
Vorwort

Während die Modellierung und die numerische Simulation technischer, naturwissenschaftlicher, ökonomischer sowie sozialer Prozesse seit langem intensiv untersucht werden, treten in den letzten Jahren vermehrt inverse Aufgabenstellungen in den Vordergrund. Zum Beispiel zur Erzeugung ultrakurzer Laserimpulse in der Hochfrequenztechnik. Hierfür werden Kristallspiegel benötigt mit vorgegebener Reflektivität und Dispersion. Wie kann das Design solcher Spiegel gelingen? Dazu muss aus dem beobachtbaren Abstrahlverhalten von Kristallen auf deren innere, nicht zugängliche Struktur geschlossen werden. Das ist das inverse Problem. Das zugehörige direkte Problem lautet: Wie durchläuft ein Laserimpuls einen Kristallspiegel mit bekannter innerer Struktur?

Ein inverses Problem liegt immer dann vor, wenn aus einer beobachtbaren Wirkung auf deren unzugängliche Ursache geschlossen werden muss. Inverse Probleme haben leider oft die unangenehme Eigenschaft schlecht gestellt zu sein. Salopp gesprochen wehren sie sich dagegen, durch Standardverfahren der Numerischen Mathematik gelöst zu werden. Die Schwierigkeiten rühren von einer Instabilität her: Kleine Fehler in der beobachteten Wirkung, hervorgerufen z.B. durch unvermeidbare Messfehler, ziehen große Fehler in den zugehörigen Ursachen nach sich. Dieser Hang zur Fehlerverstärkung muss im Lösungsprozess berücksichtigt werden, ansonsten werden unbrauchbare Ergebnisse erzielt.

Schlecht gestellte Probleme bedürfen einer Stabilisierung, die Regularisierung genannt wird: Das schlecht gestellte Problem wird durch ein eng verwandtes Problem ersetzt, das stabil lösbar ist. Wie dies zu erreichen ist, was dabei beachtet werden soll, ist Inhalt des vorliegenden Lehrbuchs. Es beginnt mit einer Beispielsammlung zur Einstimmung, die die Relevanz inverser und schlecht gestellter Aufgaben verdeutlicht und ihre abstrakte Definition erleichtert.

Inverse Probleme führen auf Gleichungen mit Operatoren, deren Bilder beliebig nahe zusammen liegen können, obwohl die Urbilder weit auseinander liegen. Typische Vertreter dieser Gattung sind die linearen kompakten Operatoren zwischen Hilberträumen, die in diesem Buch als Prototypen dienen werden. In Kapitel 2 lege ich die theoretischen Fundamente, die im zentralen Kapitel 3 über allgemeine Regularisierungsverfahren benötigt werden. In den darauf folgenden zwei Kapiteln behandle ich spezielle Klassen von Regularisierungsverfahren, das sind die Tikhonov–Phillips- und die iterativen Regularisierungen. Einen beträchtlichen Teil des Buchs habe ich den Aspekten der Diskretisierung gewidmet (Kapitel 6). Eine solides theoretisches Wissen ist unabdingbar, aber ich möchte Ihnen auch vermitteln, wie Sie die Lösung eines schlecht gestellten Problems stabil berechnen können. Neben den klassischen Projektionsverfahren präsentiere ich hier ein neues numerisches Schema, die Approximative Inverse, das flexibel der speziellen Anwendung angepasst werden kann. Ohne Kapitel 7 über nichtlineare schlecht gestellte Probleme wäre dieses Buch unvollständig. Nach einer kurzen

grundlegenden Einführung gehe ich auf zwei Verfahrensklassen im Detail ein: Die nichtlineare Version der Tikhonov–Phillips-Regularisierung sowie Iterationen vom Newton-Typ, wobei ich besonderen Wert lege auf die numerisch effizienten, die sogenannten inexakten Verfahren. Zur Abrundung der Darstellung stelle ich Begriffe und Ergebnisse der Funktionalanalysis, deren Kenntnis ich voraussetze, in einem Anhang zusammen (Kapitel 8). Vor Beginn der Lektüre sollten Sie einen Blick hinein werfen.

Bei der Konzeption dieses Lehrbuchs leiteten mich folgende Motive: Die Theorie soll an zahlreichen Beispielen verdeutlicht werden, wenn immer möglich aus praktischen Anwendungen stammend. Aus persönlichen Neigungen fiel die Wahl auf tomographische Verfahren der Medizintechnik. So wird Sie die Radon-Transformation, das mathematische Modell der 2D-Computer-Tomographie, durch die Kapitel begleiten. Des Weiteren lag mir am Herzen, theoretische Vorhersagen auch im numerischen Experiment zu reproduzieren. Zu den meisten vorgestellten Algorithmen finden Sie deswegen ausführliche Computer-Experimente. Damit Sie die Korrektheit der Ergebnisse überprüfen sowie eigene Experimente durchführen können, stelle ich meine MATLAB-Programme* im Online-Service zu diesem Buch bereit. Unter der URL

www.mathematik.uni-karlsruhe.de/~rieder/online-service.html

finden Sie die entsprechenden Dateien sowie weitere Informationen und interessante Links.

Dieses Lehrbuch entstand aus Vorlesungen, die ich an den Universitäten in Saarbrücken und Karlsruhe gehalten habe. Beim Schreiben wurde mein ursprüngliches Manuskript immer üppiger, so dass für eine einführende vierstündige Vorlesung eine Themenauswahl getroffen werden muss. Ich empfehle den Stoff aus den Kapiteln 1, 2.1–2.4, 3.1–3.4 (mit kurzem Blick auf 3.5 und 3.6), 4, 5, 6.1 (mit Hinweis auf 6.2) sowie 7 (7.4 und 7.5.3 im Kurzstil). Bei Bedarf kann innerhalb der Abschnitte weiter ausgedünnt werden durch Verzicht auf ein Beispiel oder einen Beweis.

Es ist ein schöner Brauch, am Ende des Vorworts denjenigen zu danken, die zum Gelingen des Buchs direkt oder indirekt beigetragen haben. Ohne die langjährige Unterstützung und Förderung durch meinen Lehrer, Herrn Prof. Dr. A.K. Louis, wäre ich nicht in der Lage gewesen, dieses Buch zu schreiben. Meinem Gastgeber im Rahmen eines Feodor Lynen-Forschungsstipendiums der Alexander von Humboldt-Stiftung, Herrn Prof. Dr. R.O. Wells, Jr., verdanke ich u.A. wertvolle Anregungen und Hinweise zum Verfassen mathematischer Texte.

Meine Darstellung hat in manchen Details von Diskussionen profitiert mit meinen Karlsruher Kollegen, den Herren Professoren A. Kirsch, R. Lemmert und L. Weis. Danken möchte ich auch Herrn cand. math. S. Gemmrich für die Hilfe bei den MATLAB-Implementierungen sowie Herrn Dr. V. Dicken für die freundliche Überlassung seiner SPECT-Rekonstruktionen (Bild 7.2).

* MATLAB ist ein eingetragenes Warenzeichen von The MathWorks, Inc. (www.mathworks.de). Bei MATLAB handelt es sich um ein interaktives Programmsystem mit hoher Numerik- und Graphik-Funktionalität. Eingesetzt wird MATLAB sowohl im Hochschulbereich als auch in der Industrie.

Ein tief empfundener Dank geht an meine Frau, Dr. Martina Bloß-Rieder. Sie hat nicht nur mein Manuskript in eine erste L^AT_EX-Version gebracht, sondern hat auch die mühevollen und undankbaren Aufgabe des Korrekturlesens übernommen. Dabei hat sie mich wiederholt bei Ungenauigkeiten und Unstimmigkeiten erwischt, die sie nicht durchgehen ließ, was der Lesbarkeit des Buchs zu Gute kam. Verbliebene Fehler und holprige Formulierungen sind selbstverständlich einzig mir anzulasten.

Maximiliansau, im Juli 2003



P.S. Bevor Sie mit dem – manchmal beschwerlichen – Studium dieses Buchs beginnen, möchte ich Sie – quasi als Lockerungsübung – mit einem Stück Weltliteratur über Mathematik erfreuen. Mit solch einer Eleganz kann wohl nur ein Nobelpreisträger sein bewunderndes Erstaunen in Worte fassen:

„Nein“, rief er, „heute dürfen Sie keine Algebra treiben, Fräulein Imma, oder im luftleeren Raume spielen, wie Sie es nennen! Sehen Sie doch die Sonne! ...Darf ich...?“ Und er trat zum Tischchen und nahm das Kollegheft zur Hand.

Was er sah, war sinnverwirrend. In einer krausen, kindlich dick aufgetragenen Schrift, die Imma Spoelmanns besondere Federhaltung erkennen ließ, bedeckte ein phantastischer Hokuspokus, ein Hexensabbat verschränkter Runen die Seiten. Griechische Schriftzeichen waren mit lateinischen und mit Ziffern in verschiedener Höhe verkoppelt, mit Kreuzen und Strichen durchsetzt, ober- und unterhalb waagrechtlicher Linien bruchartig aufgereiht, durch andere Linien zeltartig überdacht, durch Doppelstrichelchen gleichgewertet, durch runde Klammern zusammengefaßt, durch eckige Klammern zu großen Formelmassen vereinigt. Einzelne Buchstaben, wie Schildwachen vorgeschoben, waren rechts oberhalb der umklammerten Gruppen ausgesetzt. Kabbalistische Male, vollständig unverständlich dem Laiensinn, umfaßten mit ihren Armen Buchstaben und Zahlen, während Zahlenbrüche ihnen voranstanden und Zahlen und Buchstaben ihnen zu Häupten und Füßen schwebten. Sonderbare Silben, Abkürzungen geheimnisvoller Worte waren überall eingestreut, und zwischen den nekromantischen Kolonnen standen Sätze und Bemerkungen in täglicher Sprache, deren Sinn gleichwohl so hoch über allen menschlichen Dingen war, daß man sie lesen konnte, ohne mehr davon zu verstehen als von einem Zaubergemurmel.

Klaus Heinrich sah auf zu der kleinen Gestalt, die in schillerndem Kleide, behangen von den schwarzen Gardinen ihres Haares, neben ihm stand und in deren fremdartigem Köpfchen dies alles Sinn und hohes, spielendes Leben hatte. Er sagte: „Und über diesen gottlosen Künsten wollen Sie den schönen Vormittag versäumen?“

Thomas Mann, *Königliche Hoheit*