1.1.7 Funktionen (Aufgabe 25 bis 30)

Seien A und B nichtleere Mengen. Eine **Funktion** f von A in die Menge B ist eine Vorschrift, die jedem Punkt a aus A **eindeutig** (d.h. genau) einen Punkt $f(a)$ aus B zuordnet. Dabei heißen A und B der **Definitions**- bzw. **Bildbereich von** f. Das **Bild** oder auch der **Wertebereich von** f ist die Menge aller Punkte aus B, die **Bilder von Punkten aus** A sind, d.h.

$$f(A) := \mathrm{Bild}(f) := \{b \mid b \in B\ ,\ \exists a \in A \quad \text{mit} \quad b = f(a)\}\ .$$

Man verlangt also im Allgemeinen nicht, dass alle Elemente von B als Bilder vorkommen. Wozu braucht man dann noch den Bildbereich? Warum betrachtet man nicht gleich den Wertebereich von f? Wenn man die Vorschrift f kennt, ist es im Allgemeinen nicht leicht, den Wertebereich zu bestimmen; so zum Beispiel (und dieses Beispiel ist relativ einfach!) für $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ ,\ f(x) = \frac{2x-1}{x^4+1}$.
Man kann eine Funktion auf verschiedene Arten angeben, definieren. Ist die Menge A endlich, so kann dies durch eine Tabelle geschehen; z.B. für die täglichen Durchschnittstemperaturen des vergangenen Jahres, die in einer Wetterstation (z.B. der Zugspitze) gemessen und dann errechnet werden, oder für die Kurswerte an der Frankfurter Börse.
Häufig wird eine Funktion angegeben in der Form $f : A \to B$ zusammen mit einer Beschreibung (etwa durch eine Gleichung), wie jedem $x \in A$ das Element $f(x)$ zuzuordnen ist. Gelegentlich wird – unkorrekt aber bequem – die Funktion f mit dem (unbestimmten) Funktionswert $f(x)$ identifiziert, also z.B. x^2 als Funktion bezeichnet, wo $x \mapsto x^2$ korrekt wäre.
Ist A eine beliebige Menge, so bezeichnet id_A die **Identität** oder die **identische Abbildung von** A; es ist die Vorschrift, bei der Definitionsbereich und Bildbereich gleich A sind, und die jedem $a \in A$ wieder a zuordnet. Ist B eine weitere Menge und $b \in B$ fest, so kann man die **konstante Abbildung** b betrachten, die jedem a aus A den Wert b zuordnet. Eine Funktion mit zweielementigem Wertebereich haben wir schon kennengelernt (auch wenn wir das dort nicht so bezeichnet haben): Jeder Aussage wird entweder „wahr“ oder „falsch“ als Wahrheitswert zugeordnet; also ist $\{w, f\}$ der Wertebereich.
Sind A und B Teilmengen von $\mathbb{R}$, so kann man $f : A \to B$ mit Hilfe einer Rechenvorschrift definieren, z.B. durch ein Polynom oder durch eine rationale Funktion, d.h. als Quotient von zwei Polynomen; dabei darf natürlich A keine Nullstelle des Nenners enthalten. Hiermit ist die nächste Fragestellung vorbereitet. Gegeben sei eine Verkettung von Operationen und bekannten Funktionen, in welchen eine unbestimmte reelle Zahl x vorkommt. Gesucht ist die größte Teilmenge von $\mathbb{R}$ – der sog. **maximale Definitionsbereich** –, auf welcher dieser Ausdruck sinnvoll ist, so dass hier durch diesen Ausdruck eine Funktion definiert werden kann. (Man kann sich natürlich viel schlimmere Beispiele vorstellen als etwa die Zuordnung

$x \mapsto \sqrt{10x^2 - \ln(x^3 - 6x^2 + 11x - 6)!}$). Auch Funktionen auf Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ oder $\mathbb{C}$ nach $\mathbb{R}^m$ oder $\mathbb{C}$ werden betrachtet. So z.B. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2) = \frac{x_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2 + 1}$ oder $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $g(z) = |z| + z^2 - 3\overline{z} + 5$.

Egal was man untersucht, erforscht, misst, experimentiert, die erzielten Resultate kann man fast immer mit Hilfe von Funktionen ausdrücken. Die meisten Ergebnisse menschlicher Tätigkeiten oder von Naturphänomenen können und werden durch Funktionen erfasst und beschrieben. Nicht nur in der Technik und in den Natur- und Ingenieurwissenschaften trifft man bei jedem Schritt auf Funktionen (wenn man sie sehen will oder kann!), sondern überall in der Wirtschaft, Demographie, Demoskopie, Medizin, Politik, Rechtswissenschaft, Kunst, Sprachwissenschaften, Verwaltung, Ernährung, usw. Einige Beispiele:

- Dosierungen von Arzneimittel sind Funktionen vom Körpergewicht.
- Die Börsenkurse in Frankfurt können als Funktionen von zwei oder drei Variablen – Datum und Firma (für die Schlussnotierung) oder Datum, Uhrzeit und Firma – angesehen werden.
- Wahlergebnisse können in Prozenten oder in Wählerzahlen veröffentlicht werden.
- Abstimmungsergebnisse in verschiedenen Gremien sind dreiwertige Funktionen. (Die Funktionswerte sind ja, nein oder Enthaltung).
- Prognosen verschiedener Institute über die Zahlen zur wirtschaftlichen Entwicklung bzw. Bevölkerungsentwicklung sind ebenfalls in Form von Funktionen darstellbar.
- Haushaltsdaten und Sportergebnisse verschiedener Art liefern Funktionen.

Oft sind Vorgänge derart komplex (z.B. in der Wirtschaft, Medizin oder Biologie), dass das Herausfinden einer Funktion, die den untersuchten Vorgang exakt beschreibt, eine fast unüberwindbare Aufgabe ist, und deshalb macht man vereinfachende Annahmen, um den Vorgang durch Funktionen beschreiben zu können, die einigermassen handhabbar sind.

Die Funktion $f : A \to B$ ist eindeutig durch ihren **Graphen** $G_f := \{(a, f(a)) \in A \times B \mid a \in A\}$ bestimmt. Umgekehrt ist eine Teilmenge $G \subset A \times B$ der Graph einer (eindeutig bestimmten!) Funktion genau dann, wenn jedes $a \in A$ in genau einem Element aus G als erste Komponente vorkommt. In diesem Fall ist die zweite Komponente das Bild von a unter der dadurch definierten Funktion.

Seien $f : A \to B$ und $f_1 : A_1 \to B_1$ Funktionen mit $A \subset A_1$, $B \subset B_1$ und $f(a) = f_1(a)$ für alle a aus A. Dann heißt f eine **Einschränkung von** f_1 und f_1 heißt eine **Fortsetzung von** f. Obwohl die Zuordnungsvorschrift für alle Elemente aus A dieselbe ist, werden f und f_1 – falls $A \neq A_1$ oder wenigstens $B \neq B_1$ – als verschieden betrachtet. Die Zuordnung $x \mapsto \frac{x^2 - 4x}{x}$

hat $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ als maximalen Definitionsbereich; dadurch wird eine Funktion $f : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}\backslash\{-4\}$ definiert. Die Funktion $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_1(x) = x - 4$ ist eine Fortsetzung von f. Auch $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_2(x) = f(x)$ für $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ und $f_2(0) = 0$ ist eine Fortsetzung von f .
Ist $f : A \to B$ eine Funktion, so ordnet f jedem $a \in A$ genau ein $b \in B$ zu; dabei ist nicht ausgeschlossen, dass zwei verschiedene Elemente a_1 und a_2 auf dasselbe Element b abgebildet werden, und es ist auch möglich, dass ein $b \in B$ existiert, das nicht im Bild von f liegt. Folgt aus $f(a_1) = f(a_2)$ stets $a_1 = a_2$, so nennt man f **injektiv**. Gibt es für jedes $b \in B$ ein $a \in A$ mit $f(a) = b$, so heißt f **surjektiv**. Um auszudrücken, dass $f : A \to B$ surjektiv ist, kann man auch sagen: f ist eine Funktion von A **auf** B. So ist z.B. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ weder injektiv noch surjektiv, da $f(1) = f(-1)$ gilt und -1 kein Urbild hat. Die Einschränkungen $[0, \infty[\to \mathbb{R}$ und $\mathbb{R} \to [0, \infty[$ von f sind dagegen injektiv bzw. surjektiv. Die Einschränkungen $[0, \infty[\to [0, \infty[$ und $]-\infty, 0] \to [0, \infty[$ von f sind sowohl injektiv als auch surjektiv. Eine solche Funktion nennt man **bijektiv**.
Sind $f : A \to B$ und $g : B \to C$ Funktionen, so wird durch $a \mapsto g(f(a))$ eine Funktion $A \to C$ definiert, die mit $g \circ f$ bezeichnet wird, und die **Komposition von f und g** heißt. Für jedes $a \in A$ wird also zunächst der Funktionswert $f(a)$ ermittelt und zu diesem Element aus B wird anschliessend das Bild $g(f(a))$ bzgl. g bestimmt. Diese Operation ist assoziativ, d.h.: Für $f : A \to B$, $g : B \to C$ und $h : C \to D$ gilt: $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$. Sind f und g zwei Funktionen von A nach A, so sind im Allgemeinen $f \circ g$ und $g \circ f$ verschieden. Sind $f : A \to B$ und $g : B \to C$ beide injektiv oder beide surjektiv, so hat $g \circ f$ dieselbe Eigenschaft. Deshalb ist $g \circ f$ bijektiv, falls f und g es sind. Ist $f : A \to B$ bijektiv, so gibt es eine eindeutig bestimmte Funktion $g : B \to A$ mit $g \circ f = \mathrm{id}_A$ und $f \circ g = \mathrm{id}_B$. Diese Funktion g wird mit f^{-1} bezeichnet und heißt die **Inverse von** f; $f(a) = b$ und $f^{-1}(b) = a$ sind also äquivalent.
Für eine feste natürliche Zahl $n \geq 1$ heißt jede bijektive Abbildung von $\{1, \ldots, n\}$ auf $\{1, \ldots, n\}$ eine **Permutation**. Mit Hilfe vollständiger Induktion kann man sich überlegen, dass es $n!$ verschiedene Permutationen der Menge $\{1, \ldots, n\}$ gibt.

Sei nun $A \subset \mathbb{R}$. $f : A \to \mathbb{R}$ heißt **monoton wachsend** (**streng monoton wachsend**), falls aus $a_1 < a_2$ immer $f(a_1) \leq f(a_2)$ (bzw. $f(a_1) < f(a_2)$) folgt. Analog definiert man **monoton fallend** und **streng monoton fallend**. Der Betrag $|\quad| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist keine monotone Funktion, da zwar $-3 < 1$ und $-3 < 5$ gilt, aber $|-3| > |1|$ und $|-3| < |5|$. Die Einschränkungen des Betrages auf $]-\infty, 0]$ und $[0, \infty[$ sind streng monoton fallend bzw. wachsend. Es ist klar, dass die strenge Monotonie die Injektivität impliziert, aber das Umgekehrte gilt nicht. (Z.B. $f : [0, 1] \cup [2, 3] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$ für $x \in [0, 1]$

und $f(x) = 5 - x$ für $x \in [2,3]$ ist injektiv, aber nicht monoton.)

Sei $f : A \times B \to C$ eine Funktion; sind $a_0 \in A$ und $b_0 \in B$ fest gewählt, so kann man die Funktionen $A \to C,\ a \mapsto f(a, b_0)$ und $B \to C,\ b \mapsto f(a_0, b)$ betrachten; sie werden mit $f(\cdot, b_0)$ bzw. $f(a_0, \cdot)$ bezeichnet. Diese Funktionen sind Kompositionen von $A \to A \times B,\ a \mapsto (a, b_0)$ und $B \to A \times B,\ b \mapsto (a_0, b)$ mit f .

Zwei Mengen A und B heißen **gleichmächtig**, wenn eine bijektive Funktion von A nach B existiert. Diese Relation ist eine **Äquivalenzrelation**, d.h. sie ist **symmetrisch** (A ist gleichmächtig zu A), **reflexiv** (ist A gleichmächtig zu B, so ist B gleichmächtig zu A) und **transitiv** (ist A gleichmächtig zu B und B gleichmächtig zu C, so ist A gleichmächtig zu C). Die Menge aller Mengen, die zu A gleichmächtig sind, nennt man die Äquivalenzklasse von A. Die Äquivalenzklasse von A heißt die **Mächtigkeit** oder **Kardinalzahl von** A. Gibt es zu A eine natürliche Zahl $n \geq 1$, so dass A und $\{1, \ldots, n\}$ gleichmächtig sind, so ist n eindeutig bestimmt, und A heißt **endlich** mit der Kardinalzahl n. Sonst heißt A – falls A nicht die leere Menge ist – **unendlich**. Ist A gleichmächtig zu $\mathbb{N}$, so nennt man A **abzählbar**. Alle anderen unendlichen Mengen heißen **überabzählbar**. Die Menge $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen ist abzählbar; als bijektive Abbildung von $\mathbb{N}$ auf $\mathbb{Z}$ kann man nehmen: $2k \mapsto k$ und $2k + 1 \mapsto -k - 1$ für $k \in \mathbb{N}$. Das ist gleichzeitig ein Beispiel dafür, dass eine Menge dieselbe Mächtigkeit haben kann wie eine echte Teilmenge. Bei endlichen Mengen ist das nicht möglich. Es ist nicht allzu schwer zu zeigen, dass auch $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{N}^m$ für eine beliebige natürliche Zahl $m \geq 1$ abzählbar sind. Etwas mehr muss man sich anstrengen um nachzuweisen, dass $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ überabzählbar sind.

1.1.8 Polynome, Horner-Schema (Aufgabe 31 und 32)

Teilt man das Polynom $P, P(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ durch $x - x_0$, so folgt aus

$$a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0 = (x - x_0)\Big(b_{n-1} x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0\Big) + r$$

durch Koeffizientenvergleich

$$\begin{aligned} &b_{n-1} = a_n\ ,\ b_{n-2} = a_{n-1} + x_0 b_{n-1}, \ldots, \\ &b_{n-k} = a_{n-k+1} + x_0 b_{n-k+1}, \ldots, b_0 = a_1 + x_0 b_1\ ,\ r = a_0 + x_0 b_0\ . \end{aligned} \tag{1.11}$$

Deshalb sind die Koeffizienten des Quotienten $Q(x) = b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0$ und der Rest r leicht mit Hilfe des sog. **Horner-Schemas** zu berechnen:

$$\begin{array}{c|cccccc}
 & a_n & a_{n-1} & \ldots a_{n-k+1} & \ldots & a_1 & a_0 \\
x_0 & & x_0 b_{n-1} & \ldots x_0 b_{n-k+1} & \ldots & x_0 b_1 & x_0 b_0 \\
\hline
 & b_{n-1} & b_{n-2} & \ldots b_{n-k} & \ldots & b_0 & r
\end{array} \quad ,$$

wobei die letzte Zeile mit Hilfe von (1.11) gewonnen wird. Aus $P(x) = (x - x_0)Q(x) + r$ folgt (durch Einsetzen von x_0): $P(x_0) = r$. Also: x_0 ist eine Nullstelle von P genau dann, wenn $P(x_0) = 0$ gilt.
Der **Fundamentalsatz der Algebra** besagt, dass jedes Polynom P n-ten Grades mit komplexen (insbesondere auch mit reellen) Koeffizienten genau n (im Allgemeinen komplexe) Nullstellen besitzt, wenn man mit Vielfachheiten zählt. Das bedeutet Folgendes: Es gibt k paarweise verschiedene komplexe Zahlen $x_1, \ldots x_k$ sowie k positive natürliche Zahlen $m_1, \ldots, m_k$, so dass gilt:

$$P(x) = a_n \prod_{j=1}^{k} (x - x_j)^{m_j} \quad \text{mit} \quad \sum_{j=1}^{k} m_j = n \; . \tag{1.12}$$

m_j ist die **Vielfachheit der Nullstelle** x_j von P. Sind die Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots, a_n$ reell, so ist mit x_j auch $\overline{x}_j$ eine Nullstelle von P, da

$$P(\overline{x}_j) = \sum_{k=0}^{n} a_k \overline{x}_j^k = \sum_{k=0}^{n} \overline{a}_k \overline{x_j^k} = \overline{\sum_{k=0}^{n} a_k x_j^k} = \overline{P(x_j)}$$

gilt. Ist also $x_j \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ eine Nullstelle von P, so ist auch $\overline{x}_j \neq x_j$ eine Nullstelle von P, und die Faktoren $x - x_j$ und $x - \overline{x}_j$ kommen in (1.12) mit denselben Exponenten vor (was man sich leicht mit vollständiger Induktion und auf Grund der folgenden Bemerkung überlegen kann). Das Produkt $(x - x_j)(x - \overline{x}_j)$ ist ein Polynom zweiten Grades mit reellen Koeffizienten, denn:

$$(x - x_j)(x - \overline{x}_j) = x^2 - (x_j + \overline{x}_j)x + x_j \overline{x}_j = x^2 - 2(\operatorname{Re} x_j)x + |x_j|^2 \; .$$

Deshalb lässt sich das Polynom P mit reellen Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots, a_n$ wie folgt schreiben:

$$P(x) = \prod_{j=1}^{s} (x^2 + b_j x + c_j)^{m_j} \prod_{k=1}^{r} (x - d_k)^{p_k} \tag{1.13}$$

mit $s, r \in \mathbb{N}$, $m_j \geq 1$ für alle $j \in \{1, \ldots, s\}$, $p_k \geq 1$ für alle $k \in \{1, \ldots, r\}$ und $2\sum_{j=1}^{s} m_j + \sum_{k=1}^{r} p_k = n$. Dabei sind die Fälle $s = 0$ und $r = 0$ möglich, d.h., P könnte nur reelle Nullstellen oder gar keine reellen Nullstellen haben. Allerdings ist es oft schwer, die Zerlegungen (1.12) und (1.13) konkret anzugeben. Als kleine Hilfe in einem Spezialfall kann das folgende, leicht nachprüfbare Ergebnis dienen: Sind die Koeffizienten von $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ (der höchste Koeffizient ist also 1!) ganze Zahlen, so ist jede rationale Nullstelle von P auch ganz, und zwar ein Teiler von a_0. Über irrationale Nullstellen ist dabei nichts gesagt; Beispiel: $x^2 - 2 = (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$.

2.3 Erster Test für das zweite Kapitel

Aufgabe 1

Führen Sie für die Funktion $f, f(x) = x|x^2 - 3x|$ das Kurvendiskussionsprogramm durch. Untersuchen Sie insbesondere die Existenz der ersten und der zweiten Ableitung von f in den Punkten 0 und 3 .

Lösung:
a) Die Funktion ist auf $\mathbb{R}$ definiert; es gilt:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 3x^2 & \text{falls } x \in]-\infty, 0] \cup [3, \infty[\\ \\ 3x^2 - x^3 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Man hat: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$. f hat keine Asymptote, weil sie auf $\mathbb{R}$ definiert ist und weil gilt:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3 - 3x^2}{x} = \lim_{x\to\infty} (x^2 - 3x) = \lim_{x\to\infty} x^2(1 - \frac{3}{x}) = \infty \ ,$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3 - 3x^2}{x} = \lim_{x\to-\infty} (x^2 - 3x) = \lim_{x\to-\infty} x^2(1 - \frac{3}{x}) = \infty \ .$$

b) Die Funktion f ist stetig auf $]-\infty, 0[\cup]0, 3[\cup]3, \infty[$, da auf diesen drei Intervallen f jeweils ein Polynom ist. In den Punkten 0 und 3 ist f ebenfalls stetig (und damit auf $\mathbb{R}$), weil:

$$\lim_{x\to0-} f(x) = \lim_{x\to0-} (x^3 - 3x^2) = 0 = f(0) = \lim_{x\to0+} (3x^2 - 3x^3) = \lim_{x\to0+} f(x) \ ,$$

$$\lim_{x\to3-} f(x) = \lim_{x\to3-} (3x^3 - x^2) = 0 = f(3) = \lim_{x\to3+} (x^3 - 3x^2) = \lim_{x\to3+} f(x) \ .$$

c) Auf $]-\infty, 0[\cup]0, 3[\cup]3, \infty[$ ist f unendlich oft differenzierbar. Man hat:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to0-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x\to0-} \frac{x^3 - 3x^2}{x} = \lim_{x\to0-} (x^2 - 3x) = 0 \ , \\
\lim_{x\to0+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x\to0+} \frac{3x^2 - x^3}{x} = \lim_{x\to0+} (3x - x^2) = 0 \ , \\
\lim_{x\to3-} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} &= \lim_{x\to3-} \frac{3x^2 - x^3}{x - 3} = \lim_{x\to3-} (-x^2) = -9 \ , \\
\lim_{x\to3+} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} &= \lim_{x\to3+} \frac{x^3 - 3x^2}{x - 3} = \lim_{x\to3+} (x^2) = 9 \ .
\end{aligned}$$

Also: f ist in 0 differenzierbar, in 3 nicht. Es gilt

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 - 6x & \text{, falls } x \in]-\infty, 0] \cup]3, \infty[\ , \\ 6x - 3x^2 & \text{, falls } x \in]0, 3[\ . \end{cases}$$

Die Nullstellen von f' sind 0 und 2. Da $f(x) < 0$ für $x < 0$ und $f(x) > 0$ für $x > 0$ gelten, hat f im Nullpunkt kein lokales Extremum.
d) f' ist in 0 nicht differenzierbar (in 3 wird gar nicht untersucht, da $f'(3)$ nicht existiert!), weil: $\lim\limits_{x\to 0-} \frac{f'(x)-f'(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0-} \frac{3x^2-6x}{x} = -6$, $\lim\limits_{x\to 0+} \frac{f'(x)-f'(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0+} \frac{6x-3x^2}{x} = 6$. Damit hat man:

$$f''(x) = \begin{cases} 6x - 6 & \text{, falls } x \in]-\infty, 0[\cup]3, \infty[\ , \\ 6 - 6x & \text{, falls } x \in]0, 3[\ . \end{cases}$$

Insbesondere ist $f''(2) = 6 - 6 \cdot 2 = -6 < 0$, und damit besitzt f in 2 ein lokales Maximum, nämlich $f(2) = 4$.
Die einzige Nullstelle von f'' liegt in 1. Da $f''(x) > 0$ für $x \in]0, 1[$ und $f''(x) < 0$ für $x \in]1, 3[$ gilt, ist 1 ein Wendepunkt für f.
e) Die folgende Tabelle hilft uns bei der graphischen Darstellung von f:

x	$-1 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4$
$f'(x)$	$+ \ + \ + \ 0 \ + \ 3 \ + \ 0 \ - \mid + \ + \ +$
$f(x)$	$-\infty \nearrow -4 \nearrow 0 \nearrow 2 \nearrow 4 \searrow 0 \nearrow 16 \nearrow \infty$
$f''(x)$	$- \ - \ - \mid + \ 0 \ - \ - \ - \mid + \ + \ +$

Danach wächst die Funktion f auf dem Intervall $]-\infty, 0]$ von $-\infty$ bis 0, und ist dabei konkav. Im Nullpunkt hat f einen Wendepunkt, und dabei ist die Tangente zum Graphen von f die x-Achse. Auf dem Intervall $[0, 1]$ wächst f weiter, von 0 bis 2 , und ist dabei konvex. Im Punkt 1 gibt es einen Wendepunkt; die Tangente in diesem Punkt hat die Steigung 3. Auf $[1, 2]$ wächst f von 2 bis 4. In 2 gibt es ein lokales Maximum; danach auf $[2, 3]$ nimmt f von 4 bis auf 0 ab. Dabei ist f auf $[1, 3]$ konkav. Schließlich wächst f auf $[3, \infty]$ vom relativen Minimum 0 bis ∞, und dabei ist f konvex. Man beachte, dass die Funktion f weder gerade noch ungerade ist, weil $f(1) = 2$ und $f(-1) = -4$ gilt.
Mit diesen Daten erhalten wir die folgende Skizze der Funktion f gemäß Abbildung 2.15; diese Funktion ist weder ein Polynom, noch eine rationale Funktion. (Für Polynome und rationale Funktionen kommt ein Verhalten wie in der Umgebung von 3 nicht vor! Diese Aussage möchten wir an dieser Stelle nicht vertiefen!)

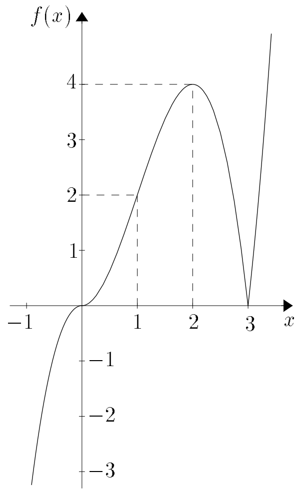

Abbildung 2.15.
Skizze der Funktion f,
$f(x) = x|x^2 - 3x|$

Aufgabe 2

Sei P eine Platte mit konstanter Dichte, die wie folgt beschrieben wird:

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 0 \le x \le 3 \;,\; 0 \le y \le 3x^2 - x^3 \right\} .$$

Bestimmen Sie den Flächeninhalt und den Schwerpunkt von P .

Lösung:
Für $x \in]0,3[$ gilt $3x^2 - x^3 = x^2(3-x) > 0$. Deshalb ist der Flächeninhalt der Platte P :

$$\int_0^3 (3x^2 - x^3)dx = \left(x^3 - \frac{x^4}{4} \right) \Big|_0^3 = 27 - \frac{81}{4} = \frac{27}{4} .$$

Die Koordinaten x_S und y_S des Schwerpunktes S von P werden berechnet mittels

$$x_S = \frac{\int_0^3 x(3x^2 - x^3)dx}{\int_0^3 (3x^2 - x^3)dx} \quad \text{und} \quad y_S = \frac{\frac{1}{2}\int_0^3 (3x^2 - x^3)^2 dx}{\int_0^3 (3x^2 - x^3)dx} .$$

Es gilt

$$\int_0^3 x(3x^2 - x^3)dx = \left(\frac{3}{4}x^4 - \frac{1}{5}x^5\right)\Big|_0^3 = 243\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) = \frac{243}{20},$$

$$\int_0^3 (3x^2 - x^3)^2 dx = \left(\frac{9}{5}x^5 - x^6 + \frac{x^7}{7}\right)\Big|_0^3 = \frac{729}{35}$$

und damit $x_S = \frac{243}{20} : \frac{27}{4} = \frac{9}{5}$, $y_S = (\frac{1}{2} \cdot \frac{729}{35}) : \frac{27}{4} = \frac{54}{35}$.

Aufgabe 3

Seien $a < b$ reelle Zahlen.

a) Berechnen Sie das Integral $\int_a^b \frac{4-x^2}{(x^2+1)(x^2+16)}dx$.

b) Zeigen Sie, dass $\int_0^\infty \frac{4-x^2}{(x^2+1)(x^2+16)}dx$ existiert.

c) Berechnen Sie das uneigentliche Integral aus b).

Lösung:
a) Wie immer für solche rationalen Funktionen führt man eine Partialbruchzerlegung durch. Der Ansatz $\frac{4-x^2}{(x^2+1)(x^2+16)} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{x^2+16}$ führt zu $4 - x^2 = 16B + D + (16A + C)x + (B + D)x^2 + (A + C)x^3$ und damit zu $A + C = 0$, $16A + C = 0$ sowie zu $16B + D = 4$, $B + D = -1$.
Die Lösung des ersten Systems ist die triviale Lösung $A = C = 0$; dagegen hat das zweite System die Lösung $B = \frac{1}{3}$, $D = -\frac{4}{3}$. Deshalb hat man

$$\frac{4 - x^2}{(x^2 + 1)(x^2 + 16)} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x^2 + 1} - \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{x^2 + 16}.$$

Da $[\arctan(cx)]' = \frac{c}{c^2x^2+1}$ gilt, ist $\frac{1}{4}\arctan(\frac{x}{4})$ eine Stammfunktion für $\frac{1}{x^2+16}$ und $\arctan x$ eine Stammfunktion für $\frac{1}{x^2+1}$. Man hat also

$$\int_a^b \frac{4 - x^2}{(x^2 + 1)(x^2 + 16)}dx = \frac{1}{3}\left[\arctan b - \arctan a - \arctan\frac{b}{4} + \arctan\frac{a}{4}\right].$$

b) Wegen $\frac{|4-x^2|}{(x^2+1)(x^2+16)} \leq \frac{4+x^2}{(x^2+1)(x^2+16)} < \frac{1}{x^2+1}$ für $x \in \mathrm{IR}$ und da $\int_0^\infty \frac{1}{x^2+1}dx = \frac{\pi}{2}$ gilt, ist nach dem Majorantenkriterium die rationale Funktion $\frac{4-x^2}{(x^2+1)(x^2+16)}$ uneigentlich integrierbar auf $[0, \infty[$.

c) $\int_0^\infty \frac{4-x^2}{(x^2+1)(x^2+16)}dx = \lim_{b\to+\infty} \int_0^b \frac{4-x^2}{(x^2+1)(x^2+16)}dx = 0$, weil:

$$\lim_{b\to\infty} \tfrac{1}{3}[\arctan b - \arctan 0 - \arctan(\tfrac{b}{4}) + \arctan 0] = \tfrac{1}{3}(\tfrac{\pi}{2} - 0 - \tfrac{\pi}{2} + 0) = 0 \ .$$

Aufgabe 4

Bestimmen Sie die Eigenwerte und dazu jeweils einen Eigenvektor für die Matrix

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 7 \\ 0 & 5 & 0 \\ 7 & 0 & 3 \end{pmatrix} \ .$$

Lösung:

Die Matrix $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 7 \\ 0 & 5 & 0 \\ 7 & 0 & 3 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-\lambda & 0 & 7 \\ 0 & 5-\lambda & 0 \\ 7 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix}$ hat die Determinante $(3-\lambda)(5-\lambda)(3-\lambda) - 49(5-\lambda) = (5-\lambda)[(\lambda-3)^2 - 7^2] = (5-\lambda)(\lambda-3-7)(\lambda-3+7) = (5-\lambda)(\lambda-10)(\lambda+4)$. Die Eigenwerte der Matrix sind also $5, 10$ und -4. Ein Eigenvektor zum Eigenwert λ ist eine nichttriviale Lösung von

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 7 \\ 0 & 5 & 0 \\ 7 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \ , \quad \text{d.h. von} \quad \begin{aligned} &(3-\lambda)x_1 + 7x_3 = 0 \\ &(5-\lambda)x_2 = 0 \\ &7x_1 + (3-\lambda)x_3 = 0 \ . \end{aligned}$$

Für $\lambda = 5$ erhält das lineare Gleichungssystem die Form $-2x_1 + 7x_3 = 0$, $7x_1 - 2x_3 = 0$, was zu $x_1 = x_3 = 0$ führt. Damit ist $x_1 = 0,\ x_2 = 1,\ x_3 = 0$ eine nichttriviale Lösung des Systems.
Für $\lambda = 10$ hat das System die Gestalt $-7x_1 + 7x_3 = 0,\ -5x_2 = 0$; $x_1 = 1$, $x_2 = 0,\ x_3 = 1$ ist eine nichttriviale Lösung dafür.
Schließlich bekommt man für $\lambda = -4$ das System $7x_1 + 7x_3 = 0,\ -9x_2 = 0$; eine nichttriviale Lösung ist nun $x_1 = 1,\ x_2 = 0,\ x_3 = -1$.
Damit sind $(0,1,0)^T, (1,0,1)^T$ und $(1,0,-1)^T$ Eigenvektoren der angegebenen Matrix zu den Eigenvektoren $5, 10$, bzw. -4 .

Aufgabe 5

Lösen Sie die folgenden Anfangswertprobleme:

a) $\quad y'(x) + y(x) \ln x = x^{-x} \ , \ y(1) = 1$.
b) $\quad 2y'(x) - y(x) \ln x + y(x)^3 x^{-x} = 0 \ , \ y(1) = 1$.

Lösung:
a) Setzt man $p(x) := \ln x \ , \ f(x) := x^{-x} \ , \ x_0 = 1$ und $y_0 = 1$ in die Formel

$$y(x) = \exp\left(-\int\limits_{x_0}^{x} p(t)dt\right) \cdot \left[\int\limits_{x_0}^{x} f(t)\exp\left(\int\limits_{x_0}^{t} p(\tau)d\tau\right)dt + y_0\right] ,$$

ein, so erhält man diejenige Lösung der gegebenen inhomogenen linearen Differenzialgleichung, welche der Anfangsbedingung genügt. Man erhält durch partielle Integration

$$\int\limits_{1}^{x} p(t)dt = \int\limits_{1}^{x} \ln t dt = t\ln t \Big|_{1}^{x} - \int\limits_{1}^{x} t \cdot \frac{1}{t}dt = 1 - x + x\ln x .$$

Daraus folgt

$$\int\limits_{1}^{x} f(t)\exp\left(\int\limits_{1}^{t} p(\tau)d\tau\right)dt = \int\limits_{1}^{x} t^{-t}\exp(1-t+t\ln t)dt = e\int\limits_{1}^{x} t^{-t}e^{-t}e^{t\ln t}dt$$

$$= e\int\limits_{1}^{x} t^{-t}e^{-t}t^{t}dt = e\int\limits_{1}^{x} e^{-t}dt = -e \cdot e^{-t} \Big|_{1}^{x} = -e(e^{-x} - e^{-1}) = 1 - e^{1-x}$$

und damit

$$y(x) = \exp(x-1-x\ln x)\cdot[1-e^{1-x}+1] = e^{x-1}\cdot x^{-x}(2-e^{1-x}) = (2e^{x-1}-1)x^{-x} .$$

Die Lösung des Anfangswertproblems lautet

$$y(x) = (2e^{x-1} - 1)x^{-x} \quad \text{für alle} \quad x > 0 .$$

Probe: Es gilt $y(1) = (2e^{1-1} - 1)1^{-1} = 1$. Wegen $y'(x) = 2e^{x-1}x^{-x} + (2e^{x-1} - 1) \cdot [-x \cdot x^{-x-1} + x^{-x} \cdot (-1) \cdot \ln x] = 2e^{x-1}x^{-x} + (1 - 2e^{x-1})x^{-x}(1 + \ln x)$ ergibt sich $y'(x) + p(x)y(x) = 2e^{x-1}x^{-x} + (1 - 2e^{x-1})x^{-x}(1 + \ln x) + (2e^{x-1} - 1)x^{-x}\ln x = x^{-x} = f(x)$.

b) Die vorliegende Differenzialgleichung ist vom Typ Bernoulli; für diese Bernoullische Differenzialgleichung machen wir den Ansatz $z(x) = y^{-2}(x)$. Es ergibt sich

$$2z'(x) - (1-3)z(x)\ln x + (1-3)x^{-x} = 0 , \quad \text{d.h.} \quad z'(x) + z(x)\ln x = x^{-x} .$$

Dies ist genau die in a) gelöste Differenzialgleichung; auch die Anfangsbedingung ist dieselbe: $z(1) = y^{-2}(1) = 1$. Da $y(1) = 1$ gelten muss, folgt aus $z(x) = y^{-2}$ nur $y(x) = \frac{1}{\sqrt{z(x)}}$. Damit lautet die gesuchte Lösung

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{(2e^{x-1} - 1)x^{-x}}} \quad \text{für alle} \quad x > 0 .$$

Aufgabe 6

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x,y) := x^2 + y^2 - 2x + 3$.

a) Berechnen Sie alle partiellen Ableitungen von f .

b) Was folgern Sie daraus über das Taylor-Polynom von f von der Ordnung $n \geq 2$ in einem festen Entwicklungspunkt?

c) Geben Sie das Taylor-Polynom von f zweiter Ordnung im Punkt $(3,-1)^T$ an.

d) Bestimmen Sie die lokalen Extrema von f .

e) Bestimmen Sie alle Punkte $(x_0,y_0)^T$ der Ebene, so dass ein $\varepsilon = \varepsilon(x_0,y_0)$ und entweder eine differenzierbare Funktion $g :]x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon[\to \mathbb{R}$ mit $g(x_0) = y_0$ und $\{(x,y)^T \mid f(x,y) = f(x_0,y_0), x_0-\varepsilon < x < x_0+\varepsilon\} = \{(x,g(x))^T \mid x_0-\varepsilon < x < x_0+\varepsilon\}$ oder wenigstens eine differenzierbare Funktion $h :]y_0-\varepsilon, y_0+\varepsilon[\to \mathbb{R}$ mit $h(y_0) = x_0$ und $\{(x,y)^T \mid f(x,y) = f(x_0,y_0), y_0-\varepsilon < y < y_0+\varepsilon\} = \{(h(y),y)^T \mid y_0-\varepsilon < y < y_0+\varepsilon\}$ existieren.

Lösung:

a) Es gilt für einen beliebigen Punkt $(x,y)^T$ aus $\mathbb{R}^2$: $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x-2$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2$.
Da jede partielle Ableitung einer konstanten Funktion die Nullfunktion ist, folgt daraus, dass alle weiteren partiellen Ableitungen $\frac{\partial^{i+j} f}{\partial x^i \partial y^j}$ für alle (i,j) mit $i+j \geq 3$ auf $\mathbb{R}^2$ verschwinden.

b) Da alle partiellen Ableitungen von f der Ordnung ≥ 3 identisch verschwinden, sind alle Taylor-Polynome von f der Ordnung ≥ 2 in einem festen Entwicklungspunkt $(x_0,y_0)^T$ gleich, d.h. sie sind von der Gestalt

$$f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0) + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)(x-x_0)^2$$
$$+ 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)(y-y_0)^2 =$$
$$= f(x_0,y_0) + (2x_0-2) + (2y_0)(y-y_0) + 2(x-x_0)^2 + 2(y-y_0)^2 .$$

c) Für $(x_0,y_0)^T = (3,-1)^T$ ist $f(x_0,y_0) = 7$ und damit sind alle Taylor-Polynome von f der Ordnung ≥ 2 im Entwicklungspunkt $(3,-1)^T$ gleich

$$7 + 4(x-3) - 2(y+1) + 2(x-3)^2 + 2(y+1)^2 .$$

Bemerkung:

Dieses Ergebnis kann man natürlich auch elementar erhalten; die folgende Umformung führt also zum Taylor-Polynom von f der Ordnung 2 :

$$\begin{aligned} f(x,y) &= [3+(x-3)]^2 + [-1+(y+1)]^2 - 2[3+(x-3)] + 3 \\ &= 9 + 6(x-3) + (x-3)^2 + 1 - 2(y+1) + (y+1)^2 - 6 - 2(x-3) + 3 \\ &= 7 + 4(x-3) - 2(y+1) + (x-3)^2 + (y+1)^2 \, . \end{aligned}$$

d) Aus $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x-2$ und $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y$ folgt, dass der einzige Punkt, in welchem f ein lokales Extremum haben könnte, $(1,0)^T$ ist. Da die Matrix $\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}(1,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ positiv definit ist, und $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,0) = 2 > 0$ gilt, hat f in $(1,0)^T$ ein lokales Maximum.

Bemerkung:
Das (und sogar mehr!) ergibt sich auch durch die folgende elementare Umformung: $f(x,y) = (x-1)^2 + y^2 + 2$. Hieraus sieht man, dass f in $(1,0)^T$ sogar ein absolutes Minimum hat.

e) Kurz gesagt, sollen wir alle Punkte $(x_0,y_0)^T$ der Ebene bestimmen, in welchen aus der Gleichung $f(x,y) = f(x_0,y_0)$ entweder x sich als Funktion von y oder y sich als Funktion von x in einer Umgebung von y_0 bzw. x_0 „explizitieren“ lässt.
Gilt $(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)) \neq (0,0)$, so kann man gemäß dem Satz über implizite Funktionen entweder x als Funktion von y oder y als Funktion von x „lokal“ explizitieren.
Ist $(x_0,y_0)^T$ eine Nullstelle des Gradienten von f, so hat man zu untersuchen, ob um x_0 oder um y_0 eine „Explizitierung“ möglich ist. Der einzige Punkt, der in unserem Fall in Frage kommt, ist $(1,0)^T$. $f(x,y) = f(1,0)$ führt zu $x^2 + y^2 - 2y + 3 = 2$ und damit zu $x^2 + y^2 - 2x + 1 = 0$. Die einzige Lösung der Gleichung $(x-1)^2 + y^2 = 0$ ist $x = 1,\ y = 0$. Deshalb kann man weder x als differenzierbare Funktion von y auf einem Intervall $]-\varepsilon, \varepsilon[$ noch y als differenzierbare Funktion von x auf einem Intervall $]1-\varepsilon, 1+\varepsilon[$ schreiben. Der einzige Punkt, der nicht zur gesuchten Menge gehört, ist also $(1,0)^T$.