Diskrete MAthematik im Klartext
ISBN 3-8273-7069-8

3 Aussagenlogik

3.1 Was ist Logik?

Sieht man sich in der Literatur um, so wird man feststellen, dass der Begriff „Logik" auf unterschiedliche Arten verwendet wird, die eine große Vielfalt im Sprachgebrauch widerspiegeln. Oft heißt es, die Logik habe ihren Ursprung im antiken Griechenland, und zwar im Werk des Aristoteles. Diese „klassische Logik" basiert auf der gewöhnlichen Sprache und hat gewisse Regeln zum Gegenstand, mittels derer korrekte Schlüsse aus einer gegebenen Menge von Tatsachen gezogen werden können. Es lohnt sich, einen kurzen Blick auf andere Verwendungsweisen von Logik zu werfen und darauf, wie diese Weisen miteinander zusammenhängen. Einige Vorstellungen werden für die Entwicklung eines Modells der Logik nützlich sein, wie es in diesem Buch zur Anwendung kommt. Dabei wird dieses Modell hier als Mittel verwendet, um über das Enthaltensein in Mengen zu entscheiden. Dem Leser sind gewiss schon einige der verschiedenen Verwendungsweisen begegnet, beziehungsweise er wird gewiss noch einigen von ihnen begegnen.

3.1.1 Symbolische Logik

Hierbei handelt es sich um eine Weiterentwicklung der klassischen Logik, bei der statt der gewöhnlichen Sprache oder zusätzlich zu ihr auch Symbole verwendet werden. Ein grundlegender Begriff ist dabei der Begriff der *Aussage*. Eine Aussage lässt sich als Behauptung definieren, die entweder *wahr* oder *falsch* sein kann. Beispiele für Aussagen sind:

- „Die Katze saß auf der Matte."
- „Alle Hunde mögen Knochen."

Nun ist es möglich, aus einfacheren Aussagen durch Verwendung von Wörtern und Wortverbindungen wie „und", „oder", „nicht", „nur dann, wenn", „genau dann, wenn" *zusammengesetzte Aussagen* zu bilden, zum Beispiel:

- „Die Katze saß auf der Matte oder alle Hunde mögen Knochen."

Doch solche Ausdrücke sind häufig mehrdeutig. Schließt das „oder" im vorigen Beispiel die Möglichkeit aus, dass sowohl „Die Katze saß auf der Matte" als auch „Alle Hunde mögen Knochen" wahr ist, oder ist diese Möglichkeit eingeschlossen? In der gewöhnlichen Sprache findet man sowohl die *inklusive* als auch die *exklusive* Bedeutung von „oder". Um dieses Problem zu beseitigen, können besondere Symbole eingeführt werden, die *Junktoren* genannt werden. So wird das Symbol $\vee$ verwendet, um „oder" in der inklusiven Bedeutung zu repräsentieren.

Bei der Diskussion von Argumenten ist es bequem, Buchstaben wie p, r, q als Platzhalter für Aussagen zu verwenden. So hat das obige Beispiel die Form $p \vee q$, wobei p für „Die Katze saß auf der Matte" und q für „Alle Hunde mögen Knochen" steht. Man beachte, dass wir hier vorausgesetzt haben, dass die inklusive Bedeutung von „oder" ausgedrückt werden soll. Ein Ausdruck wie $p \vee q$ heißt *Aussageform*; er stellt die Art und Weise dar, auf die die Aussage aus einfacheren Aussagen aufgebaut ist.

Ähnlich lässt sich jede der folgenden zusammengesetzten Aussagen unter Verwendung von Symbolen schreiben:

- Die Aussage „Nicht alle Hunde mögen Knochen" lässt sich schreiben: $\neg$„Alle Hunde mögen Knochen". Diese Aussage hat die Form $\neg\, p$.
- Die Aussage „Alle Hunde mögen Knochen und die Katze saß auf der Matte" lässt sich schreiben: „Alle Hunde mögen Knochen" $\wedge$ „Die Katze saß auf der Matte". Diese Aussage hat die Form $p \wedge q$.
- Die Aussage „Die Katze saß nur dann auf der Matte, wenn alle Hunde Knochen mögen" lässt sich schreiben: „Die Katze saß auf der Matte" $\Rightarrow$ „Alle Hunde mögen Knochen". Diese Aussage hat die Forn $p \Rightarrow q$.
- Die Aussage „Die Katze saß auf der Matte genau dann, wenn alle Hunde Knochen mögen" lässt sich schreiben: „Die Katze saß auf der Matte" $\Leftrightarrow$ „Alle Hunde mögen Knochen". Diese Aussage hat die Form $p \Leftrightarrow q$.

Später werden wir diese Junktoren auf eine formalere Weise verwenden. Die meisten Anfänger in der Logik ziehen es vor, eine intuitive Vorstellung davon zu haben, was die Junktoren im Sinne der Alltagssprache „wirklich bedeuten". Eine solche Bedeutung wird in obiger Liste gegeben. Obwohl dadurch eine gewisse Sicherheit entsteht, kann daraus auch eine große Irreführung und Verwirrung resultieren, insbesondere im Falle von $\Rightarrow$. Nach Möglichkeit sollte man sich die Junktoren lieber als Symbole vorstellen, die gewisse Eigenschaften haben und bestimmten Regeln gehorchen. Dies alles gehört zu dem abstrakteren und formaleren Zugang, auf dem Sie sich der Logik nähern müssen, wenn Sie über Computer und Software nachdenken. Leider gibt es keinen einfachen Weg, der zu dieser Denkweise führt!

3.1.2 Formale Logik

Die formale Logik hat für das Entwickeln von Software eine große Bedeutung. Anstatt in gewöhnlicher Sprache geschriebener Aussagen werden unter Verwendung einer vorgegebenen Menge von Symbolen Symbolketten niedergeschrieben. Außerdem sind in einem gegebenen logischen System nur bestimmte Symbolketten möglich, die als *zulässige Ausdrücke* oder *zAs* bezeichnet werden; sie entsprechen den Aussagen oder Behauptungen der klassischen und symbolischen Logik. (Die formale Logik kann als Weiterentwicklung der symbolischen Logik angesehen werden, und tatsächlich werden die beiden Ausdrücke häufig synonym verwendet.) Eine Programmiersprache ist ein Beispiel für eine *formale Logik*; ein weiteres Beispiel ist die gewöhnliche Arithmetik. Beispielsweise ist die Zeichenkette in den Anführungszeichen „2+3=5“ ein . Ein anderes Beispiel für einen *zA* wäre „2+3=78“. Ein Beispiel für eine Zeichenkette, die kein *zA* ist, wäre „=+=2=“.

In jedem logischen System gelten gewisse *zAs* als *Sätze*; die Sätze eines Systems können als diejenigen Aussagen angesehen werden, die wahr sind. Beispiel für Sätze in der Arithmetik sind „2+3=5“ und „7–6=1“, nicht jedoch „2+3=78“, obgleich alle drei *zAs* sind.

3.1.3 SCHALTKREISLOGIK

Die digitale Elektronik, wie sie in der Computerhardware eingesetzt wird, basiert darauf, dass verschiedene Punkte eines Schaltkreises zwischen einer „hohen“ und einer „niedrigen“ Spannung (typischerweise 15 V bzw. 0 V) hin- und hergeschaltet werden. Gemäß einer allgemein üblichen Konvention repräsentiert 1 einen Punkt, an dem eine hohe Spannung anliegt, und 0 einen Punkt, an dem eine niedrige Spannung anliegt. In einem Computerspeicher werden diese 1- und 0-Signale verwendet, um Information zu speichern. Bei der Verarbeitung dieser Werte werden *Verknüpfungsglieder* eingesetzt; dies sind spezielle Schaltkreise, die abhängig von den Eingangsspannungen Ausgangswerte (1 oder 0) erzeugen. Zum Beispiel hat ein ODER-Glied zwei Eingänge und einen Ausgang, dessen Wert 0 ist, wenn beide Eingangssignale 0 sind, und der ansonsten den Wert 1 annimmt. Ein Verknüpfungsglied hat also die Wirkung einer Funktion, die aufgrund der Eingangswerte einen Ausgangswert berechnet. Die Funktion kann man dadurch spezifizieren, dass man sämtliche möglichen Kombinationen von Eingangssignalen auflistet und zu jedem das entsprechende Ausgangssignal angibt. Solch eine Liste wird häufig als *Wahrheitstafel* bezeichnet. Typischerweise werden Buchstaben wie *a* und *b* verwendet, um die Eingangssignale darzustellen, während das Ausgangssignal durch einen algebraischen Ausdruck dargestellt wird; sind beispielsweise *a* und *b* die Eingangssignale zu einem ODER-Glied, so wird das Ausgangssignal durch $a+b$ dargestellt. Die Wahrheitstafel des ODER-Glieds lautet:

Wahrheitstafel eines *ODER*-Glieds

a	*b*	*a+ b*
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Der Ausdruck „Wahrheitstafel“ spiegelt die Verbindung zu den traditionelleren Anwendungen der Logik wider. Jedes Eingangs- oder Ausgangssignal entspricht einer Aussage. Ein Wert von 1 entspricht einer „wahren“ Aussage und ein Wert von 0 einer „falschen“ Aussage. Junktoren können als Darstellungen von Verknüpfungsgliedern verwendet werden. Dem ODER-Glied ist zum Beispiel $\vee$ zugeordnet, so dass $a+b$ in der Schaltkreislogik $p \vee q$ geschrieben werden könnte. Dies würde im Rahmen der Schaltkreislogik allerdings nicht den üblichen Konventionen entsprechen!

ACHTUNG! Verwenden Sie die Notation der Schaltkreislogik nicht, während Sie Aussagenlogik betreiben.

3.2 AUSSAGEFORMEN

In Abschnitt 3.1.1 haben wir gesehen, dass zwei Aussagen p und q zu einer komplexeren Aussage zusammengefügt werden können, die *zusammengesetzte Aussage* genannt wird. Unter Verwendung von $\vee$ ergeben sich beispielsweise Aussagen wie:

1. $(2+3=5) \vee (1+1=2)$
2. $(2 \in \mathbb{N}) \vee (2^3 = 7)$
3. $(2 \in \mathbb{N}) \vee ((2+3=5) \vee (1+1=2))$

BEISPIEL 3.1

Schreiben Sie für jedes dieser drei Beispiele die Aussagen, die p und q in $p \vee q$ entsprechen, nieder.

LÖSUNG 3.2

1. p entspricht $(2+3=5)$ und q entspricht $(1+1=2)$.
2. p entspricht $(2 \in \mathbb{N})$ und q entspricht $(2^3 = 7)$.
3. p entspricht $(2 \in \mathbb{N})$ und q entspricht $((2+3=5) \vee (1+1=2))$.

Im letzten Beispiel ist q selbst eine zusammengesetzte Aussage.

Man erhält alle drei Aussagen, indem man p und q in $p \vee q$ durch passende Aussagen ersetzt; sie haben alle dieselbe *Aussageform*. Buchstaben wie p und q heißen *Aussagenvariable*.

Im Allgemeinen lassen sich zusammengesetzte Aussagen durch Verwendung von speziellen Symbolen, den *logischen Junktoren*, aus einfacheren Aussagen bilden; diese Junktoren sind $\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$. Die Eigenschaften dieser Junktoren lassen sich durch Betrachtung der entsprechenden Aussageformen beschreiben.

BEISPIEL 3.3

Ersetzen Sie in jeder der folgenden Aussageformen p durch $(2+3 = 5)$, q durch $(7-2=10)$ und r durch $(1 \in \mathbb{Z})$.

1. $\neg p$
2. $p \vee q$
3. $p \wedge q$
4. $p \Rightarrow q$
5. $p \Leftrightarrow q$
6. $\neg p \wedge q$
7. $\neg(p \wedge q)$
8. $\neg p \vee \neg q$
9. $(p \wedge q) \vee r$

LÖSUNG 3.4

1. $\neg(2+3=5)$
2. $(2+3=5) \vee (7-2=10)$
3. $(2+3=5) \wedge (7-2=10)$
4. $(2+3=5) \Rightarrow (7-2=10)$
5. $(2+3=5) \Leftrightarrow (7-2=10)$
6. $\neg(2+3=5) \wedge (7-2=10)$
7. $\neg((2+3=5) \wedge (7-2=10))$
8. $\neg(2+3=5) \vee \neg(7-2=10)$
9. $((2+3=5) \wedge (7-2=10)) \vee (1 \in \mathbb{Z})$

Diese Lösungen ergaben sich unter Einsatz eines verbreiteten Softwarewerkzeugs erhalten, der Operation `Ersetzen` eines Textverarbeitungsprogramms. Der Vorgang ist „mechanisch" und kann, ohne dass man versteht, was die Symbole darstellen, ausgeführt werden. Man beachte, dass die Klammern der besseren Lesbarkeit wegen gesetzt wurden; die Verwendung von Klammern wird in Abschnitt 3.6 behandelt.

BEISPIEL 3.5

Schreiben Sie zu jeder der folgenden zusammengesetzten Aussagen eine Aussageform nieder, und geben Sie passende Ersetzungen für die Aussagevariablen an, die auf die zusammengesetzten Aussagen führen:

1. $\neg(2+3=7)$
2. $(2+3=7) \vee (7-2=5)$
3. $\neg((2+3=7) \wedge (7-2=5))$
4. $((2+3=7) \wedge (7-2=5)) \vee (0 \in \mathbb{Z})$
5. $2+3=1+4=5$

LÖSUNG 3.6

1. $\neg\, p$, wobei p für (2+3=7) steht.
2. $p \vee q$, wobei p für (2+3=7) und q für (7–2=5) steht.
3. $\neg\, p$, wobei p für ((2+3=7) $\wedge$ (7–2=5)) steht. Man beachte, dass dies nicht die einzige mögliche Lösung ist; $\neg(p \wedge q)$, wobei p für (2+3=7) und q für (7–2=5) steht, ist eine andere Möglichkeit.
4. Eine möglich Lösung ist $(p \wedge q) \vee r$, wobei p für (2+3=7), q für (7–2=5) und r für ($0 \in \mathbb{Z}$) steht.
5. Auf den ersten Blick scheint 2+3=1+4=5 gar keine zusammengesetzte Aussage zu sein. Tatsächlich handelt es sich hierbei aber um eine Kurzschreibweise für

$$(2+3=1+4) \wedge (1+4=5).$$

   Die Aussage ist also aus $p \wedge q$ zu erhalten, wobei p für (2+3=5) und q für (1+4=5) steht. Solche Kurzschreibweisen wie 2+3=1+4=5 sind in vielerlei Hinsicht sehr bequem, doch vielleicht sollten Sie sie vermeiden, bis Sie in der Logik hinreichend erfahren sind. In diesem Buch werden sie im Allgemeinen nicht verwendet.

Man beachte, dass Aussageformen häufig einfach „Aussagen“ genannt werden; gewöhnlich geht aus dem Zusammenhang hervor, ob es sich um eine Aussageform handelt oder nicht.

Bisher haben wir den Junktorsymbolen keine Bedeutung oder *Semantik* zugeordnet. Eine Möglichkeit den Symbolen eine Bedeutung beizulegen wurde bereits kurz in Abschnitt 3.3.1 vorgestellt; Junktoren können als Ersetzungen von Wörtern bzw. Wortverbindungen der natürlichen Sprache aufgefasst werden. Dieser „intuitive“ Zugang hat allerdings seine Grenzen und sollte lediglich einer ungefähren Orientierung dienen. Stattdessen werden wir uns die Symbole als Operationen auf Wahrheitswerten vorstellen; dieser Zugang ist der Schaltkreislogik ähnlich.

3.3 DEFINITIONEN VON JUNKTOREN

Wir können jeder Aussagevariablen wie p, q oder r einen Wahrheitswert W („wahr“) oder F („falsch“) zuordnen. Jedem Junktor lässt sich dann eine *Wahrheitsfunktion* zuordnen. Eine Wahrheitsfunktion hat eine oder mehrere Wahrheitswerte als Eingabe und einen Wahrheitswert als Ausgabe; ihr Verhalten lässt sich in einer *Wahrheitstafel* definieren. Von einem rein mathematischen Standpunkt aus betrachtet erfahren wir aus einer Wahrheitstafel alles, was wir über den Junktor, auf den sie sich bezieht, wissen müssen. Daher sehen wir den Junktor als durch seine Wahrheitstafel definiert an. Wenn Ihnen dies als eine sehr eingeschränkte Sicht der Logik vorkommt, so haben Sie Recht; doch eine umfassendere Betrachtung der Sache würde uns zu weit in das Feld der Philosophie führen, und wir würden auf kompliziertere Probleme stoßen, die in einem einführenden Buch doch besser umgangen werden.

3.3.1 Negation

Der Junktor der *Negation* $\neg$ (gesprochen NICHT) wird durch die folgende Wahrheitstafel definiert:

Negation	
$\boldsymbol{p}$	$\neg\,\boldsymbol{p}$
W	*F*
F	*W*

Die Tafel gibt für die verschiedenen Wahrheitswerte von p die entsprechenden Wahrheitswerte von $\neg\,p$ an.

3.3.2 Disjunktion

Der Junktor der *Disjunktion* $\vee$ (gesprochen ODER) wird durch die folgende Wahrheitstafel definiert:

Disjunktion		
$\boldsymbol{p}$	$\boldsymbol{q}$	$\boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{q}$
W	*W*	*W*
W	*F*	*W*
F	*W*	*W*
F	*F*	*F*

Die Tafel gibt für die unterschiedlichen möglichen Kombinationen der Wahrheitswerte von p und q die entsprechenden Wahrheitswerte von $p \vee q$ an.

3.3.3 Konjunktion

Der Junktor der *Konjunktion* $\wedge$ (gesprochen UND) wird durch die folgende Wahrheitstafel definiert:

Konjunktion		
$\boldsymbol{p}$	$\boldsymbol{q}$	$\boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{q}$
W	*W*	*W*
W	*F*	*F*
F	*W*	*F*
F	*F*	*F*

3.3.4 Implikation

Der Junktor der *Implikation* $\Rightarrow$ (gesprochen NUR WENN) lässt sich durch folgende Wahrheitstafel definieren:

Implikation		
$\boldsymbol{p}$	$\boldsymbol{q}$	$\boldsymbol{p \Rightarrow q}$
W	W	W
W	F	F
F	W	W
F	F	W

Wenn also bekannt ist, dass $p \Rightarrow q$ wahr ist, dann kann p *nur* wahr sein, *wenn* q wahr ist.

In Abschnitt 3.5.3 werden Sie eine alternative Definition des Junktors $\Rightarrow$ kennen lernen.

3.3.5 Äquivalenz

Der Junktor der *Äquivalenz* $\Leftrightarrow$ (gesprochen GENAU DANN, WENN) lässt sich durch folgende Wahrheitstafel definieren :

Äquivalenz		
$\boldsymbol{p}$	$\boldsymbol{q}$	$\boldsymbol{p \Leftrightarrow q}$
W	W	W
W	F	F
F	W	F
F	F	W

In Abschnitt 3.5.5 werden Sie eine alternative Definition des Junktors $\Leftrightarrow$ kennen lernen.

3.4 Andere Aussageformen

Wahrheitstafeln werden auch verwendet, um die Funktion zu erhalten, die einer beliebigen zusammengesetzten Aussageform entspricht. Dazu muss man den Ausdruck der Aussageform analysieren, um die Reihenfolge zu bestimmen, in der die Junktoren anzuwenden sind; d.h. wir müssen den Ausdruck *zergliedern*. Dies lässt sich am besten anhand einfacher ausgearbeiteter Beispiele illustrieren.

BEISPIEL 3.7

Ersetzen Sie in jeder der folgenden grundlegenden Formen p durch $(\neg p)$ und q durch $(p \wedge q)$, um eine komplexere Form zu erhalten. Dann ermitteln Sie für jede der neuen Formen eine Wahrheitstafel.

1. $\neg p$
2. $p \vee q$
3. $p \wedge q$
4. $p \Rightarrow q$
5. $p \Leftrightarrow q$

LÖSUNG 3.8

Zunächst erhalten wir die neuen Aussageformen durch Ersetzung, zum Beispiel mittels der Operation `Ersetzen` eines Textverarbeitungsprogramms.

1. $\neg(\neg p)$
2. $(\neg p) \vee (p \wedge q)$
3. $(\neg p) \wedge (p \wedge q)$
4. $(\neg p) \Rightarrow (p \wedge q)$
5. $(\neg p) \Leftrightarrow (p \wedge q)$

Um jetzt in jedem Fall die Wahrheitstafel zu ermitteln, fangen wir mit den ersetzten Termen, nämlich $(\neg p)$ und $(p \wedge q)$ an. Bei diesen handelt es sich um grundlegende Formen, für die wir bereits über die Wahrheitstafeln verfügen.

$\boldsymbol{p}$	$\boldsymbol{q}$	$(\neg \boldsymbol{p})$	$(\boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{q})$
W	*W*	*F*	*W*
W	*F*	*F*	*F*
F	*W*	*W*	*F*
F	*F*	*W*	*F*

Wir können jetzt die komplexeren Ausdrücke aufbauen, indem wir die Wahrheitstafeln der grundlegenden Formen verwenden.

1. $\neg(\neg p)$

$\boldsymbol{p}$	$(\neg \boldsymbol{p})$	$\neg(\neg \boldsymbol{p})$
W	*F*	*W*
F	*W*	*F*

Die dritte Spalte haben wir aus der zweiten Spalte erhalten, indem die Wahrheitsfunktion von $\neg$ angewendet wurde.

2. $(\neg\, p) \vee (p \wedge q)$

$\boldsymbol{p}$	$\boldsymbol{q}$	$\boldsymbol{(\neg\, p)}$	$\boldsymbol{(p \wedge q)}$	$\boldsymbol{(\neg\, p) \vee (p \wedge q)}$
W	W	F	W	W
W	F	F	F	F
F	W	W	F	W
F	F	W	F	W

In diesem Fall wurde für die letzte Spalte die Wahrheitsfunktion von $\vee$ auf jedes Paar von Werten aus der dritten und vierten Spalte angewendet.

3. $(\neg\, p) \wedge (p \wedge q)$

$\boldsymbol{p}$	$\boldsymbol{q}$	$\boldsymbol{(\neg\, p)}$	$\boldsymbol{(p \wedge q)}$	$\boldsymbol{(\neg\, p \;\; \wedge (p \wedge q)}$
W	W	F	W	F
W	F	F	F	F
F	W	W	F	F
F	F	W	F	F

Die letzte Spalte haben wir durch Anwendung der Wahrheitsfunktion von $\wedge$ auf die beiden vorangehenden Spalten erhalten.

4. $(\neg\, p) \Rightarrow (p \wedge q)$

$\boldsymbol{p}$	$\boldsymbol{q}$	$\boldsymbol{(\neg\, p)}$	$\boldsymbol{(p \wedge q)}$	$\boldsymbol{(\neg\, p) \Rightarrow (p \wedge q)}$
W	W	F	W	W
W	F	F	F	W
F	W	W	F	F
F	F	W	F	F

5. $(\neg\, p) \Leftrightarrow (p \wedge q)$

$\boldsymbol{p}$	$\boldsymbol{q}$	$\boldsymbol{(\neg\, p)}$	$\boldsymbol{(p \wedge q)}$	$\boldsymbol{(\neg\, p) \Leftrightarrow (p \wedge q)}$
W	W	F	W	F
W	F	F	F	W
F	W	W	F	F
F	F	W	F	F

Im letzten Fall waren die grundlegenden Formen bereits im Voraus bekannt. Gewöhnlich muss man sich von einer gegebenen Form aus rückwärts durcharbeiten.