

Vorwort

Dieses Lehrbuch entstand auf der Grundlage von Vorlesungen zur Numerik elliptischer partieller Differentialgleichungen, welche ich mehrmals vor allem an der Universität Stuttgart, aber auch an der Technischen Universität Chemnitz und an der Johannes Kepler Universität Linz gehalten habe. Die Kapitel 1–4, 8, 9, 11 und 13 eignen sich für eine vierstündige Einführung in die Finite Element Methode, die Kapitel 1–8, 10, 12 und 13 behandeln die Grundlagen der Randelementmethode, welche ebenfalls im Rahmen einer vierstündigen Vorlesung gelesen werden können. Kapitel 14 gibt einen Überblick zu schnellen Randelementmethoden im Rahmen einer zweistündigen Vorlesung. Darüberhinaus ist das Buch auch zum Selbststudium geeignet.

Das Lehrbuch ist konzipiert als eine einheitliche Einführung in die Finite Element Methode (FEM) und in die Randelementmethode (BEM), zwei der heute am häufigsten verwendeten numerischen Diskretisierungsverfahren zur näherungsweise Lösung von elliptischen Randwertproblemen. Während zur FEM eine Vielzahl von verschiedener Lehrbuchliteratur zur Verfügung steht, gibt es bisher nur wenige Bücher zu einer mathematisch fundierten Einführung in Randelementmethoden.

Ausgangspunkt für die Finite Element Methode ist die Variationsformulierung des Randwertproblems. Die Definition eines konformen endlichdimensionalen Ansatzraumes erfordert dann eine geeignete Unterteilung des Rechengebietes in finite Elemente. Der Vorteil der FEM besteht in einer nahezu universellen Einsetzbarkeit. Im Gegensatz dazu erfordert die Randelementmethode die explizite Kenntnis einer Fundamentallösung, welche eine Transformation der partiellen Differentialgleichung in eine Randintegralgleichung ermöglicht. Deren numerische Lösung erfordert dann nur noch eine Unterteilung des Randes in Randelemente. Die Einsatzgebiete der Randelementmethode liegen vor allem in der Behandlung von partiellen Differentialgleichungen mit (stückweise) konstanten Koeffizienten und in der Lösung von Randwertproblemen in unbeschränkten Gebieten. Ein weiterer Vorteil der direkten Randelementmethode liegt in der unmittelbaren Berechnung der vollständigen Cauchy-Daten, die bei vielen Anwendungsproblemen die eigentlichen Zielgrößen darstellen. Bei der FEM können diese durch eine Formulierung mit Lagrange-Multiplikatoren und der Lösung als Sattelpunktproblem explizit bestimmt werden. Durch die Verknüpfung beider Diskretisierungsverfahren via

Gebietszerlegungsmethoden können die Vorteile beider Methoden optimal miteinander kombiniert werden.

Für elliptische Randwertprobleme können beide Diskretisierungsverfahren einheitlich beschrieben und analysiert werden. Nach einer Beschreibung der in diesem Buch behandelten Randwertprobleme werden die später benötigten Funktionenräume eingeführt. Daran anschließend werden Variationsmethoden zur Lösung von Operatorgleichungen unter Einbeziehung von Nebenbedingungen behandelt. Dies schließt die Formulierung mit Lagrange-Multiplikatoren als Sattelpunktproblem ein. Die Variationsformulierung der betrachteten Randwertprobleme ist einerseits Grundlage für die Finite Element Methode, andererseits Voraussetzung für die Analyse der Randintegraloperatoren. Im Anschluß an die Bestimmung von Fundamentallösungen werden Randintegraloperatoren eingeführt und deren Eigenschaften wie Beschränktheit und Elliptizität abgeleitet. Für verschiedene Randwertprobleme werden dann unterschiedliche Randintegralgleichungen zur Bestimmung der fehlenden Cauchy-Daten formuliert und auf ihre eindeutige Lösbarkeit untersucht. Nach einer abstrakten Betrachtung von Diskretisierungsverfahren für elliptische Variationsprobleme werden die dafür benötigten endlich-dimensionalen Ansatzräume konstruiert und die zugehörigen Approximationseigenschaften bewiesen. Im Anschluß daran werden die Finite Element Methode und verschiedene Randelementmethoden zur Lösung gemischter Randwertprobleme formuliert und die Eigenschaften der endlich-dimensionalen Ersatzprobleme untersucht. Für die Lösung der resultierenden linearen Gleichungssysteme werden geeignete vorkonditionierte Iterationsverfahren diskutiert. Die dabei verwendete allgemeine Vorkonditionierungsstrategie beinhaltet neben der Vorkonditionierung mit Integraloperatoren auch eine hierarchische Multilevel-Vorkonditionierung. Die Galerkin-Diskretisierung von Randintegraloperatoren führt auf vollbesetzte Steifigkeitsmatrizen. Deshalb werden schnelle Randelementmethoden beschrieben, die eine fast optimale Komplexität zur Speicherung und zur Matrix-Vektor-Multiplikation ergeben. Abschließend werden Gebietszerlegungsmethoden zur Behandlung von partiellen Differentialgleichungen mit springenden Koeffizienten, zur Kopplung verschiedener Diskretisierungsverfahren und zur Parallelisierung behandelt.

An dieser Stelle möchte ich mich herzlich bedanken bei W. L. Wendland für die langjährige Förderung und Unterstützung. Viele Ergebnisse unserer gemeinsamen Arbeit sind in dieses Buch eingeflossen. Mein besonderer Dank gilt J. Breuer und G. Of für das sorgfältige Korrekturlesen des Manuskripts und die vielen Hinweise zur Verbesserung des Textes. Außerdem danke ich Herrn J. Weiß und dem Verlag sowie den Herausgebern dieser Reihe für die stets freundliche Zusammenarbeit.