

Wasserstoffatom

Das Atom der modernen Physik kann allein durch eine partielle Differentialgleichung in einem abstrakten vieldimensionalen Raum dargestellt werden. Alle seine Eigenschaften sind gefolgert; keine materiellen Eigenschaften können ihm in direkter Weise zugeschrieben werden. Das heißt jedes Bild des Atoms, das unsere Einbildung zu erfinden vermag, ist aus diesem Grunde mangelhaft. Ein Verständnis der atomaren Welt in jener ursprünglichen sinnlichen Weise ist unmöglich.

Heisenberg im Jahre 1945

Das Wasserstoffatom ist das einfachste atomare System. Es kann mit großer Genauigkeit als Einteilchensystem beschrieben werden und ist als solches analytisch lösbar. Daher eignet es sich zum Testen elementarer Quantenmechanik. Darüberhinaus stellen die Präzisionsexperimente am Wasserstoffatom noch immer die genauesten Tests der Quantenelektrodynamik (QED) dar.

Alle Eigenschaften des Wasserstoffatoms sind durch die Ladung e des Elektrons, seine Masse m_e und die Plancksche Konstante \hbar gegeben. Für die Kopplungskonstante der elektromagnetischen Wechselwirkung benutzen wir die dimensionslose Feinstrukturkonstante $\alpha = e^2/(4\pi\epsilon_0\hbar c)$.

4.1 Niveauschema

4.1.1 Semiklassisch

Das Elektron bewegt sich im Coulomb-Feld des Protons mit einer mittleren potentiellen Energie $\bar{V} = -\alpha\hbar c/\bar{r}$. Dabei ist \bar{r} der Radius der klassischen Bahn des Elektrons um das Proton (eigentlich ist $\bar{r} = \langle 1/r \rangle^{-1}$).

Die mittlere kinetische Energie des Elektrons ist $\bar{K} = \bar{p}^2/2m_e$, und \bar{p} ist sein mittlerer Impuls (eigentlich $\sqrt{\langle p^2 \rangle}$). Im Grundzustand des Atoms müssen die Orts- und Impulsverschmierung der Unschärferelation genügen. Die Unschärferelation gilt als Ungleichung. Wenn

man sie aber als Gleichung benutzt ($\Delta r \Delta p = k\hbar$), ist der Faktor k vor dem \hbar vom Potential abhängig. Um quantitative Resultate im Fall des Coulomb-Potentials zu erhalten, muss man $\bar{r} \bar{p} = \hbar$ verlangen. Das erinnert an die de-Broglie-Regel, die verlangt, dass in stabilen Kreisbahnen der Umfang $2\pi r$ ein ganzzahliges Vielfaches der de-Broglie-Wellenlänge $\lambda = h/p$ sein muss.

Hierzu eine kleine Erläuterung: Im gebundenen Zustand ist die Wellenlänge nicht gut definiert. Aber in einem Quantenzustand der Größe \bar{r} , der keine Knoten besitzt, ist $\bar{r} \approx \lambda$. Um das zu zeigen, muss man eine Fourier-Analyse der Schrödinger-Wellenfunktion durchführen. Dann zeigt sich, dass in Objekten der Größe \bar{r} die Hauptbeiträge von Wellen mit $\lambda = \bar{r}$ herrühren. Wie wir später sehen werden, ist im Fall des Wasserstoffs \bar{r} der Radius, bei dem die mit r^2 multiplizierte Elektronendichteverteilung ihr Maximum besitzt. Diesen Radius nennen wir auch den wahrscheinlichsten Radius.

Mit Hilfe der Unschärferelation kann die mittlere kinetische Energie geschrieben werden als

$$\bar{K} = \frac{\hbar^2}{2m_e \bar{r}^2} . \quad (4.1)$$

Den Grundzustandsradius \bar{r} findet man durch die Bedingung, dass die totale Energie des Systems

$$E = -\frac{\alpha \hbar c}{\bar{r}} + \frac{\hbar^2}{2m_e \bar{r}^2} \quad (4.2)$$

minimal wird: $dE/d\bar{r} = 0$. Den Radius des Minimums nennt man den Bohrschen Radius a_0 :

$$a_0 = \frac{\hbar c}{\alpha m_e c^2} = \frac{\lambda_e}{\alpha} . \quad (4.3)$$

Hier ist λ_e die Compton-Wellenlänge des Elektrons. Die Bindungsenergie des Wasserstoffatoms im Grundzustand, auch Rydbergsche Konstante Ry genannt, ist

$$E_1 = -\frac{\alpha^2 m_e c^2}{2} = -\frac{\alpha \hbar c}{2a_0} = -1 Ry = -13.6 \text{ eV} . \quad (4.4)$$

Im Grundzustand mit der Hauptquantenzahl $n = 1$ hat die Wellenfunktion keine Knoten, die de-Broglie-Wellenlänge ist $\lambda_1 \approx \bar{r}$. Im ersten

angeregten Zustand, $n = 2$, weist die Wellenfunktion einen Knoten auf, die Wellenlänge des Elektrons ist dann $\lambda_2 = \bar{r}/2$. Für den n -ten Zustand gilt $\lambda_n = \bar{r}/n$. Daraus folgen die Radien und die Bindungsenergien:

$$\bar{r}_n = n^2 a_0 ; \quad E_n = -Ry/n^2 . \quad (4.5)$$

In Abb. 4.1 sind die Knoten der Wellenfunktionen durch die stehenden Wellen veranschaulicht, und das bekannte Bild des Wasserstoffniveauschemas ist dargestellt.

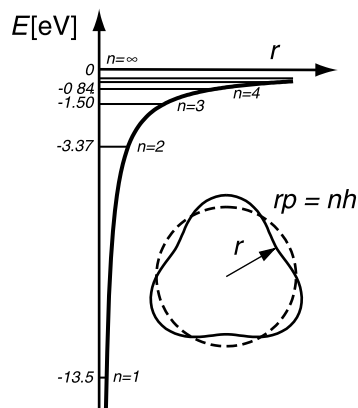


Abb. 4.1. Das Wasserstoffniveauschema in der semiklassischen Näherung; weiterhin wird das Elektron als stehende Welle interpretiert

4.1.2 Dirac-Niveauschema

Eine genaue Betrachtung des Wasserstoffatoms bekommt man mit Hilfe der Lösung der Dirac-Gleichung. In der Tat beschreibt diese das Wasserstoffatom fast perfekt, da sie den Spin und die relativistische Dynamik des Elektrons berücksichtigt. Was noch zur Perfektion fehlt, ist die Berücksichtigung des Protonspins, der endlichen Ausdehnung des Protons und der Effekte der Strahlungskorrekturen. Diese werden wir unter der Hyperfeinstrukturaufspaltung und Lamb-Verschiebung behandeln. Das Niveauschema des Wasserstoffatoms, nach der Dirac-Gleichung berechnet, ist in Abb. 4.2 skizziert. Zum Vergleich sind auch die Energien der Niveaus ohne Berücksichtigung des Spins und der Relativität angegeben. Die Energieunterschiede werden als

relativistische Korrekturen und Spin-Bahn-Wechselwirkung gedeutet. Die Feinstrukturaufspaltung ΔE_{fs} kann man als eine Verschiebung bezüglich der nicht-relativistischen Energien auffassen, sie beträgt (bis auf α^2)

$$\Delta E_{fs} = -\frac{\alpha^2}{n^3} \left(\frac{1}{j+1/2} - \frac{3}{4n} \right) \text{Ry} . \quad (4.6)$$

Es ist interessant zu bemerken, dass die mit der Dirac-Gleichung berechneten Zustände, neben der Hauptquantenzahl, nur vom Gesamtdrehimpuls $j = \ell + s$ abhängig sind. Der Bahndrehimpuls ist keine gute Quantenzahl.

Im Folgenden wollen wir nur die Größenordnungen verschiedener Verschiebungen im Vergleich zu den nicht-relativistischen Energien plausibel machen. Das ist sehr lehrreich. Man sieht, wie elegant die Dirac-Gleichung die relativistischen Effekte berücksichtigt. Andererseits ist die Dirac-Gleichung nur für das Wasserstoffatom und wasserstoffähnliche Atome und Ionen exakt lösbar. Für Atome mit mehreren Elektronen gibt es keine analytischen Lösungen.

Für $n = 1$ kann man die relativistischen Korrekturen zur Niveaushiftung in erster Ordnung der Störungsrechnung ziemlich genau abschätzen, und wir werden sie ausführlich behandeln.

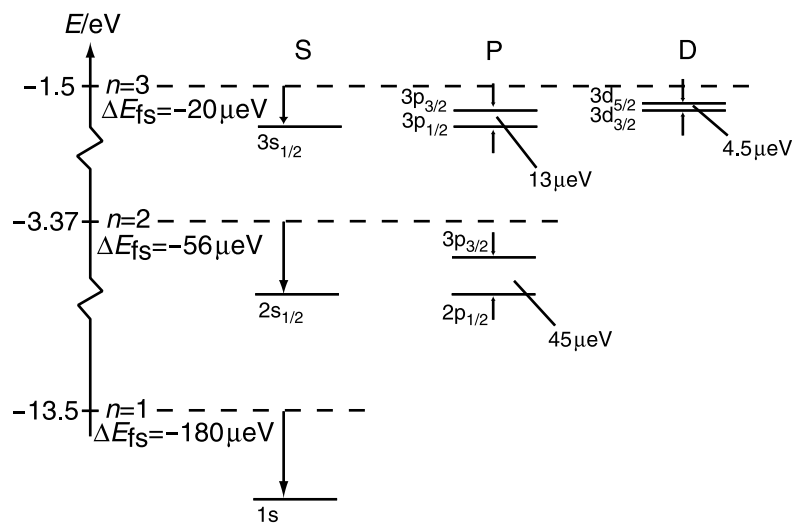


Abb. 4.2. Das Niveauschema des Wasserstoffatoms, berechnet nach der Dirac-Gleichung. Zum Vergleich sind auch die nicht-relativistisch berechneten Energien der Niveaus angegeben

Die Korrektur zur kinetischen Energie beträgt

$$\Delta_K = -\frac{p^4}{8m_e^3c^2}. \quad (4.7)$$

Im Grundzustand ist

$$E_0 = \frac{p^2}{2m} + V, \quad (4.8)$$

und die Korrektur zur kinetischen Energie lässt sich schreiben als

$$\Delta_K = -\frac{p^4}{8m_e^3c^2} = -\frac{1}{2mc^2} \left[E_0^2 + 2E_0\alpha\hbar c \left\langle \frac{1}{r} \right\rangle + \alpha^2(\hbar c)^2 \left\langle \frac{1}{r^2} \right\rangle \right]. \quad (4.9)$$

Wenn man für $E_0 = -1 \text{ Ry}$ einsetzt und berücksichtigt, dass im Grundzustand $\langle 1/r \rangle = 1/a_0$ und $\langle 1/r^2 \rangle = 2/a_0^2$ ist, ergibt sich

$$\Delta_K = -\frac{5}{4}\alpha^2 \text{ Ry}. \quad (4.10)$$

Δ_K ist die Energie, um die sich der Grundzustand auf Grund der kinetischen Energie vermindert.

4.1.3 Zitterbewegung

Das Elektron ist nicht genauer zu lokalisieren als seine Compton-Wellenlänge λ_e . Die Positronen, die in der Lösung der Dirac-Gleichung das Elektron begleiten, vernichten zeitweise das Elektron und erzeugen es an einer anderen Stelle. Das führt zu einer Verschmierung der örtlichen Elektronenkoordinate, historisch Zitterbewegung genannt.

Die stochastische Bewegung des Elektrons innerhalb eines Bereichs von λ_e vermindert das Coulomb-Potential an der Stelle $r = 0$. Um diese Korrektur abzuschätzen, entwickeln wir das Potential in eine Taylor-Reihe nach \mathbf{r}

$$V(\mathbf{r} + \delta\mathbf{r}) = V(\mathbf{r}) + \nabla V \delta\mathbf{r} + \frac{1}{2} \sum_{ij} \nabla_i \nabla_j V \delta r_i \delta r_j + \dots \quad (4.11)$$

Wegen des Vektorcharakters der Verschmierung fällt bei der Mittelung über den Raum der lineare Term weg, $\langle \delta\mathbf{r} \rangle = 0$, der quadratische Term bekommt die Form

$$\frac{1}{2} \sum_{ij} \nabla_i \nabla_j V \delta r_i \delta r_j \rightarrow \frac{1}{6} \nabla^2 V (\delta\mathbf{r})^2. \quad (4.12)$$

Dieser Term ist nur für $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ von Null verschieden, da der Laplace-Operator, angewendet auf das Coulomb-Potential, die Poisson-Gleichung, $\nabla^2(1/r) = -4\pi\delta(\mathbf{r})$, erfüllt. $\delta(\mathbf{r})$ ist selbstverständlich die Diracsche Deltafunktion.

Wenn wir näherungsweise für $\langle(\delta\mathbf{r})^2\rangle = \lambda_e^2$ einsetzen, lautet der Korrekturterm zum Coulomb-Potential

$$\Delta_D = \frac{1}{6}\lambda_e^2\alpha\hbar c4\pi\delta(\mathbf{r}) . \quad (4.13)$$

Die Energieverschiebung bekommen wir, wenn wir den Erwartungswert von Δ_D ausrechnen. Der einzige Beitrag kommt von $\mathbf{r} = \mathbf{0}$. Daher müssen wir die δ -Funktion in (4.13) durch die Elektron-Wahrscheinlichkeitsdichte bei $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ ersetzen

$$|\psi(0)|^2 = \frac{1}{4\pi} \frac{2}{a_0^3} . \quad (4.14)$$

Unsere Abschätzung weicht nur 30 % ab vom richtigen Wert, den man als Darwin-Term bezeichnet:

$$\Delta_D = \alpha^2\text{Ry} . \quad (4.15)$$

Die Energieverschiebung im Grundzustand ist dann die Summe der beiden Korrekturen

$$\Delta E_{\text{fs}} = \Delta_K + \Delta_D = -\frac{\alpha^2}{4}\text{Ry} = -1.8 \cdot 10^{-4} \text{ eV} . \quad (4.16)$$

Um genaue Korrekturen angeregter Zustände zu erhalten, ist eine Mittelung über die Impulsverteilung der Zustände notwendig, unsere großzügige Abschätzung gibt ungenaue Werte.

Betrachten wir jetzt das Niveau mit $n = 2$. Im Zustand $\ell = 0$ beträgt $\Delta_{\text{fs}} = -0.562 \cdot 10^{-4} \text{ eV}$. Für die Zustände mit $\ell \neq 0$ muss man zusätzlich die Spin-Bahn-Kopplung berücksichtigen. Diese ist von vergleichbarer Größe wie die anderen relativistischen Korrekturen und auch proportional zu $E_n\alpha^2$.

4.1.4 Spin-Bahn-Aufspaltung

Aus (4.6) erkennt man, dass die Zustände mit gleichem j , aber unterschiedlichem ℓ entartet sind. Dies bedeutet für das Niveau mit $n = 2$, dass die relativistische Energieverschiebung $\Delta_K + \Delta_D$ im

$\ell = 0$ -Zustand gleich der Summe dieser beiden und der Spin-Bahn-Verschiebung im ($\ell = 1, j = 1/2$)-Zustand ist.

Die Spin-Bahn-Aufspaltung im $\ell = 1$ -Zustand ist:

$$\Delta E_{\text{ls}} = \frac{\alpha \hbar}{2 m_e^2 c} \left\langle \frac{1}{r^3} \right\rangle (\ell \cdot s). \quad (4.17)$$

Dies ist leicht nachzuvollziehen. Das vom Proton erzeugte Magnetfeld im Ruhesystem des Elektrons ist nach dem Biot-Savartschen Gesetz

$$\mathbf{B} = \frac{e}{4\pi \varepsilon_0 c^2 r^3} \mathbf{r} \times \mathbf{v}. \quad (4.18)$$

Bei der Transformation des Feldes in das rotierende System des Atoms wird das Feld mit einem Faktor $1/2$ multipliziert (Thomas-Faktor). Setzt man den Drehimpuls in (4.18) ein, ist das Feld

$$\mathbf{B} = \frac{e}{8\pi \varepsilon_0 m_e c^2 r^3} \boldsymbol{\ell}. \quad (4.19)$$

Die ℓs -Verschiebung (4.17) bekommt man, wenn man das Magnetfeld mit dem magnetischen Moment des Elektrons, $-(e/m)s$, multipliziert. Da die Wellenfunktion im Zustand mit $n = 2, \ell = 1$

$$\psi(r) = \frac{1}{\sqrt{24} a_0^3} \frac{r}{a_0} \exp\left(-\frac{r}{a_0}\right) \quad (4.20)$$

ist, berechnet sich der Mittelwert von $1/r^3$ zu:

$$\left\langle \frac{1}{r^3} \right\rangle = \frac{1}{24 a_0^3} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{2r}{a_0}\right) \frac{r}{a_0} \frac{dr}{a_0} = \frac{1}{24 a_0^3}. \quad (4.21)$$

Und mit

$$\ell s = \frac{1}{2} [j(j+1) - \ell(\ell+1) - s(s+1)] \hbar^2 = \begin{cases} +\frac{1}{2} \hbar^2 & \text{für } j = 3/2 \\ -1 \hbar^2 & \text{für } j = 1/2 \end{cases} \quad (4.22)$$

ist die Spin-Bahn-Aufspaltung im ($n = 2, \ell = 1$)-Zustand

$$\Delta E_{\text{ls}}(j = 3/2) - \Delta E_{\text{ls}}(j = 1/2) = \frac{1}{4} \alpha^2 E_2 = 0.446 \cdot 10^{-4} \text{ eV}. \quad (4.23)$$

In Abb. 4.2 sind die Energieverschiebungen jeweils für die Zustände $n = 1, n = 2$ und $n = 3$ schematisch gezeichnet.

4.2 Lamb-Verschiebung

Die Lamb-Verschiebung in den Zuständen mit $n = 1, \ell = 0$ und $n = 2, \ell = 0$ ist theoretisch – so glaubt man – auf sechs Stellen bekannt. In der Tat werden die genauesten Daten der Lamb-Verschiebung durch die Messung der Differenz der 2s- und 1s-Niveaus im Wasserstoffatom gewonnen. Wir werden diese grob abschätzen.

Zu der Lamb-Verschiebung tragen hauptsächlich zwei Strahlungskorrekturen bei. Die erste berücksichtigt die Tatsache, dass die Bewegung des Elektrons durch die Nullpunktschwingung des elektromagnetischen Feldes beeinflusst wird, die zweite trägt der Abschirmung der elektrischen Ladung durch die Polarisation des Vakuums Rechnung. Da der erste Mechanismus den Hauptbeitrag zur Lamb-Verschiebung im Wasserstoffatom liefert, werden wir hier nur diesen beschreiben. Die endliche Ausdehnung des Protons trägt zur Lamb-Verschiebung im Wasserstoff nur 1 % bei.

4.2.1 Nullpunktschwingung

Zunächst wollen wir die Nullpunktschwingung des elektromagnetischen Feldes abschätzen. Wir betrachten das elektromagnetische Feld als eine inkohärente Summe ebener Wellen in einer Box der Größe L^3 . Jedem Freiheitsgrad gehört eine Nullpunktenergie $\frac{1}{2}\hbar\omega$, im gegebenen Phasenraum, $L^3 4\pi (\hbar\omega/c)^2 d(\hbar\omega/c)$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int d^3x (\varepsilon_0 \mathbf{E}^2 + \mu_0^{-1} \mathbf{B}^2) &= \frac{1}{2} L^3 (\langle \varepsilon_0 \mathbf{E}^2 \rangle + \langle \mu_0^{-1} \mathbf{B}^2 \rangle) \\ &= 2L^3 \int \frac{4\pi (\hbar\omega/c)^2 d(\hbar\omega/c)}{(2\pi\hbar)^3} \frac{\hbar\omega}{2}. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Der Faktor 2 vor dem Integral kommt von den beiden Polarisationen des Photons. Die Hälfte des letzten Ausdrucks gehört dem elektrischen Feld, woraus

$$\langle \mathbf{E}^2 \rangle = \int \frac{\omega^2 \hbar\omega}{2\pi^2 c^3 \varepsilon_0} d\omega \quad (4.25)$$

folgt. Dieses Integral divergiert. Jedoch genügt es zur Abschätzung der Lamb-Verschiebung, wenn man nur das Frequenzintervall zwischen $\hbar\omega_{\min} \approx 2\text{Ry}$ und $\hbar\omega_{\max} \approx m_e c^2$ berücksichtigt. Das werden wir anschließend begründen.

Das Feld \mathbf{E} beschleunigt das Elektron, und dadurch verschmieren seine Koordinaten

$$m_e \delta \ddot{\mathbf{r}} = e \mathbf{E} . \quad (4.26)$$

Benutzen wir diesen Zusammenhang, um $\langle (\delta \mathbf{r})^2 \rangle$ abzuschätzen. Die zweite Zeitableitung bringt einen Faktor $(-1/\omega^2)^2$ in das Integral (4.25) über ω :

$$\begin{aligned} \langle (\delta \mathbf{r})^2 \rangle &= \int \left(-\frac{e}{m\omega^2} \right)^2 \frac{\omega^2 \hbar \omega d\omega}{2\pi^2 c^3 \epsilon_0} = \frac{2\alpha (\hbar c)^2}{\pi m_e^2 c^4} \cdot \int \frac{d\omega}{\omega} \\ &\approx \frac{2\alpha (\hbar c)^2}{\pi m_e^2 c^4} \cdot \ln \frac{\omega_{\max}}{\omega_{\min}} . \end{aligned} \quad (4.27)$$

Die Koordinate des Elektrons fluktuiert um $\delta \mathbf{r}$, was beides ändert, die kinetische und die potentielle Energie. Die Änderung der kinetischen Energie ist für das freie und das gebundene Teilchen gleich und ist in der Renormierung der Masse inbegriffen. Die Änderung der potentiellen Energie ist der Beitrag zur Lamb-Verschiebung.

Jetzt müssen wir den relevanten ultravioletten und den infraroten Cut-off für die Änderung der potentiellen Energie abschätzen.

Für die obere Grenze wählen wir die Elektronmasse ($\hbar \omega_{\max} \approx m_e c^2$), da eine bessere Auflösung der Elektronkoordinate als die Compton-Wellenlänge ($\hbar c / m_e c^2$) nicht möglich ist. Für die untere Grenze wählen wir eine typische Atomenergie ($\hbar \omega_{\min} \approx 2 \text{ Ry}$), da die gebundenen Elektronen nicht stärker als Atomradien verschmiert sind. Diese Wahl werden wir sogleich rechtfertigen. Das Verhältnis beträgt dann

$$\frac{\omega_{\max}}{\omega_{\min}} \approx \frac{m_e c^2}{m_e c^2 \alpha^2} = \frac{1}{\alpha^2} . \quad (4.28)$$

Die Fluktuation des Elektrons verschmiert das Coulomb-Potential (siehe (4.11) und (4.12))

$$\Delta_V = \frac{1}{2} \frac{1}{3} \nabla^2 V \langle (\delta \mathbf{r})^2 \rangle . \quad (4.29)$$

Wir können die Poissonsche Gleichung anwenden und das korrigierte Coulomb-Potential ausrechnen

$$\nabla^2 V = -4\pi \alpha \hbar c \delta(\mathbf{r}) , \quad (4.30)$$

wobei $\delta(\mathbf{r})$ wiederum die Diracsche Deltafunktion bedeutet. Die Verschmierung des Coulomb-Potentials beträgt dann

$$\langle \Delta_V \rangle = 4\pi\alpha\hbar c |\psi_n(0)|^2 \langle (\delta\mathbf{r})^2 \rangle = 4\pi\alpha\hbar c \frac{1}{\pi} \left(\frac{m_e c^2 \alpha}{\hbar c n} \right)^3 \langle (\delta\mathbf{r})^2 \rangle. \quad (4.31)$$

In erster Ordnung entspricht diese Verschmierung einer Verschiebung der potentiellen Energie

$$\Delta E_{\text{Lamb}} = \langle \Delta_V \rangle \approx \frac{4}{3\pi} \frac{m_e c^2 \alpha^5}{n^3} \ln \left(\frac{1}{\alpha^2} \right) = \frac{8}{3\pi} \frac{\text{Ry} \alpha^3}{n^3} \ln \left(\frac{1}{\alpha^2} \right). \quad (4.32)$$

Unsere Abschätzung stimmt z. B. für den Zustand $n = 2$ innerhalb von 20% überein.

4.3 Hyperfeinstruktur

Betrachten wir weiterhin die Wechselwirkung zwischen den magnetischen Momenten des Protons und des Elektrons. Das Magnetfeld eines magnetischen Dipols, z. B. das des Protons, $\boldsymbol{\mu}_p$, ist:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3\mathbf{r}(\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\mu}_p) - r^2 \boldsymbol{\mu}_p}{|\mathbf{r}|^5} + \frac{2\mu_0}{3} \boldsymbol{\mu}_p \delta(\mathbf{r}). \quad (4.33)$$

Die Dipol-Dipol-Wechselwirkungsenergie erhält man, wenn man das Skalarprodukt zwischen dem Magnetfeld aus (4.33) und dem magnetischen Dipolmoment des Elektrons bildet und über die Elektronverteilung im Gesamtraum integriert. Dabei hebt sich der Beitrag des ersten Summanden auf. übrig bleibt nur der Beitrag der überlappenden Momente. Für die Wechselwirkung der magnetischen Momente des Elektrons und des Protons ist nur das Kontaktpotential V_{ss} von Bedeutung

$$V_{ss}(\mathbf{r}) = -\frac{2\mu_0}{3} \boldsymbol{\mu}_p \cdot \boldsymbol{\mu}_e \delta(\mathbf{r}). \quad (4.34)$$

Daraus folgt der Wert für die Hyperfeinaufspaltung:

$$\Delta E_{ss} = -\frac{2\mu_0}{3} \boldsymbol{\mu}_p \cdot \boldsymbol{\mu}_e |\psi(0)|^2. \quad (4.35)$$

Nur die Elektronen der Zustände mit $\ell = 0$ haben am Kernort eine endliche Aufenthaltswahrscheinlichkeit. Wir werden nur die Hyperfeinaufspaltung für den 1s-Zustand im Wasserstoffatom berechnen.

Die Wahrscheinlichkeit, das Elektron am Ort des Protons zu finden, ist nach (4.14) $|\psi(0)|^2 = 1/2\pi a_0^3$. Den Gesamtdrehimpuls des Atoms bezeichnet man mit F , das ist die Summe aus dem Elektrondrehimpuls und dem Spin des Kerns. Im Falle des Wasserstoffatoms im 1s-Zustand gilt $F = s_e + s_p$. Da bekanntlich

$$s_p \cdot s_e = \frac{1}{2}[F(F+1) - 2s(s+1)]\hbar^2 = \begin{cases} +\frac{1}{4}\hbar^2 & \text{für } F = 1 \\ -\frac{3}{4}\hbar^2 & \text{für } F = 0 \end{cases} \quad (4.36)$$

und $\mu_p = 2.973(e/m_p)s_p$ sowie $\mu_e = -(e/m_e)s_e$, beträgt die Hyperfeinaufspaltung:

$$\begin{aligned} \Delta E_{ss}(J=1) - \Delta E_{ss}(J=0) &= \frac{2 \cdot 2.793\mu_0}{3} \frac{e^2(\hbar c)^2}{m_p c^2 m_e c^2} \frac{1}{\pi a_0^3} \\ &= \frac{8\pi \cdot 2.793\alpha^2(\hbar c)^3}{m_p c^2 \cdot m_e c^2} \frac{1}{\pi a_0^3} \\ &= 6 \cdot 10^{-6} \text{ eV} . \end{aligned} \quad (4.37)$$

Diese Energie entspricht der bekannten 21 cm-Strahlung, die vom interstellaren Wasserstoff emittiert wird und auf der Erde mit Antennen

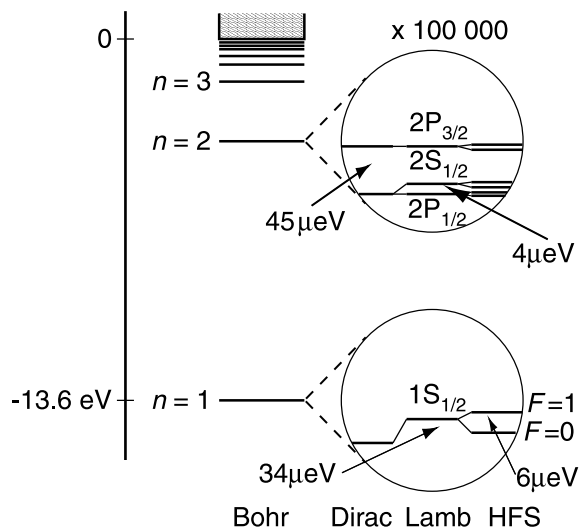


Abb. 4.3. Vollständiges Termschema des H-Atoms inklusive der Hyperfeinstrukturaufspaltung

leicht zu beobachten ist. Die Lebensdauer dieses Hyperfeinübergangs ist viele Größenordnungen zu lang ($\approx 10^7$ Jahre), um ihn im Labor beobachten zu können. Anders ist es im Falle des interstellaren Wasserstoffs: Die Wahrscheinlichkeit für atomare Stöße ist dort ausreichend klein, um den elektromagnetischen Übergang zu ermöglichen. In Abb. 4.3 wird das vollständige Termschema des H-Atoms inklusive der Hyperfeinstrukturaufspaltung gezeigt.

4.4 Wasserstoffähnliche Atome

Negativ geladene Teilchen, μ^- , π^- , K^- , \bar{p} , Σ^- , Ξ^- sind erfolgreich in das Coulomb-Feld der Atomkerne eingebaut worden. Da die $1s$ -Radien $r \propto 1/(mZ)$ sind, bewegt sich das schwere Teilchen weit innerhalb der Elektronenhülle und kann sehr gut als wasserstoffähnliches Atom, jedoch nicht nur mit einem Proton, sondern auch mit schwereren Atomkernen im Zentrum, betrachtet werden. Die Atome mit stark wechselwirkenden Teilchen, gebunden im Coulomb-Feld des Kerns, eignen sich gut zur Untersuchung der Teilchen-Kern-Wechselwirkung bei kleinsten Energien. Da die Masse des Myons ≈ 200 mal kleiner ist als die des Elektrons, bewegen sich die Myonen, wenn im Atom eingefangen, nur schwach abgeschirmt von den Elektronen in Kernnähe. Deswegen eignen sich die myonischen Atome zur Messung der elektromagnetischen Eigenschaften der Kerne, was wir kurz schildern wollen.

4.4.1 Myonische Atome

Die Bindungsenergien in myonischen Atomen kann man für die meisten Zustände ausrechnen, wenn man die Formeln für das Wasserstoffatom nimmt, wobei die Elektronmasse durch die myonische und die Ladung des Protons durch die des betreffenden Kerns ersetzt. Einen wesentlichen Unterschied zur Abschätzung durch die Wasserstoffformel zeigen die $\ell = 0$ -Zustände, insbesondere der $1s_{1/2}$ -Grundzustand. Dies wollen wir am Beispiel des myonischen Bleiatoms demonstrieren.

In einem myonischen Atom mit einem Kern einer Punktladung des Bleis ($Z = 82$) wäre der wahrscheinlichste Radius des Myons im $1s_{1/2}$ -Zustand

$$a_{\mu} = \frac{a_0}{Zm_{\mu}/m_e} = \frac{a_0}{1696} \approx 31 \text{ fm} , \quad (4.38)$$

und die Bindungsenergie wäre dann

$$E_1 = -Z^2 \frac{m_\mu}{m_e} \text{Ry} \approx -18.92 \text{ MeV} . \quad (4.39)$$

Experimentell beträgt die Bindungsenergie des $1s_{1/2}$ -Zustandes im myonischen Blei nur $E_{1s} = -9.744 \text{ MeV}$.

Das Myon, das sich so nahe am Kern bewegt, spürt ein stark modifiziertes Coulomb-Potential, da der Bleikern einen Radius von etwa 7.11 fm hat, vergleichbar mit der Ausdehnung der myonischen Wellenfunktion. Das effektive Coulomb-Potential eines Bleikerns ist in Abb. 4.4 skizziert. Wir haben angenommen, dass der Kern eine homogen geladene Kugel mit dem Radius R ist. Innerhalb des Kerns wächst das Potential proportional zu r^2/R^3 und hat die Form eines harmonischen Oszillators, außerhalb des Kerns gilt die einfache $1/r$ -Abhängigkeit. Am Kernrand R müssen die beiden Funktionen den gleichen Wert und die gleiche Ableitung haben. Das erreicht man mit folgendem Ansatz:

$$V(r) = -Z\alpha\hbar c \begin{cases} \frac{1}{R} \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2} \frac{r^2}{R^2} \right) & r \leq R \\ \frac{1}{r} & r \geq R . \end{cases} \quad (4.40)$$

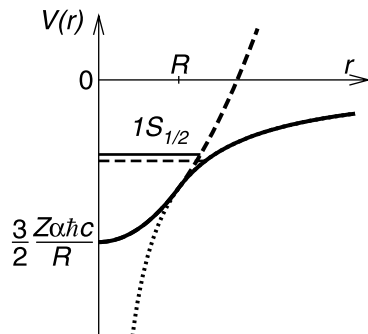


Abb. 4.4. Das effektive Coulomb-Potential eines Bleikerns. Am Rande des Kerns $r = R$ ist die Funktion r^2/R^3 , die das Potential im Inneren des Kerns beschreibt, an die Hyperbel angepasst. Der mit dem Oszillatorpotential berechnete Grundzustand (*durchgezogene Linie*) liegt etwa 1.5 MeV höher als der experimentell bestimmte (*gestrichelte Linie*)

Das $1s_{1/2}$ -Myon bewegt sich vorwiegend innerhalb des Kerns, und wir versuchen die Bindungsenergie mit der Annahme auszurechnen, dass die Form des Potentials die eines harmonischen Oszillators sei.

Die Hamilton-Funktion des harmonischen Oszillators ist

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 r^2}{2}, \quad (4.41)$$

wobei – wenn wir die Form des Potentials (4.40) berücksichtigen – gilt:

$$\omega^2 = \frac{Z\alpha\hbar c}{mR^3}. \quad (4.42)$$

Der Grundzustand des dreidimensionalen harmonischen Oszillators liegt bei $3/(2\hbar\omega)$, so beträgt die Bindungsenergie in dieser Näherung

$$\begin{aligned} E_{1s} &= -\frac{3}{2} \frac{Z\alpha\hbar c}{R} + \sqrt{\frac{Z\alpha\hbar c}{mR^3}} \\ &= -\frac{3}{2} \frac{Z\alpha\hbar c}{R} \left(1 - \sqrt{\frac{Z\alpha\hbar c}{mR}} \right) = -8.36 \text{ MeV}. \end{aligned} \quad (4.43)$$

Dies ist keine schlechte Abschätzung. Der experimentelle Wert liegt etwa tiefer, da sich das Myon nicht vollständig im Kern aufhält.

Weiterführende Literatur

- W. Demtröder: *Experimentalphysik 3* (Springer, Berlin Heidelberg 2000)
 H. Haken, H. C. Wolf: *Atom- und Quantenphysik* (Springer, Berlin Heidelberg 2000)
 R. P. Feynman: *Quantum Electrodynamics* (Benjamin, New York 1962)
 V. F. Weisskopf: *Search for Simplicity: Quantum mechanics of the hydrogen atom*, Am. J. Phys. **53** (1985) 206