1 Descartes' Entdeckung

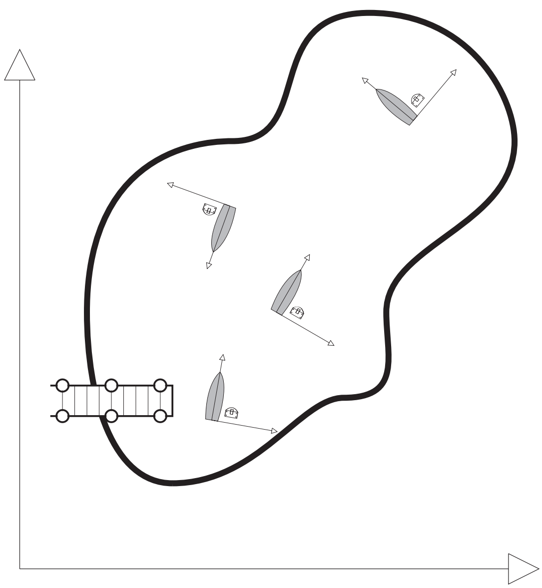


Abb. 1.1. Lokale und globale Koordinatensysteme: die lokalen Koordinaten eines bewegten Bootes ändern sich relativ zu den globalen Koordinaten des Sees.

Es gibt eine Reihe alter deutscher Geschichten über eine fiktive Stadt namens Schilda irgendwann im 17. Jahrhundert. Die Einwohner dieser Stadt waren eher für ihre Dummheit als für ihre Intelligenz bekannt. Eine dieser Geschichten lautet folgendermaßen [15]:

Mittlerweile war der Krieg, an Salzburg und Salzwedel vorbei, durchs Land gezogen und schien sich in bedenklicher Weise dem Städtchen Schilda zu nähern. [...] Und man kannte damals schon die Vorliebe der Kriegsleute für Kirchenglocken. Entweder holte die eigene Partei das tönende Erz aus den Glockenstühlen, um Hellebarden und Spieße draus zu fertigen, oder die Feinde nahmen die Glocken als Andenken mit. So oder so, es war kaum zu vermeiden. Nun lag aber ganz in der Nähe von Schilda ein stiller, tiefer See. Und *der Bürgermeister sagte: „Ich hab's. Wir versenken die Glocke im See, und wenn der Krieg vorbei ist, holen wir sie wieder heraus.“ Gesagt, getan. [...] Anschließend zog der Schmied sein Taschenmesser aus der Joppe und schnitt in den Bootsrand eine tiefe Kerbe. „Warum tust du das?“ fragte ihn der Bäcker. „Damit wir nach dem Krieg wissen, wo wir die Glocke ins Wasser geworfen haben“, antwortete der Schmied. „Sonst fänden wir sie am Ende nicht wieder.“ Sie bewunderten seine Vorsorge, lobten ihn, bis er rot wurde, und ruderten ans Land zurück. Nun, der Krieg machte zum Glück einen großen Bogen um Schilda. [...] Und man fuhr mit dem Boot auf den See hinaus, um jetzt auch die Glocke zu heben. „Hier muss sie liegen!“ rief der Schmied und zeigte auf seine Kerbe am Bootsrand. „Nein, hier!“ rief der Bäcker, während sie weiterruderten. „Nein, hier!“ rief der Bürgermeister. „Nein, hier!“ rief der Schuster. Wohin sie auch ruderten, überall hätte die Glocke liegen müssen. Denn die Kerbe am Boot war ja überall dort, wo gerade das Boot war. Mit der Zeit merkten sie, dass der Einfall des Schmieds gar nicht so gut gewesen war, wie sie seinerzeit geglaubt hatten.*

Der französische Philosoph René Descartes (1596–1650)[1] hätte es besser gewusst: er begründete die Theorie der *Koordinatensysteme*. Der Schmied hatte die Stelle, an der die Glocke zu Wasser gelassen wurde in Bezug auf das Boot – einem lokalen Koordinatensystem – richtig gekennzeichnet. Da er jedoch die Position des Bootes relativ zum See, dem globalen Koordinatensystem, außer Acht ließ, verlor er alles (siehe Abb. 1.1)! Der Rest dieses Kapitels befasst sich mit dem Zusammenspiel lokaler und globaler Koordinatensysteme.

1.1 Lokale und globale Koordinaten in 2D

Dieses Buch wurde mit dem LaTeX-Formel-Schriftsatzsystem (vgl. [8] und [16]) erstellt. Die durch LaTeX-Befehle spezifizierten Seiten werden in die Seitenbeschreibungssprache PostScript (siehe [13]) umgewandelt, welche einem Laserdrucker mitteilt, wo die Buchstaben und Symbole jeder einzelnen Seite zu positionieren sind. So gibt es etwa für die erste Seite dieses Kapitels einen PostScript-Befehl, der den Buchstaben **D** in der Kapitelüberschrift platziert.

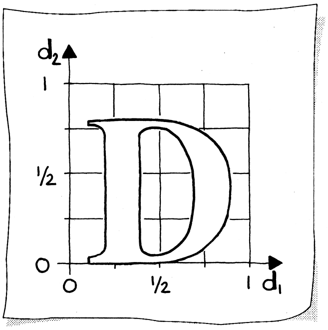
Um dies zu tun, benötigt man ein zweidimensionales oder 2D-*Koordinatensystem*. Sein Ursprung ist einfach die linke untere Ecke der Seite, und die x- und y-Achsen werden durch die horizontale und vertikale Seitenkante gebildet, die sich dort treffen. Ist dieses Koordinatensystem einmal gegeben, so lassen sich Objekte wie unser Buchstabe **D** darin positionieren.

Der Buchstabe **D** wurde jedoch von Font-Designern entworfen, die selbstverständlich nichts über die Position oder die tatsächliche Größe des Buchstabens auf dieser Seite wussten. Sie verwendeten ihr eigenes Koordinatensystem

[1] siehe auch http://laf.cioe.com/˜jheinze/descartes.html.

und beschrieben darin den Buchstaben **D** als eine Menge von Punkten mit Koordinaten in Bezug auf das Koordinatensystem von **D** (siehe Skizze 1).

Wir nennen dieses System ein *lokales Koordinatensystem* im Unterschied zu dem *globalen Koordinatensystem*, welches für die gesamte Seite verwendet wird. Die Positionierung von Buchstaben auf einer Seite erfordert also die Beherrschung des Zusammenspiels globaler und lokaler Systeme.



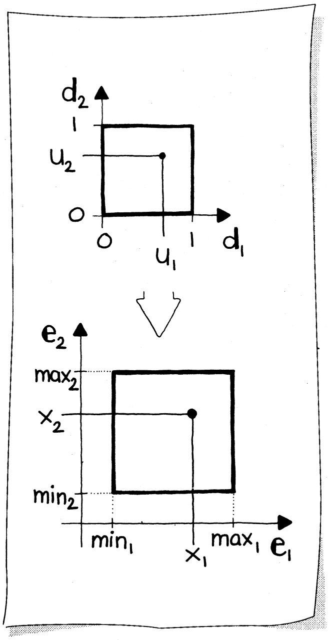
Skizze 1. Ein lokales Koordinatensystem.

Anhand von Skizze 2 werden wir unsere Betrachtungen nun formalisieren. Seien (x_1, x_2) Koordinaten[2] in einem globalen Koordinatensystem, welches $[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2]$-System[3] genannt wird und (u_1, u_2) Koordinaten in einem lokalen System, welches als $[\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2]$-System bezeichnet wird. Ein Objekt des lokalen Systems sei umschlossen von einem Rechteck mit der linken unteren Ecke $(0, 0)$ und der oberen rechten Ecke $(1, 1)$. Dies bedeutet, dass das Objekt im *Einheitsquadrat*, einem Quadrat mit Seitenlänge 1 und der linken unteren Ecke im Ursprung des lokalen Systems „lebt“.[4]

Wir werden unser Objekt jetzt derart im globalen System positionieren, dass es in ein Rechteck mit unterer linker Ecke $(\mathrm{min}_1, \mathrm{min}_2)$ und oberer rechter Ecke $(\mathrm{max}_1, \mathrm{max}_2)$, dem so genannten *Zielrechteck* (welches in Skizze 2 mit dicken Linien gezeichnet ist), hineinpasst. Dies wird dadurch erreicht, dass man jedem Koordinatenpaar (u_1, u_2) im lokalen System ein entsprechendes Koordinatenpaar (x_1, x_2) im globalen System zuordnet. Die entsprechende Formel ist recht einfach:

$$x_1 = (1 - u_1)\mathrm{min}_1 + u_1\mathrm{max}_1 \;, \qquad (1.1)$$

$$x_2 = (1 - u_2)\mathrm{min}_2 + u_2\mathrm{max}_2 \;. \qquad (1.2)$$

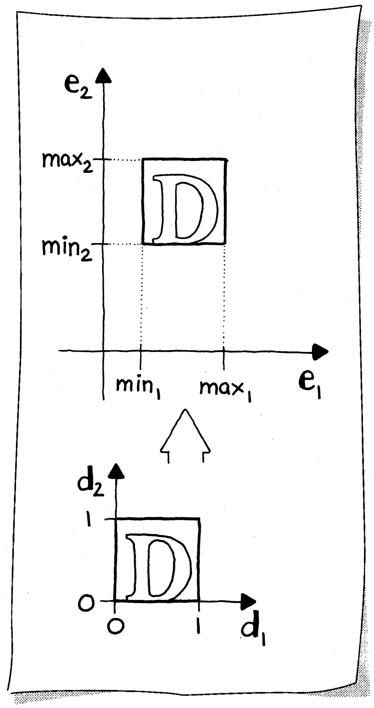


Skizze 2. Ein globales und lokales System.

[2] Da Sie möglicherweise daran gewöhnt sind, die Koordinaten (x, y) zu nennen, sei an dieser Stelle erwähnt, dass die (x_1, x_2) Notation für den Inhalt dieses Buches vorteilhaft ist; es erleichtert darüber hinaus das Schreiben von Programmen.

[3] Die Verwendung fett gedruckter Buchstaben wird im nächsten Kapitel erläutert.

[4] Die Beschränkung auf das Einheitsquadrat des lokalen Systems vereinfacht die Darstellung in diesem ersten Kapitel – wir werden später diese Beschränkung aufheben.



Skizze 3. Lokales und globales D.

Wir sagen, dass die Koordinaten (u_1, u_2) auf die Koordinaten (x_1, x_2) abgebildet werden. Skizze 3 illustriert, wie der Buchstabe **D** abgebildet wird.

Wir überprüfen, dass dies tatsächlich funktioniert: die Koordinaten $(u_1, u_2) = (0, 0)$ im lokalen System müssen zu den Koordinaten $(x_1, x_2) = (\mathrm{min}_1, \mathrm{min}_2)$ im globalen System werden. Wir erhalten somit:

$$x_1 = (1 - 0) \cdot \mathrm{min}_1 + 0 \cdot \mathrm{max}_1 = \mathrm{min}_1 \; ,$$
$$x_2 = (1 - 0) \cdot \mathrm{min}_2 + 0 \cdot \mathrm{max}_2 = \mathrm{min}_2 \; .$$

In ähnlicher Weise müssen die Koordinaten $(u_1, u_2) = (1, 0)$ im lokalen System zu den Koordinaten $(x_1, x_2) = (\mathrm{max}_1, \mathrm{min}_2)$ im globalen System werden. Wir erhalten also:

$$x_1 = (1 - 1) \cdot \mathrm{min}_1 + 1 \cdot \mathrm{max}_1 = \mathrm{max}_1 \; ,$$
$$x_2 = (1 - 0) \cdot \mathrm{min}_2 + 0 \cdot \mathrm{max}_2 = \mathrm{min}_2 \; .$$

Beispiel 1. Das Zielrechteck aus Skizze 4 sei gegeben durch

$$(\mathrm{min}_1, \mathrm{min}_2) = (1, 3) \quad \text{und} \quad (\mathrm{max}_1, \mathrm{max}_2) = (3, 5) \; .$$

Die Koordinaten $(1/2, 1/2)$ können wir uns vorstellen als Mittelpunkt des lokalen Einheitsquadrates. Betrachten wir nun das Ergebnis der Abbildung:

$$x_1 = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 3 = 2 \; ,$$
$$x_2 = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot 3 + \frac{1}{2} \cdot 5 = 4 \; .$$

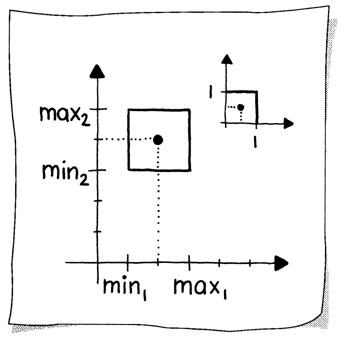
Dies ist der Mittelpunkt des Zielrechtecks. Hieran sehen wir, wie die Geometrie des Einheitsquadrates im Zielrechteck dupliziert wird.

Die Gleichungen (1.1) und (1.2) lassen sich auch in der folgenden Weise schreiben: Wir definieren $\Delta_1 = \mathrm{max}_1 - \mathrm{min}_1$ und $\Delta_2 = \mathrm{max}_2 - \mathrm{min}_2$. Damit haben wir

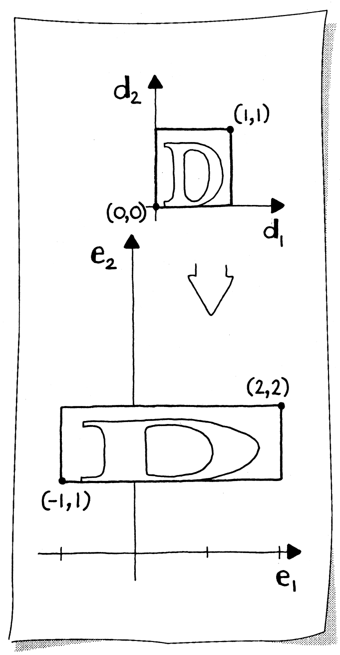
$$x_1 = \mathrm{min}_1 + u_1 \Delta_1 \; , \tag{1.3}$$
$$x_2 = \mathrm{min}_2 + u_2 \Delta_2 \; . \tag{1.4}$$

Beachten Sie: ist das Zielrechteck nicht quadratisch, so wird das Objekt des lokalen Systems verzerrt. Wir sehen dies in folgendem Beispiel, welches in Skizze 5 dargestellt ist. Das Zielrechteck ist hier gegeben durch

$$(\min_1, \min_2) = (-1, 1) \quad \text{und} \quad (\max_1, \max_2) = (2, 2) \, .$$



Skizze 4. Abbildung des lokalen Einheitsquadrates auf ein Zielrechteck.



Skizze 5. Eine Verzerrung.

Hieran können wir sehen, wie das Objekt durch die Einbettung in das globale System in die $\mathbf{e}_1$-Richtung gestreckt wird. Überprüfen Sie, dass die Eckpunkte des Einheitsquadrates (lokales Koordinatensystem) immer noch auf die Eckpunkte des Zielrechtecks (globales Koordinatensystem) abgebildet werden!

Generell gilt: ist $\Delta_1 > 1$, so wird das Objekt in der $\mathbf{e}_1$-Richtung gestreckt, und es wird gestaucht für $0 < \Delta_1 < 1$. Der Fall, dass $\max_1$ kleiner ist als $\min_1$, tritt nicht sehr häufig auf: hier gilt, dass das Objekt in der $\mathbf{e}_1$-Richtung umgekehrt erscheinen würde. Gleiches gilt natürlich für die $\mathbf{e}_2$-Richtung. Abbildung 1.2 zeigt ein Beispiel verschiedener Rechtecke, die den Buchstaben **D** enthalten. Nur zum Spass haben wir dabei ein Zielrechteck benutzt, für das $\max_1$ kleiner ist als $\min_1$!

Diese Methode funktioniert übrigens auch dann, wenn wir die Beziehung zwischen dem lokalen und dem globalen System nicht kennen. In vielen Fällen (so auch in dem Drucksatzbeispiel) liegt tatsächlich gar keine vor. Natürlich muss man wissen, wo sich das Objekt im Einheitsquadrat des lokalen Systems befindet. Ist es nicht zentriert im Einheitsquadrat positioniert wie in Abb. 1.2, so kann die Situation auftreten, die in Abb. 1.3 dargestellt ist.

Ein gutes Beispiel für unsere Abbildungen des Einheitsquadrates auf das Zielrechteck finden wir in der Computergraphik. Wenn Sie ein Fenster auf dem Bildschirm Ihres Computers öffnen, so möchten Sie wahrscheinlich ein bestimmtes Bild darin sehen. Dieses Bild ist in Bezug auf ein lokales Koordinatensystem gespeichert worden; wir nehmen an, dass es in sogenannten *normalisierten Koordinaten* gespeichert wurde, die

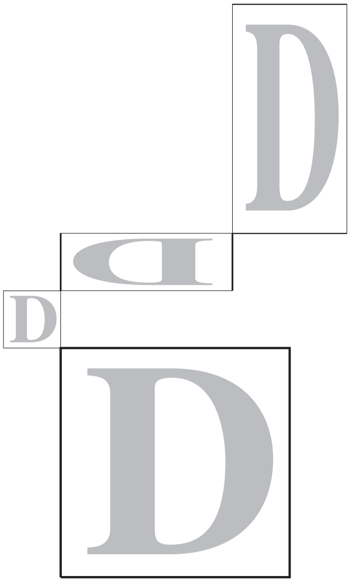


Abb. 1.2. Zielrechtecke: der Buchstabe **D** wird mehrfach abgebildet.

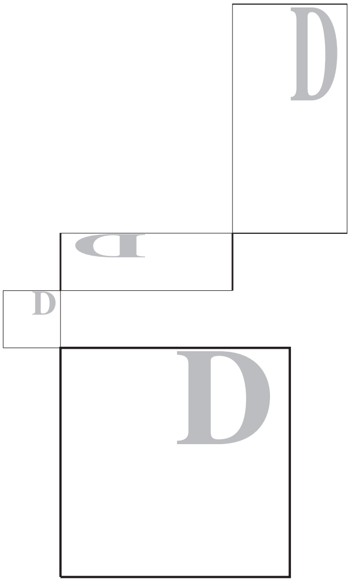


Abb. 1.3. Zielrechtecke: der Buchstabe **D** ist nicht zentriert in Bezug auf das Einheitsquadrat.

sich von $(0,0)$ bis $(1,1)$ erstrecken. Das Zielrechteck ist nun bestimmt durch die *Ausdehnungen* ihres Fensters, die in den so genannten *Bildschirmkoordinaten* angegeben werden, und das Bild wird durch Anwendung von (1.1) und (1.2) darauf abgebildet. Die Bildschirmkoordinaten werden üblicherweise durch die Angabe von *Pixeln*[5] beschrieben; ein typischer Computerbildschirm besitzt etwa 700×1000 Pixel.

1.2 Der Übergang von globalen auf lokale Koordinaten

Bei der Betrachtung von globalen und lokalen Systemen in 2D verwendeten wir ein Zielrechteck, um das Einheitsquadrat in einem lokalen $[\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2]$-System zu positionieren (und gegebenenfalls zu verformen). Aus gegebenen Koordinaten (u_1, u_2) waren wir in der Lage, die Koordinaten (x_1, x_2) des globalen Systems mit Hilfe von (1.1) und (1.2) oder (1.3) und (1.4) zu bestimmen.

Jetzt betrachten wir das inverse Problem: gegeben sind die Koordinaten (x_1, x_2) im globalen System, wie lauten die lokalen Koordinaten (u_1, u_2)? Die Antwort ist relativ einfach: die Berechnung von u_1 aus (1.3) und die Berechnung von u_2 aus (1.4) liefert

$$u_1 = \frac{x_1 - \min_1}{\Delta_1}\ , \tag{1.5}$$

$$u_2 = \frac{x_2 - \min_2}{\Delta_2}\ . \tag{1.6}$$

Dieser Umrechnungsprozess wird jedes Mal durchgeführt, wenn Sie mittels einer Mouse mit Ihrem Computer kommunizieren. Stellen Sie sich vor, dass eine Anzahl von Icons in einem Fenster dargestellt werden. Wie findet der Computer heraus, welches davon Sie gerade angeklickt haben? Die Antwort lautet: das Softwaresystem verwendet die Gleichung (1.5) und (1.6), um die aktuellen Cursorpositionen zu berechnen.

Beispiel 2. Ein Beispiel eignet sich am besten, um dies zu verdeutlichen: gegeben sei ein Fenster auf dem Computerbildschirm mit den Bildschirmkoordinaten

$$(\min_1, \min_2) = (120, 300) \quad \text{und} \quad (\max_1, \max_2) = (600, 820)\ .$$

Das Fenster ist mit 21 Icons gefüllt, die in einem 7×3-Schema angeordnet sind (siehe Abb. 1.4). Ein Mouseklick liefert die Bildschirmkoordinaten (200, 709). Welches der Icons wird hierdurch aktiviert? Um dies herauszufinden, werden gemäß (1.5) und (1.6) folgende Berechnungen durchgeführt

$$u_1 = \frac{200 - 120}{480} \approx 0.17\ ,$$

$$u_2 = \frac{709 - 300}{520} \approx 0.79\ .$$

[5] Pixel steht abkürzend für Bildelement, engl. picture element.

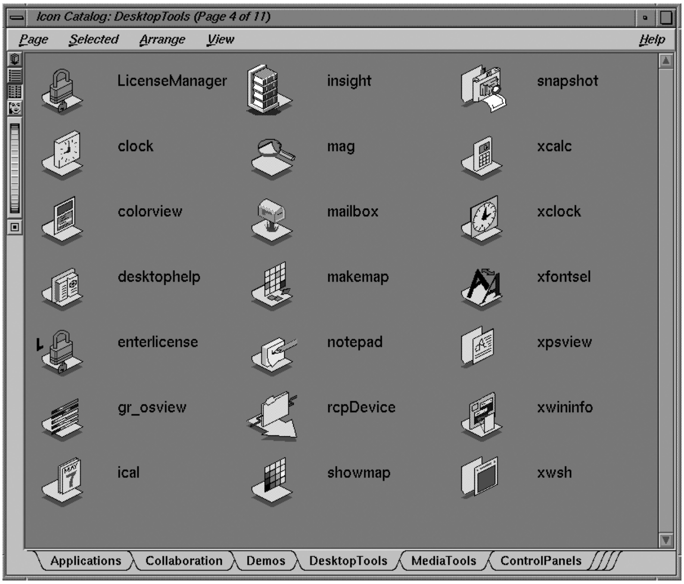


Abb. 1.4. Auswahl eines Icons: Umrechnung von globalen zu lokalen Koordinaten.

Die vorliegende u_1-Zerlegung der normalisierten Koordinaten lautet

$$0, 0.33, 0.67, 1 .$$

Der Wert 0.17 von u_1 liegt zwischen 0.0 und 0.33, so dass ein Icon in der ersten Zeile aktiviert wurde. Die u_2-Zerlegung der normalisierten Koordinaten lautet

$$0, 0.14, 0.29, 0.43, 0.57, 0.71, 0.86, 1 .$$

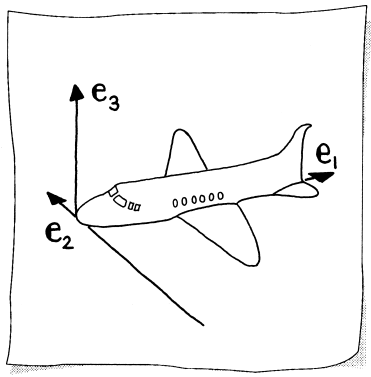
Der Wert 0.79 für u_2 liegt zwischen 0.71 und 0.86, so dass das Uhrsymbol in der zweiten Reihe der ersten Zeile getroffen wurde.

1.3 Lokale und globale Koordinaten in 3D

Heutzutage sind fast alle Industrieprodukte mit Hilfe eines CAD (Computer Aided Design)-Systems entworfen worden. Jedes einzelne Objekt ist in einem eigenen Koordinatensystem definiert, und häufig ist es nötig, viele derartige Objekte in einem großen System zusammenzufügen. Nehmen wir als Beispiel den Entwurf eines großen Passagierflugzeuges. Es ist definiert in einem dreidimensionalen (oder 3D-) Koordinatensystem mit dem Ursprung an der vordersten Stelle des Flugzeuges. Die $\mathbf{e}_1$-Achse zeigt in Richtung Heck, die

$\mathbf{e}_2$-Achse zeigt nach rechts (aus der Sicht eines sitzenden Passagiers) und die $\mathbf{e}_3$-Achse zeigt nach oben. Betrachten Sie hierzu Skizze 6.

Bevor das Flugzeug gebaut wird, werden intensive Computersimulationen durchgeführt, um die optimale Form des Flugzeugs zu bestimmen. Betrachten wir als Beispiel die Motoren: sie können von verschiedener Größe sein, und ihre exakte Position unter den Tragflächen muss spezifiziert werden. Der Motor ist in einem lokalen Koordinatensystem definiert und wird dann an die geeignete Stelle bewegt. Dieser Prozess muss für jeden der Motoren wiederholt werden. Die Sitze des Flugzeuges stellen ein weiteres Beispiel dar: der Hersteller entwirft nur einen davon und platziert dann vielfache Kopien an die entsprechenden Stellen im Flugzeugentwurf.

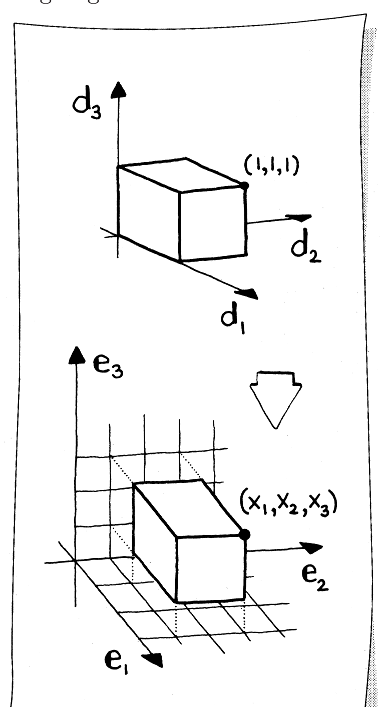


Skizze 6. Die Koordinaten eines Flugzeugs.

Anhand von Skizze 7 werden wir die Dinge jetzt etwas formaler betrachten: gegeben ist uns ein lokales 3D-Koordinatensystem, welches wir $[\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3]$-System nennen, mit Koordinaten (u_1, u_2, u_3). Wir nehmen an, dass das betrachtete Objekt sich innerhalb des *Einheitswürfels* befindet, d.h. seine sämtlichen Punkte genügen der Beziehung

$$0 \leq u_1, u_2, u_3 \leq 1 \; .$$

Dieser Würfel wird auf einen *3D-Zielquader* im globalen $[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3]$-System abgebildet. Dabei sei der Zielquader gegeben durch die Koordinaten (min_1, min_2, min_3) seines unteren Eckpunktes und die Koordinaten $(\mathrm{max}_1, \mathrm{max}_2, \mathrm{max}_3)$ seines oberen Eckpunktes. Wie bilden wir nun die Koordinaten (u_1, u_2, u_3) des lokalen Einheitswürfels auf die entsprechenden Zielkoordinaten (x_1, x_2, x_3) des Zielquaders ab? Dies geht genau wie im 2D-Fall, wobei eine weitere Gleichung hinzukommt:



Skizze 7. Ein globales und ein lokales System in 3D.

$$x_1 = (1 - u_1)\mathrm{min}_1 + u_1 \mathrm{max}_1 \ , \tag{1.7}$$
$$x_2 = (1 - u_2)\mathrm{min}_2 + u_2 \mathrm{max}_2 \ , \tag{1.8}$$
$$x_3 = (1 - u_3)\mathrm{min}_3 + u_3 \mathrm{max}_3 \ . \tag{1.9}$$

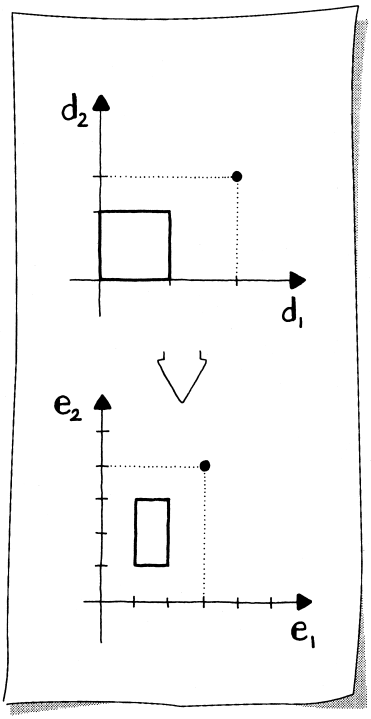
Als eine einfache Übung überprüfen Sie, dass die Eckpunkte des Einheitswürfels auf die Eckpunkte des Zielquaders abgebildet werden!

Die analogen Beziehungen zu (1.3) und (1.4) sind durch die ziemlich offensichtlichen folgenden Gleichungen gegeben

$$x_1 = \mathrm{min}_1 + u_1 \Delta_1 \ , \tag{1.10}$$
$$x_2 = \mathrm{min}_2 + u_2 \Delta_2 \ , \tag{1.11}$$
$$x_3 = \mathrm{min}_3 + u_3 \Delta_3 \ . \tag{1.12}$$

Wie im 2D-Fall gilt, dass Verzerrungen des Objektes entstehen, wenn der Zielquader kein Würfel ist. Dieser Effekt kann erwünscht oder unerwünscht sein.

1.4 Wir verlassen den Quader



Skizze 8. Eine 2D-Koordinate außerhalb eines Rechtecks.

Wir haben bisher angenommen, dass sämtliche Objekte innerhalb des Einheitsquadrates oder des Einheitswürfels liegen; damit wurde erreicht, dass ihre Bilder innerhalb der entsprechenden Zielgebiete liegen. Diese Vorstellung unterstützt das anfängliche Verständnis, ist aber überhaupt nicht notwendig. Um dies einzusehen, betrachten wir ein 2D-Beispiel mit dem Zielrechteck aus Skizze 8:

$$(\mathrm{min}_1, \mathrm{min}_2) = (1, 1) \quad \text{und}$$
$$(\mathrm{max}_1, \mathrm{max}_2) = (2, 3) \ .$$

Die Koordinaten $(u_1, u_2) = (2, 3/2)$ liegen nicht innerhalb des Einheitsquadrates des $[\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2]$-Systems. Trotzdem können wir sie mittels (1.1) und (1.2) abbilden:

$$x_1 = -\mathrm{min}_1 + 2\mathrm{max}_1 = 3 \ ,$$
$$x_2 = -\frac{1}{2}\mathrm{min}_2 + \frac{3}{2}\mathrm{max}_2 = 4 \ .$$

Da die Ausgangskoordinaten (u_1, u_2) nicht innerhalb des Einheitsquadrates liegen, befinden sich die Bildkoordinaten

(x_1, x_2) nicht innerhalb des Zielrechtecks. Die Vorstellung, ein Quadrat auf ein Zielrechteck abzubilden, hilft zu verstehen, was hier eigentlich passiert – aber es ist keine wirkliche Einschränkung für die Koordinaten, die wir abbilden können!

Beispiel 3. Es ist offensichtlich, dass im 3D Gleiches gilt. Es sollte genügen, hierzu ein Beispiel zu betrachten: das Zielrechteck ist gegeben durch

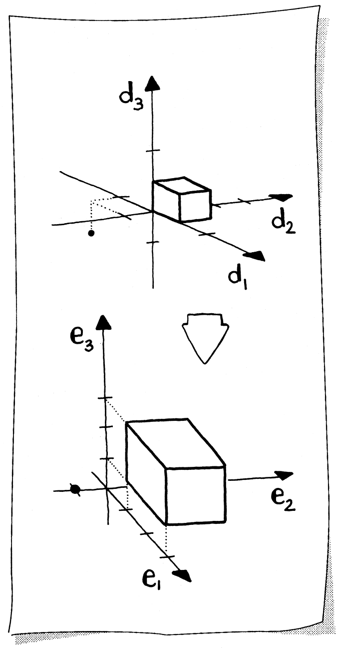
$$(\min_1, \min_2, \min_3) = (1, 0, 1) \quad \text{und}$$
$$(\max_1, \max_2, \max_3) = (2, 1, 2) \ ,$$

und wir wollen die Koordinaten

$$(u_1, u_2, u_3) = (-1, -1, -1)$$

abbilden. Das Ergebnis, welches in Skizze 9 dargestellt ist, wird berechnet mittels (1.7)–(1.9):

$$(x_1, x_2, x_3) = (0, -1, 0) \ .$$



Skizze 9. Ein Punkt außerhalb eines dreidimensionalen Gebietes.

1.5 Wie man Koordinaten erhält

Stellen Sie sich vor, Sie haben ein interessantes reales Objekt, etwa das Modell einer Katze vorliegen. Ein Freund von Ihnen aus Hollywood möchte diese Katze in seinem neusten Hightech-Trickfilm einsetzen. Solche Filme basieren auf mathematischen Beschreibungen von Objekten, d.h. hier muss alles durch Koordinaten gegeben sein! Vielleicht erinnern Sie sich an den Film *TOY STORY*. Dies ist ein computererzeugter Trickfilm, was bedeutet, dass die Charaktere und Objekte jeder Szene eine mathematische Beschreibung besitzen müssen.

Wie ordnen Sie ihrem Katzenmodell jetzt Koordinaten zu? Dies geschieht mit einer *Koordinatenmessmaschine* (KMM), wie sie in Abb. 1.5, die der Webseite `www.immerse.com` entnommen wurde, dargestellt ist. Die KMM besteht im Wesentlichen aus einem Arm, der in der Lage ist, die Position seiner Spitze aufzuzeichnen, indem er die Veränderungen der Winkelstellungen seiner Gelenke verfolgt.

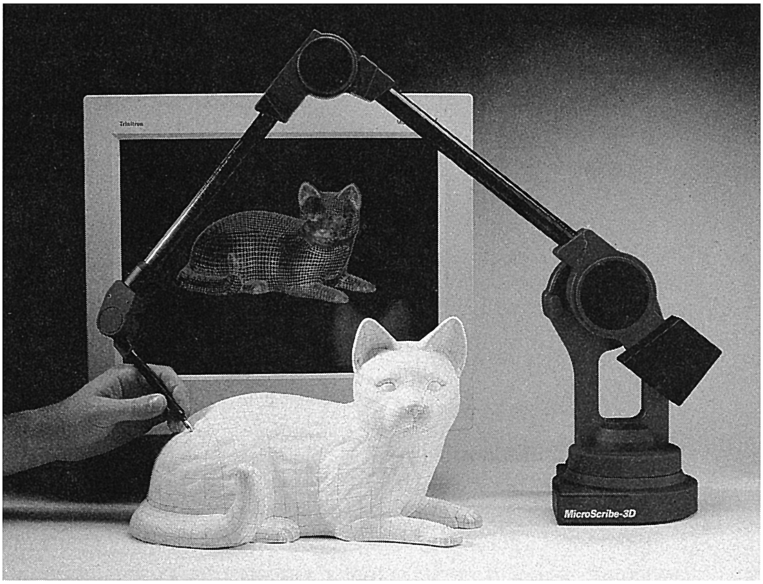


Abb. 1.5. Aufzeichnung von Koordinaten: Eine Katze wird in Mathematik umgewandelt. (Microscribe-3D der Fa. Immersion Corp.)

Zur Aufzeichnung wird ihr Katzenmodell auf einem Tisch platziert und derart fixiert, dass es sich während der Digitalisierung nicht bewegt. Sie zeichnen jetzt mit dem KMM-Arm drei Punkte auf dem Tisch auf; hierdurch sind der Ursprung sowie die $\mathbf{e}_1$- und $\mathbf{e}_2$-Achse des 3D-Koordinatensystems festgelegt.

Die $\mathbf{e}_3$-Achse, die senkrecht zum Tisch steht, wird dann automatisch berechnet. Wenn Sie nun ihr Katzenmodell mit der Spitze des KMM-Arms berühren, werden dieser Position drei Koordinaten zugewiesen und aufgezeichnet. Wenn Sie dies für viele hundert Punkte tun, haben Sie ihre Katze im Kasten!

Dieser Prozess wird *Digitalisierung* genannt. Das Ergebnis beschreibt eine „diskretisierte“ Katze, die aus einer endlichen Anzahl von Koordinatentripeln besteht. Diese Punktmenge bezeichnet man auch als *Punktwolke*. Jemand anderes wird nun das mathematische Modell Ihrer Katze aus der Punktwolke erzeugen müssen.[6]

Das mathematische Modell wird als nächstes in die Filmszenen eingefügt werden müssen – aber alles, was man hierfür braucht, sind 3D-Koordinatentransformationen (siehe hierzu Kap. 12 und 13)!

[6] Diese Art der Tätigkeit nennt man *geometrische Modellierung* oder *Computer Aided Geometric Design*, siehe hierzu [4] oder [11].

1.6 Aufgaben

1. Die Eckpunkte eines Dreiecks im Einheitsquadrat des lokalen $[\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2]$-Systems sind gegeben durch

$$\begin{aligned}(u_1, u_2) &= (0.1, 0.1)\ ,\\ (v_1, v_2) &= (0.9, 0.2)\ ,\\ (w_1, w_2) &= (0.4, 0.7)\ .\end{aligned}$$

   a) Wie lauten die Koordinaten der Eckpunkte des Dreiecks, nach der Abbildung des Einheitsquadrates des $[\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2]$-Systems auf das Zielrechteck

$$(\mathrm{min}_1, \mathrm{min}_2) = (1, 2) \quad \text{und} \quad (\mathrm{max}_1, \mathrm{max}_2) = (3, 3)?$$

   b) Welche (u_1, u_2)-Koordinaten entsprechen dem Punkt $(x_1, x_2) = (2, 2)$?
2. Der Einheitswürfel des $[\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3]$-Systems wird auf den Zielquader mit

$$(\mathrm{min}_1, \mathrm{min}_2, \mathrm{min}_3) = (1, 1, 1) \quad \text{und} \quad (\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3) = (1, 2, 4)$$

   abgebildet. Wohin werden die Koordinaten $(u_1, u_2, u_3) = (0.5, 0, 0.7)$ abgebildet?
3. Entnehmen Sie der Webseite[7] das File `Boxes.ps` und spielen Sie mit den Postscript `translate` Kommandos, um einige der **D**-Gebiete zu bewegen. Schauen Sie im PostScript Tutorial (Appendix A) am Ende des Buches nach, wie Sie die grundlegenden PostScript-Befehle verwenden müssen.
4. Gegeben seien die lokalen Koordinaten $(2, 2)$ und $(-1, -1)$. Bestimmen Sie die globalen Koordinaten in Bezug auf das Zielrechteck mit

$$(\mathrm{min}_1, \mathrm{min}_2) = (1, 1) \quad \text{und} \quad (\mathrm{max}_1, \mathrm{max}_2) = (7, 3)\ .$$

   Erstellen Sie eine Skizze des lokalen und globalen Systems. Verbinden Sie die Koordinaten in jedem System mit einer Strecke und vergleichen Sie diese.

[7] Die Webseite dieses Buches lautet
http://www.geom.umn.edu/software/geomview/.