# 1 Einführung in die Vektorrechnung

Im Zentrum der linearen Algebra stehen zwei Operationen — beide werden mit Vektoren ausgeführt. Wir addieren Vektoren $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$, um $\mathbf{v}+\mathbf{w}$ zu erhalten. Wir multiplizieren sie mit Zahlen $c$ und $d$, um $c\mathbf{v}$ und $d\mathbf{w}$ zu erhalten. Die Kombination dieser Operationen ergibt die *Linearkombination* $c\mathbf{v} + d\mathbf{w}$.

Im ersten Kapitel werden diese beiden zentralen Ideen erläutert, auf denen anschließend alles weitere aufbaut. Wir beginnen zunächst mit zwei- und dreidimensionalen Vektoren, denn diese sind auch zeichnerisch gut darstellbar. Danach gehen wir zu höheren Dimensionen über. Das wirklich Beeindruckende an der Linearen Algebra besteht darin, dass dieser Schritt in den $n$-dimensionalen Raum problemlos durchführbar ist. Die geometrische Vorstellung aus zwei und drei Dimensionen bleibt hierbei völlig korrekt, auch wenn man einen zehndimensionalen Vektor nicht mehr zeichnen kann.

Dorthin wird das Buch uns führen (in den $n$-dimensionalen Raum), und als erste Schritte betrachten wir die beiden Operationen, die in den Abschnitten 1.1 und 1.2 eingeführt werden:

**1.1** ***Vektoraddition*** $\mathbf{v} + \mathbf{w}$ und ***Linearkombinationen*** $c\mathbf{v} + d\mathbf{w}$.
**1.2** Das ***Skalarprodukt*** $\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}$ und die ***Länge*** $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}}$.

## 1.1 Vektoren und Linearkombinationen

„Man kann Äpfel nicht mit Birnen vergleichen." Das mag nichts Neues sein, doch der Satz enthält für uns einen wesentlichen Inhalt. Seltsamerweise besteht hierin der Grund dafür, dass es Vektoren gibt! Wenn man nämlich die Anzahl der Äpfel getrennt von der Anzahl der Birnen betrachtet, so erhält man ein Paar von Zahlen. Dieses Paar ist ein ***zweidimensionaler Vektor*** $\mathbf{v}$:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} v_1 &= \text{Anzahl der Äpfel} \\ v_2 &= \text{Anzahl der Birnen.} \end{aligned}$$

Hierbei haben wir $\mathbf{v}$ als einen ***Spaltenvektor*** geschrieben. Die Zahlen $v_1$ und $v_2$ sind seine „Komponenten." Ein wesentlicher Aspekt liegt darin, dass wir einen einzigen Buchstaben $\mathbf{v}$ (fett gedruckt) für das Zahlenpaar $v_1$ und $v_2$ (kursiv gedruckt) schreiben. Selbst wenn wir $v_1$ nicht zu $v_2$ addieren können, so können wir doch *Vektoren addieren.* Die ersten Komponenten von $\mathbf{v}$ und $\mathbf{w}$ werden dabei getrennt von den zweiten Komponenten behandelt:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} \quad \text{addieren sich zu} \quad \mathbf{v} + \mathbf{w} = \begin{bmatrix} v_1 + w_1 \\ v_2 + w_2 \end{bmatrix}.$$

Diese Vorgehensweise ist berechtigt und man erkennt leicht den Grund. Die Gesamtzahl der Äpfel ist $v_1 + w_1$, die Gesamtzahl der Birnen ist $v_2 + w_2$. Die auf diese Weise erklärte Vektoraddition ist grundlegend und wichtig. Die Subtraktion von Vektoren wird analog durchgeführt: *Die Komponenten von* $\mathbf{v} - \mathbf{w}$ *sind* $v_1 - w_1$ *und* _____ .

Vektoren können mit 2 oder $-1$ oder mit einer beliebigen Zahl $c$ multipliziert werden. Es gibt zwei Möglichkeiten, einen Vektor zu verdoppeln. Die eine besteht in der Addition $\mathbf{v} + \mathbf{v}$. Die andere Möglichkeit (der übliche Weg) ist, jede Komponente von $\mathbf{v}$ mit 2 zu multiplizieren:

$$2\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2v_1 \\ 2v_2 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad -\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -v_1 \\ -v_2 \end{bmatrix}.$$

Die Komponenten von $c\mathbf{v}$ sind $cv_1$ und $cv_2$. Die Zahl $c$ wird ein „Skalar“ genannt.

Man beachte, dass die Summe von $-\mathbf{v}$ und $\mathbf{v}$ den Nullvektor ergibt. Für diesen Vektor schreiben wir $\mathbf{0}$, was nicht der Zahl Null entspricht. Vielmehr hat der Vektor $\mathbf{0}$ die zwei Komponenten 0 und 0. Man möge mir verzeihen, dass ich derart auf dem Unterschied zwischen einem Vektor und seinen Komponenten herumreite. Die lineare Algebra ist auf diesen Operationen $\mathbf{v} + \mathbf{w}$ und $c\mathbf{v}$ aufgebaut — ***Addition von Vektoren und Multiplikation mit Skalaren***.

Es gibt noch eine andere Möglichkeit, einen Vektor zu veranschaulichen, wodurch alle seine Komponeneten gleichzeitig erkennbar werden. Der Vektor $\mathbf{v}$ kann nämlich durch einen Pfeil dargestellt werden. Wenn $\mathbf{v}$ zwei Komponenten hat, so liegt der Pfeil im zweidimensionalen Raum (einer Ebene). Sind

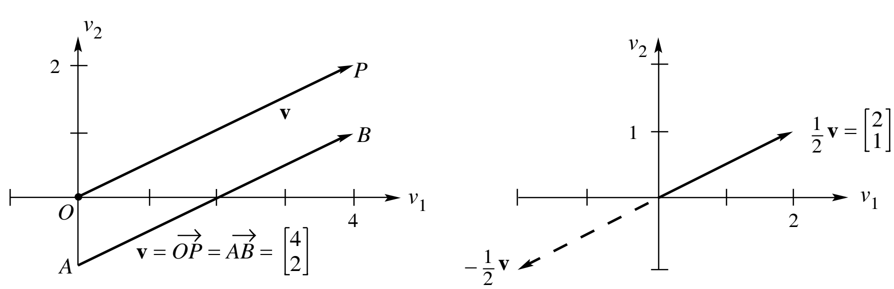



**Abb. 1.1.** Der Pfeil beginnt normalerweise im Ursprung $(0,0)$; $c\mathbf{v}$ ist immer parallel zu $\mathbf{v}$.

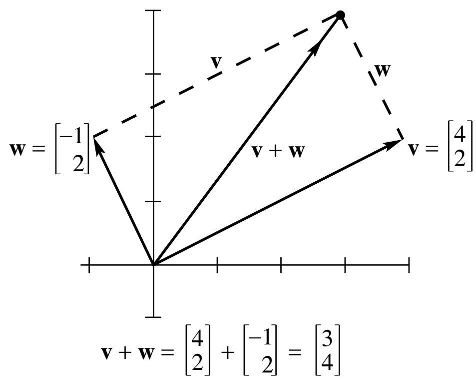



**Abb. 1.2.** Die Vektoraddition $\mathbf{v} + \mathbf{w}$ bildet die Diagonale des Parallelogramms. Man addiert die ersten und die zweiten Komponenten getrennt voneinander.

$v_1$ und $v_2$ die Komponenten des Vektors, so zeigt der Pfeil $v_1$ Einheiten nach rechts und $v_2$ Einheiten nach oben. Ein solcher Vektor ist in Abbildung 1.1 auf zwei verschiedene Weisen gezeichnet. Einmal beginnt er im Ursprung (dort, wo sich die Achsen treffen) — und dies ist die übliche Darstellungsweise. Nur in Ausnahmefällen werden unsere Vektoren nicht im Ursprung $(0, 0)$ beginnen. Im zweiten Fall ist der Anfangspunkt des Pfeils nach $A$ verschoben. Die Pfeile $\overrightarrow{OP}$ und $\overrightarrow{AB}$ repräsentieren jedoch denselben Vektor. Ein Grund dafür, prinzipiell alle Startpunkte für Vektoren zu erlauben, besteht darin, dass sich dadurch die Summe $\mathbf{v} + \mathbf{w}$ zweier Vektoren grafisch darstellen lässt.

> ***Vektoraddition*** (Spitze zum Anfang) ***Setze den Anfang von*** $\mathbf{w}$ ***an die Spitze von*** $\mathbf{v}$.

Wir folgen zunächst $\mathbf{v}$ vom Anfang bis zur Spitze und gehen dann längs $\mathbf{w}$. Oder aber wir nehmen die Abkürzung entlang $\mathbf{v} + \mathbf{w}$. Das gleiche Ergebnis ergibt sich, wenn man zunächst $\mathbf{w}$ folgt und anschließend längs $\mathbf{v}$ geht. Anders gesagt, $\mathbf{w}+\mathbf{v}$ ergibt dasselbe wie $\mathbf{v}+\mathbf{w}$. All dies sind verschiedene Wege durch das Parallelogramm (das im gewählten Beispiel speziell ein Rechteck ist). Der Endpunkt in Abbildung 1.2 ist der diagonal zum Urpsrung liegende Punkt $\mathbf{v} + \mathbf{w}$, was wiederum dasselbe ist wie $\mathbf{w} + \mathbf{v}$.

Überprüfen wir unser Vorgehen durch Nachrechnen: die erste Komponente von $\mathbf{v} + \mathbf{w}$ ist $v_1 + w_1$, und dies ist identisch zu $w_1 + v_1$. Die Reihenfolge der Addition macht somit keinen Unterschied:

$$\mathbf{v} + \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix} = \mathbf{w} + \mathbf{v}.$$

Der Nullvektor besitzt die Koordinaten $v_1 = 0$ und $v_2 = 0$. Er ist zu kurz, um ihn durch einen Pfeil darzustellen, aber wir wissen, dass $\mathbf{v} + \mathbf{0} = \mathbf{v}$ gilt. Um $2\mathbf{v}$ zu zeichnen, verdoppeln wir die Länge des Pfeils. Wir kehren seine

Richtung um, um $-\mathbf{v}$ zu erhalten. Diese Umkehrung liefert eine geometrische Möglichkeit, Vektoren zu subtrahieren.

> ***Vektorsubtraktion*** ***Um*** $\mathbf{v}-\mathbf{w}$ ***zu zeichnen, geht man vorwärts längs*** $\mathbf{v}$ ***und dann rückwärts längs*** $\mathbf{w}$ ***(Abbildung 1.3). Die Komponenten von*** $\mathbf{v}-\mathbf{w}$ ***sind*** $v_1 - w_1$ ***und*** $v_2 - w_2$.

Bald werden wir das „Skalarprodukt“ von Vektoren kennenlernen. Es handelt sich hierbei jedoch nicht um den Vektor mit den Komponenten $v_1 w_1$ und $v_2 w_2$.

### Linearkombinationen

Bislang haben wir Vektoren addiert, subtrahiert und mit Skalaren multipliziert. Die Ergebnisse $\mathbf{v}+\mathbf{w}$, $\mathbf{v}-\mathbf{w}$, und $c\mathbf{v}$ werden komponentenweise berechnet. Indem wir diese Operationen kombinieren, bilden wir jetzt *„Linearkombinationen“* von Vektoren $\mathbf{v}$ und $\mathbf{w}$. Äpfel bleiben immer noch von Birnen getrennt — die Linearkombination in Abbildung 1.3 liefert vielmehr einen neuen Vektor $c\mathbf{v}+d\mathbf{w}$.

**DEFINITION** ***Die Summe von*** $c\mathbf{v}$ ***und*** $d\mathbf{w}$ ***ist eine Linearkombination von*** $\mathbf{v}$ ***und*** $\mathbf{w}$.

$$3\mathbf{v}+2\mathbf{w} = 3\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Hierin besteht die grundlegende Konstruktion der Linearen Algebra: *Multipliziere und addiere.* In diesem Sinne stellt die Summe $\mathbf{v}+\mathbf{w}$ lediglich eine spezielle Kombination mit $c = d = 1$ dar. Das Vielfache $2\mathbf{v}$ ist der Spezialfall mit $c = 2$ und $d = 0$. Schon bald werden wir sämtliche Linearkombinationen von $\mathbf{v}$ und $\mathbf{w}$ betrachten — also gleichzeitig eine ganze Familie von Vektoren. Auf diesen grundlegenden Gedanken, nämlich den Übergang von zwei Vektoren zu einer ganzen „Ebene von Vektoren“, baut die ganze lineare Algebra auf.

Die Konstruktion einer Linearkombination von $\mathbf{v}$ und $\mathbf{w}$ ist sehr einfach. Sind die Faktoren $c = 3$ und $d = 2$ gegeben, so multiplizieren wir und addieren anschließend um $3\mathbf{v}+2\mathbf{w}$ zu erhalten. Ein Problem ergibt sich jedoch in der umgekehrten Richtung, wenn $c$ und $d$ „Unbekannte“ sind. In diesem Fall liegt uns nur das Ergebnis vor: $c\mathbf{v}+d\mathbf{w}$ hat die Komponenten 8 und $-1$. Gesucht sind dann die richtigen Faktoren $c$ und $d$. Die beiden Komponenten der Vektoren liefern zwei Gleichungen für die beiden Unbekannten $c$ und $d$.

Die beste Art, 100 Unbekannte zu finden, die die Faktoren vor 100 Vektoren mit je 100 Komponenten sind, wird in Kapitel 2 erläutert werden.

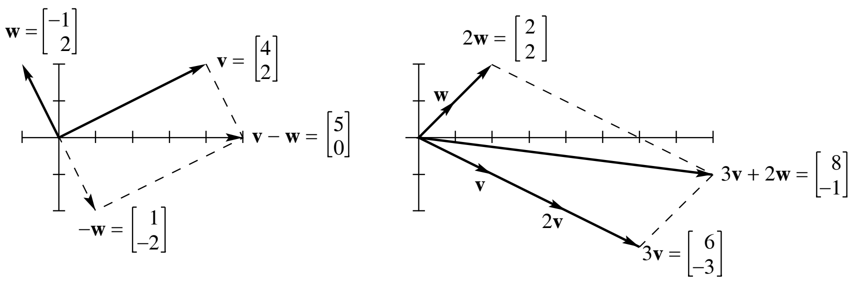



**Abb. 1.3.** Vektorsubtraktion $\mathbf{v}-\mathbf{w}$ (links). Die Linearkombination $3\mathbf{v}+2\mathbf{w}$ (rechts).

### Vektoren in drei Dimensionen

Jeder Vektor $\mathbf{v}$ mit zwei Komponenten korrespondiert mit einem Punkt in der $xy$-Ebene. Die Komponenten von $\mathbf{v}$ sind die Koordinaten des Punktes: $x = v_1$ und $y = v_2$. Der Pfeil endet im Punkt $(v_1, v_2)$, wenn er in $(0, 0)$ beginnt. Von nun an wollen wir auch Vektoren mit drei Komponenten betrachten. Dabei wird die $xy$-Ebene durch den dreidimensionalen Raum ersetzt.

Hier sind einige typische Vektoren (immer noch Spaltenvektoren, aber mit drei Komponenten):

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{v} + \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Der Vektor $\mathbf{v}$ korrespondiert mit einem Pfeil im dreidimensionalen Raum. Normalerweise startet der Pfeil im Ursprung, also an dem Ort, wo sich die $x$-, die $y$- und die $z$-Achse treffen und dessen Koordinaten $(0, 0, 0)$ sind.

Der Pfeil des Vektors $\mathbf{v}$ endet im Punkt mit den Koordinaten $x = 1$, $y = 2$, $z = 2$. Also gibt es eine völlige Übereinstimmung zwischen einem ***Spaltenvektor***, dem ***Pfeil vom Ursprung*** und dem ***Punkt, in dem der Pfeil endet***. Dies sind drei äquivalente Möglichkeiten, denselben Vektor zu beschreiben.

***Von nun an wird*** $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ ***auch als*** $\mathbf{v} = (1, 2, 2)$ ***geschrieben.***

Der Grund für die Spaltenschreibweise (in eckigen Klammern) besteht darin, dass Vektoren mit Matrizen verträglich sein sollen. Der Grund für die Zeilenschreibweise (in runden Klammern) besteht darin, Platz zu sparen. Dies wird insbesondere bei langen Vektoren wichtig. Den Vektor $(1, 2, 2, 4, 4, 6)$ in einer Spalte zu schreiben, wäre sicherlich Platzverschwendung.
*Wichtiger Hinweis:* $\mathbf{v} = (1, 2, 2)$ ist kein Zeilenvektor. Der Zeilenvektor $[1\ 2\ 2]$ ist etwas völlig anderes, auch wenn er dieselben drei Komponenten besitzt. Vielmehr ist dies der zu $\mathbf{v}$ „transponierte“ Vektor.

Ein Spaltenvektor kann somit auch horizontal (mit Kommata und runden Klammern) geschrieben werden. Daher ist $(1, 2, 2)$ tatsächlich ein Spaltenvektor — er hat sich nur zeitweise hingelegt.

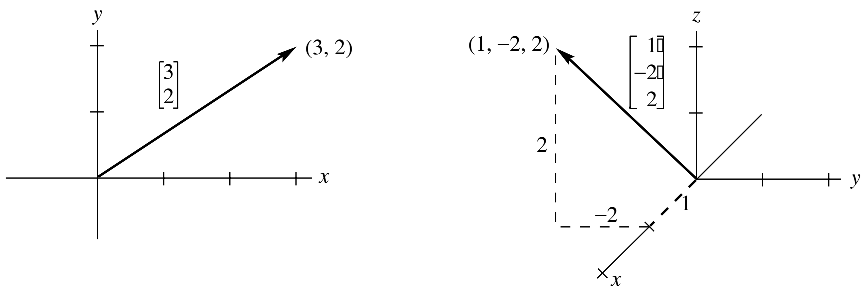



**Abb. 1.4.** Vektoren $\begin{bmatrix}\mathbf{x}\\\mathbf{y}\end{bmatrix}$ und $\begin{bmatrix}\mathbf{x}\\\mathbf{y}\\\mathbf{z}\end{bmatrix}$ korrespondieren mit den Punkten $(x, y)$ und $(x, y, z)$.

Auch in drei Dimensionen werden Vektoren Komponente für Komponente addiert. Die Summe $\mathbf{v} + \mathbf{w}$ hat die Komponenten $v_1 + w_1$ und $v_2 + w_2$ und $v_3 + w_3$ — die Komponenten könnten nun etwa Äpfel, Birnen und Orangen entsprechen. Man erkennt jetzt, wie man Vektoren in 4, 5 oder $n$ Dimensionen addiert. Damit ist das Ende der Linearen Algebra für Gemüsehändler erreicht!

Die Addition $\mathbf{v} + \mathbf{w}$ wird durch Pfeile im Raum dargestellt. Beginnt $\mathbf{w}$ am Ende von $\mathbf{v}$, so ist die dritte Seite durch $\mathbf{v} + \mathbf{w}$ gegeben. Folgt $\mathbf{v}$ auf $\mathbf{w}$, so erhalten wir die anderen Seiten eines Parallelogramms. Frage: Liegen alle vier Seiten in derselben Ebene? *Ja.* Und die Summe $\mathbf{v} + \mathbf{w} - \mathbf{v} - \mathbf{w}$ beschreibt einen Rundgang um das Parallelogramm und ergibt _____.

Eine typische Linearkombination dreier Vektoren in drei Dimension ist $\mathbf{u} + 4\mathbf{v} - 2\mathbf{w}$:

$$\textbf{\textit{Linearkombination}} \qquad \begin{bmatrix}1\\0\\3\end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix}2\\3\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\2\\9\end{bmatrix}.$$

Wir beenden diesen Abschnitt mit der Frage: Welche Fläche im dreidimensionalen Raum erhält man aus allen Linearkombinationen von $\mathbf{u}$ und $\mathbf{v}$? Die Fläche enthält die Gerade durch $\mathbf{u}$ und die Gerade durch $\mathbf{v}$. Sie enthält den Nullvektor (die Linearkombination $0\mathbf{u} + 0\mathbf{v}$). Die Fläche enthält auch die diagonale Gerade durch $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ — und jede andere Kombination $c\mathbf{u} + d\mathbf{v}$ (ohne $\mathbf{w}$ zu benutzen.) ***Diese gesamte Fläche ist eine Ebene*** (es sei denn, $\mathbf{u}$ ist parallel zu $\mathbf{v}$).

*Eine Bemerkung zum Rechnen mit dem Computer:* Angenommen, die Komponenten des zehndimensionalen Vektors $\mathbf{v}$ sind $v(1), \ldots, v(N)$, und ebenso für $\mathbf{w}$. In einer Programmiersprache wie FORTRAN verwendet man eine Schleife, um die Komponenten einzeln zu addieren:

```
   DO 10 I = 1,N
10 VPLUSW(I) = v(I)+w(I)
```

MATLAB hingegen arbeitet direkt mit Vektoren und Matrizen. Sind $\mathbf{v}$ und $\mathbf{w}$ definiert, dann wird $\mathbf{v} + \mathbf{w}$ sofort verstanden. Das Ergebnis wird ausgegeben, falls die Zeile nicht mit einem Semikolon endet. Wir können Vektoren als Zeilen eingeben — das anschließende Hochkomma $'$ verwandelt sie in Spalten. Dann lassen wir $\mathbf{v} + \mathbf{w}$ und eine andere Linearkombination ausgeben:

```
v = [2  3  4]'; w = [1  1  1]'; u = v + w
2*v - 3*w
```

Die Summe wird als $\mathbf{u} =$ ausgegeben. Die unbenannte Linearkombination wird mit **ans** $=$ ausgegeben[1]:

| $\mathbf{u} =$ | **ans** $=$ |
|---|---|
| 3 | 1 |
| 4 | 3 |
| 5 | 5 |

## Die wesentlichen Punkte

**1.** Ein Vektor $\mathbf{v}$ im zweidimensionalen Raum hat zwei Komponenten $v_1$ und $v_2$.

**2.** Vektoren werden Komponente für Komponente addiert und subtrahiert.

**3.** Das skalare Vielfache ist $c\mathbf{v} = (cv_1, cv_2)$. Eine Linearkombination von $\mathbf{v}$ und $\mathbf{w}$ ist $c\mathbf{v} + d\mathbf{w}$.

**4.** Sämtliche Linearkombinationen zweier nicht paralleler Vektoren $\mathbf{v}$ und $\mathbf{w}$ bilden eine Ebene.

## Aufgaben 1.1

**Die Aufgaben 1–9 betreffen die Addition von Vektoren und Linearkombinationen.**

1. Zeichnen Sie die Vektoren $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v} + \mathbf{w}$ und $\mathbf{v} - \mathbf{w}$ gemeinsam in der $xy$-Ebene.

2. Berechnen und zeichnen Sie die Vektoren $\mathbf{v}$ und $\mathbf{w}$, für die gilt $\mathbf{v} + \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ und $\mathbf{v} - \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$.

3. Bestimmen Sie die Komponenten von $3\mathbf{v} + \mathbf{w}$, $\mathbf{v} - 3\mathbf{w}$ und $c\mathbf{v} + d\mathbf{w}$ für die Vektoren $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ und $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

[1] für engl. „answer“ = „Antwort“, Anm. d. Übers.

4. Berechnen Sie $\mathbf{u}+\mathbf{v}$, $\mathbf{u}+\mathbf{v}+\mathbf{w}$ und $2\mathbf{u}+2\mathbf{v}+\mathbf{w}$ für die Vektoren

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

5. Die Komponenten jeder Linearkombination von $\mathbf{v} = (1, -2, 1)$ und $\mathbf{w} = (0, 1, -1)$ addieren sich zu _____ auf. Bestimmen Sie $c$ und $d$, so dass $c\mathbf{v} + d\mathbf{w} = (4, 2, -6)$ gilt.

6. Zeichnen Sie die folgenden neun Linearkombinationen in der $xy$-Ebene:

$$c \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad c = 0, 1, 2 \quad \text{und} \quad d = 0, 1, 2.$$

7. (a) Die Subtraktion $\mathbf{v} - \mathbf{w}$ geht vorwärts längs $\mathbf{v}$ und rückwärts längs $\mathbf{w}$. In der Abbildung 1.3 ist auch ein zweiter Weg zu $\mathbf{v} - \mathbf{w}$ aufgezeigt. Welcher ist es?
   (b) Wenn Sie alle Kombinationen von $\mathbf{v}$ und $\mathbf{w}$ betrachten, welche „Vektorenfläche“ erhalten Sie?

8. Das Parallelogramm in Abbildung 1.2 hat die Diagonale $\mathbf{v} + \mathbf{w}$. Wie ist seine andere Diagonale darstellbar? Was ergibt die Summe beider Diagonalen? Zeichnen Sie diese Vektorsumme.

9. Wenn ein Parallelogramm die drei Ecken $(1, 1)$, $(4, 2)$, und $(1, 3)$ besitzt, welche möglichen vierten Ecken gibt es? Zeichnen Sie zwei davon.

**In den Aufgaben 10–13 geht es um die Länge von Vektoren. Rechnen Sie mit der Formel (Länge von $\mathbf{v}$)$^2 = v_1^2 + v_2^2$.**

10. Das Parallelogramm mit den Seiten $\mathbf{v} = (4, 2)$ und $\mathbf{w} = (-1, 2)$ ist ein Rechteck (vgl. Abbildung 1.2). Überprüfen Sie den Satz des Pythagoras $a^2 + b^2 = c^2$, der ***nur für Dreiecke mit rechtem Winkel*** gilt:

$$(\text{Länge von } \mathbf{v})^2 + (\text{Länge von } \mathbf{w})^2 = (\text{Länge von } \mathbf{v} + \mathbf{w})^2.$$

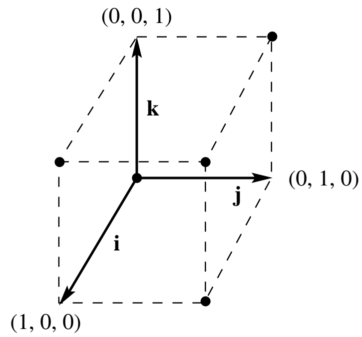
11. Im rechtwinkligen Fall funktioniert die Formel $a^2 + b^2 = c^2$ auch für $\mathbf{v} - \mathbf{w}$. Überprüfen Sie in Abbildung 1.2, dass

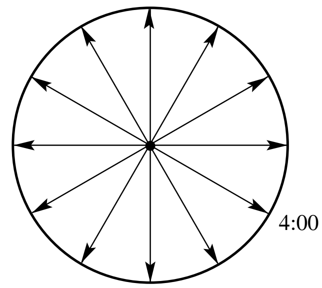
$$(\text{Länge von } \mathbf{v})^2 + (\text{Länge von } \mathbf{w})^2 = (\text{Länge von } \mathbf{v} - \mathbf{w})^2$$

gilt. Finden Sie ein Beispiel für $\mathbf{v}$ und $\mathbf{w}$ (nicht rechtwinklig) für die diese Formel falsch ist.

12. Um zu betonen, dass rechtwinklige Dreiecke besondere Dreiecke darstellen, bestimmen Sie Vektoren $\mathbf{v}$ und $\mathbf{w}$, die keinen Winkel von 90° miteinander bilden. Vergleichen Sie nun (Länge von $\mathbf{v}$)$^2$ + (Länge von $\mathbf{w}$)$^2$ mit (Länge von $\mathbf{v} + \mathbf{w}$)$^2$.

13. Überprüfen Sie in Abbildung 1.2 dass (Länge von $\mathbf{v}$) + (Länge von $\mathbf{w}$) größer ist als (Länge von $\mathbf{v} + \mathbf{w}$). Diese „Dreiecksungleichung“ ist für jedes Dreieck richtig, ausgenommen das absolut dünne Dreieck, in dem $\mathbf{v}$ und $\mathbf{w}$ _____ sind. Beachten Sie, dass die Längen hier nicht quadriert werden.




**In den Aufgaben 14–18 geht es um spezielle Vektoren in Würfeln und Uhren.**

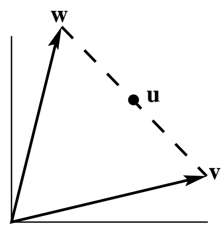
14. Zeichnen Sie den Würfel ab, und bestimmen Sie die Vektorsumme von $\mathbf{i} = (1,0,0)$, $\mathbf{j} = (0,1,0)$ und $\mathbf{k} = (0,0,1)$ grafisch. Die Summe $\mathbf{i}+\mathbf{j}$ ergibt die Diagonale von _____.

15. Drei Kanten des Einheitswürfels sind $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ und $\mathbf{k}$. Drei Ecken sind $(0,0,0)$, $(1,0,0)$ und $(0,1,0)$. Welches sind die anderen fünf Ecken, und was sind die Koordinaten des Mittelpunktes? Die Mittelpunkte der sechs Flächen des Würfels sind _____.

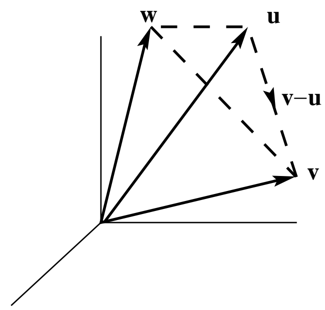
16. Wie viele Ecken hat ein Würfel in 4 Dimensionen? Wie viele Flächen? Wie viele Kanten? Eine typische Ecke ist $(0,0,1,0)$.

17. (a) Was ist die Summe $\mathbf{V}$ der zwölf Vektoren, die vom Mittelpunkt einer Uhr zu den Zeiten 1:00 Uhr, 2:00 Uhr, ..., 12:00 Uhr zeigen?
    (b) Bestimmen Sie die Summe der verbleibenden elf Vektoren, wenn der Vektor zu 4:00 Uhr herausgenommen wird.
    (c) Nehmen Sie an, der 1:00-Uhr-Vektor sei halbiert. Addieren Sie ihn zu den anderen elf Vektoren.

18. Nehmen Sie an, die zwölf Vektoren beginnen nicht in der Mitte bei $(0,0)$, sondern in $(0,-1)$ am unteren Ende der Uhr. Dann ist der Vektor zu 6:00 Uhr der Nullvektor, und der Vektor zu 12:00 Uhr wird zu $(2\mathbf{j})$ verdoppelt. Summieren Sie die zwölf auf diese Weise konstruierten Vektoren auf.




Aufgaben **19–22** in einer Ebene




Aufgaben **23–27** im dreidimensionalen Raum

**Die Aufgaben 19–22 behandeln Linearkombinationen von v und w (siehe Abbildung).**

19. Die Abbildung zeigt den Vektor $\mathbf{u} = \frac{1}{2}\mathbf{v} + \frac{1}{2}\mathbf{w}$. Zeichnen Sie die Punkte $\frac{3}{4}\mathbf{v} + \frac{1}{4}\mathbf{w}$, $\frac{1}{4}\mathbf{v} + \frac{1}{4}\mathbf{w}$ und $\mathbf{v} + \mathbf{w}$ ein.

20. Markieren Sie die Punkte $-\mathbf{v} + 2\mathbf{w}$ und einer weiteren Linearkombination $c\mathbf{v} + d\mathbf{w}$ mit $c + d = 1$. Zeichnen Sie die Gerade aller Linearkombinationen mit $c + d = 1$.

21. Bestimmen Sie $\frac{1}{3}\mathbf{v} + \frac{1}{3}\mathbf{w}$ und $\frac{2}{3}\mathbf{v} + \frac{2}{3}\mathbf{w}$. Auf welcher Geraden liegen die Kombinationen $c\mathbf{v} + c\mathbf{w}$? Welchen Strahl erzeugen die Kombinationen für $c = d$ mit der Einschränkung $c \geq 0$?

22. (a) Zeichnen Sie die Vektoren $\frac{1}{2}\mathbf{v} + \mathbf{w}$ und $\mathbf{v} + \frac{1}{2}\mathbf{w}$. Schraffieren Sie den Bereich, den die Vektoren $c\mathbf{v} + d\mathbf{w}$ mit $0 \leq c \leq 1$ und $0 \leq d \leq 1$ ausfüllen.
    (b) Zeichnen Sie den „Kegel“ aller Kombinationen $c\mathbf{v} + d\mathbf{w}$ mit $0 \leq c$ und $0 \leq d$.

**In den Aufgaben 23 – 27 geht es um Vektoren $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ und $\mathbf{w}$ im dreidimensionalen Raum (siehe Abbildung).**

23. (a) Wo liegen $\frac{1}{3}\mathbf{u} + \frac{1}{3}\mathbf{v} + \frac{1}{3}\mathbf{w}$ und $\frac{1}{2}\mathbf{u} + \frac{1}{2}\mathbf{w}$ in der Abbildung?
    (b) Eine kleine Herausforderung: Unter welchen Bedingungen an $c, d$ und $e$ stellen die Vektoren $c\mathbf{u} + d\mathbf{v} + e\mathbf{w}$ die Ebene dar, in der die Spitzen von $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ und $\mathbf{w}$ liegen?

24. Die drei Seiten des gestrichelten Dreiecks sind $\mathbf{v} - \mathbf{u}$, $\mathbf{w} - \mathbf{v}$ und $\mathbf{u} - \mathbf{w}$. Ihre Summe ist _____. Zeichnen Sie die Spitze-Anfang-Summe des ebenen Dreiecks $(3, 1)$ plus $(-1, 1)$ plus $(-2, -2)$.

25. Schraffieren Sie die Pyramide aus den Linearkombinationen $c\mathbf{u}+d\mathbf{v}+e\mathbf{w}$ mit $c \geq 0$, $d \geq 0$, $e \geq 0$ und $c+d+e \leq 1$. Liegt der Vektor $\frac{1}{2}(\mathbf{u}+\mathbf{v}+\mathbf{w})$ innerhalb oder außerhalb der Pyramide?

26. Gibt es einen Vektor, der nicht als Linearkombination $c\mathbf{u} + d\mathbf{v} + e\mathbf{w}$ dargestellt werden kann, wenn man *alle* Kombinationen von $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ und $\mathbf{w}$ zulässt?

27. Welche Vektoren liegen *gleichzeitig* in der $\mathbf{u}$-$\mathbf{v}$-Ebene und in der $\mathbf{v}$-$\mathbf{w}$-Ebene?

28. (a) Zeichnen Sie Vektoren $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ und $\mathbf{w}$ so, dass ihre Linearkombinationen $c\mathbf{u} + d\mathbf{v} + e\mathbf{w}$ auf nur einer Geraden liegen.
    (b) Zeichnen Sie Vektoren $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ und $\mathbf{w}$ so, dass ihre Linearkombinationen $c\mathbf{u} + d\mathbf{v} + e\mathbf{w}$ lediglich eine Ebene ausfüllen.

29. Welche Kombination der Vektoren $\begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \end{bmatrix}$ und $\begin{bmatrix} \mathbf{3} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix}$ erzeugt $\begin{bmatrix} \mathbf{14} \\ \mathbf{8} \end{bmatrix}$? Formulieren Sie diese Frage in Form von zwei Gleichungen für die Koeffizienten $c$ und $d$ in der Linearkombination.

## 1.2 Längen und Skalarprodukte

Im ersten Abschnitt wurde die Multiplikation von Vektoren zwar erwähnt, jedoch nicht weiter verfolgt. Wir werden jetzt hierauf genauer eingehen und das *„Skalarprodukt"* von Vektoren $\mathbf{v}$ und $\mathbf{w}$ definieren. In dieser Multiplikation tauchen wohl die beiden einzelnen Produkte der Komponenten $v_1w_1$ und $v_2w_2$ auf, damit ist aber noch nicht Schluss. Denn diese beiden Zahlen werden zudem addiert und ergeben eine einzige Zahl $\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}$.

**DEFINITION** Das ***Skalarprodukt*** oder das ***Innere Produkt*** von $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ und $\mathbf{w} = (w_1, w_2)$ ist die Zahl

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{w} = v_1w_1 + v_2w_2. \tag{1.1}$$

**Beispiel 1.2.1** Das Skalarprodukt der Vektoren $\mathbf{v} = (4, 2)$ und $\mathbf{w} = (-1, 2)$ ist *Null*:

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = -4 + 4 = 0.$$

Null ist in der Mathematik stets eine besondere Zahl. Bei Skalarprodukten bedeutet das Auftreten der Null, *dass die beiden Vektoren senkrecht zueinander stehen*. Der Winkel zwischen ihnen ist 90°. Als wir die Vektoren in

Abbildung 1.2 gezeichnet haben, sahen wir ein Rechteck — nicht nur irgendein Parallelogramm. Das einfachste Beispiel rechtwinkliger Vektoren ist das Paar $\mathbf{i} = (1, 0)$ längs der $x$-Achse und $\mathbf{j} = (0, 1)$ längs der $y$-Achse. Auch hier ist das Skalarprodukt $\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = 0 + 0 = 0$ und die Vektoren $\mathbf{i}$ und $\mathbf{j}$ bilden einen rechten Winkel.

Die Vektoren $\mathbf{v} = (1, 2)$ und $\mathbf{w} = (2, 1)$ stehen nicht senkrecht aufeinander. Ihr Skalarprodukt ist 4. Bald wird es uns dieser Wert ermöglichen, den Winkel zwischen ihnen anzugeben (der nicht 90° ist).

**Beispiel 1.2.2** Wir legen ein Gewicht 4 an den Punkt $x = -1$ und das Gewicht 2 an den Punkt $x = 2$. Wäre die $x$-Achse eine Wippe mit Mittelpunkt $x = 0$, würden sich die Gewichte ausbalancieren, denn das Skalarprodukt ist $(4)(-1) + (2)(2) = 0$.

Dies ist ein typisches Beispiel aus den Ingenieur- und Naturwissenschaften. Der Gewichts-Vektor ist $(w_1, w_2) = (4, 2)$, der Abstandsvektor $(v_1, v_2) = (-1, 2)$. Kraft mal Abstand, $w_1$ mal $v_1$, ergibt das „Drehmoment" des ersten Gewichtes. Die Gleichung, die das Gleichgewicht der Wippe beschreibt, ist durch $w_1 v_1 + w_2 v_2 = 0$ gegeben.

***Das Skalarprodukt*** $\mathbf{w} \cdot \mathbf{v}$ ***ist gleich*** $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$.
Die Reihenfolge von $\mathbf{v}$ und $\mathbf{w}$ ist somit unwichtig.

**Beispiel 1.2.3** Man begegnet Skalarprodukten auch in den Wirtschaftswissenschaften und im Geschäftsalltag. Stellen wir uns vor, wir hätten fünf Produkte, die wir kaufen oder verkaufen. Die Preise seien $(p_1, p_2, p_3, p_4, p_5)$ für jeweils eine Einheit des jeweiligen Produktes — dies ergibt den „Preisvektor" $\mathbf{p}$. Die Mengen, die wir ein- oder verkaufen, seien $(q_1, q_2, q_3, q_4, q_5)$ — positiv für den Verkauf, negativ im Falle des Einkaufs. Wenn wir $q_1$ Einheiten des ersten Produktes zum Preis $p_1$ verkaufen, bringt das Einnahmen in Höhe von $q_1 p_1$. Die Gesamteinnahmen ergeben sich dann aus dem Skalarprodukt $\mathbf{q} \cdot \mathbf{p}$:

$$\textbf{\textit{Einnahmen}} = (q_1, q_2, \ldots, q_5) \cdot (p_1, p_2, \ldots, p_5) = q_1 p_1 + q_2 p_2 + \cdots + q_5 p_5 .$$

Ist das Skalarprodukt Null, so bedeutet dies, dass die Bilanz ausgeglichen ist — die Gesamteinnahmen sind gleich den Gesamtausgaben, falls $\mathbf{q} \cdot \mathbf{p} = 0$ gilt. In diesem Falle steht der Vektor $\mathbf{p}$ senkrecht auf dem Vektor $\mathbf{q}$ (und zwar im fünfdimensionalen Raum). Für fünf Produkte ***sind die Vektoren fünfdimensional***. Durch Beispiele dieser Art wird man in der linearen Algebra sehr schnell in hohe Dimensionen geführt.

Noch ein kleiner Hinweis: Tabellenkalkulationen sind im Geschäftsleben zu unverzichtbaren Hilfsmitteln geworden. Was ist eine Tabellenkalkulation eigentlich? In ihr werden Linearkombinationen und Skalarprodukte berechnet, und was man auf dem Computerbildschirm sieht, ist nichts anderes als eine Matrix.

**Merkregel:** Um das Skalarprodukt auszurechnen, multipliziert man jedes $v_i$ mit $w_i$, und addiert die Einzelprodukte auf.

### Längen und Einheitsvektoren

Ein wichtiger Fall ist das Skalarprodukt eines Vektors mit sich selbst, wenn $\mathbf{v} = \mathbf{w}$ gilt. Das Skalarprodukt des Vektors $\mathbf{v} = (1, 2, 3)$ mit sich selbst ist $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = 14$:

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = 1 + 4 + 9 = 14.$$

Das Ergebnis ist nicht Null, weil $\mathbf{v}$ nicht senkrecht zu sich selbst steht. Anstelle eines 90°-Winkels haben wir einen 0°-Winkel. In diesem Spezialfall ergibt das Skalarprodukt $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$ das *Quadrat der Länge*.

**DEFINITION** Die ***Länge*** (oder ***Norm***) eines Vektors $\mathbf{v}$ ist die Quadratwurzel aus $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$:

$$\boxed{\text{Länge von } \mathbf{v} = \|\mathbf{v}\| = \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}.}$$

Im Zweidimensionalen ist die Länge durch $\sqrt{v_1^2 + v_2^2}$ gegeben, in drei Dimensionen durch $\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$. Entsprechend der Rechnung oben hat $\mathbf{v} = (1, 2, 3)$ die Länge $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{14}$.

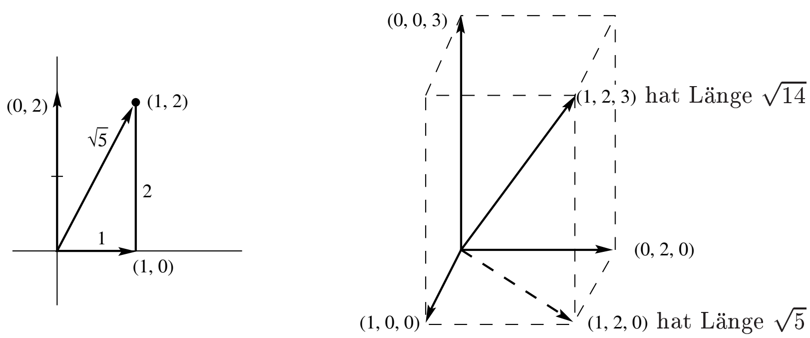



**Abb. 1.5.** Die Länge $\sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}$ zwei- und dreidimensionaler Vektoren.

Diese Definition lässt sich plausibel machen. $\|\mathbf{v}\|$ ist einfach die ganz normale Länge eines Pfeiles, der den Vektor darstellt. Im Zweidimensionalen liegt der Pfeil in einer Ebene und ist dort die dritte Seite eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen andere Seitenlängen durch die Komponenten des Vektors gegeben sind, zum Beispiel 1 und 2 für den Vektor $\mathbf{v} = (1, 2)$. Die drei Seitenlängen sind über die Formel $a^2 + b^2 = c^2$ miteinander verbunden, d.h., es gilt $1^2 + 2^2 = \|\mathbf{v}\|^2$.

Um die Länge von $\mathbf{v} = (1, 2, 3)$ zu bestimmen, benutzen wir den Satz des Phythagoras zweimal. Zunächst hat der Vektor in der $x - y$-Ebene die Komponenten $1, 2, 0$ und die Länge $\sqrt{5}$. Dieser Vektor steht senkrecht auf dem Vektor $(0, 0, 3)$, der gerade nach oben zeigt. Deswegen hat die Diagonale des gestrichelten Quaders die Länge $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{5 + 9} = \sqrt{14}$.

Die Länge eines vierdimensionalen Vektors wäre $\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + v_4^2}$. So hat zum Beispiel $(1, 1, 1, 1)$ die Länge $\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2} = 2$, gerade die Länge der Diagonalen durch einen Einheitswürfel im vierdimensionalen Raum. Die Diagonale in $n$ Dimensionen hat die Länge $\sqrt{n}$.

Das Wort „Einheits-“ bedeutet immer, dass irgendein Maß gleich eins ist. Der Einheitswürfel hat zum Beispiel Seiten der Länge eins. Ein Einheitskreis hat den Radius eins. Nun können wir auch die Idee eines „Einheitsvektors“ einführen.

**DEFINITION** Ein ***Einheitsvektor*** $\mathbf{u}$ ist ein Vektor mit der Länge eins. Hier gilt $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 1$.

Ein vierdimensionales Beispiel ist $\mathbf{u} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, dessen Skalarprodukt $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}$ gerade $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1$ ist. Wir haben den Vektor $\mathbf{v} = (1, 1, 1, 1)$ durch seine Länge $\|\mathbf{v}\| = 2$ dividiert, um diesen Vektor zu erhalten.

**Beispiel 1.2.4** Die Standardeinheitsvektoren längs der $x$- und der $y$-Achse werden mit $\mathbf{i}$ und $\mathbf{j}$ bezeichnet. Der Einheitsvektor in der $xy-$Ebene, der mit der $x$-Achse einen Winkel $\theta$ bildet, ist durch $(\cos\theta, \sin\theta)$ gegeben:

$$\mathbf{i} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{j} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix}.$$

Für $\theta = 0$ wird der Vektor $\mathbf{u}$ gerade zu $\mathbf{i}$. Falls $\theta = 90°$ (oder $\frac{\pi}{2}$ im Bogenmaß), ist $\mathbf{u}$ derselbe Vektor wie $\mathbf{j}$. Aber für jeden Winkel ergeben die Komponenten $\cos\theta$ und $\sin\theta$ gerade $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 1$, weil $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ gilt. Diese Vektoren zeigen zu den Punkten auf dem Einheitskreis in Abbildung 1.6. Also sind $\cos\theta$ und $\sin\theta$ ganz einfach die Koordinaten des Punktes auf dem Einheitskreis mit zugehörigem Winkel $\theta$.

In drei Dimensionen sind $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ und $\mathbf{k}$ die Einheitsvektoren längs der drei Koordinatenachsen. Ihre Komponenten sind $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ und $(0, 0, 1)$. Beachten Sie, dass jeder dreidimensionale Vektor eine Linearkombination von $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ und $\mathbf{k}$ ist. Der Vektor $\mathbf{v} = (2, 2, 1)$ ist zum Beispiel gleich $2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$, seine Länge ist $\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}$, also $\|\mathbf{v}\| = 3$.

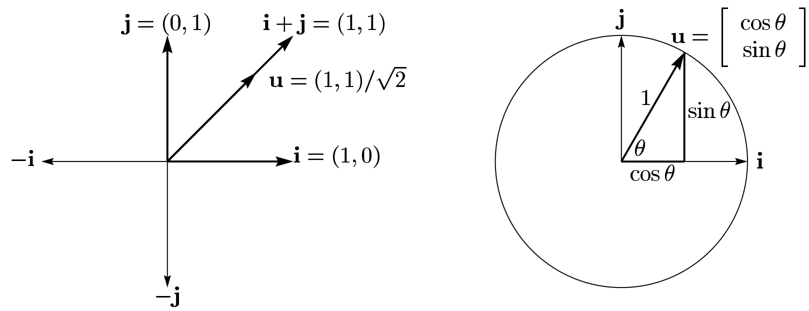



**Abb. 1.6.** Die Koordinatenvektoren $\mathbf{i}$ und $\mathbf{j}$. Der Einheitsvektor $\mathbf{u}$ im Winkel von 45° (links) und der Einheitsvektor $(\cos\theta, \sin\theta)$ im Winkel $\theta$.

Da $(2,2,1)$ die Länge 3 hat, hat der Vektor $(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3})$ die Länge 1. Um einen Einheitsvektor zu erzeugen, dividiert man einfach $\mathbf{v}$ durch seine Länge $\|\mathbf{v}\|$.

**1A Einheitsvektoren** ***Man teile einen Vektor*** $\mathbf{v}$ ***ungleich dem Nullvektor durch seine Länge.*** Dann ist $\mathbf{u} = \mathbf{v}/\|\mathbf{v}\|$ ein Einheitsvektor in dieselbe Richtung wie $\mathbf{v}$.

Im Dreidimensionalen haben wir so $\mathbf{u} = (\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3})$ gefunden. Rechnen Sie nach, dass $\mathbf{u}\cdot\mathbf{u} = \frac{4}{9} + \frac{4}{9} + \frac{1}{9} = 1$ gilt. Es zeigt also $\mathbf{u}$ auf einen Punkt der „Einheitskugel“ mit Mittelpunkt im Ursprung. Einheitsvektoren korrespondieren generell mit Punkten auf der Kugel mit Radius eins.

## Der Winkel zwischen zwei Vektoren

Wir haben schon erwähnt, dass für rechtwinklige Vektoren $\mathbf{v}\cdot\mathbf{w} = 0$ gilt. Das Skalarprodukt ist null, wenn der Winkel zwischen den Vektoren 90° ist. Um dies zu begründen, müssen wir rechte Winkel mit Skalarprodukten in Verbindung bringen. Das wird uns darauf bringen, wie uns $\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}$ den Winkel zwischen zwei beliebigen Vektoren (ungleich dem Nullvektor) liefert.

**1B Rechte Winkel** ***Das Skalarprodukt*** $\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}$ ***ist null, falls*** $\mathbf{v}$ ***rechtwinklig zu*** $\mathbf{w}$ ***steht.***

*Beweis.* Wenn $\mathbf{v}$ und $\mathbf{w}$ zueinander rechtwinklig stehen, bilden sie zwei Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks. Die dritte Seite (die Hypotenuse, die in Abbildung 1.7 von links nach rechts geht) ist dann $\mathbf{v} - \mathbf{w}$. Damit wird aus der Gleichung $a^2 + b^2 = c^2$ für die Seitenlängen

$$\|\mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{w}\|^2 = \|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|^2 \quad \text{(für senkrechte Vektoren).} \tag{1.2}$$

Schreibt man die Formeln für die Längen in zwei Dimensionen aus, wird daraus

$$v_1^2 + v_2^2 + w_1^2 + w_2^2 = (v_1 - w_1)^2 + (v_2 - w_2)^2. \tag{1.3}$$

Nach Ausmultiplikation fängt die rechte Seite mit $v_1^2 - 2v_1w_1 + w_1^2$ an. Deswegen kann man auf beiden Seiten der Gleichung $v_1^2$ und $w_1^2$ subtrahieren. Genauso enthält $(v_2 - w_2)^2$ die Terme $v_2^2$ und $w_2^2$ sowie $-2v_2w_2$. Subtrahiert man wieder auf beiden Seiten, bleiben nur noch $-2v_1w_1$ und $-2v_2w_2$ übrig. (In drei Dimensionen hätte man außerdem noch $-2v_3w_3$.) Im letzten Schritt dividiert man durch $-2$ und erhält:

$$0 = -2v_1w_1 - 2v_2w_2 \quad \text{und daher} \quad v_1w_1 + v_2w_2 = 0. \tag{1.4}$$

**Schlussfolgerung** Rechte Winkel ergeben ein Skalarprodukt $\mathbf{v}\cdot\mathbf{w} = 0$. Wir haben damit **Satz 1B** bewiesen. Das Skalarprodukt wird null, wenn der Winkel $\theta = 90°$ ist. Dann gilt $\cos\theta = 0$. Der Nullvektor $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ steht senkrecht auf jedem Vektor $\mathbf{w}$, weil $\mathbf{0}\cdot\mathbf{w}$ immer Null ergibt.

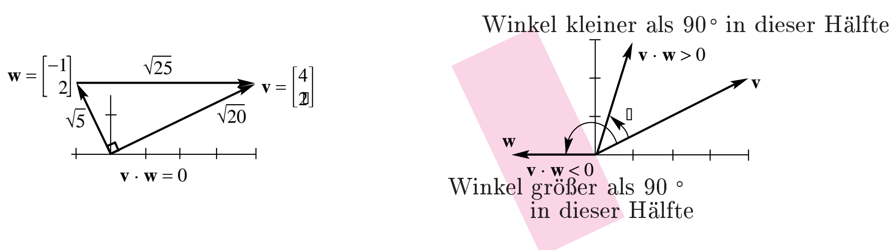



**Abb. 1.7.** Für senkrechte Vektoren gilt $\mathbf{v}\cdot\mathbf{w} = 0$. Der Winkel ist geringer als $90°$ wenn $\mathbf{v}\cdot\mathbf{w} > 0$ gilt.

Nehmen wir nun an, dass $\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}$ ungleich null ist. Das Skalarprodukt kann positiv, aber auch negativ sein. Das Vorzeichen von $\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}$ sagt uns sofort, ob der Winkel größer oder kleiner als ein rechter Winkel ist. Der Winkel ist kleiner als $90°$, wenn $\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}$ positiv ist. Er ist größer, wenn $\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}$ negativ ist. Abbildung 1.7 zeigt einen typischen Vektor $\mathbf{w} = (1, 3)$ in der rechten Halbebene, mit $\mathbf{v}\cdot\mathbf{w} > 0$. Für den Vektor $\mathbf{W} = (-2, 0)$ in der linken Halbebene gilt $\mathbf{v}\cdot\mathbf{W} = -8$.

Die Grenzlinie bilden die Vektoren, die senkrecht zu $\mathbf{v}$ stehen. Auf dieser Geraden zwischen positivem und negativen Vorzeichen ist das Skalarprodukt null.

Auf der nächsten Seite werden wir einen weiteren Einblick in die Geometrie des Skalarprodukts erhalten. Wir werden mit seiner Hilfe den genauen

Winkel $\theta$ bestimmen. Dies ist eigentlich nicht notwendig für die lineare Algebra, Sie könnten hier aufhören zu lesen! Denn haben wir erst einmal Matrizen und lineare Gleichungen erreicht, so werden wir dem $\theta$ den Rücken kehren. Aber da es in diesem Abschnitt noch um Winkel geht, ist dies die richtige Stelle, um die Formel einzuführen. Sie wird uns zeigen, dass der Winkel $\theta$ zwischen $\mathbf{v} = (4, 2)$ und $\mathbf{w} = (1, 3)$ in Abbildung 1.7 genau 45° ist.

Wir beginnen mit Einheitsvektoren $\mathbf{u}$ und $\mathbf{U}$. Das Vorzeichen von $\mathbf{u}\cdot\mathbf{U}$ gibt an, ob $\theta < 90°$ ist oder $\theta > 90°$. Da die Vektoren die Länge eins haben, können wir aber noch mehr erfahren. ***Das Skalarprodukt*** $\mathbf{u}\cdot\mathbf{U}$ ***ist der Kosinus von*** $\theta$***.*** Dies gilt sogar in beliebig vielen Dimensionen!

**1C** (a) Wenn $\mathbf{u}$ und $\mathbf{U}$ Einheitsvektoren sind, so gilt $\boxed{\mathbf{u}\cdot\mathbf{U} = \cos\theta}$.
(b) Wenn $\mathbf{u}$ und $\mathbf{U}$ Einheitsvektoren sind, so gilt $\boxed{|\mathbf{u}\cdot\mathbf{U}| \le 1}$.

Die Aussage (b) folgt direkt aus der Aussage (a). Erinnern Sie sich lediglich daran, dass $\cos\theta$ niemals größer als 1 ist und niemals kleiner als $-1$. ***Das Skalarprodukt zweier Einheitsvektoren liegt zwischen*** $-1$ ***und*** $1$***.***

In Abbildung 1.8 erkennt man die obige Aussage deutlich an den Vektoren $\mathbf{u} = (\cos\theta, \sin\theta)$ und $\mathbf{i} = (1, 0)$. Ihr Skalarprodukt ist $\mathbf{u}\cdot\mathbf{i} = \cos\theta$, also der Kosinus des Winkels zwischen ihnen.

Dreht man diese um irgendeinen Winkel $\alpha$, so sind es immer noch Einheitsvektoren, und der Winkel zwischen ihnen ist immer noch $\theta$. Die neuen Vektoren sind $\mathbf{u} = (\cos\alpha, \sin\alpha)$ und $\mathbf{U} = (\cos\beta, \sin\beta)$. Ihr Skalarprodukt ist $\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$. Nach den Additionstheoremen für trigonometrische Funktionen ist dies dasselbe wie $\cos(\beta - \alpha)$, und da $\beta - \alpha = \theta$ gilt, sind wir bei der Formel $\mathbf{u}\cdot\mathbf{U} = \cos\theta$ angelangt.


**Abb. 1.8.** Das Skalarprodukt von Einheitsvektoren ist der Kosinus des Winkels $\theta$.

In Aufgabe 24 wird die Ungleichung $|\mathbf{u}\cdot\mathbf{U}| \le 1$ direkt ohne Bezugnahme auf Winkel gezeigt. In Aufgabe 22 wird eine andere trigonometrische Formel angewendet, nämlich der *Kosinussatz*. Die Ungleichung und die Kosinusformel $\mathbf{u}\cdot\mathbf{U} = \cos\theta$ gelten für beliebige Dimensionen. Das Skalarprodukt ändert sich nicht, wenn die Vektoren gedreht werden, weil $\theta$ dabei unverändert bleibt.

*Wie stellt sich die Situation dar, wenn* $\mathbf{v}$ *und* $\mathbf{w}$ *keine Einheitsvektoren sind?* Dann ist ihr Skalarprodukt im Allgemeinen nicht mehr $\cos\theta$. Dividieren wir sie aber durch ihre Längen, um Einheitsvektoren $\mathbf{u} = \mathbf{v}/\|\mathbf{v}\|$ und $\mathbf{U} = \mathbf{w}/\|\mathbf{w}\|$ zu erhalten, so ist das Skalarprodukt dieser skalierten Vektoren wieder $\cos\theta$.

Unabhängig vom Winkel wird das Skalarprodukt von $\mathbf{v}/\|\mathbf{v}\|$ mit $\mathbf{w}/\|\mathbf{w}\|$ niemals größer als eins. Das ist die „Schwarz'sche Ungleichung“ für Skalarprodukte — oder richtiger die Cauchy-Schwarz-Buniakowsky'sche Ungleichung. Sie wurde in Frankreich, in Deutschland und in Russland entdeckt (und womöglich noch andernorts — es handelt sich hier um die wichtigste Ungleichung der Mathematik). Mit dem zusätzlichen Faktor $\|\mathbf{v}\|\,\|\mathbf{w}\|$ aus der Umskalierung in Einheitsvektoren erhalten wir jetzt für $\cos\theta$:

**1D** (a) **Kosinusformel** Sind $\mathbf{v}$ und $\mathbf{w}$ Vektoren ungleich null, dann gilt $\boxed{\dfrac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}}{\|\mathbf{v}\|\,\|\mathbf{w}\|} = \cos\theta}$ .

(b) **Schwarz'sche Ungleichung** Sind $\mathbf{v}$ und $\mathbf{w}$ beliebige Vektoren, so gilt $\boxed{|\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}| \le \|\mathbf{v}\|\,\|\mathbf{w}\|}$ .

**Beispiel 1.2.5** Bestimmen Sie den Winkel zwischen $\mathbf{v} = \left[\begin{smallmatrix}4\\2\end{smallmatrix}\right]$ und $\mathbf{w} = \left[\begin{smallmatrix}1\\3\end{smallmatrix}\right]$ in Abbildung 1.7b) .

**Lösung** Das Skalarprodukt ist $\mathbf{v}\cdot\mathbf{w} = 4 + 6 = 10$. Die Länge von $\mathbf{v}$ ist $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{20}$. Die Länge von $\mathbf{w}$ ist $\|\mathbf{w}\| = \sqrt{10}$. Also ist der Kosinus des Winkels

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}}{\|\mathbf{v}\|\,\|\mathbf{w}\|} = \frac{10}{\sqrt{20}\sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad \text{und damit ist} \quad \theta = 45^\circ.$$

Der Winkel mit diesem Kosinus ist also gerade $45^\circ$. Er ist kleiner als $90^\circ$, weil $\mathbf{v}\cdot\mathbf{w} = 10$ positiv ist. Nach der Schwarz'schen Ungleichung ist $\|\mathbf{v}\|\,\|\mathbf{w}\| = \sqrt{200}$ größer als $\mathbf{v}\cdot\mathbf{w} = 10$.

**Beispiel 1.2.6** Das Skalarprodukt von $\mathbf{v} = (a, b)$ und $\mathbf{w} = (b, a)$ ist $2ab$. Die Schwarz'sche Ungleichung liefert $2ab \le a^2 + b^2$, zum Beispiel ist $2(3)(4) = 24 \le 3^2 + 4^2 = 25$.

*Begründung* Die Längen sind $\|\mathbf{v}\| = \|\mathbf{w}\| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Dann wird $\mathbf{v}\cdot\mathbf{w} = 2ab$ niemals $\|\mathbf{v}\|\,\|\mathbf{w}\| = a^2 + b^2$ überschreiten, da die Differenz zwischen $a^2 + b^2$ und $2ab$ niemals negativ werden kann:

$$a^2 + b^2 - 2ab = (a - b)^2 \ge 0.$$

Diese Beziehung ist besser bekannt, wenn man $x = a^2$ und $y = b^2$ setzt, denn dann heißt sie: Das „geometrische Mittel“ ist nicht größer als das „arithmetische Mittel“, also der Mittelwert von $x$ und $y$:

$$ab \leq \frac{a^2 + b^2}{2} \quad \text{wird zu} \quad \sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}.$$

**Die Berechnung von Skalarprodukten und Winkeln** Die Zeit ist reif für einen Augenblick der Wahrheit. Dem Skalarprodukt $\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}$ begegnet man normalerweise in der Form ***Zeile mal Spalte***:

$$\text{An Stelle von} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \text{sieht man häufiger} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

In FORTRAN benutzt man eine Schleife, um die Komponenten miteinander zu multiplizieren und aufzuaddieren:

```
   DO 10 I = 1,N
10 VMALW = VMALW + V(I) * W(I)
```

MATLAB arbeitet mit ganzen Vektoren, nicht mit ihren einzelnen Komponenten. Sind `v` und `w` Spaltenvektoren, so ist $\mathbf{v}'$ eine Zeile wie oben:

$$\text{skpr} \quad = \mathbf{v}' * \mathbf{w}$$

Die Länge von $\mathbf{v}$ ist in MATLAB schon als **norm** ($\mathbf{v}$) bekannt. Wir könnten sie aber auch selbst definieren als **sqrt** ($\mathbf{v}' * \mathbf{v}$), indem wir die ebenfalls bekannte Wurzelfunktion benutzen. Kosinus und Winkel müssen wir uns selbst berechnen:

$$\begin{aligned} \cos \quad &= \mathbf{v}' * \mathbf{w}/(\mathbf{norm}(\mathbf{v}) * \mathbf{norm}(\mathbf{w})); \\ \text{winkel} \quad &= \mathbf{acos}(\cos) \end{aligned}$$

Wir haben dabei die *Arcuscosinus*-Funktion (**acos**) benutzt, um den Winkel aus seinem Kosinus zu berechnen. Wir haben ***keine*** neue Funktion $\mathbf{cos}(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ für den zukünftigen Gebrauch geschrieben. Dafür hätten wir eine *M-Datei* erzeugen müssen, dessen Format in Kapitel 2 beschrieben werden wird. (Speziell für dieses Buch sind einige $M$-Dateien geschrieben worden. Man findet sie am Ende des Buches.) Die obigen Anweisungen führen dazu, dass die Zahlen **skpr** und **winkel** ausgegeben werden. Der Kosinus wird wegen des Semikolons am Ende der Zeile nicht ausgegeben.

## Die wesentlichen Punkte

**1.** Das Skalarprodukt $\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}$ wird durch Multiplizieren der Komponenten $v_i$ mit $w_i$ und anschließendes Aufsummieren berechnet.

**2.** Die Länge $\|\mathbf{v}\|$ ist die Quadratwurzel aus $\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}$.

**3.** Der Vektor $\mathbf{v}/\|\mathbf{v}\|$ ist ein ***Einheitsvektor***, seine Länge ist eins.

**4.** Es gilt $\mathbf{v}\cdot\mathbf{w} = 0$, wenn $\mathbf{v}$ und $\mathbf{w}$ senkrecht zueinander stehen.

**5.** Der Kosinus von $\theta$ (des Winkels zwischen $\mathbf{v}$ und $\mathbf{w}$) überschreitet nie den Wert 1:

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}}{\|\mathbf{v}\|\|\mathbf{w}\|} \quad \text{und deshalb gilt} \quad |\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}| \le \|\mathbf{v}\|\,\|\mathbf{w}\|.$$

## Aufgaben 1.2

1. Berechnen Sie die Skalarprodukte $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$, $\mathbf{u}\cdot\mathbf{w}$, $\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}$ und $\mathbf{w}\cdot\mathbf{v}$:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} -0,6 \\ 0,8 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

2. Berechnen Sie die Längen $\|\mathbf{u}\|$, $\|\mathbf{v}\|$ und $\|\mathbf{w}\|$ dieser Vektoren. Überprüfen Sie, dass die Schwarz'schen Ungleichungen $|\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}| \le \|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|$ und $|\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}| \le \|\mathbf{v}\|\,\|\mathbf{w}\|$ erfüllt sind.

3. Geben sie Einheitsvektoren in Richtung der Vektoren $\mathbf{v}$ und $\mathbf{w}$ aus Aufgabe 1 an. Berechnen Sie den Kosinus des Winkels zwischen ihnen.

4. Bestimmen Sie Einheitsvektoren $\mathbf{u}_1$ und $\mathbf{u}_2$ in Richtung der Vektoren $\mathbf{v} = (3, 1)$ und $\mathbf{w} = (2, 1, 2)$. Bestimmen Sie weiter Einheitsvektoren $\mathbf{U}_1$ und $\mathbf{U}_2$, die senkrecht auf $\mathbf{v}$ bzw. $\mathbf{w}$ stehen.

5. Zeigen Sie, dass für beliebige Einheitsvektoren $\mathbf{v}$ und $\mathbf{w}$ der Winkel zwischen den Vektoren
   (a) $\mathbf{v}$ und $\mathbf{v}$ (b) $\mathbf{w}$ und $-\mathbf{w}$ (c) $\mathbf{v}+\mathbf{w}$ und $\mathbf{v}-\mathbf{w}$
   entweder 0° oder 90° oder 180° ist.

6. Bestimmen Sie (über den Kosinus) den Winkel $\theta$ zwischen

   (a) $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix}$ und $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ (b) $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ und $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$

   (c) $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix}$ und $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix}$ (d) $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ und $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix}$.

7. (a) Bestimmen Sie alle Vektoren $(w_1, w_2)$ die senkrecht auf $\mathbf{v} = (2, -1)$ stehen.
   (b) Beschreiben Sie in Worten alle Vektoren, die senkrecht auf $\mathbf{V} = (1, 1, 1)$ stehen.

8. Wahr oder falsch? Geben Sie eine Begründung an, wenn eine Behauptung wahr ist, oder ein Gegenbeispiel, wenn sie falsch ist.

(a) Steht der dreidimensionale Vektor $\mathbf{u}$ senkrecht auf $\mathbf{v}$ und $\mathbf{w}$, so sind $\mathbf{v}$ und $\mathbf{w}$ parallel.
(b) Steht $\mathbf{u}$ senkrecht auf $\mathbf{v}$ und $\mathbf{w}$, dann auch auf $\mathbf{v} + 2\mathbf{w}$.
(c) Es gibt immer eine Linearkombination $\mathbf{v} + c\mathbf{u}$ die senkrecht auf $\mathbf{u}$ steht.

9. Die Steigungen der Pfeile von $(0,0)$ nach $(v_1, v_2)$ und $(w_1, w_2)$ sind $v_2/v_1$ und $w_2/w_1$. Zeigen Sie, dass $\mathbf{v}\cdot\mathbf{w} = 0$ gilt und die Vektoren senkrecht zueinander sind, wenn das Produkt der Steigungen $v_2 w_2 / v_1 w_1 = -1$ ist.

10. Zeichnen Sie Pfeile von $(0,0)$ zu den Punkten $\mathbf{v} = (1,2)$ und $\mathbf{w} = (-2,1)$. Berechnen Sie die beiden Steigungen und multiplizieren Sie sie. Die Antwort bedeutet, dass $\mathbf{v}\cdot\mathbf{w} = 0$ und dass die Pfeile _____.

11. Was bedeutet es für den Winkel zwischen $\mathbf{v}$ und $\mathbf{w}$, wenn $\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}$ negativ ist? Zeichnen Sie einen dreidimensionalen Vektor $\mathbf{v}$ (als Pfeil) und geben sie den Bereich aller Vektoren $\mathbf{w}$ mit $\mathbf{v}\cdot\mathbf{w} < 0$ an.

12. Wählen Sie eine Zahl $c$ so, dass für die Vektoren $\mathbf{v} = (1,1)$ und $\mathbf{w} = (1,5)$ die Kombination $\mathbf{w} - c\mathbf{v}$ senkrecht auf $\mathbf{v}$ steht. Geben Sie dann eine Formel an, die diese Zahl $c$ für beliebige $\mathbf{v}$ und $\mathbf{w}$ bestimmt.

13. Bestimmen Sie Vektoren $\mathbf{v}$ und $\mathbf{w}$, die zueinander und zu $(1,1,1)$ senkrecht sind.

14. Bestimmen Sie drei Vektoren $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ und $\mathbf{w}$, die zueinander und zu $(1,1,1,1)$ senkrecht stehen.

15. Das geometrische Mittel von $x = 2$ und $y = 8$ ist $\sqrt{xy} = 4$. Das arithmetische Mittel ist größer: $\frac{1}{2}(x+y) =$ _____. In Beispiel 1.2.6 hatten wir gesehen, dass dies mit der Schwarz'schen Ungleichung für $\mathbf{v} = (\sqrt{2}, \sqrt{8})$ und $\mathbf{w} = (\sqrt{8}, \sqrt{2})$ zusammenhängt. Bestimmen Sie $\cos\theta$ für diese Vektoren $\mathbf{v}$ und $\mathbf{w}$.

16. Wie lang ist der neundimensionale Vektor $\mathbf{v} = (1, 1, \ldots, 1)$? Bestimmen Sie einen Einheitsvektor $\mathbf{u}$ in derselben Richtung wie $\mathbf{v}$ und einen Vektor $\mathbf{w}$ senkrecht zu $\mathbf{v}$.

17. Wie groß ist der Kosinus der Winkel $\alpha, \beta$ und $\theta$ zwischen dem Vektor $(1, 0, -1)$ und den Einheitsvektoren $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ und $\mathbf{k}$ in Richtung der Koordinatenachsen? Weisen Sie nach, dass $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\theta = 1$ gilt.

**Die Aufgaben 18–24 behandeln die wichtigsten Eigenschaften von Längen und Winkeln. Mehrere Beweise nacheinander werden nicht wieder vorkommen.**

18. (Rechenregeln für Skalarprodukte) Diese Gleichungen sind einfach, aber nützlich:
    **(1)** $\mathbf{v}\cdot\mathbf{w} = \mathbf{w}\cdot\mathbf{v}$ **(2)** $\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}+\mathbf{w}) = \mathbf{u}\cdot\mathbf{v} + \mathbf{u}\cdot\mathbf{w}$ **(3)** $(c\mathbf{v})\cdot\mathbf{w} = c(\mathbf{v}\cdot\mathbf{w})$

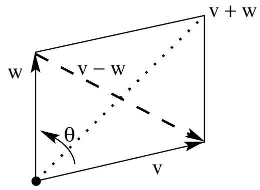
    Verwenden Sie die Regeln **(1)** und **(2)** mit $\mathbf{u} = \mathbf{v}+\mathbf{w}$ und zeigen Sie, dass $\|\mathbf{v}+\mathbf{w}\|^2 = \mathbf{v}\cdot\mathbf{v} + 2\mathbf{v}\cdot\mathbf{w} + \mathbf{w}\cdot\mathbf{w}$ gilt.

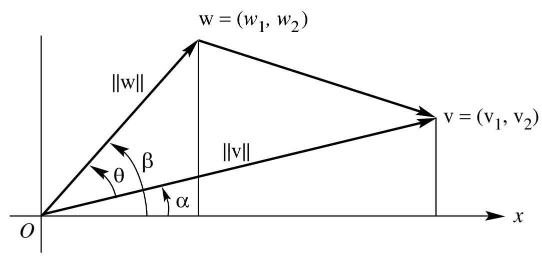
19. Die ***Dreiecksungleichung*** lautet (*Länge von* $\mathbf{v}+\mathbf{w}$) $\leq$ (*Länge von* $\mathbf{v}$) + (*Länge von* $\mathbf{w}$). In Aufgabe 18 wurde $\|\mathbf{v}+\mathbf{w}\|^2 = \|\mathbf{v}\|^2 + 2\mathbf{v}\cdot\mathbf{w} + \|\mathbf{w}\|^2$ gezeigt. Benutzen Sie die Schwarz'sche Ungleichung für $\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}$ und zeigen Sie, dass

    $$\|\mathbf{v}+\mathbf{w}\|^2 \leq (\|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|)^2 \quad \text{oder} \quad \|\mathbf{v}+\mathbf{w}\| \leq \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|$$

    gilt.

20. Auch für ein dreidimensionales rechtwinkliges Dreieck gilt $\|\mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{w}\|^2 = \|\mathbf{v}+\mathbf{w}\|^2$. Zeigen Sie, wie dies in Aufgabe 18 auf $v_1w_1 + v_2w_2 + v_3w_3 = 0$ führt.




21. Die Abbildung illustriert, dass $\cos\alpha = v_1/\|\mathbf{v}\|$ und $\sin\alpha = v_2/\|\mathbf{v}\|$ gelten. Analog dazu gilt $\cos\beta =$ _____ und $\sin\beta =$ _____. Der Winkel $\theta$ ist die Differenz $\beta - \alpha$. Beweisen Sie damit die Formel $\cos\theta = \cos\beta\cos\alpha + \sin\beta\sin\alpha = \mathbf{v}\cdot\mathbf{w}/\|\mathbf{v}\|\,\|\mathbf{w}\|$.

22. Schliessen $\mathbf{v}$ und $\mathbf{w}$ den Winkel $\theta$ ein, so lässt sich nach dem Kosinussatz die Länge der dritten Seite des entstehenden Dreiecks bestimmen:

    $$\|\mathbf{v}-\mathbf{w}\|^2 = \|\mathbf{v}\|^2 - 2\|\mathbf{v}\|\,\|\mathbf{w}\|\cos\theta + \|\mathbf{w}\|^2.$$

    Vergleichen Sie dies mit $(\mathbf{v}-\mathbf{w})\cdot(\mathbf{v}-\mathbf{w}) =$ _____, und leiten Sie damit ein weiteres Mal die Formel für $\cos\theta$ her.

23. Die Schwarz'sche Ungleichung lässt sich auch algebraisch statt trigonometrisch beweisen:
    (a) Multiplizieren Sie beide Seiten der Ungleichung $(v_1w_1 + v_2w_2)^2 \leq (v_1^2 + v_2^2)(w_1^2 + w_2^2)$ aus.
    (b) Zeigen Sie, dass die Differenz beider Seiten gleich $(v_1w_2 - v_2w_1)^2$ ist. Da dies nicht negativ sein kann, muss die Ungleichung immer erfüllt sein.

24. Ein einzeiliger Beweis der Schwarz'schen Ungleichung $|\mathbf{u} \cdot \mathbf{U}| \leq 1$:
    Sind $(u_1, u_2)$ und $(U_1, U_2)$ Einheitsvektoren, wende den Schritt aus Beispiel 1.2.6 an:

    $$|\mathbf{u} \cdot \mathbf{U}| \leq |u_1||U_1| + |u_2||U_2| \leq \frac{u_1^2 + U_1^2}{2} + \frac{u_2^2 + U_2^2}{2} = \frac{1+1}{2} = 1.$$

    Setzen Sie $(u_1, u_2) = (0{,}6,\ 0{,}8)$ und $(U_1, U_2) = (0{,}8,\ 0{,}6)$ in dieser Zeile und bestimmen Sie $\theta$.

25. Warum ist $|\cos\theta|$ überhaupt niemals größer als 1?

26. Wählen Sie beliebige Zahlen $x, y$, und $z$ mit $x + y + z = 0$. Bestimmen Sie den Winkel zwischen dem Vektor $\mathbf{v} = (x, y, z)$ und dem Vektor $\mathbf{w} = (z, x, y)$. Noch eine Herausforderung: Erklären Sie, warum immer $\mathbf{v}{\cdot}\mathbf{w}/\|\mathbf{v}\|\|\mathbf{w}\| = -\frac{1}{2}$ gilt.

27. Es sei $\|\mathbf{v}\| = 5$ und $\|\mathbf{w}\| = 3$. Bestimmen Sie die kleinsten und die größten möglichen Werte von $\|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|$ und $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$.