1

Einleitung

Das Wort *Stochastik* ist ein Oberbegriff für *Wahrscheinlichkeitstheorie* und *Statistik*. In der Wahrscheinlichkeitstheorie geht es um die mathematische Beschreibung von zufälligen Phänomenen. Die Frage, was Zufall ist, wird nicht beantwortet. In der Tat verwenden zahlreiche Wissenschaftler Methoden der Stochastik, weil sich diese in vielen Anwendungen bewährt haben, sind aber überzeugt davon, dass es keinen Zufall gibt. Ein bekanntes Zitat von Albert Einstein lautet: "Gott würfelt nicht!" Das hinderte ihn aber nicht daran, mit stochastischen Argumenten Vorgänge wie beispielsweise die Diffusion zu erklären.

In der Statistik geht es um die Auswertung und Interpretation empirischer Daten. Diese betrachtet man als zufällig und möchte mit einer gewissen Sicherheit Rückschlüsse auf das zugrundeliegende mathematische Modell ziehen.

Wir beginnen nun mit der mathematischen Beschreibung eines Experimentes, dessen Ausgang man als zufällig in einem vagen Sinne betrachtet. Man spezifiziert die Menge Ω aller möglichen Ergebnisse des Experiments. Diese Menge Ω nennt man auch *Grundmenge* oder *Ereignisraum*. Ein Element ω von Ω nennt man *Elementarereignis*. Nun betrachten wir verschiedene Teilmengen A von Ω, sogenannte *Ereignisse*. Jedem Ereignis $A \subset \Omega$ ordnen wir eine *Wahrscheinlichkeit* $P(A) \in [0,1]$ zu. Hier sind zwei Interpretationen dieser Zahl $P(A)$:

Deutung 1: Wahrscheinlichkeiten als Wetteinsätze

$P(A)$ ist ein Maß dafür, wie sicher man ist, dass das Ergebnis ω des Experiments in der Menge A liegen wird. Im Extremfall, wenn $P(A) = 1$, ist man sich dessen absolut sicher. Umgekehrt geht man im Falle $P(A) = 0$ davon aus, dass ω sicher nicht in A liegen wird. Allgemein kann man $P(A)$ als Wetteinsatz deuten: Wenn im Falle von $\omega \in A$ ein Gewinn G (in irgendeiner Einheit) ausgezahlt wird, dann ist man bereit, den Betrag $P(A) \cdot G$ zu setzen.

Dies ist Bruno de Finettis *subjektivistische* Deutung von Wahrscheinlichkeiten.

Deutung 2: Wahrscheinlichkeiten als Grenzwerte

Angenommen, man könnte das Experiment beliebig oft wiederholen, wobei die einzelnen Durchläufe "voneinander unabhängig" sind. Sei ω_i das Ergebnis bei der i-ten Wiederholung. Wir postulieren, dass die relativen Häufigkeiten

$$\widehat{P}_n(A) \ := \ \frac{\#\{i \le n : \omega_i \in A\}}{n}$$

für $n \to \infty$ gegen eine feste Zahl $P(A)$ konvergieren, die bei allen solchen Versuchsreihen identisch ist. Dabei bezeichnet $\#\mathcal{S}$ die Anzahl der Elemente einer Menge $\mathcal{S}$. Mit dem Hut über $P_n(A)$ deuten wir an, dass diese relative Häufigkeit nicht nur von n und A, sondern auch von der konkreten Versuchsreihe abhängt.

Dies ist Richard von Mises' *frequentistische* Deutung von Wahrscheinlichkeiten.

Beispiel 1.1 (Ein Würfel) Mit einem Würfel ermittelt man eine Zufallszahl aus $\Omega = \{1, 2, \ldots, 6\}$. Eine naheliegende Definition der Wahrscheinlichkeit $P(A)$ eines Ereignisses $A \subset \Omega$ ist

$$P(A) \ := \ \frac{\#(A)}{6}. \tag{1.1}$$

Jedem Elementarereignis ordnet man also die Wahrscheinlichkeit $1/6 = 0.16\overline{6}$ zu, und das Ereignis $A = [\text{würfle eine gerade Zahl}] = \{2, 4, 6\}$ hat beispielsweise Wahrscheinlichkeit $1/2$.

Um die frequentistische Deutung zu illustrieren, warf eine Tochter des Autors einen bestimmten Würfel 200–mal. Die Abbildungen 1.1 und 1.2 zeigen Stabdiagramme der empirischen Häufigkeiten $\widehat{P}_n(A)$ für die Ereignisse $A = \{2\}, \{6\}, \{2, 4, 6\}$. Augenscheinlich stabilisieren sich diese Werte mit wachsendem n.

Der Zusammenhang zwischen beiden Deutungen

Gehen wir von obigem Postulat über $\widehat{P}_n(A)$ aus, so ist der Limes $P(A)$ gleichzeitig der "richtige" Wetteinsatz. Angenommen, vor jeder Wiederholung des Experiments setzt man den Betrag E und gewinnt den Betrag G, falls das Ereignis A eintritt. Dann hat man nach n Durchgängen den Nettogewinn

$$\#\{i \le n : \omega_i \in A\}G - nE \ = \ nG\,(\widehat{P}_n(A) - E/G).$$

Ist also $E/G > P(A)$, dann macht man beliebig große Verluste, wenn $n \to \infty$ und $\widehat{P}_n(A) \to P(A)$. Bei $E/G < P(A)$ macht man beliebig große Gewinne.

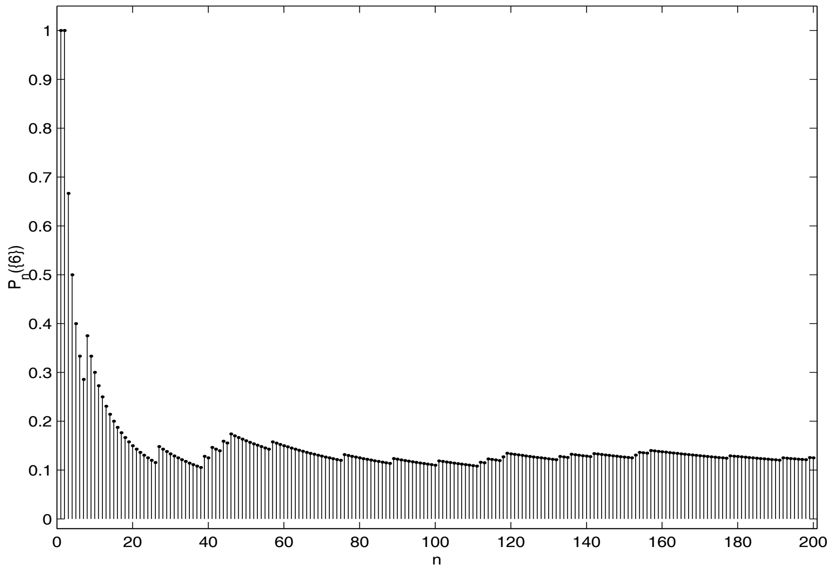

Abb. 1.1. $\widehat{P}_n(\{6\})$

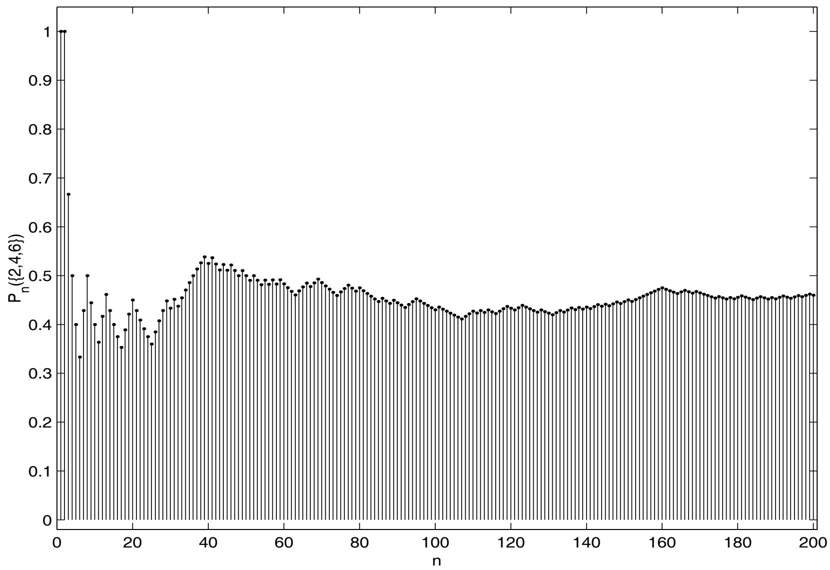

Abb. 1.2. $\widehat{P}_n(\{2,4,6\})$

Beispiel 1.2 (Spiel mit drei Bechern) Auf Basaren wird mitunter folgendes Spiel angeboten: Unter einen von drei gleichartigen Bechern wird eine weiche Kugel gelegt. Nun beginnt der Anbieter, die Becher vor den Augen des Spielers zu vertauschen. Der Spieler muss nach einer gewissen Zeit sagen, unter welchem Becher die Kugel liegt. Zuvor setzt er einen Betrag E. Wenn er die Kugel findet, gewinnt er den doppelten Einsatz, also $G = 2E$.

Naive Spieler trauen sich zu, den Becher mit der Kugel nicht aus den Augen zu lassen. Ihre subjektive Wahrscheinlichkeit des Ereignisses $A =$ [Kugel gefunden] ist also nahe an Eins. Da sie größer ist als das Verhältnis $E/G = 1/2$, lassen sie sich gerne auf das Spiel ein. Tatsächlich gelingt es einem geschulten Anbieter, den Spieler derart zu verwirren, dass er am Ende nur noch raten kann. Die tatsächliche Wahrscheinlichkeit von A ist dann bestenfalls gleich $1/3$, und der Anbieter macht auf lange Sicht große Gewinne.

Im Verlaufe dieses Buches wird ein Kalkül für Wahrscheinlichkeiten und daraus abgeleitete Größen erarbeitet. Desweiteren werden verschiedene Anwendungen beschrieben.