

Vorwort

Der Inhalt dieses Buches ist so konzipiert, dass die mathematischen Grundlagen, numerischen Verfahren und Algorithmen eng mit ingenieurtechnischen Anwendungen verknüpft sind. Dieser übergreifende Charakter bietet sowohl Studenten als auch Praktikern des Bauingenieurwesens und verwandter Fachrichtungen vielfältige Möglichkeiten der Aneignung, Wiederholung und Vertiefung fachrelevanter Mathematik, ohne sofort auf spezielle Monographien zurückgreifen zu müssen.

Eine wesentliche Komponente des Buches ist die Demonstration der Möglichkeiten moderner Computeralgebrasysteme für die Lösung mathematischer und ingenieurtechnischer Probleme. Das hier verwendete System Mathcad ist insbesondere für Ingenieure zugeschnitten. Obwohl der Leser dieses System nicht beherrschen muss, um den Inhalt des Buches zu verstehen, wird er nach eigenen Versuchen dessen Vorteile schnell erkennen.

Die beigelegte CD enthält eine Sammlung von Mathcad-Arbeitsblättern mit ausführlichen Beispielen zu den einzelnen Kapiteln.

Das vorliegende Buch ist aus einem dreisemestrigen Mathematikkurs der klassischen Gebiete Algebra, Analysis, Differentialgleichungen und Elemente der Statistik sowie einem Praktikum mit Mathcad hervorgegangen, die von den Autoren für die Studenten des Studienganges Bauingenieurwesen an der Fachhochschule Neubrandenburg gehalten wurden. Hinzugefügt wurden Themen, die dem Leser weitere Gebiete erschließen.

Wir danken dem Lektorat Bauwesen, insbesondere Frau Koch und Herrn Harms, für die angenehme und konstruktive Zusammenarbeit sowie dem Teubner Verlag für die Aufnahme dieses Buches in das Verlagsangebot.

Neubrandenburg, im Januar 2004

Peter Grobstich
Gerhard Strey

4.3 Ebene und räumliche Vektoren

4.3.1 Elementare Eigenschaften

Die ebenen und räumlichen Vektoren sind **gerichtete Größen**. Sie werden neben den **ungerichteten Größen** oder **Skalaren** zur Beschreibung der Erscheinungen in Natur und Technik benötigt. Einige Beispiele skalarer Größen sind Zeit, Temperatur, Masse und Volumen. Zu den Vektoren gehören u. a. räumliche Verschiebungen, Geschwindigkeiten, Kräfte und Momente. Hinsichtlich ihrer Anwendung unterscheidet man freie Vektoren, die parallel verschoben werden dürfen, linienflüchtige Vektoren (z. B. Kräfte), die innerhalb der Wirkungslinie verschiebbar sind, und gebundene Vektoren (Ortsvektoren), deren Angriffspunkt fest ist.

Der Vektor \underline{a} wird gekennzeichnet durch den Betrag (Zahl \times Einheit) und durch die Richtung (orientierte Wirkungslinie). Dabei ist (auch in der Notation) zwischen dem Vektor \underline{a} und seinem Betrag $a = |\underline{a}|$ genau zu unterscheiden. In diesem Kapitel werden ebene und räumliche Vektoren vorrangig mit unterstrichen Buchstaben bezeichnet; in der Literatur verwendet man auch fette oder Frakturbuchstaben bzw. Pfeile über den Buchstaben. Vektoren werden grafisch durch Pfeile dargestellt, deren Länge den Betrag und deren Pfeilspitze die Richtung symbolisiert. Die Richtung kann bei Wahl eines kartesischen Koordinatensystems durch mathematisch orientierte Richtungswinkel bzgl. der Achsen festgelegt werden. Für Vektoren sind Operationen definiert:

Die Summe (Resultierende)

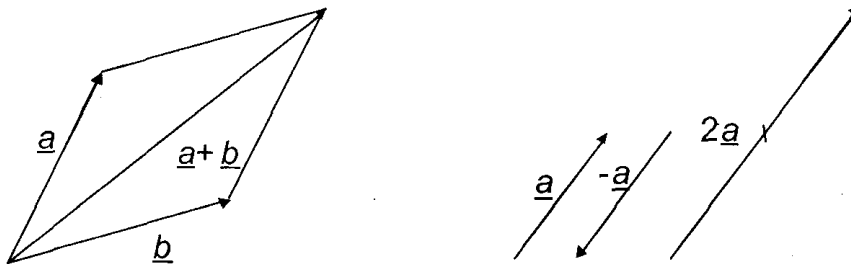
$$\underline{s} = \underline{a} + \underline{b}$$

wird durch die gerichtete Diagonale im Parallelogramm mit den Seiten \underline{a} und \underline{b} dargestellt.

Das "Vielfache" \underline{v} eines Vektors \underline{a}

$$\underline{v} = t \underline{a} \quad (\text{Zahl} \times \text{Vektor}) \quad \text{hat den Betrag} \quad v = |\underline{v}| = |t| |\underline{a}|$$

und ist je nach Vorzeichen von t parallel oder antiparallel zu \underline{a} .



Für diese Operationen lassen sich Rechenregeln herleiten, die die Bezeichnung Addition rechtfertigen. Aus ihnen folgt u. a. die Ermittlung der Resultierenden mehrerer Vektoren mit dem Vektorpolygonzug (Seileck). Im FORMELANHANG TABELLE_VEKTOREN sind Eigenschaften und Regeln der Vektorrechnung dargestellt.

Von Bedeutung ist die eindeutige Zerlegung eines Vektors in eine Summe von Komponenten mit vorgeschriebenen Richtungen. Speziell wählt man zur Vereinfachung der Rechnungen als „Basisvektoren“ Einheitsvektoren in Richtungen der (orthogonalen!) kartesischen Achsen. Werden diese Einheitsvektoren wie folgt bezeichnet

$$\underline{e}_x = \mathbf{i}, \underline{e}_y = \mathbf{j}, \underline{e}_z = \mathbf{k}, \quad \text{so gilt } \underline{a} = a_x \cdot \mathbf{i} + a_y \cdot \mathbf{j} + a_z \cdot \mathbf{k} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}.$$

Hier ist genau zwischen der Komponente (Vektor) $a_x \cdot \mathbf{i}$ und der Koordinate (Zahl) $a_x = |a_x \cdot \mathbf{i}|$ zu unterscheiden. In der Koordinatendarstellung erfolgen Addition und Vielfachenbildung „koordinatenweise“, so dass ebene und räumliche Vektoren als einspaltige Matrizen behandelt werden können: $\underline{a} = \mathbf{a}$.

Für ebene Vektoren gelten für die Basis $(\underline{e}_x, \underline{e}_y)$ folgende grundlegenden Formeln:

$$\underline{a} = a_x \cdot \underline{e}_x + a_y \cdot \underline{e}_y = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} \quad \boxed{a = |\underline{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}} \quad \boxed{\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot \cos(\alpha) \\ a \cdot \sin(\alpha) \end{pmatrix}}.$$

Der Datei VEKTOROPERATIONEN.MCD sind folgende Ausschnitte entnommen:

a) Ebene Vektoren

Beispiel: $P_1(2,1)$ $P_2(5,3)$

"Ortsvektoren" der Punkte

$$\underline{P}_1 := (2 \ 1)^T \quad \underline{P}_2 := (5 \ 3)^T$$

Vektor als gerichtete Strecke P_1P_2

$$\underline{a} := \underline{P}_2 - \underline{P}_1 \quad \underline{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

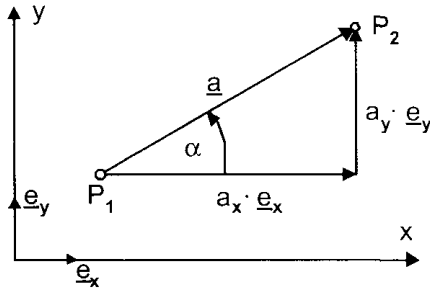
Betrag $a := |\underline{a}| \quad a = 3.61$

Richtungswinkel $\alpha := \text{atan2}(\underline{a}_1, \underline{a}_2) \quad \alpha = 33.69 \text{ Grad}$

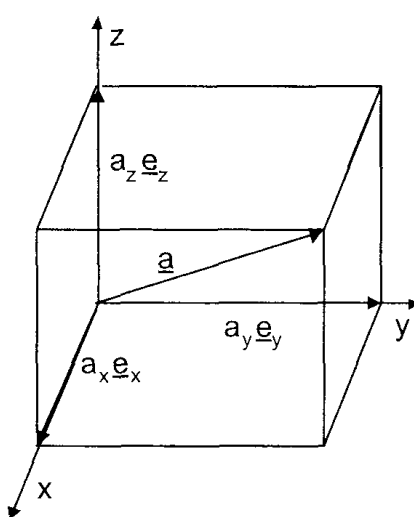
Koordinatenermittlung aus Betrag und Winkel

$$a_x := a \cdot \cos(\alpha) \quad a_y := a \cdot \sin(\alpha)$$

$$a_x = 3 \quad a_y = 2$$



b) Räumliche Vektoren



Einheitsvektoren in Richtung der kartesischen Achsen:

$$\underline{e}_x := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \underline{e}_y := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \underline{e}_z := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

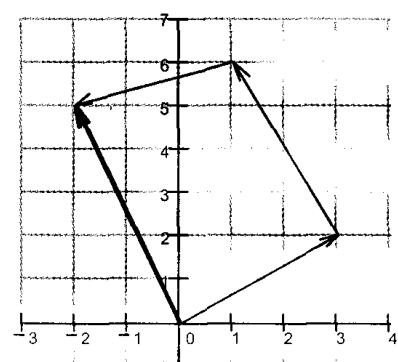
$$|\underline{e}_x| = 1 \quad |\underline{e}_y| = 1 \quad |\underline{e}_z| = 1$$

Komponentendarstellung: $\underline{a} := a_x \underline{e}_x + a_y \underline{e}_y + a_z \underline{e}_z$

Koordinatendarstellung (Spaltenvektor): $\underline{a} \rightarrow \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$

Betrag des Vektors: $|\underline{a}| = \sqrt{(a_x)^2 + (a_y)^2 + (a_z)^2}$

2. Vektoroperationen



2.1 Vektoraddition $\underline{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \underline{c} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}$

Summe (Resultierende): $\underline{s} := \underline{a} + 2 \underline{b} + \underline{c} \quad \underline{s} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$

Betrag und Richtungswinkel: $|\underline{s}| = 5.39$

$$\phi := \text{atan2}(\underline{s}_1, \underline{s}_2) \quad \phi = 111.8 \text{ Grad}$$

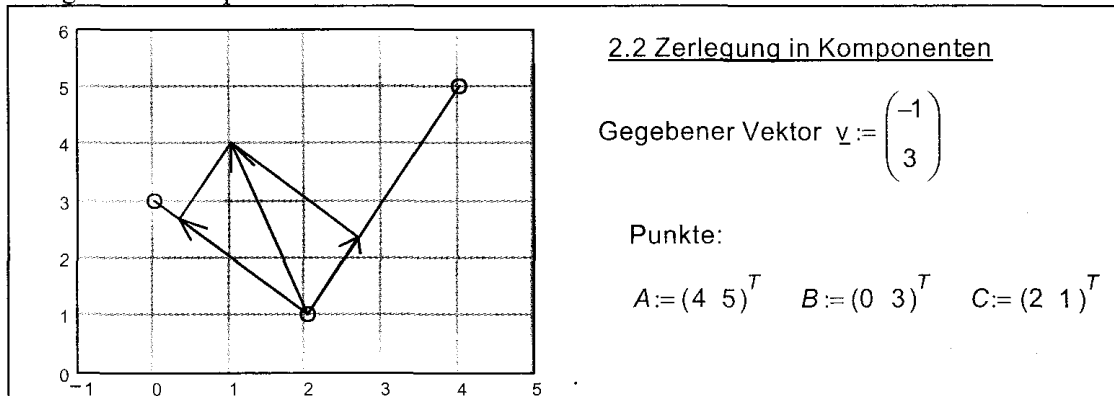
Die Komponentenzerlegung der Vektoren ist für das Rechnen mit Vektoren insbesondere dann notwendig, wenn andere Basisvektoren verwendet werden. Die **Komponentendarstellung** eines Vektors bezüglich vorgeschriebener (linear unabhängiger) Basisvektoren ist eine häufig in der Praxis auftretende Aufgabe. So ist z. B. die Ermittlung der Größe der in den Stäben wirkenden Komponenten einer am Stabwerk angreifenden Kraft eine Grundaufgabe der Statik. Prinzipiell lässt sich der Lösungsansatz an ebenen Vektoren erläutern. Sind die Basisvektoren \underline{e}_1 und \underline{e}_2 und der Vektor \underline{a} in Koordinatendarstellung gegeben, so werden die Faktoren t_1 und t_2 der Komponentendarstellung

$$\underline{a} = \underline{a} = t_1 \cdot \underline{e}_1 + t_2 \cdot \underline{e}_2$$

gesucht. Deutet man die Basisvektoren als Spaltenvektoren einer Matrix \mathbf{A} und t_1, t_2 als Elemente eines Vektors \mathbf{t} , so entsteht eine Matrixgleichung

$$\underline{a} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{t} \quad \text{mit der Lösung} \quad \mathbf{t} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \underline{a}.$$

Nachfolgend ein Beispiel aus der Datei VEKTOROPERATIONEN.MCD.



Vorgegebene Richtungen (Strecken \underline{CA} und \underline{CB}):

$$\underline{CA} := \underline{A} - \underline{C} \quad \underline{CB} := \underline{B} - \underline{C} \quad \underline{CA} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \underline{CB} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Richtungseinheitsvektoren: $\underline{e1} := \frac{1}{|\underline{CA}|} \underline{CA}$ $\underline{e2} := \frac{1}{|\underline{CB}|} \underline{CB}$ $\underline{e1} = \begin{pmatrix} 0.45 \\ 0.89 \end{pmatrix}$ $\underline{e2} = \begin{pmatrix} -0.71 \\ 0.71 \end{pmatrix}$

Ansatz: $\underline{t_1 \cdot e1 + t_2 \cdot e2 = a}$ $|t_1|$ und $|t_2|$ sind die Längen der Komponenten von \underline{v} in Richtung \underline{CA} und \underline{CB}

Umformen in eine Matrixgleichung:

$$\underline{A \cdot t = a} \quad \text{mit } \underline{A} := \text{erweitern}(\underline{e1}, \underline{e2}) \quad \underline{A} = \begin{pmatrix} 0.45 & -0.71 \\ 0.89 & 0.71 \end{pmatrix}$$

Lösung: $\underline{t := A^{-1} \cdot a}$ $t_1 = 1.49$ $t_2 = 2.36$

Wir führen noch zwei Bezeichnungen für spezielle Vektoren ein.

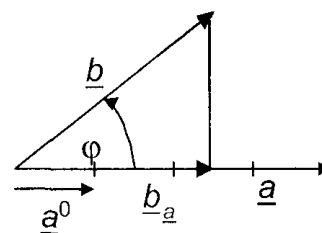
Der Einheitsvektor in Richtung eines Vektors \underline{a}

wird mit \underline{a}^0 bezeichnet: $\underline{a}^0 = \frac{\underline{a}}{|\underline{a}|}$

Die (senkrechte) Projektion eines Vektors \underline{b} auf die Wirkungslinie des Vektors \underline{a} wird mit \underline{b}_a bezeichnet.

Zur Berechnung der Projektion benötigt man das im nächsten Abschnitt eingeführte Skalarprodukt. Es gilt dann

$$\underline{b}_a = b \cdot \cos(\varphi) \cdot \underline{a}^0 = (\underline{b} \circ \underline{a}^0) \cdot \underline{a}^0.$$



4.3.2 Produkte von Vektoren

4.3.2.1 Das Skalarprodukt

Das Skalarprodukt

$$\underline{a} \circ \underline{b} := |\underline{a}| \cdot |\underline{b}| \cdot \cos(\varphi)$$

mit dem von den Vektoren \underline{a} und \underline{b} eingeschlossenen Winkel $\varphi = \angle(\underline{a}, \underline{b})$, ($0 \leq \varphi \leq 180^\circ$) ist eine Zahl (Skalar). Es gelten folgende Eigenschaften

$$|\underline{a} \circ \underline{b}| = |\underline{a}| \cdot |\underline{b}| = |\underline{a}| \cdot |\underline{b}| \cdot \begin{cases} > 0, \text{ wenn } \underline{a} \uparrow \uparrow \underline{b} \\ = 0, \text{ wenn } \underline{a} \uparrow \rightarrow \underline{b} \\ < 0, \text{ wenn } \underline{a} \uparrow \downarrow \underline{b} \end{cases}$$

$$\underline{a} \circ \underline{b} = \underline{b} \circ \underline{a}, \quad \underline{a} \circ (\underline{b} + \underline{c}) = \underline{a} \circ \underline{b} + \underline{a} \circ \underline{c}, \quad (t \cdot \underline{a}) \circ \underline{b} = t \cdot (\underline{a} \circ \underline{b}).$$

Da das Skalarprodukt orthogonaler Vektoren gleich 0 ist und das Skalarprodukt eines Einheitsvektors mit sich selbst gleich 1, folgt für die Rechnung mit den Koordinaten

$$\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z \quad \text{und} \quad |\underline{a}| = \sqrt{\underline{a} \circ \underline{a}} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

Sind die Vektoren in Koordinatenform gegeben, so können die eingeschlossenen Winkel durch Umstellen der Definitionsgleichung nach $\cos(\varphi)$ leicht ermittelt werden.

$$\cos(\alpha_x) = \frac{\underline{a} \circ \underline{b}}{|\underline{a}| \cdot |\underline{b}|} = \frac{a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}$$

Beispielsweise erhält man die Winkel zwischen Vektor und Achsen aus den „Richtkosinus“

$$\cos(\alpha_x) = \frac{\underline{a} \circ \underline{e}_x}{|\underline{a}| \cdot |\underline{e}_x|} = \frac{a_x}{|\underline{a}|}, \quad \cos(\alpha_y) = \frac{a_y}{|\underline{a}|}, \quad \cos(\alpha_z) = \frac{a_z}{|\underline{a}|}.$$

Das Skalarprodukt in Koordinatenform kann auch als Matrizenprodukt gedeutet werden, wenn die einelementigen Matrizen (c_{11}) wie in der Mathematik üblich mit ihrem Element c_{11} identifiziert werden.

$$\underline{a} \circ \underline{b} = \underline{a}^T \cdot \underline{b} = (a_x \ a_y \ a_z) \cdot \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = (a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z) = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z.$$

In dieser Form wird das Skalarprodukt auf n -reihige Spaltenvektoren verallgemeinert:

$$\mathbf{a} \circ \mathbf{b} = \mathbf{a}^T \cdot \mathbf{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + \dots + a_n \cdot b_n, \quad |\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a}^T \cdot \mathbf{a}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}.$$

In Mathcad existiert in der Matrizenpalette ein eigener Operator für das Skalarprodukt. Das Skalarprodukt ist aber auch mit dem einfachen Multiplikationszeichen zu berechnen. Zur Vermeidung von Fehlern achte man auf die Darstellung der Vektoren als Spaltenvektoren! In der Form $\mathbf{a}^T \cdot \mathbf{b}$ entsteht eine Matrix, da in Mathcad einelementige Matrizen nicht mit ihrem Element identifiziert werden. Das Betragszeichen wird in Mathcad zur Berechnung des Betrags einer (reellen oder komplexen) Zahl, des Betrags eines Vektors oder auch der Determinante einer quadratischen Matrix verwendet.

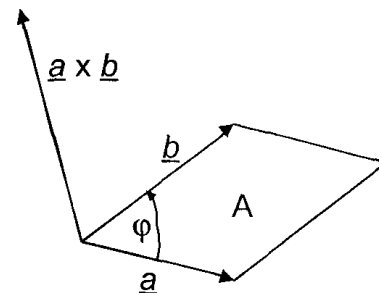
Am Ende des Abschnitts 4.3.2 folgen aus der Datei VEKTOROPERATIONEN.MCD Beispiele zur Anwendung der Produkte.

4.3.2.2 Das Vektorprodukt

Das Vektorprodukt $\underline{c} := \underline{a} \times \underline{b}$ (räumlicher) Vektoren ist ein Vektor mit den Eigenschaften

- (1) $\underline{a} \times \underline{b}$ steht senkrecht auf dem von \underline{a} und \underline{b} aufgespannten Parallelogramm,
- (2) \underline{a} , \underline{b} , $\underline{a} \times \underline{b}$ bilden ein Rechtssystem,
- (3) der Betrag des Vektorprodukts ist gleich dem Flächeninhalt A des Parallelogramms

$$A = |\underline{c}| = |\underline{a} \times \underline{b}| = |\underline{a}| \cdot |\underline{b}| \cdot \sin(\varphi), \quad 0 \leq \varphi \leq 180^\circ$$



Es gelten folgende Eigenschaften

$$(\underline{a} \times \underline{b}) \circ \underline{a} = (\underline{a} \times \underline{b}) \circ \underline{b} = 0, \quad \underline{a} \parallel \underline{b} \rightarrow \underline{a} \times \underline{b} = 0, \quad \underline{a} \times \underline{b} = -\underline{b} \times \underline{a},$$

$$\underline{a} \times (\underline{b} + \underline{c}) = \underline{a} \times \underline{b} + \underline{a} \times \underline{c}, \quad (t \cdot \underline{a}) \times \underline{b} = t \cdot (\underline{a} \times \underline{b})$$

und $|\underline{a} \circ \underline{b}|^2 + |\underline{a} \times \underline{b}|^2 = |\underline{a}|^2 \cdot |\underline{b}|^2.$

Die letzte Beziehung folgt aus

$$|\underline{a}|^2 \cdot |\underline{b}|^2 \cdot \cos^2(\varphi) + |\underline{a}|^2 \cdot |\underline{b}|^2 \cdot \sin^2(\varphi) = |\underline{a}|^2 \cdot |\underline{b}|^2 \cdot (\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)) = |\underline{a}|^2 \cdot |\underline{b}|^2.$$

Für die kartesischen Einheitsvektoren gilt speziell

$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = -\mathbf{j} \times \mathbf{i} = \mathbf{k}, \quad \mathbf{j} \times \mathbf{k} = -\mathbf{k} \times \mathbf{j} = \mathbf{i}, \quad \mathbf{k} \times \mathbf{i} = -\mathbf{i} \times \mathbf{k} = \mathbf{j}; \quad \mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{k} = \underline{0}.$$

Daraus folgt unter Verwendung der oben genannten Eigenschaften die Koordinatendarstellung für das Vektorprodukt

$$(a_x \cdot \mathbf{i} + a_y \cdot \mathbf{j} + a_z \cdot \mathbf{k}) \times (b_x \cdot \mathbf{i} + b_y \cdot \mathbf{j} + b_z \cdot \mathbf{k}) = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_y \cdot b_z - a_z \cdot b_y \\ a_z \cdot b_x - a_x \cdot b_z \\ a_x \cdot b_y - a_y \cdot b_x \end{pmatrix}.$$

Die Komponentendarstellung gewinnt man formal durch Entwicklung nach der ersten Spalte aus der Determinante

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & a_x & b_x \\ \mathbf{j} & a_y & b_y \\ \mathbf{k} & a_z & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_y & b_y \\ a_z & b_z \end{vmatrix} \cdot \mathbf{i} - \begin{vmatrix} a_x & b_x \\ a_z & b_z \end{vmatrix} \cdot \mathbf{j} + \begin{vmatrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \end{vmatrix} \cdot \mathbf{k}.$$

Für „ebene“ Vektoren gilt speziell

$$\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a_x \cdot b_y - a_y \cdot b_x \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \end{vmatrix} \cdot \mathbf{k}.$$

In der ebenen Vektorrechnung stellt die Determinante das sogenannte Flächenprodukt der (ebenen) Vektoren \underline{a} und \underline{b} dar. Es liefert den „orientierten“ Flächeninhalt A des von \underline{a} und \underline{b} aufgespannten Parallelogramms. Das Vorzeichen wird durch die Drehrichtung von φ bestimmt und kennzeichnet die Orientierung der Fläche. Mit Hilfe des Flächenprodukts lassen sich Formeln entwickeln zur Berechnung des Flächeninhalts von Vielecken aus den Eckpunktkoordinaten. Im Abschnitt 4.6.3 wird darauf im allgemeineren Zusammenhang eingegangen.

Mathcad besitzt in der Matrizenpalette einen eigenen Operator für das Vektorprodukt. Dieser ist in Übereinstimmung mit der mathematischen Definition nur für dreireihige Spaltenvektoren definiert.

4.3.2.3 Das Spatprodukt

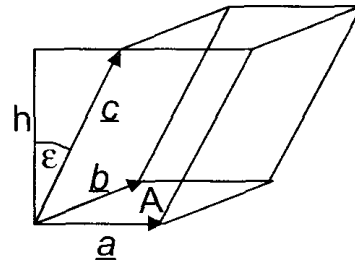
Unter den vielfältigen Verknüpfungen der beiden Produkte hat das Spatprodukt $[\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}]$ eine einfache geometrische Bedeutung.

Das Spatprodukt ist wie folgt definiert

$$[\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}] := (\underline{a} \times \underline{b}) \circ \underline{c}$$

Es ist das Volumen des von \underline{a} , \underline{b} , \underline{c} aufgespannten Spates.

$$\begin{aligned} V &= A \cdot h = |\underline{a} \times \underline{b}| \cdot |\underline{c}| \cdot \cos(\varepsilon) \\ &= |(\underline{a} \times \underline{b}) \circ \underline{c}| = |[\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}]| \end{aligned}$$



Das Spatprodukt kann auch als Determinante der drei Spaltenvektoren \underline{a} , \underline{b} , \underline{c} berechnet werden.

$$[\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}] := \begin{vmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{vmatrix}, \text{ es gilt } [\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}] = [\underline{b}, \underline{c}, \underline{a}] = [\underline{c}, \underline{a}, \underline{b}] = -[\underline{a}, \underline{c}, \underline{b}].$$

Liegen alle drei Vektoren in einer Ebene, d. h. sind sie komplanar, so ist das Produkt wegen der linearen Abhängigkeit gleich 0. Das kann man benutzen, um Ebenengleichungen zu definieren.

Für ausführlichere Einführungen in die Vektorrechnung einschließlich der Anwendungen in der analytischen Geometrie verweisen wir z. B. auf PAPULA[21].

Wir ergänzen den Abschnitt mit drei Beispielen aus der Datei VEKTOROPERATIONEN.MCD.

Beispiel 1: Anwendungen der verschiedenen Produkte

Die Vektoren \underline{a} , \underline{b} , \underline{c} spannen einen Spat auf.

$$\underline{a} := \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \underline{b} := \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \underline{c} := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

2.3. Anwendung der verschiedenen Produkte

a) Länge der Raumdiagonalen: $\underline{d} := \underline{a} + \underline{b} + \underline{c}$ $\underline{d} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix}$ $|\underline{d}| = 10.49$

b) Winkel zwischen Raumdiagonale und Seite c: $\underline{c} \cdot \underline{d} = |\underline{c}| \cdot |\underline{d}| \cdot \cos(\alpha)$

$$\alpha := \arccos\left(\frac{\underline{c} \cdot \underline{d}}{|\underline{c}| \cdot |\underline{d}|}\right) \quad \alpha = 35.02 \text{ Grad}$$

c) Inhalt der Grundfläche (Seiten a und b): $\underline{a} \times \underline{b} = \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 15 \end{pmatrix}$ aber $\underline{b} \times \underline{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ -15 \end{pmatrix}$

$$A := |\underline{a} \times \underline{b}| \quad A = 16.31$$

d) Volumen des Spats: $(\underline{a} \times \underline{b}) \cdot \underline{c} = 93$ $V := |(\underline{a} \times \underline{b}) \cdot \underline{c}|$ $V = 93$

oder mittels
Determinante $\mathbf{M} := \text{erweitern}(\underline{a}, \underline{b}, \underline{c})$ $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \\ 1 & -1 & 6 \end{pmatrix}$ $|\mathbf{M}| = 93$

Beispiel 2: Ebenengleichung

2.4. Beispiel zur Anwendung in der räumlichen Geometrie

a) Gleichung der von den Punkten P1, P2, P3 aufgespannten Ebene:

$$\underline{P1} := (4 \ 0 \ 0)^T \quad \underline{P2} := (0 \ 2 \ 0)^T \quad \underline{P3} := (1 \ 1 \ 5)^T$$

aufspannende Vektoren: $\underline{u} := \underline{P2} - \underline{P1}$ $\underline{v} := \underline{P3} - \underline{P1}$

beliebiger Punkt in der Ebene: $\underline{P} := (x \ y \ z)^T$ $\underline{p} = \underline{P} - \underline{P1}$

Spatprodukt $(\underline{u} \times \underline{v}) \cdot \underline{p}$ muss gleich 0 sein! ----> Ebenengleichung:

$$\boxed{g(x, y, z) = 0} \quad \text{mit} \quad \boxed{g(x, y, z) := (\underline{u} \times \underline{v}) \cdot (\underline{P} - \underline{P1}) \rightarrow 10 \cdot x - 40 + 20 \cdot y + 2 \cdot z}$$

Zum Beispiel nach z auflösen: $z = f(x, y)$

$$f(x, y) := g(x, y, z) = 0 \text{ auflösen, } z \rightarrow -5 \cdot x + 20 - 10 \cdot y$$

$$\boxed{f(x, y) \rightarrow -5 \cdot x + 20 - 10 \cdot y} \quad f(1, 1) = 5 \quad f(4, -2) = 20$$

Beispiel 3: Abstand eines Punktes von der Ebene (aus Beispiel 2)

b) Orientierter Abstand h eines Punkte P(x,y,z) von der Ebene:

Volumen des von \underline{u} , \underline{v} , \underline{p} aufgespannten Spates:

Spatprodukt = Höhe mal Grundfläche $g(x, y, z) = (\underline{u} \times \underline{v}) \cdot \underline{p} = h \cdot |\underline{u} \times \underline{v}|$

$$h(x, y, z) := \frac{g(x, y, z)}{|\underline{u} \times \underline{v}|}$$

$h(4, 0, 0) = 0$ $h(4, -2, 20) = 0$ *Ebenenpunkte!*

$\underline{Q1} := (4 \ 4 \ 4)^T$ $h(4, 4, 4) = 3.92$ *Punkte auf verschiedenen*

$\underline{Q2} := (1 \ 0 \ 1)^T$ $h(1, 0, 1) = -1.25$ *Seiten der Ebene!*

4.3.2.4 Die Regel von CRAMER

Das Spatprodukt kann zur Lösung einer Vektorgleichung benutzt werden. Multipliziert man

$$x_1 \cdot \underline{a} + x_2 \cdot \underline{b} + x_3 \cdot \underline{c} = \underline{d} \quad (*)$$

jeweils von rechts skalar mit $\circ(\underline{b} \times \underline{c})$, $\circ(\underline{c} \times \underline{a})$, $\circ(\underline{a} \times \underline{b})$, so werden stets zwei Summanden gleich Null und die Gleichungen sind nach den Unbekannten x_i auflösbar:

$$x_1 = \frac{[\underline{d}, \underline{b}, \underline{c}]}{[\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}]}, \quad x_2 = \frac{[\underline{a}, \underline{d}, \underline{c}]}{[\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}]}, \quad x_3 = \frac{[\underline{a}, \underline{b}, \underline{d}]}{[\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}]} \quad (**).$$

Werden die Vektoren \underline{a} , \underline{b} , \underline{c} als Spalten einer Koeffizientenmatrix \mathbf{M} und die x_i als Elemente eines Lösungsvektors \mathbf{x} gedeutet, so wird (*) zu einem Gleichungssystem (mit $\underline{d} = \mathbf{d}$)

$$\mathbf{M} \mathbf{x} = \mathbf{d}$$

und (**) liefert die Lösung des Gleichungssystems mit Hilfe von Determinanten.

Im Nenner steht die Koeffizientendeterminante $|\mathbf{M}|$ und die Determinanten im Zähler entstehen daraus durch Ersetzen einer Spalte mit dem Vektor der rechten Seite. Dies ist der Spezialfall der Regel von CRAMER¹⁾, die analog für Gleichungssysteme mit n Unbekannten gilt.

¹⁾ G. CRAMER (1704 – 1752)