberta, Alice Mountbatten)
Elternteil(Alice Mountbatten, Philip)

Gattin(Sophie, Georg 1)
Gattin(Wilhelmina, Georg 2)
Gattin(Charlotte, Georg 3)
Gattin(Caroline, Georg 4)
Gattin(Adelaide, Wilhelm 4)
Gattin(Victoria, Albert)
Gattin(Alexandra, Eduard 7)
Gattin(Victoria Maria, Georg 5)
Gattin(Elisabeth Königinmutter, Georg 6)
Gattin(Elisabeth 2, Philip)

Wir definieren, dass *Elternteil*(x, y) bedeutet: *x ist ein Elternteil von y* und dass *Gattin*(x, y) bedeutet: *x ist die Gattin von y*. Dies ist die gebräuchliche Verwendung von Prädikaten in Programmiersprachen wie PROLOG.

Um Informationen zu gewinnen, müssen wir in der Datenbank recherchieren, indem wir Fragen stellen. Fragen wir beispielsweise: ‚War Georg 1 ein Elternteil von Georg 3?', so ist die Antwort nein, da *Elternteil*(Georg 1, Georg 3) nicht in der Liste von Fakten enthalten ist.

Anfragen werden in der folgenden Form geschrieben: **?** – *Prädikat*. Dabei wird von allen Variablen, die auftreten, angenommen, dass sie mit einem Existenzquantor verbunden sind. Zum Beispiel entspricht **?** – *Gattin*(x, Georg 4) der Anfrage: ‚Hat Georg 4 eine Gattin?'. Die Antwort lautet ja, da sich mit x = Caroline ein Faktum aus der Liste ergibt.

AUFGABE 1

Bestimmen Sie die Antworten auf die folgenden Anfragen:

(a) **?** – *Gattin*(Elisabeth 2, Philip)

(b) **?** – *Elternteil*(Sophie, Georg 2)

(c) **?** – *weiblich*(Caroline)

(d) **?** – *Gattin*(Philip, Elisabeth 2)

LÖSUNG

Nur für (a) lautet die Antwort ja, da es die einzige Anfrage ist, die einem Eintrag aus der Liste von Fakten entspricht. Es ist zu beachten, dass die Antwort nein bedeutet, dass der betreffende Eintrag nicht in der Liste von Fakten enthalten ist.

Um ein wissensbasiertes System mit seiner Leistungsfähigkeit beim Lösen von Aufgaben auszustatten, führen wir Inferenzregeln ein. Eine Inferenzregel definiert, ausgehend von den Prädikaten, die in der ursprünglichen Liste von Fakten vorkommen, ein neues Prädikat. Antworten auf Anfragen bezüglich der neuen Prädikate können dann aus der Liste von Fakten abgeleitet werden und generieren auf diese Weise neue Informationen.

In dem System **DIE KÖNIGLICHE FAMILIE** scheint es offensichtlich, dass das x in *Gattin*(x, y) weiblich ist. Dies wird formal in der Inferenzregel (1) definiert, die besagt: ‚Wenn x die Gattin von y ist, so ist x weiblich'.

```
(1) weiblich(x) aus Gattin(x, y)
```

Ähnlich führen wir die Regel (2) ein, die das Prädikat *Gatte* definiert. Dieses Prädikat besagt: ‚Wenn x die Gattin von y ist, so ist y der Gatte von x'.

```
(2) Gatte(y, x) aus Gattin(x, y)
```

AUFGABE 2

Wie ändern sich die Antworten auf die Anfragen aus Aufgabe 1? Beantworten Sie die folgenden weiteren Anfragen:

(e) **?** – *weiblich*(Alice Mountbatten)

(f) **?** – *Gatte*(Albert, Victoria)

(g) **?** – *männlich*(Albert)

LÖSUNG

Aufgabe 1 (c) wird nach Anwendung der Inferenzregel (1) auf den in der Datenbank enthaltenen Eintrag *Gattin*(Caroline, Georg 4) mit ja beantwortet.

Die Antwort auf (e) lautet nein, da Alice Mountbatten in der Liste nicht als Gattin von jemandem aufgeführt ist.

Die Antwort auf (f) lautet ja, und zwar aufgrund von *Gattin*(Victoria, Albert) und Inferenzregel (2).

Die Antwort auf (g) lautet nein, da das Prädikat *männlich* noch nicht definiert ist.

Eine geeignete Inferenzregel, die der Regel (1) ähnlich ist und Informationen über männliche Familienmitglieder ergibt, lautet:

(3) *männlich*(*x*) **aus** *Gattin*(*y*, *x*).

Eine geeignete Inferenzregel, um Informationen über Söhne zu erhalten, lautet:

(4) *Sohn*(*x*, *y*) **aus** (*männlich*(*x*) **und** *Elternteil*(*y*, *x*)).

AUFGABE 3

Beantworten Sie die folgenden Anfragen:

(a) **?** – *männlich*(Wilhelm 4)

(b) **?** – *Sohn*(Wilhelm 4, Georg 3)

(c) **?** – *Sohn*(Wilhelm 4, Charlotte)

(d) **?** – *Sohn*(Eduard 8, Georg 5)

LÖSUNG

(a) Ja – aufgrund von *Gattin*(Adelaide, Wilhelm 4) und Inferenzregel (3).

(b) Ja – aufgrund von *Elternteil*(Georg 3, Georg 4), Aufgabe 3(a) und Inferenzregel (4).

Die Antwort auf (c) und (d) lautet nein.

Man beachte die Limitiertheit des Systems, die aufgrund der Antworten auf (c) und (d) deutlich wird und die daher rührt, dass sich das System an die vorgegebenen Fakten und Inferenzregeln halten muss. Es werden nur Herrscher als Elternteile angegeben und ihre Ehefrauen erscheinen als Gattinnen. Obwohl also Charlotte mit Georg 3 verheiratet und Wilhelm 4 einer ihrer Söhne war, ist in der Datenbank nur Georg 3 als Elternteil von Wilhelm 4 aufgeführt, und daher kann die Inferenzregel (4) nicht zu einer bejahenden Antwort auf Anfrage (c) führen. Bei Anfrage (d) besteht das Problem darin, dass für Eduard 8 keine Gattin aufgeführt ist, so dass die Anwendung der Inferenzregel (3) eine verneinende Antwort auf die Anfrage **?** – *männlich*(Eduard 8) ergibt.

Wie wir gesehen haben, kann eine verneinende Antwort auf eine Anfrage bedeuten: ‚Nicht bekannt', wenn die in einer Datenbank vorliegenden Informationen unvollständig sind, wie es bei existierenden Expertensystemen häufig der Fall ist. Durch Sorgfalt und Aufmerksamkeit bei der Formulierung von Inferenzregeln und bei der Auswahl der ursprünglichen Prädikate lässt sich dieses Problem teilweise beheben. Leider kann sich die Unsicherheit bei der Interpretation von verneinenden Antworten auf die Interpretation von bejahenden Antworten übertragen, wenn der logische Operator **nicht** auftritt.

Betrachten wir zum Beispiel die folgenden, anscheinend sinnvollen Inferenzregeln (A) und (B):

```
(A) männlich(x) aus Gattin(y, x)
(B) weiblich(x) aus (nicht männlich(x))
```

Wir verwenden die ursprüngliche Liste von Fakten mit den einzigen Inferenzregeln (A) und (B) und betrachten die Anfrage **?** – *weiblich*(Eduard 8). Die Anfrage *männlich*(Eduard 8) führt zu einer verneinenden Antwort, und somit wird **nicht** *männlich*(Eduard 8) ein durch Inferenz ermitteltes Faktum. Die Inferenzregel (B) ergibt für die Anfrage **?** – *weiblich*(Eduard 8) eine bejahende Antwort! Es sind also vollständige Informationen erforderlich, bevor Negationen zulässig sind.

AUFGABE 4

Formulieren Sie eine Inferenzregel, um Mütter aus **DIE KÖNIGLICHE FAMILIE** zu erhalten. *Mutter*(x) ist in dem Sinn zu interpretieren, dass x entweder die Gattin eines Elternteils von jemandem oder weiblich und Elternteil von jemandem ist. Wenden Sie diese neue Inferenzregel zusammen mit der Inferenzregel (1) auf die ursprünglichen Daten an, um so viele Mütter wie möglich zu ermitteln. Ist Ihre Inferenzregel zufrieden stellend?

LÖSUNG

Die vorgeschlagene Inferenzregel lautet:

Mutter(x) **aus** ([*Gattin(x, z)* **und** *Elternteil(z, y)*]) **oder** ([*weiblich(x)* **und** *Elternteil(x, y)*])

Der Teil [*Gattin*(x, z) **und** *Elternteil*(z, y)] führt auf Alexandra, Charlotte, Elisabeth Königinmutter, Sophie und Victoria Maria. Der Teil [*weiblich*(x) **und** *Elternteil(x, y)*] führt auf Victoria.

Die Inferenzregel führt nicht auf alle Mütter, da die Datenbank unvollständig ist. Beispielsweise sind die Kinder von Elisabeth 2 nicht aufgeführt.

Auch wird der erste Teil der Regel Stiefmütter als Mütter einbeziehen, und es wird zu Problemen kommen, wenn ein Herrscher mehrere Gattinnen hat. Dies demonstriert die Schwierigkeiten, die entstehen, wenn man versucht die reale Welt in einem einfachen mathematischen Modell darzustellen.