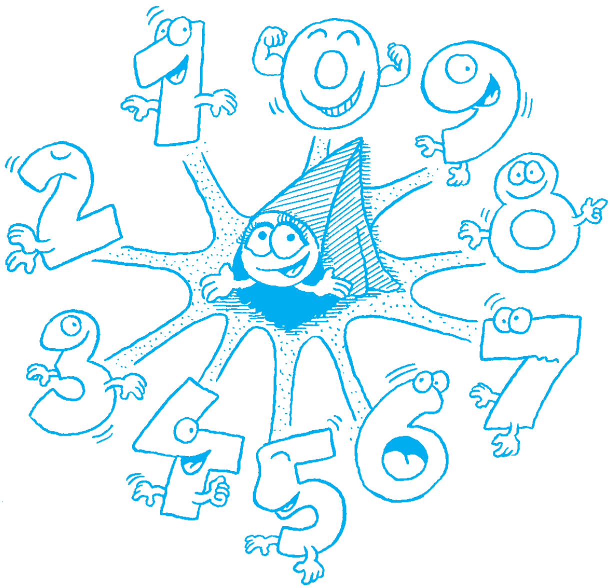
Werner Tiki Küstenmacher
Heinz Partoll · Irmgard Wagner

Mathe macchiato

Cartoon-Mathematikkurs für
Schüler und Studenten



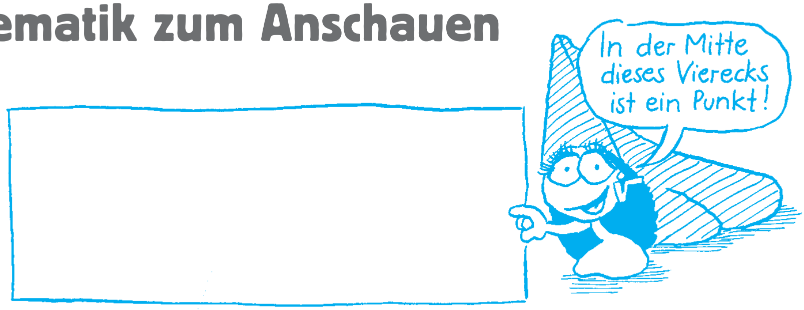
ein Imprint von Pearson Education
München · Boston · San Francisco · Harlow, England
Don Mills, Ontario · Sydney · Mexico City · Madrid · Amsterdam

Kapitel 3

PUNKTE IN BEWEGUNG

Geometrie

Mathematik zum Anschauen



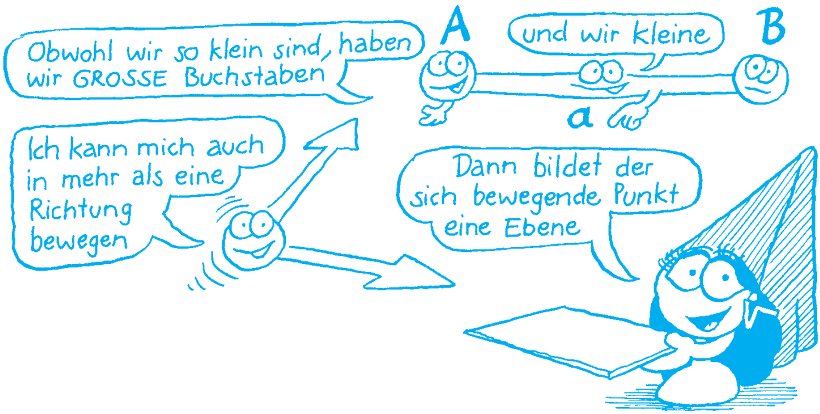
Zu sehen ist er nicht, und wenn man die Darstellung noch so sehr vergrößern würde. Denn ein mathematischer **Punkt** hat keine Ausdehnung. Damit man sich aber eine Vorstellung machen kann, machen wir ihn ein bisschen größer und zeichnen einen mehr oder weniger dicken Batzer (in diesem Büchlein sogar ein kleines Wesen):

Der Punkt hat eine ähnliche Bedeutung wie die Zahl Null in der Algebra. Ohne Punkt keine Geometrie. Weil der Punkt sich in keine Richtung ausdehnt, sagt man auch, er habe die Dimension 0. Aber warte nur …

Wenn sich der Punkt in eine Richtung bewegt, entsteht etwas Neues: die Gerade.

Sie hat nur in einer Richtung eine Ausdehnung. Deshalb ist sie unendlich dünn. Man sagt auch, sie habe die Dimension 1.

Mit zwei Punkten ist eine **Strecke** eindeutig definiert. Damit man sich bequemer über alles unterhalten kann, bekommen die Elemente in der Geometrie Namen. Sie sind meist nur einen Buchstaben lang – wohl wegen der Schreibfaulheit der Mathematiker.

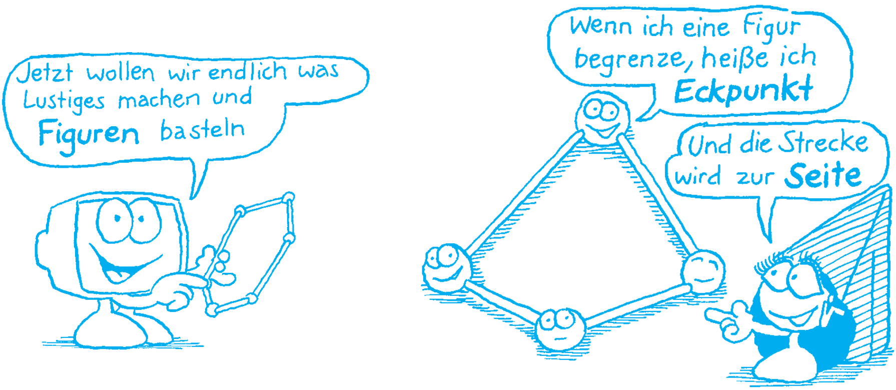


Die **Ebene** hat zwei Ausdehnungen, also zwei Dimensionen. Zweidimensionale Geometrie ist ganz praktisch, denn sie hat genauso viele Dimensionen wie ein Blatt Papier.

Der Unterschied ist, dass die Ebene als abstrakte mathematische Idee unbegrenzt ist, das Blatt Papier aber irgendwo anfängt und aufhört. Es ist sogar verschieden lang in die beiden Richtungen.

Miss die Seiten dieses Büchleins ab; es misst ca. 21 cm in der Länge und ist 14,85 cm breit. Das ist das DIN-Format A 5.

Warum diese krummen Zahlen und warum A 5? Dieses Rätsel lösen wir bei den Gleichungen auf Seite 100.



Eine ebene Figur mit nur zwei Eckpunkten gibt es nicht.

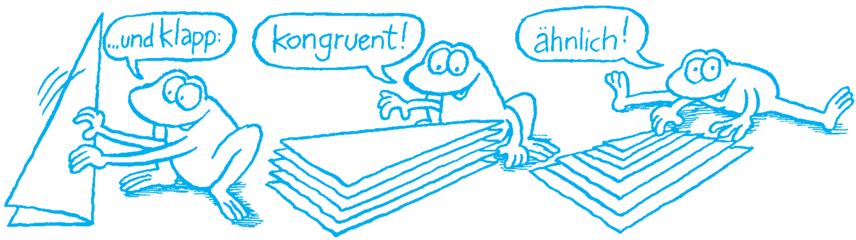
Eine Figur mit drei Eckpunkten heißt **Dreieck**.

Von solchen Dreiecken gibt es etliche Sonderformen.

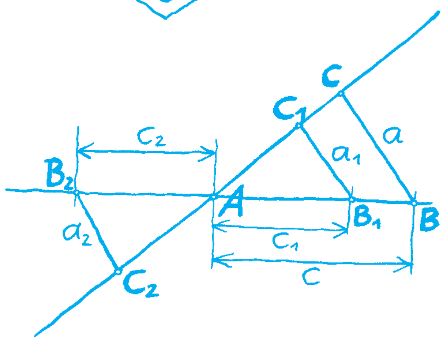
Zum Beispiel das gleichschenklige Dreieck.

Dreiecke können verwandt sein. Wenn wir das gleichschenklige Dreieck in der Mitte falten, entstehen zwei deckungsgleiche Dreiecke. Der Fachmann sagt kongruente Dreiecke. Das ist der höchste Verwandtschaftsgrad bei Dreiecken.

Wenn nur die Winkel gleich sind, heißen die Dreiecke **ähnlich**.



Bei ähnlichen Dreiecken sind die Seiten zwar nicht gleich, aber die entsprechenden Seiten stehen im gleichen Verhältnis zueinander. Das kann man in der Praxis vielfältig ausnutzen.



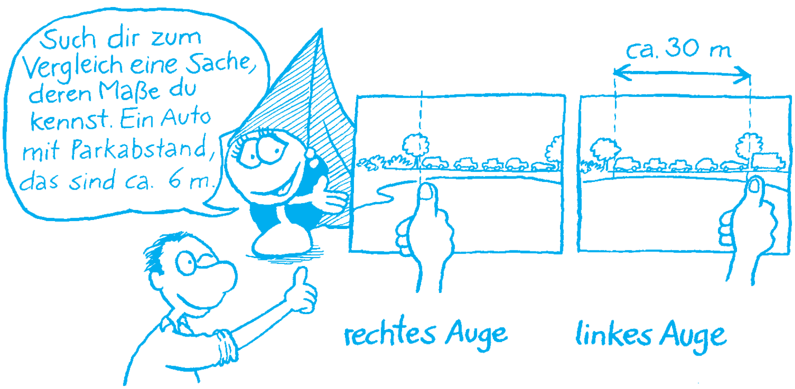
$$\boxed{\frac{a}{c} = \frac{a_1}{c_1} = \frac{a_2}{c_2}}$$

Die Ähnlichkeit von Dreiecken lässt sich zum Beispiel sehr schön zur Entfernungsmessung verwenden.

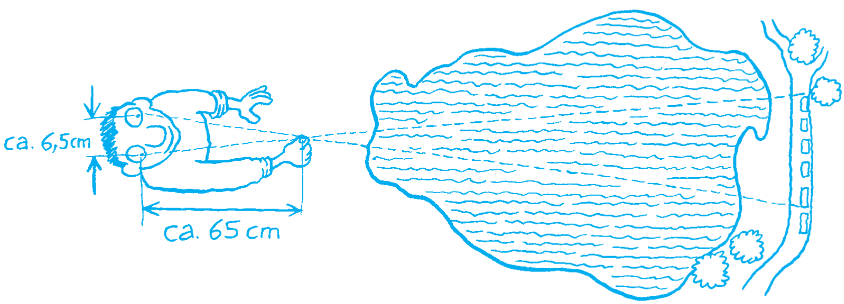
Du stehst am Ufer eines Sees und würdest gern herausfinden, wie weit es bis zum anderen Ufer ist. Denn du traust dir zu, 200 Meter weit zu schwimmen. Mehr ist dir zu gefährlich. Entfernungen auf dem Wasser sind schwer zu schätzen. Da siehst du am gegenüberliegenden Ufer mehrere Autos parken.

Hier kannst du den „Daumensprung“ und das Wissen über die Ähnlichkeit für die Entfernungsmessung einsetzen. Das Verfahren beruht darauf, dass du jedes Auge abwechselnd zukneifen kannst und dass du weißt: Dein Arm ist 65 cm lang und deine Pupillen haben einen Abstand von 6,5 cm.

Der Trick: Du schätzt die Länge einer Strecke am anderen Ufer und kannst daraus berechnen, wie weit du von dieser Strecke entfernt bist.



Ein normal großes Auto ist etwa 4,50 Meter lang. Mit Parkabstand rechnen wir der Einfachheit halber 6 Meter. Dann sind 5 Autos grob gerechnet 30 Meter.



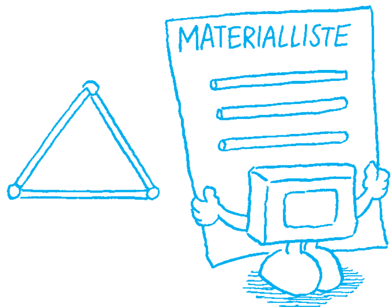
Das Dreieck, das zwischen deinem Daumen und deinen Pupillen ist, ist ähnlich dem Dreieck vom Daumen zu den beiden Punkten der Autoschlange, die dir der Daumensprung angibt. Den Verhältnisfaktor aus dem ersten Dreieck kannst du ausrechnen: 65 cm : 6,5 cm = 10.

Die geschätzte Länge des Daumensprungs ist 30 m. Da die Dreiecke ähnlich sind, muss die Seebreite ca. 300 m sein, damit der Verhältnisfaktor der Seiten im großen Dreieck auch wieder 10 beträgt.

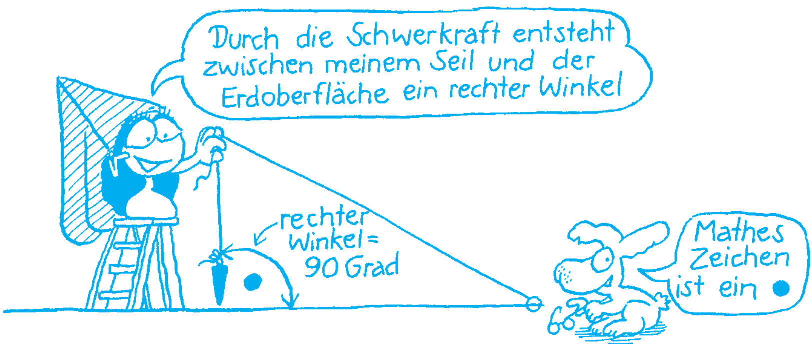
Der See ist also etwa 300 Meter breit – bei deinen Schwimmkünsten wäre es also klüger, den Teich nicht zu durchqueren.

In Zukunft musst du nicht mehr so ausführlich rechnen. Du kannst dir einfach merken: Geschätzte Daumensprung-Strecke mal 10 ist gleich Entfernung.

Zurück zu den geometrischen Figuren: Eine ganz spezielle Sonderform eines gleichschenkligen Dreiecks ist das gleichseitige Dreieck. Es hat drei gleich lange Seiten und daher auch drei gleiche Winkel. Auf Seite 66 werden wir das brauchen.

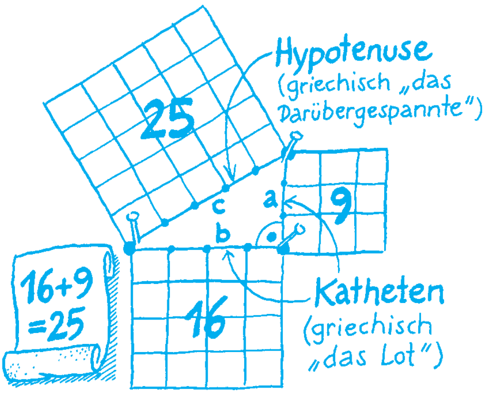


Auch das **rechtwinklige Dreieck** ist ein ganz berühmter Sonderfall eines Dreiecks.



Pythagoras von Samos hat sich um diese Dreiecksform in besonderer Weise verdient gemacht.

Er erforschte einen Spezialfall des rechtwinkligen Dreiecks, das schon bei den Baumeistern Ägyptens verwendet wurde. Steckte man das Seil mit den 3, 4 und 5 Knoten, wie abgebildet, in den Sand, entstand an einer Ecke stets ein bildschöner rechter Winkel.

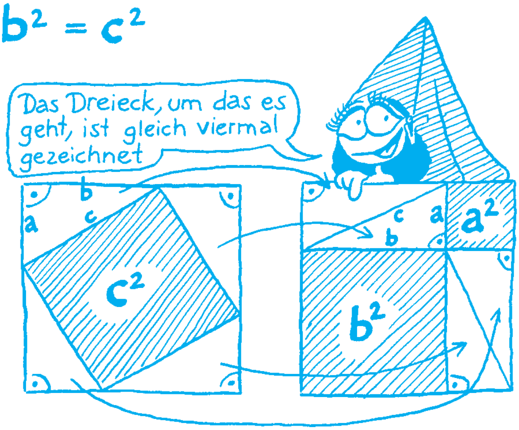


Pythagoras tüftelte, bis er das Gesetz herausgefunden hatte, das dem ägyptischen Handwerkszeug zu Grunde lag. Er errichtete über jeder der drei Seiten ein Quadrat. Die Quadrate der beiden Seiten links und rechts vom rechten Winkel sind zusammengezählt genauso groß wie das Quadrat über der langen Seite.

Das gilt für alle rechtwinkligen Dreiecke, nicht nur für die praktische ägyptische 3-4-5-Knotenschnur: Aus der einzelnen Beobachtung ist der allgemeine Lehrsatz des Pythagoras geworden. Er kann heutzutage ganz kurz und praktisch mit Hilfe von Variablen geschrieben werden:

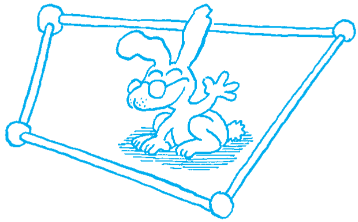
$$a^2 + b^2 = c^2$$

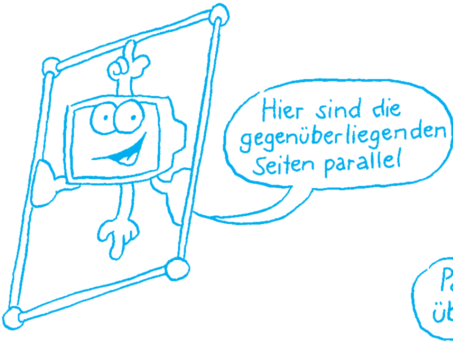
Es gibt über 100 verschiedene Beweise für diesen Lehrsatz. Einen besonders originellen in Puzzleform zeige ich dir hier.



Die Flächen der beiden Quadrate sind gleich groß, denn die Seiten sind jeweils $a + b$. Da beide Quadrate 4 mal dasselbe rechtwinkelige Dreieck enthalten, muss die Fläche des schraffierten Quadrats links mit der Summe der schraffierten Quadratflächen rechts übereinstimmen.

Ist das nicht alles wunderbar einfach: Eine Figur mit vier Eckpunkten heißt – jawoll – **Viereck**.



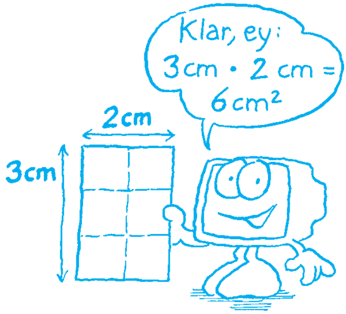


Wieder gibt es allerhand Sondermodelle – das Parallelogramm zum Beispiel.

Ein spezielles Modell eines Parallelogramms ist das Rechteck. Hier stehen die Seiten rechtwinklig aufeinander.

Ein noch spezielleres Modell ist das Quadrat. Es ist ein Parallelogramm mit vier gleich langen Seiten und vier rechten Winkeln.

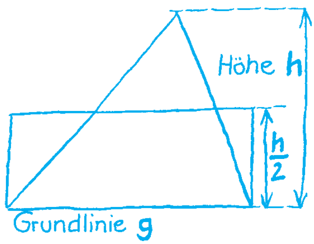
Das Quadrat ist die ideale Figur schlechhin und ist deshalb auch das Maß für die Flächenberechnung.

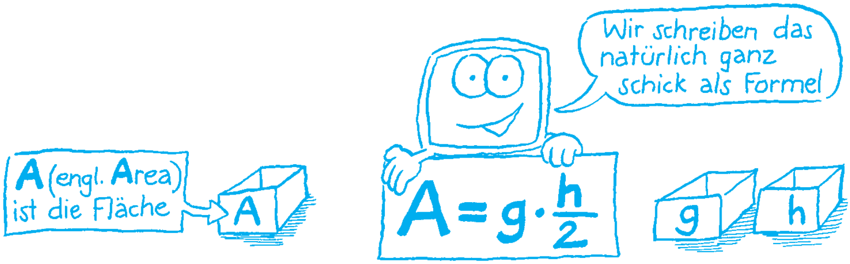


Damit kann man sehr praktisch die Fläche eines Rechtecks messen. Die Formel dafür kennen wir ja schon.

Aber wie kann man damit die Fläche eines Dreiecks messen? Hier hilft ein Trick namens Flächenverwandlung.

Die Fläche eines Dreiecks ist also gleich der Fläche eines Rechtecks, das die Grundlinie als Länge und seine halbe Höhe als Breite hat.





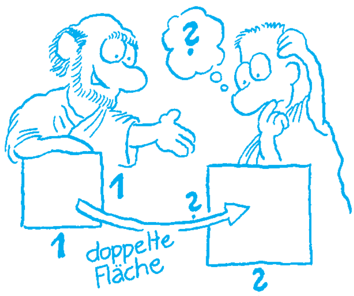
Bei Flächenberechnungen stoßen wir aber sehr bald auf Probleme. Es ist leider nicht immer so, dass sich eine Fläche als ganzzahliges Vielfaches einer anderen darstellen lässt.

Oder umgekehrt: Eine Fläche ist zum Beispiel doppelt so groß wie eine andere – das gilt aber nicht für die Seiten.

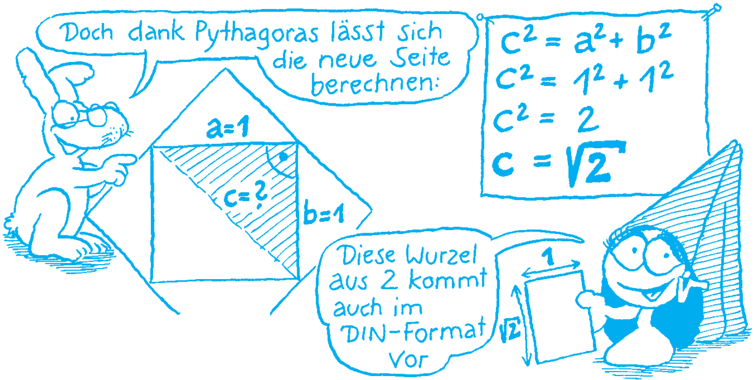
Schon die alten Griechen sind auf dieses Problem gestoßen.

Der gelehrte Sokrates hat damit den mathematisch nicht vorgebildeten Sklaven Menon aufs Glatteis geführt: „Ein Quadrat hat eine Seitenlänge von einem Fuß. Wie lang ist die Seite eines Quadrats mit der doppelten Fläche?“ Natürlich war die Antwort zunächst: „Zwei Fuß.“

Doch ein solches Quadrat hätte natürlich nicht die doppelte, sondern die vierfache Fläche.



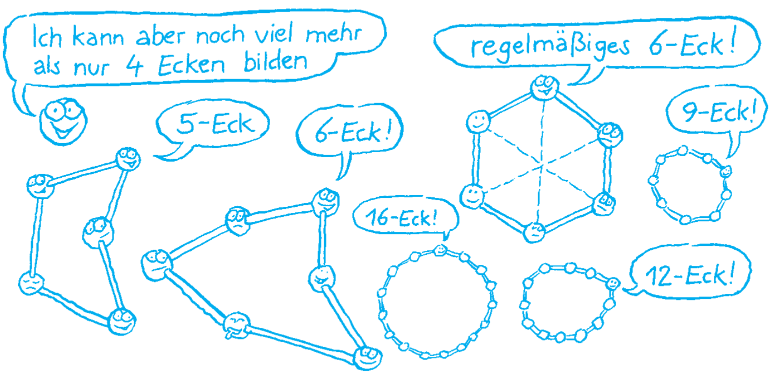
Der Trick des Sokrates: Er betrachtet das Quadrat als vier gleichschenklig-rechtwinklige Dreiecke. Noch mal die vier außen angeklebt – und schon ist das Quadrat mit der doppelten Fläche da, auf der Spitze stehend.

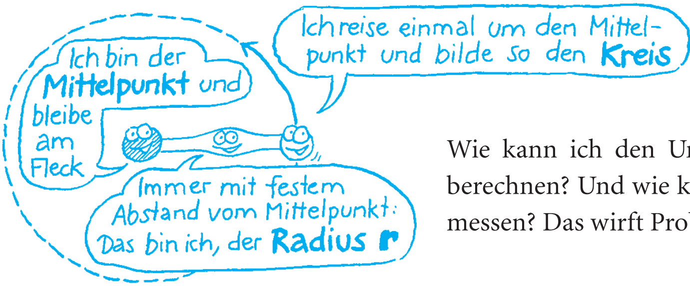


Die neue Seite ist ganz offensichtlich nicht einfach doppelt so lang. Die zwei Seiten können miteinander nicht durch ganze Zahlen verglichen werden. Das war für die alten Griechen schon ein Problem (denn nur die ganzen Zahlen sind göttlich ...).

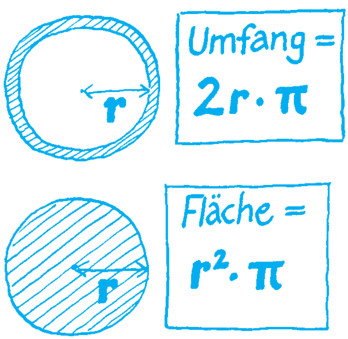
Die Lösung ist wieder einmal eine Zahl mit unendlich vielen nicht periodischen Dezimalstellen.

Das regelmäßige 6-Eck besteht aus 6 gleichseitigen Dreiecken. So kann man weitermachen mit dem regelmäßigen 7, 8, 9, 10...-Eck bis zu unendlich vielen Ecken. Dann gibt es nur noch Ecken und keine Seiten mehr. Nun ist das Ganze ein Kreis. So ähnlich musste wohl Archimedes gedacht haben, wie du zwei Seiten weiter sehen wirst.



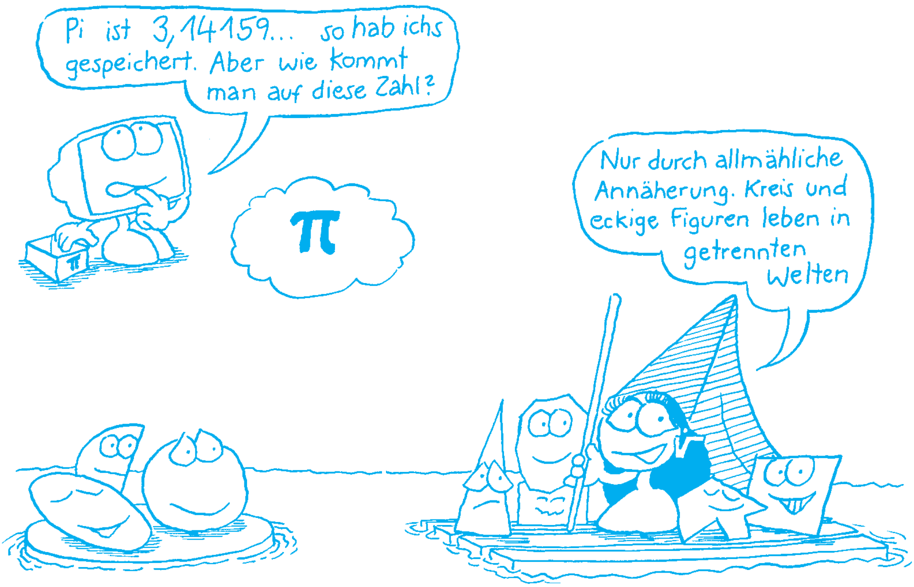


Wie kann ich den Umfang eines Kreises berechnen? Und wie kann ich seine Fläche messen? Das wirft Probleme auf.



Die Lösung ist eine Formel mit einer Konstanten, eben der Kreiszahl π („Pi“), die uns schon seit längerem im Fußtext begleitet. Der Umfang eines Kreises ist das Doppelte des Radius multipliziert mit dieser unbekannten Zahl. Die Fläche des Kreises ist das Quadrat des Radius (Radius mal Radius) multipliziert mit π.

 40901 22495 34301 46549 58537 10507 92279 68925 89235 42019 95611 21290



Der Grieche Archimedes lebte zu Beginn des dritten Jahrhunderts vor Christus in Syrakus (Sizilien).

Als die Stadt von den Römern erobert wurde, saß der greise Mathematiker im Garten und zeichnete Figuren in den Sand. Sein Leben lang war er auf der Suche nach Annäherungen für die Kreiszahl π. Ein römischer Legionär betrat mit festem Schritt den Garten. Der Greis bemerkte, dass ein Fuß in seine Linien tritt und er sprach die berühmten Worte: „Störe meine Kreise nicht.“

Fast im gleichen Augenblick setzt das Schwert des Legionärs seinem Leben ein Ende.

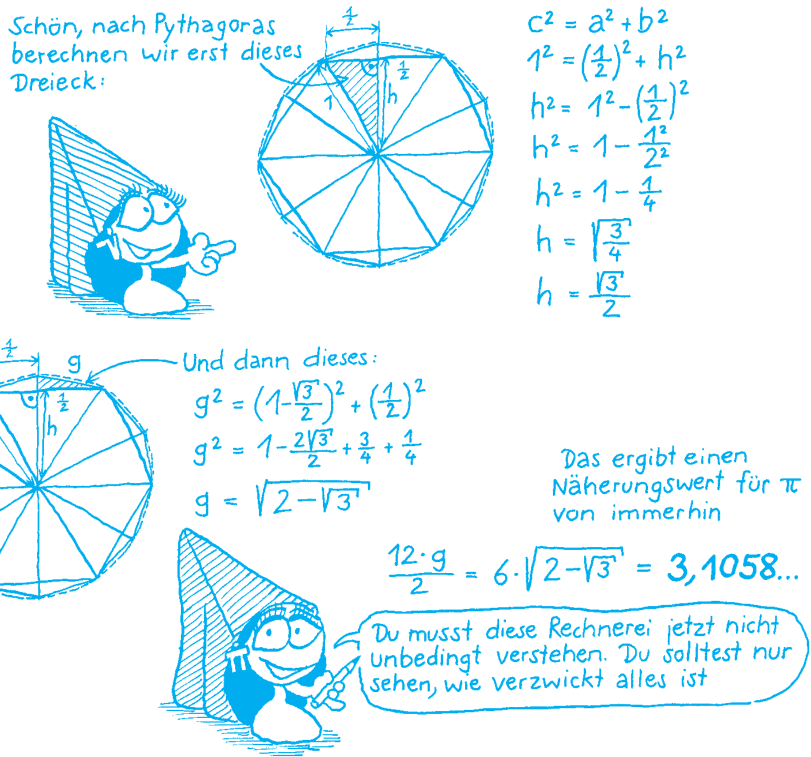
Wie weit wäre die Mathematik heute, hätte er länger leben dürfen?

So funktioniert die Berechnung mit Annäherung. Man konstruiert Vielecke mit 6, 12, 24, 48, ... oder noch mehr Ecken. Also eine Art Rosette, die einem Kreis sehr ähnlich wird. Die Fläche der Dreiecke in der Rosette lässt sich berechnen.

Mit einer sechseckigen Rosette wird π noch sehr schlecht angenähert.

Mit einem 12-Eck kommt man der Sache schon näher ...

Im Gegensatz zum 6-Eck müssen wir hier wirklich rechnen. Wir verwenden wieder einen Kreis mit dem Radius 1. π ist dann der halbe Kreisumfang, wie die obere Formel zeigt. Der Umfang des 12-Ecks ist 12-mal die Seite. Um die 12-Eck-Seite zu berechnen, brauchen wir zweimal die Formal von Pythagoras.

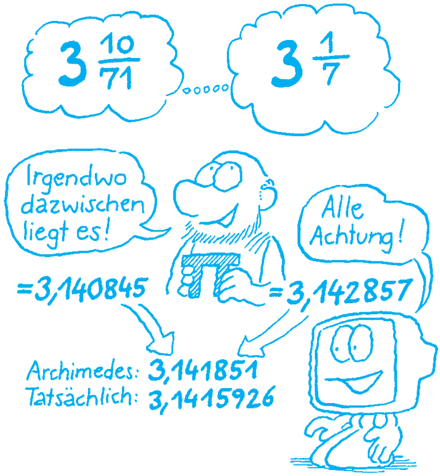


Erst bei ziemlich vielen Ecken wird der Näherungswert annehmbar genau.

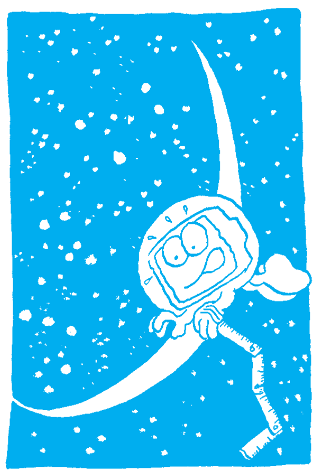
Noch genauer wird es, wenn man mit zwei Vielecken arbeitet, die den Kreis außen und innen umgeben: Außen und innen um den Kreis herum wird jeweils eine Rosette gezeichnet und berechnet. Der Umfang des Kreises muss zwischen den Umfängen der beiden Rosetten liegen. Je mehr Ecken man den Rosetten gönnt, umso genauer wird das Ganze.

Archimedes fing ebenfalls mit einem Sechseck an. Er verdoppelte diesen Wert viermal (bis zum 96-Eck) und engte den Wert von π damit auf das Intervall von $3\frac{10}{71}$ bis $3\frac{1}{7}$ ein. Bis Mitte des 17. Jahrhunderts griffen fast alle Versuche, π zu berechnen, auf diese Methode zurück.

π ist eine Zahl mit unendlich vielen Dezimalstellen. Du findest die ersten 1000 am unteren Rand dieses Kapitels.



Zur Veranschaulichung, wie wahnsinnig eine derart hohe Genauigkeit von π ist, folgende absurde Handwerkergeschichte:



Stell dir vor, du bekommst von der amerikanischen Regierung den Auftrag, einen Edelstahlring um unser gesamtes Milchstraßensystem zu legen (der Zweck dieses Unternehmens ist strengste Geheimsache!). Der Ring muss äußerst präzise sein und auf einen millionstel Millimeter genau stimmen. Bevor du den Auftrag annimmst, solltest du ausrechnen, ob der Edelstahlvorrat unseres Planeten überhaupt ausreicht

 47303 59825 34904 28755 46873 11595 62863 88235 37875 93751 95778 18577 und willst natürlich auch noch ein paar äußerst genaue Berechnungen und Pläne beilegen. Wie viele Nachkommastellen von π wirst du benötigen, damit das Stück auch wirklich auf den millionstel Millimeter genau berechnet wird? Allerhöchstens 35 Stellen!

Da kannst du mal sehen, welche absolut außerirdische und sogar außergalaktische Genauigkeit in diesem preiswerten Büchlein steckt!

Beispiel 3.1: Deine Daumenbreite als Entfernungsmessgerät

Beispiel 3.2: Die Kunst der ägyptischen Pyramidenbauer – weitere Knotenschnüre

Beispiel 3.3: Die Möndchen des Hippokrates