Vorwort

In einer Zeit schnellen Wandels werden von Unternehmen immer kürzere Entwicklungszeiten für innovative hochtechnologische Produkte bei optimalem Materialeinsatz gefordert. Diese Produkte müssen außerdem kostengünstig und konkurrenzfähig sein und zwar unabhängig davon, ob es sich um Produkte des Maschinenbaus, der Luft- und Raumfahrtindustrie, der Medizintechnik oder anderer Bereiche handelt. Um diesen Ansprüchen gerecht werden zu können, ist die Entwicklung und Gestaltung eines Produktes bis hin zum Design unter Einbeziehung moderner Materialien weitestgehend nur noch mit Hilfe eines abgerundeten theoretischen Basiswissens sowie computerunterstützter Methoden, wie etwa der Finiten Elemente Methode (FEM) möglich.

Deshalb müssen heutige Absolventen von Ingenieurdisziplinen ebenso wie auch in der Praxis stehende Ingenieure sowohl über ausreichende Kenntnisse von Materialien und deren Verhalten (Werkstoffphänomenologie und Modellierung) einerseits sowie geeigneter numerischer Berechnungsverfahren (FEM) andererseits im Rahmen der Entwicklung und Konstruktion von Bauteilen und Bauteilsystemen (Produkten) verfügen.

Bei der Berechnung solcher Produkte reicht es aber nicht mehr aus, stets und höchstens linear–elastisches Materialverhalten oder gar die Bauteile als starre Körper vorauszusetzen. Ganz im Gegenteil hat der Entwickler im Rahmen einer Wertschöpfung heutzutage bei der Vielzahl von Materialien ja gerade die ,,Wahl", ein für das jeweilige Bauteil optimales Materialverhalten ,,einzubauen". Für solche ambitionierteren Modellierungen einer jeweils zu entwerfenden Struktur und deren Vorhersage im Betrieb ist allerdings ein bestimmtes Grundlagenwissen unabdingbar. Dieses Wissen setzt sich idealerweise aus Kenntnissen der Werkstoffphänomenologie, der Kontinuumsmechanik und Materialtheorie sowie der Finiten Elemente Methode (FEM) zusammen. Für diese drei ,,Blöcke" existieren zwar exzellente Bücher, die sich aber meistens nur mit einem der genannten Themen intensiv auseinandersetzen und die jeweils anderen entweder gar nicht oder nur am Rande behandeln.

Der vorliegende Band nun macht den Versuch, einen ,,Brückenschlag" zwischen der Phänomenologie, den analytischen Methoden - also der Kontinuumsmechanik und der Materialtheorie - und den numerischen Methoden (FEM) zu liefern. Dabei steht nicht das phänomenologische Werkstoffverhalten oder die Theorie isoliert für sich allein und es wird auch nicht die FEM ohne theoretisches bzw. analytisches und empirisches Hintergrundwissen ,,blind" angewendet, wie dies in den Manuals der meisten FE-Programme bekanntlich der Fall ist. Vielmehr steht im Vordergrund das Erlernen adäquater Methoden zur Bauteilberechnung, wobei die Lernenden die drei genannten ,,Säulen" so weit als möglich in verzahnter

Weise verfolgen und dabei auch mitunter die Grenzen der analytischen gegenüber der numerischen Berechnung und umgekehrt erkennen können sollen.

Infolge der gebotenen Seitenzahlbeschränkung können natürlich nicht alle drei der genannten Säulen in voller Breite und bis zur letzten wissenschaftlichen Konsequenz beleuchtet werden. Vielmehr wird hier Wert auf das Zusammenspiel der einzelnen Disziplinen gelegt. Selbstverständlich kann dies wiederum nur für ausgewählte Probleme auf nicht allzu hohem Niveau gelingen. Dennoch soll hier ein ,,Gefühl“ für das Anwenden und die Zusammenhänge der einzelnen Methoden vermittelt werden. Daher werden vor allem grundlagenorientierte, universelle und gleichzeitig interdisziplinäre Kenntnisse bereitgestellt.

So wird im Rahmen der Behandlung der Kontinuumsmechanik und Materialtheorie auf linear- und nichtlinear-elastisches und viskoelastisches Materialverhalten eingeschränkt, dies aber bis hin zum räumlichen Fall konsequent betrieben. Der Leser soll hierbei besonders auch mit dem ausgeprägten zeitlichen bzw. viskoelastischen Verhalten von beispielsweise Natur- und Kunststoffen vertraut gemacht werden. Auf die im Rahmen der Viskoelastizität ansonsten sehr elegant anzuwendende LAPLACE-Transformation wurde allerdings aus Platzgründen verzichtet, so daß sämtliche Rechenoperationen ohne deren Kenntnis durchgeführt wurden, was freilich für den Lernenden nicht nur nachteilig sein dürfte.

Das Buch gliedert sich grob in einen Teil ,,I Theoretische Grundlagen“ und einen Teil ,,II Anwendungen“: In Teil I werden die Methoden und Gleichungen für die Ausführungen des praktischen Teiles bereitgestellt. Insbesondere werden hier die Kontinuumsmechanik und die Materialtheorie besprochen. Dabei soll nicht unerwähnt bleiben, daß Art und Weise sowie die Systematik der kontinuumsmechanischen Methoden in starkem Maße von der ,,Berliner Schule“ geprägt sind, mit welcher die Namen TROSTEL und GUMMERT unweigerlich verbunden sind. Zum besseren Verständnis der durchaus anspruchsvollen Methoden, sind in den Text zahlreiche komplett durchgerechnete und mitunter umfangreiche Übungsbeispiele integriert. Die jeweils im Text definierten Begriffe und Rechenmethoden werden im Wesentlichen an den beiden wichtigen homogenen Bewegungen ,,uniaxiale Stauchung“ und ,,einfache Scherung“ verdeutlicht, die sich von den kontinuumsmechanischen Grundlagen bis hin zum Kapitel 10 durch das gesamte Buch ziehen.

In Teil II werden die wichtigsten Aspekte der FEM behandelt und Problemstellungen aus der Praxis (teilweise aus F&E-Projekten) prinzipiell theoretisch modelliert und anschließend mittels der FE-Methode ,,nachgerechnet“. Hier reicht das Spektrum von viskoelastischen Stab- und Balkentragwerken, über rotationssymmetrisch belastete Hohlzylinder und Scheiben mit linear-elastischem und viskoelastischem Materialverhalten bis hin zur nicht–linear hyperelastischen Modellierung von Schaumstoffen. Im Rahmen dieser Rechnungen wird vor allem auch verdeutlicht, daß eine FE-Modellierung und deren quantitative Aussagen nur mit adäquaten Materialparametern, die wiederum mit einem geeigneten Materialgesetz verbunden sind, sinnvoll durchführbar ist. Auf welche Weise die im jeweiligen Materialgesetz vorkommenden Materialfunktionen bzw. –parameter bestimmt werden können (Materialidentifikation), wird anhand des Zusammenspieles zwischen ,,Experiment“, ,,Modell“ und ,,Parameteridentifikation“ skizziert, wobei auf Letztere im Rahmen dieses Buches nicht näher eingegangen werden kann.

Insbesondere werden einige wichtige in den FE-Programmen COSMOS, LS DYNA und ABAQUS angebotenen Materialgesetze in verständlicher Form hergeleitet und deren Ursprung ausführlich erklärt und diskutiert, so daß der Anwender in die Lage versetzt wird, diese Materialgesetze in die entsprechende Theorie einzuordnen, deren Grenzen erkennt und nicht auf die oftmals sehr mageren Darstellungen der Manuals angewiesen ist.

Um die dreidimensionalen Ausführungen zur Kontinuumsmechanik und Materialtheorie in tensorieller Darstellung nachvollziehen zu können, werden schließlich in einem mathematischen Anhang die zum Verständnis der in diesem Buch behandelten Probleme wichtigsten Rechenregeln zur Vektor- und Tensorrechnung bereitgestellt. Dabei wird soweit als möglich von der kompakten koordinateninvarianten Schreibweise Gebrauch gemacht, da allein diese Darstellung am übersichtlichsten ist und nicht durch überfrachtete Koordinatengleichungen vom Wesentlichen ablenkt. Dennoch wird dort wo es sinnvoll ist, auf Koordinatenschreibweise übergegangen, wie vor allem in Abschnitt 5.4 und Kapitel 9, wo Probleme in Zylinderkoordinaten behandelt werden sowie in den Übungsbeispielen, wo meist noch zusätzlich die Matrizendarstellung herangezogen wird. Damit ist ein in der Matrizenrechnung kundiger Leser durchaus auch in der Lage, den Stoff nahezu *ohne* Tensorrechnung nachzuvollziehen.

Das Buch ist sowohl an Studierende von Fachhochschulen und Universitäten als auch an in der Praxis stehende Ingenieure gerichtet und kann durchaus auch als Einstiegslektüre benutzt werden, wobei sich der Leser einen ersten Überblick etwa nur über Kontinuumsmechanik und Materialtheorie oder nur über die FEM verschaffen kann. Der Inhalt des Buches schließt einen Großteil des in der sonst üblichen „Höheren Festigkeitslehre“ behandelten Stoffes mit ein.

Die Verfasser danken aufs herzlichste Herrn Dipl.-Ing. Michael Schrodt für die Text- und Grafikverarbeitung dieses Buches, die er in aufopferungsvoller Arbeit neben seiner Promotion am Institut für Materialwissenschaften der Fachhochschule Frankfurt am Main durchführte sowie Herrn Prof. Dr.-Ing. habil. Horst Hennerici für die mühevolle Arbeit des Korrekturlesens und Herrn Dr. Martin Feuchte vom Teubner-Verlag, für die hervorragende Betreuung, die nicht zuletzt die Gestaltung und den Titel dieses Buches beinhaltet.

Frankfurt am Main, im Februar 2005 Gerhard Silber, Florian Steinwender

6 Finite Elemente Methode (FEM)

6.1 Einführung

Bei der Anwendung der Finite Elemente Methode (FEM) ist neben den eigentlichen Soft- und Hardwarekenntnissen auch ein gewisses Grundverständnis der Technischen Mechanik zwingend notwendig. Denn bereits bei der Umsetzung der realen Struktur (Kontinuum) in ein approximiertes, diskretes FE-Modell (Geometrie, Werkstoffeigenschaften, Rand- und Übergangsbedingungen usw.) ist es erforderlich, dass sinnvolle und zulässige Vereinfachungen angenommen werden. Der Anwender muss sich bei der Wahl der FEM-Software und der zur Verfügung stehenden Hardware über deren Leistungsfähigkeit und deren Grenzen im Klaren sein. Er muss in der Lage sein, die Fehlermeldungen (Errors), die Warnhinweise (Warnings) der eingesetzten Software sowie die berechneten Daten des jeweilig angewendeten FE-Programms richtig zu interpretieren, damit er das "Werkzeug" FE-Programm erfolgreich anwenden kann.

Die wichtigste Voraussetzung für ein repräsentatives Rechenergebnis ist, dass die Rand- und Übergangsbedingungen, die Materialkenngrößen, die Elementwahl und die numerische Approximation der physikalischen Struktur sowie das Analyseverfahren mit allen Optionen vom Anwender eines FE-Programms richtig gesetzt werden. Der Anwender entscheidet, ob die FE-Analyse hinsichtlich Modellerstellung, Rechenzeit, Auswertung usw. kostengünstig ist.

Dieses Kapitel hat das Ziel, dem Nutzer eines FE-Programms den Einstieg zu erleichtern und soviel Hintergrundwissen zu vermitteln, dass er die mit einem FE-Programm erhaltenen Rechnerdaten und Fehlermeldungen richtig interpretieren, die in den anschließenden Kapiteln durchgerechneten Beispiele nachvollziehen und darauf aufbauend selbständig ähnliche Problemstellungen lösen kann. Das Kapitel hat nicht das Ziel, die FEM vollständig zu erklären und alle Methoden sowie Anwendungsgebiete abzudecken. Dabei wird hier bewusst die FEM schrittweise anhand der Statik im wesentlichen am Stabelement erklärt. Dies erleichtert dem Ungeübten den Zugang zur FEM, denn das Stabelement ist einfach, die Rechenbeispiele mit den Stäben bleiben überschaubar, und es lassen sich alle wichtigen Aspekte der FEM zeigen und diskutieren.

Die Kontinuumsmechanik benutzt zum Teil die gleichen Formelzeichen wie die FEM, jedoch haben sie teilweise eine andere Bedeutung. Es wird in diesem Kapitel versucht, soweit wie möglich, Überschneidungen zu vermeiden. Exemplarisch wird auf die angeführte Literatur in der Literaturliste verwiesen.

Die Finite Elemente Methode wurde zunächst zum Lösen von Problemen der linearen Elastomechanik entwickelt. Sie ist ein Näherungsverfahren, und ihr Grundgedanke ist, dass die Struktur in beliebig kleine, endliche (finite), bekannte Elemente zerlegt wird. Für diese Elemente lassen sich durch Näherungsansätze die gesuchten Feldgrößen bestimmen (etwa Verschiebung, Verzerrung, Spannungen). Dabei ist zu beachten, dass die Wahl der Parameter so erfolgt, dass weitgehend ein widerspruchsfreier Kontakt zu den Nachbarelementen möglich ist. Der Begriff ,,finite elements" wurde geprägt durch CLOUGH in dem Artikel "The finite element in plane stress analysis"[Clo 60]. Dabei wurde eine elastische Membran (Kontinuum) in eine diskrete Anzahl von kleinen, aber finiten (endlichen) Subregionen oder Elementen unterteilt. Die Idee war nicht neu, denn bereits 1943 hatte COURANT dies ebenfalls schon vorgeschlagen. Die praktische Anwendung dieser Methode war erst mit der Entwicklung der Digitaltechnik (Mitte 1950) gegeben. Es waren TURNER, CLOUGH und andere, welche die Idee der diskreten Elemente und den Matrizenaufbau der Struktursteifigkeiten miteinander kombinierten und so ein systematisches Verfahren entwickelten, welches später unter dem Namen der Finite Element Method (FEM) bekannt wurde. Interessante Anmerkungen zu diesen ersten Entwicklungen der FEM können in den eigenen Kommentaren von CLOUGH ,,The finite element method after twenty-five years. A personal View." nachgelesen werden [Clo 80].

Mit der Entwicklung der Computer fand die FEM eine rapide steigende Anwendung und stürmische Weiterentwicklung. So wurden für Großechner die FE-Programmsysteme, u.a. NASTRAN, ABAQUS, ADINA, ANSYS, MARC, und für PC's, u.a. MSC/PAL, COSMOS/M, ANSYS–PC, SAP90, entwickelt.

In der Regel stehen heutzutage dem Anwender zur Generierung eines FE-Modells unterschiedliche Prozessoren zur Verfügung. Entweder benutzt man den im FE-Programm implementierten Geometrie-Prozessor, oder man erstellt das FE-Modell der zu untersuchenden Struktur mit einem CAD–Programm und importiert das CAD–Modell mit geeigneten Schnittstellen in das FE–Programm zur weiteren Bearbeitung. Die dritte Möglichkeit ist, dass das CAD–Programm einen FE–Analyse–Modul besitzt und so die FE–Analyse während der CAD–Sitzung durchgeführt werden kann. Dabei ist zu beachten, dass in der Regel bei den CAD–Programmen mit implementiertem FE–Analyse–Modul nicht alle Analyseverfahren, insbesondere das nichtlineare Analysemodul, und keine komplexen Elementtypen zur Verfügung stehen. Die mit den 3D–CAD–Editoren erstellten Modelle eignen sich hauptsächlich für die FE-Analyse mit Volumenmodellen. Dagegen lassen sich mit einem Editor eines FEM–Programms alle Elementtypen, wie Punkt–, Linien–, Oberflächen– und Volumenelemente, ohne Einschränkung auf die Modellgenerierung anwenden.

Die FEM wurde zunächst zum Lösen von linear elastischen Problemen der Festkörpermechanik entwickelt. Diese Arbeiten bilden die Basis für die Weiterentwicklung der FEM. Zur Bestimmung der Spannungen und Deformationen eines Festkörpers wird angenommen, wie dies bei den meisten Ingenieurproblemen üblich ist, dass das Material richtungsbezogen homogen aufgebaut ist. Dabei wird angenommen, dass das richtungsbezogene Materialver-

Tabelle 6.1: Klasseneinteilung der Elastizitätstheorie

Theorie	Verformung	Gleichgewicht am	Beispiele
1.Ordnung	klein	unverformten System	lineare Balken- und Plattentheorie
2.Ordnung	klein	verformten System	Euler-Knickung
3.Ordnung	groß	verformten System	nichtlineare Balken- und Plattentheorie

halten unabhängig von der inneren inhomogenen Materialverteilung des Werkstoffes, wie z.B. Korngrößen, Einschlüsse usw., ist. Diese Kontinuumsannahme lässt sich anhand empirisch ermittelter Daten mit hinreichender Genauigkeit bestätigen.

Das Strukturverhalten eines deformierbaren Körpers lässt sich mit den vorhandenen Lasten und Verrückungen und den sich daraus einstellenden Belastungs- und Verrückungsbeziehungen erklären. Dies sind im allgemeinen Spannungen und Verzerrungen (Dehnungen und Gleitungen bzw. Winkeländerungen). Dabei müssen drei Bedingungen erfüllt sein:

1. Gleichgewicht (Equilibrium)
2. Verträglichkeits- bzw. Kompatibilitätsbedingung (Compatibility)
3. Materialverhalten bzw. Werkstoffgesetz (Constitutive)

Die erste Bedingung ist erfüllt, wenn die inneren Kräfte mit den äußeren Kräften im Gleichgewicht sind. Bei einfachen Problemen lassen sich die Schnittlasten (Kräfte und Momente) mit Hilfe der Gleichgewichtsbedingungen an einem Freikörperbild formulieren und direkt lösen. Die Kompatibilitätsbedingung ist erfüllt, wenn die Verformung physikalisch möglich und zulässig ist. Dies bedeutet, dass unter einer Belastung die miteinander verbundenen Partikel an ihren Grenzen die gleichen Verformungen haben, und so keine Lücken, Überlappungen oder Gleitungen im Kontinuum entstehen können (vgl. Bild 6.1). Die Kontinuumsbeschreibung wird vervollständigt mit den Werkstoffgesetzen, z.B. HOOKsches Gesetz. Das Werkstoffgesetz beschreibt die Beziehung zwischen den inneren Kräften, charakterisiert durch Spannungen, und den lokalen Dehnungen, charakterisiert durch dimensionslose Verformungen. Zunächst wird nur das Werkstoffgesetz für ein homogenes, isotropes und linear-elastisches Material behandelt.

Mit Hilfe der Elastizitätstheorie lassen sich infolge von Kräften und unterschiedlichen Temperaturen die Spannungen und Verformungen an einem elastischen Körper bestimmen. Die vollständigen Gleichungen lassen sich meist nicht lösen. Damit man komplexe Strukturen rechnen kann, werden diese in der Ingenieurmechanik durch einfache Gebilde wie Stäbe, Balken, Scheiben, Platten, Schalen usw. idealisiert und elastizitätstheoretisch untersucht. Die Elastizitätstheorie lässt sich in drei Klassen (vgl. Tabelle 6.1) einteilen. Die äußeren Lasten (Punkt-, Oberflächen- und Volumenkräfte) erzeugen nicht nur in den Auflagern Reaktionen, sondern rufen auch innere Kräfte hervor. Mit Hilfe des EULERSCHEN Schnittprinzips werden am Teilkörper im Schwerpunkt der Schnittebene die Schnittlasten derart angenommen, dass der Teilkörper im Gleichgewicht ist. Diese Schnittlasten sind in Wirklichkeit nicht vorhanden, sondern sie sind die Resultierende der in oder auf der Schnittebene verteilten inneren Flächenkräfte bzw. Spannungen.

In der Regel werden bei Ingenieurproblemen (allgemeine Festigkeitslehre) die lokalen Einflüsse infolge Krafteinleitung (mathematische Singularitäten) nicht berücksichtigt. In hinreichender Entfernung vom Angriffsbereich eines Kräftesystems hängt die Verteilung der Spannungen und Verformungen nicht mehr merkbar von der lokalen Störstelle (Lokalspannungen infolge Punktbelastung) ab (Prinzip von DE SAINT-VÉNANT) [Sza 75], [Sza 77], [Tim 82].

Z.B. bei einem Balken ist der lokale Einfluss der Einzelkrafteinleitung (Punktkraft) nach einer Entfernung von etwa der Größe der Balken-Querschnittsabmessung (hinreichende Entfernung) abgebaut [Sza 75].

6.2 FEM und Elementtypen in der Strukturmechanik

6.2.1 Analyseverfahren

Die Anwendung der FEM lag und liegt hauptsächlich in der Spannungs– bzw. Verformungsberechnung von strukturmechanischen Problemen. Die einfachste und meist angewandte Routineanwendung der FE–Analyse ist die der linear–elastischen Strukturen (siehe Bild 6.2). Dagegen erfordern das nichtlinear–elastische sowie das ideal elastisch-plastische Materialverhalten (vgl. Abschnitt 1.1), die geometrischen Nichtlinearitäten und dynamischen Analysen einen weitaus komplexeren Aufwand hinsichtlich Modellaufbereitung und Berechnung sowie Auswertung. Beispielsweise hängt bei der Modalanalyse der erforderliche Rechenaufwand sehr stark von den Dämpfungseigenschaften der Struktur bzw. von dem gewählten Dämpfungsmodell ab. Weiter können die linearen und nichtlinearen Probleme in statische und dynamische Berechnungen unterteilt werden. Mit den heutigen FE-Programmen lassen sich

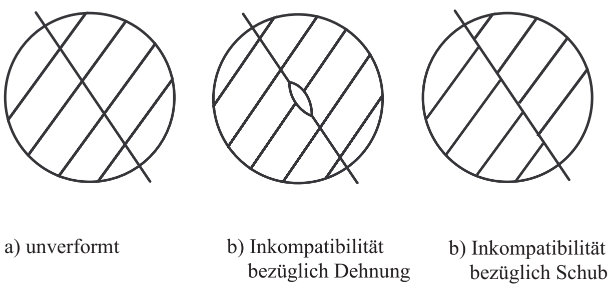

Bild 6.1: Verschiebungsinkompatibilität; a) unverformt, b) Inkompatibilität bezüglich Dehnung (Zug), c) Inkompatibilität bezüglich Abgleitung (Schub)

je nach Berechnungsmodul u.a. folgende Probleme bearbeiten:

- Aufgaben der linearen Statik
- Aufgaben der linearen Frequenz– und Beulanalyse
- Lineare und nichtlineare Zeitverlaufsberechnung
- Nichtlineare statische/dynamische Analysen (Materialverhalten, geometrische Nichtlinearitäten, Kontaktprobleme)
- Temperaturfeldberechnung
- Elektro–magnetische Analysen
- Ermüdungsanalysen
- Strömungsberechnungen und
- Bauteiloptimierungen

Die oben angeführten Berechnungsverfahren sind eine allgemeine Aufzählung möglicher FE–Anwendung. Welches Berechnungsverfahren in der Praxis angewendet wird, hängt stark vom zur Verfügung stehenden FE–Programm und der Leistungsfähigkeit des benutzten Rechners ab.

6.2.2 Elementtypen

Der erste Schritt zur Generierung eines FE-Modells ist, dass die reale Struktur in diskrete Elemente (finite Elemente) unterteilt wird. Neben der Elementgenerierung (Knotenverteilung und Wahl der Elementtypen) müssen auch die notwendigen Materialeigenschaften und die dazugehörigen geometrischen Eigenschaften, z. B. je nach Elementtyp die Fläche, die Trägheitsmomente, die Dicke usw., eingegeben werden. Je nach Anwendungsgebiet und Eigenschaften der gewählten Elemente sind vom Anwender u.a. die entsprechenden Elementeigenschaften, das Analyseverfahren sowie die Input– und Output–Optionen zu setzen. Eine einfache Elementeinteilung erfolgt in Abhängigkeit der Geometrie der jeweils realen Struktur. In Bild 6.3 sind die möglichen Elementtypen dargestellt, nämlich

- Punktelement (z. B. Masse)
- 1D- oder Linienelement (z. B. Stab oder Balken),
- 2D- oder Flächenelement (z. B. Scheibe oder Schale) und
- 3D- oder Volumenelement (z.B. Tetraeder).

Entscheidend für die korrekte Abbildung der realen Struktur in das FE-Modell ist neben der Geometrie aber auch die reale Strukturbelastung, die zu charakteristischen Spannungszuständen führt. Diese von der Geometrie und Belastung abhängigen Spannungszustände werden durch bestimmte Elementtypen abgebildet, wobei die Bewegungsmöglichkeiten der Elementknotenpunkte (Knotenfreiheitsgrade) entscheidenden Einfluss haben.

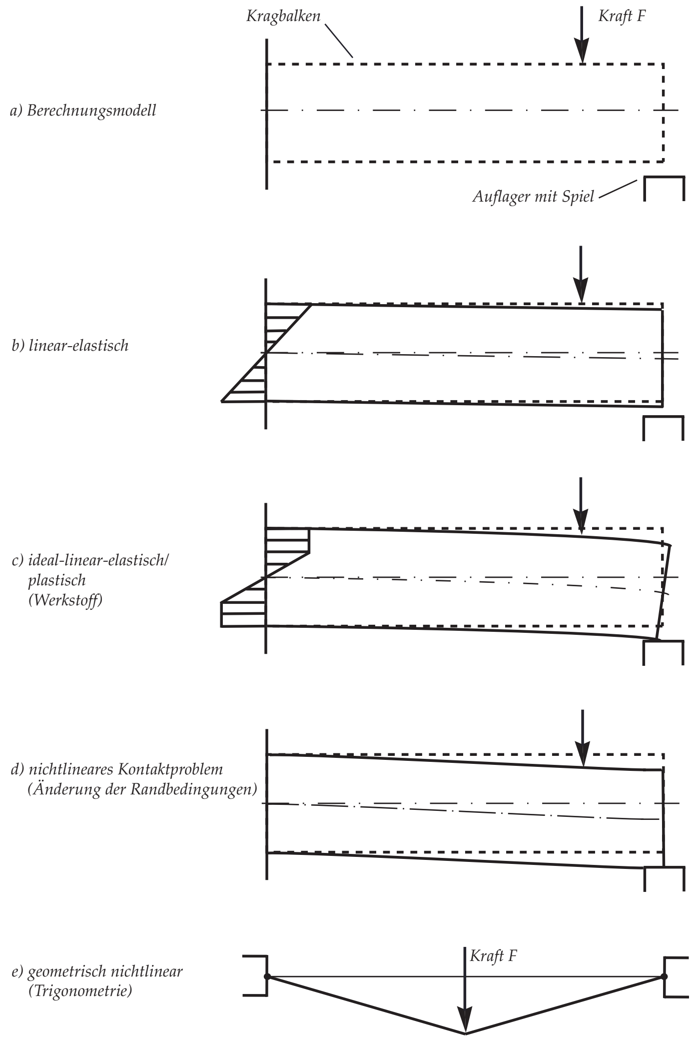

Bild 6.2: Beispiele von strukturmechanischen Problemstellungen

Wie Bild 6.3 zeigt, lassen sich die Elemente auch bezüglich der Knotenfreiheitsgrade (Degree of Freedom oder kurz DOF) und so nach ihrem Strukturverhalten unterteilen. Entsprechend der Technischen Mechanik besteht der Hauptunterschied darin, dass die Knoten einer Elementgruppe entweder *nur* Translationsfreiheitsgrade (bis zu 3 DOF pro Knoten) oder Translations- *und* Rotationsfreiheitsgrade (bis zu 6 DOF pro Knoten) besitzen. Generell lässt sich feststellen, dass die erste Elementgruppe lediglich Knotenverschiebungen (Translations-Freiheitsgrade) besitzt und nur deshalb auch Knotenkräfte erfasst werden können. Die zweite Elementgruppe mit Translations- *und* Rotations-Freiheitsgraden ist komplexer und berücksichtigt z.B. die Aspekte wie beispielsweise Verschiebungen und