

7 Weggrößenverfahren

7.1 Das Prinzip der virtuellen Verschiebungen als Grundlage des Weggrößenverfahrens

Zur Einführung wird das bereits in Kapitel 3 ausführlich abgeleitete Prinzip der virtuellen Verschiebungen noch einmal kurz erläutert und als Grundlage für die Berechnung ebener Tragwerke spezialisiert. Eben beanspruchte Tragwerke dienen wegen der einfacheren Schreibweise dabei nur als Beispiel, die Vorgehensweise des allgemeinen Weggrößenverfahrens darzustellen. Die Methode ist jedoch in derselben Weise auch für beliebig beanspruchte Stabtragwerke anzuwenden.

Im übrigen können wir nahtlos an das vorherige Kapitel anschließen, in dem dieses Verfahren für Tragwerke mit einem Freiheitsgrad pro Knoten auf anschaulichem Wege aufgebaut wurde.

Zunächst stellen wir in einem Schema die Differentialform des Gleichgewichts (Differentialgleichungen) der Integralform (Prinzip der virtuellen Verschiebungen als Arbeitsprinzip) gegenüber:

<i>Differentialform (Dgln.)</i>	\Leftrightarrow	<i>Integralform (Arbeitsprinzip)</i>
Gleichgewicht und stat. Randbedingungen		Prinzip der virtuellen Verschiebungen

Das Prinzip der virtuellen Verschiebungen ist im Sinne eines Arbeitsprinzips eine globale Aussage, das dem Gleichgewicht und den statischen Randbedingungen völlig äquivalent ist, wie bereits in den Kapiteln 3 und 4.1 gezeigt wurde. Als Voraussetzung gilt, dass ein kinematisch verträglicher Verschiebungszustand vorliegt, d. h., dass die kinematische Verträglichkeit und die kinematischen Randbedingungen erfüllt sind.

Prinzip der virtuellen Verschiebungen (PvV): $-(\delta W_i + \delta W_a) = 0$

Ein Spannungszustand ist im Gleichgewicht, wenn für einen beliebigen virtuellen, kinematisch verträglichen Verschiebungszustand die Summe der virtuellen Arbeiten gleich Null ist.

Als Beispiel für die innere virtuelle Arbeit betrachten wir hier eine Struktur, dessen Stäbe durch Längswirkungen und einachsige Biegung beansprucht sind. Bei Längsbeanspruchung wird eine innere virtuelle Arbeit aus Spannung mal virtueller Dehnung geleistet. In analoger Weise lässt sich die virtuelle innere Arbeit der Biegestäbe als Produkt aus Moment und virtueller Verkrümmung schreiben, vgl. auch Gl. (3-65). Dabei sind die Arbeiten über alle Stäbe (Elemente) und Knoten aufzusummieren:

$$\begin{aligned}
 -\delta W = & \sum_{\text{Elemente}} \int_x \left[\delta \varepsilon N + \delta \kappa M + \delta \gamma Q - \delta u \bar{p}_x - \delta w \bar{p}_z \right] dx \\
 & - \sum_{\text{Knoten}} \left[\delta U_{xk} \bar{P}_{xk} + \delta U_{zk} \bar{P}_{zk} + \delta \Phi_{yk} \bar{M}_{yk} \right] = 0
 \end{aligned}$$

Einsetzen des Werkstoffgesetzes und der Kinematik führt auf eine reine Weggrößenformulierung als Ausgangspunkt sowohl für die Ermittlung der Elementanteile (Steifigkeitsmatrizen und Lastvektoren) als auch für die Berechnung des Gesamtsystems. Bei Vernachlässigung der Biegeschubverzerrungen ($\gamma = 0$: $\varphi = -w'$, $\kappa = -w''$) ergibt sich mit Einschluss eingepprägter Längsdehnungen $\bar{\varepsilon}$ und eingepprägter Verkrümmungen $\bar{\kappa}$:

$$\begin{aligned}
 -\delta W = \sum_{\text{Elemente}} \int_x & [\delta u' EA (u' - \bar{\varepsilon}) + \delta w'' EI (w'' + \bar{\kappa}) - \delta u \bar{p}_x - \delta w \bar{p}_z] dx \\
 & - \sum_{\text{Knoten}} [\delta U_{Xk} \bar{P}_{Xk} + \delta U_{Zk} \bar{P}_{Zk} + \delta \Phi_{Yk} \bar{M}_k] = 0 \quad (7-1)
 \end{aligned}$$

Das Prinzip der virtuellen Verschiebungen ist in dieser Form für ebene Tragwerke geeignet. Vom Aufbau her ist es so dargestellt, dass zunächst die Anteile der virtuellen Arbeiten angegeben sind, die aus Längskraft und einachsiger Biegung resultieren und dann die äußere virtuelle Arbeit, die alle Anteile mit Lasteinwirkungen (mit Querstrich gekennzeichnet) enthält, sowohl die Streckenlasten auf den Stäben als auch die an den Knoten angreifenden Einzellasten. Es wird dann mit der Summe der Integrale über alle Stäbe und zusätzlich mit der Summe über alle Knoten die virtuelle Arbeit für das gesamte System gebildet. Wie oben erläutert, entspricht dies auch der integralen Formulierung des Gleichgewichts einschließlich der statischen Randbedingungen. Diese Äquivalenz von Differential- und Integralform wurde in Kap. 4.1 am Beispiel des Balkens ausführlich erläutert. Festzuhalten ist noch, dass in Kapitel 4 das Prinzip der virtuellen Verschiebungen generell für die Bestimmung der Steifigkeitsmatrizen und Lastvektoren der einzelnen Elemente verwendet worden ist, z.B. für den Fachwerkstab und den Biegeträger.

Denn für den Anteil eines einzelnen Elements i an der gesamten virtuellen Arbeit folgt:

$$\begin{aligned}
 -\delta W = & - \int_x [\delta u' EA (u' - \bar{\varepsilon}) + \delta w'' EI (w'' + \bar{\kappa})] dx \\
 & + \int_x (\delta u \bar{p}_x + \delta w \bar{p}_z + \delta \varphi \bar{m}_y) dx \\
 \text{mit } N = EA \varepsilon, \quad M = EI \kappa, & \quad (\text{Stoffgesetz}) \\
 \varepsilon + \bar{\varepsilon} = u', \quad \kappa + \bar{\kappa} = -w' & \quad (\text{Kinematik})
 \end{aligned}$$

Damit wird deutlich, dass das Prinzip der virtuellen Verschiebungen die allgemeine Grundlage ist, um sowohl Steifigkeitswerte und Lastanteile der Einzelstäbe numerisch zu bestimmen (Kapitel 4) als auch - wie in diesem Kapitel - eine Systemberechnung als Weggrößenverfahren durchzuführen.

7.2 Transformation von Zustandsgrößen

Im Unterschied zum lotrecht unverschieblich aufgelagerten Durchlaufträger sind bei ebenen Tragwerken (z.B. Rahmen) nicht nur die Verdrehungen unbekannt, sondern zusätzlich auch die Verschiebungen an den Knoten. Außerdem sind die Stabelemente nicht nur durchlaufend angeordnet, sondern sie können auch beliebig in der Ebene liegen. Es ist also erforderlich, die Orientierung eines beliebigen Stabes in Bezug auf ein globales Koordinatensystem zu beschreiben.

Dies wird beispielsweise in Bild 7.5 deutlich, in dem die Modellbildung eines ebenen Rahmens gezeigt ist. Die verschiedenen Stäbe haben in Bezug auf ein globales Koordinatensystem eine unterschiedliche Lage, die für ein einheitliches Bilden von Gleichgewicht (Überlagerung der Steifigkeitsmatrizen zum Gesamtsystem) zu erfassen ist.

Nachfolgend zeigen Bild 7.1 und Bild 7.2 die Kraft- und Weggrößen an den Stabenden, die einmal in Bezug auf das lokale Koordinatensystem des Stabes und zum anderen in Bezug auf das globale Koordinatensystem angeordnet sind. Dabei ist folgerichtig die Bezeichnungsweise der Kraft- und Weggrößen an den Stabenden zu unterscheiden. Für die globalen Größen der zugehörigen Spaltenmatrizen \mathbf{p} und \mathbf{v} erfolgt dies durch einen tiefgestelltes G .

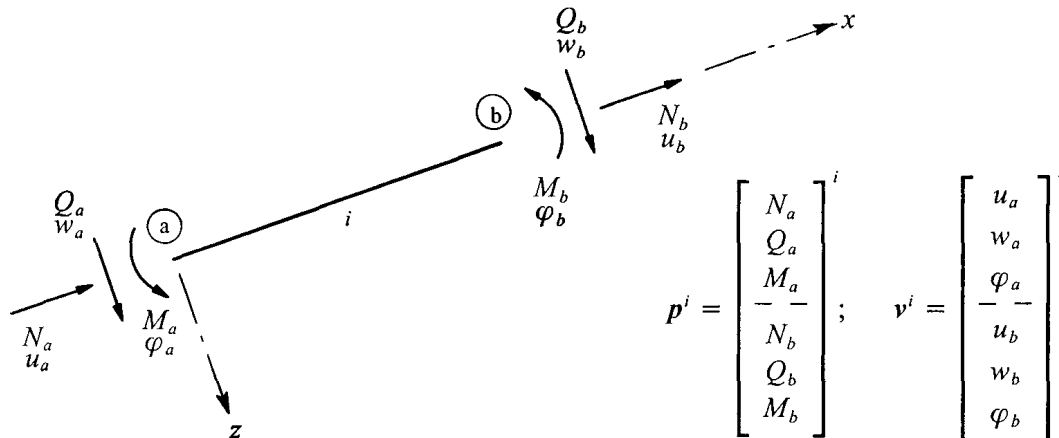


Bild 7.1 Lokale Kraft- und Weggrößen an den Stabenden (Vorzeichen-Konvention 2)

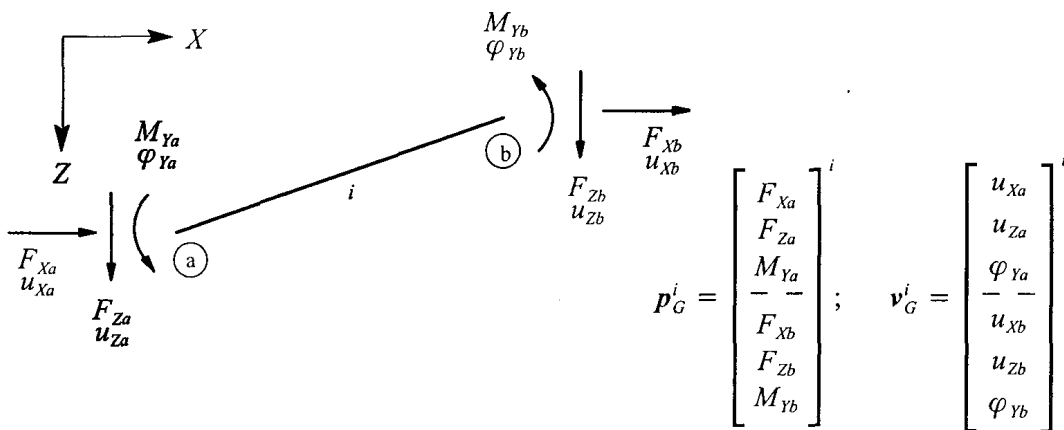


Bild 7.2 Globale Kraft- und Weggrößen an den Stabenden (Vorzeichen-Konvention 2)

Die zugehörigen Transformationsbeziehungen sind in Kap. 5.2 angegeben und in Bild 7.3 zusammengestellt. Dabei ist zu beachten, dass nur die Kraft- und Verschiebungskomponenten sowie Vektorkomponenten mit Hilfe trigonometrischer Funktionen umzurechnen sind, nicht aber die Verdrehung und das zugehörige Moment, welche die gleichen Werte behalten.

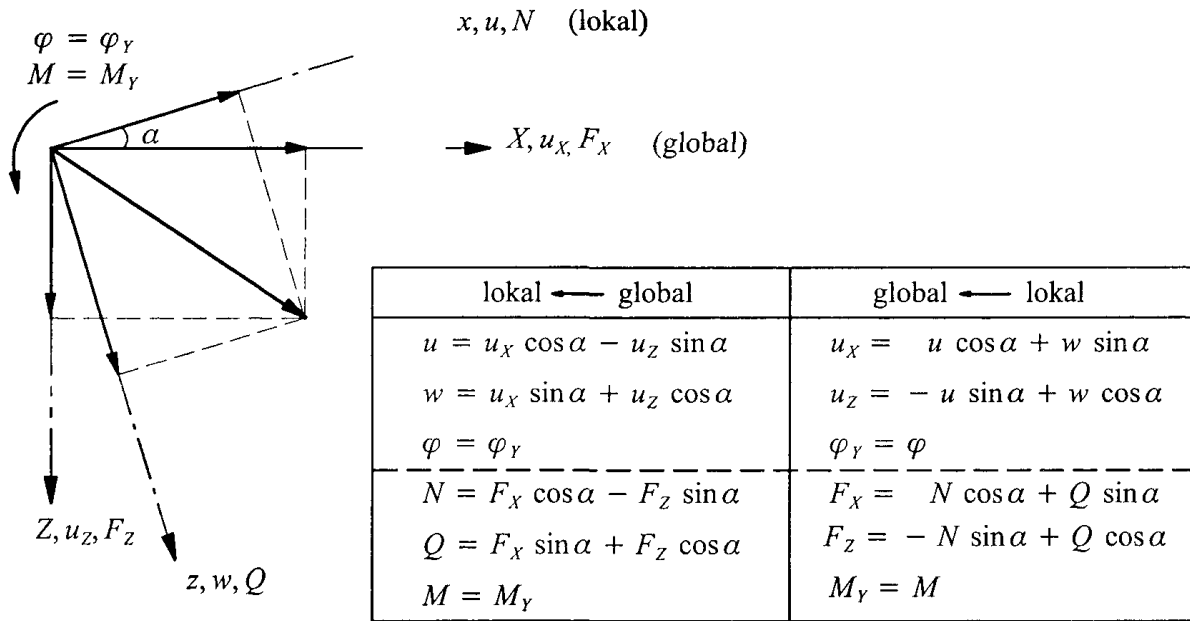


Bild 7.3 Transformationsbeziehungen

Für die Transformation der Größen bezogen auf das globale und das lokale Koordinatensystem (und umgekehrt) folgen damit in Matrixschreibweise die Beziehungen

Verschiebungsgrößen: Kraftgrößen:

$$\mathbf{v}^i = \mathbf{T}^i \mathbf{v}_G^i \qquad \mathbf{p}^i = \mathbf{T}^i \mathbf{p}_G^i \qquad (7-2)$$

$$\mathbf{v}_G^i = \mathbf{T}^{iT} \mathbf{v}^i \qquad \mathbf{p}_G^i = \mathbf{T}^{iT} \mathbf{p}^i \qquad (7-3)$$

mit der Transformationsmatrix \mathbf{T} und $\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{T}^T$ (orthogonale Transformation)

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (7-4)$$

Als Folge der Transformation in die globale Richtung wird sich die Steifigkeitsmatrix \mathbf{k} und die Lastspalte \mathbf{p}^{i0} eines Stabelements entsprechend ändern, wie aus der nachfolgenden Umformung ersichtlich ist, bei der die lokalen und globalen Größen mit Hilfe von (7-3) ersetzt werden:

$$\mathbf{p}^i = \mathbf{k}^i \mathbf{v}^i + \mathbf{p}^{i0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{p}_G^i = \mathbf{T}^{iT} \mathbf{p}^i = \mathbf{T}^{iT} \mathbf{k}^i \mathbf{T}^i \mathbf{v}_G^i + \mathbf{T}^{iT} \mathbf{p}^{i0}$$

Daraus lassen sich die Transformationsbeziehungen unmittelbar ablesen :

Elementsteifigkeitsmatrix: \mathbf{k}^i (lokal) $\mathbf{k}_G^i = \mathbf{T}^{iT} \mathbf{k}^i \mathbf{T}^i$ (global) (7-5)

Lastanteile: \mathbf{p}^{i0} (lokal) $\mathbf{p}_G^{i0} = \mathbf{T}^{iT} \mathbf{p}^{i0}$ (global) (7-6)

Die vier Untermatrizen von \mathbf{k}^i können auch jeweils für sich transformiert werden. Diese Art der Umformung ist jedoch nur für die Handrechnung in dieser Form zweckmäßig. In Rechenprogrammen wird die Elementsteifigkeitsmatrix \mathbf{k}_G^i im globalen Koordinatensystem in allgemeiner Weise durch Matrizenmultiplikation in der Form $\mathbf{k}_G^i = \mathbf{T}^{iT} \mathbf{k}^i \mathbf{T}^i$ bestimmt.

7.3 Systemberechnung durch Bilden von Knotengleichgewicht

7.3.1 Einführung

Zur Berechnung der unbekanntenen Knotenverschiebungen und Knotenverdrehungen ist an jedem Knoten das Gleichgewicht der Kräfte bzw. Momente in Richtung der globalen Achsen aufzustellen, die nicht durch starre Festhaltungen behindert sind. Diese Knotenverschiebungen ('*Freiheitsgrade*') werden fortlaufend durchnummeriert; ihre Nummer bezeichnet damit gleichzeitig die jeweilige Gleichgewichtsbedingung (Zeile des Gleichungssystems bzw. der System-Steifigkeitsmatrix und System-Lastspalte).

Die Gleichgewichtsbedingungen können durch Rundschnitte um alle Knoten oder mit Hilfe des Prinzips der virtuellen Verschiebungen erfaßt werden. Hierzu wird als Information benötigt, welche Stabend-Schnittgrößen zu welchen Gleichgewichtsbedingungen einen Beitrag liefern. Diese Zuordnung kann entweder direkt aus der Systemgeometrie durch Zuordnung der einzelnen Elemente zu den angrenzenden Knoten gewonnen werden oder allgemeiner durch formale Einführung einer sog. *Inzidenztafel Stab - Knoten*. Der zweite Weg wird in Kap. 7.5 gezeigt.

Als Beispiel für die Aufstellung des Gleichungssystems des Weggrößenverfahrens durch direktes Bilden des Gleichgewichts an den Knoten wird hier die Gleichgewichtsbedingung $\sum F_z = 0$ für die vertikale Verschiebung U_z im Knoten 2 aufgestellt (bezogen auf globale Koordinaten). Man bildet die Summe der vertikalen Kräfte über alle am Knoten 2 angeschlossenen Elemente, ergänzt durch eine direkt am Knoten 2 angreifende vertikale Einzellast \bar{P}_z^* :

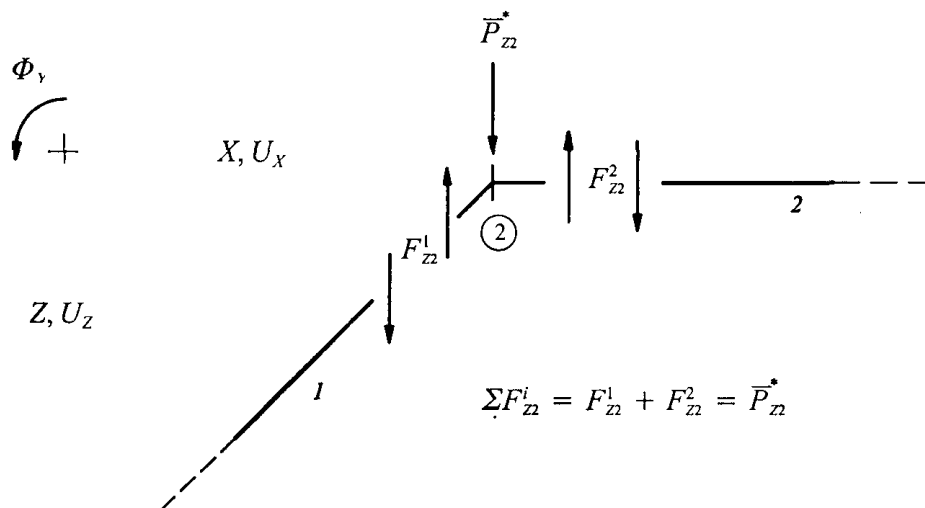


Bild 7.4 Gleichgewicht der vertikalen Kräfte F_z am Knoten 2

Analog sind alle Gleichgewichtsbedingungen aufzustellen, die man den übrigen unbekanntenen Verschiebungen und Verdrehungen an diesem Knoten und allen anderen Knoten des Systems zuordnet. Für die Kraftgrößen p_G^i an den Element- bzw. Stabenden werden die Elementsteifigkeitsmatrix k_G^i , die Verschiebungen v_G^i und die Volleinspanngrößen p_G^0 eingesetzt; dies erfolgt nach der Transformation in die *globalen* Koordinatenrichtungen (in *Vorzeichen-Konvention 2*) gemäß Gl. (7-5) und (7-6).

Fasst man die unbekanntes Knotenverschiebungen (und -verdrehungen) in der Spaltenmatrix V zusammen, so lässt sich das Bilden von Gleichgewicht über alle Freiheitsgrade als Überlagerung der Element-Steifigkeitsmatrizen zur Gesamtsteifigkeitsmatrix des Systems K auffassen. Entsprechend erhalten wir mit

$$\bar{P} = \bar{P}^* - \bar{P}^0 \quad (7-7)$$

die Summe der Lastanteile aus den Elementlasten \bar{P}^0 und den direkten Knotenlasten \bar{P}^* . Das vollständige algebraische Gleichungssystem des Weggrößenverfahrens ergibt sich zu:

$$\boxed{K V = \bar{P}} \quad (7-8)$$

7.3.2 Systemberechnung eines ebenen Rahmens

Die oben skizzierte Vorgehensweise, die durch anschauliches Bilden von Gleichgewicht für alle Freiheitsgrade gekennzeichnet ist, wird in diesem Kapitel anhand eines ebenen Rahmens ausführlich erläutert. Dabei zeigt sich, dass der in Kapitel 6 besprochene Lösungsweg völlig analog angewendet werden kann. Statt einem Freiheitsgrad pro Knoten sind jeweils drei Freiheitsgrade anzusetzen (zwei Verschiebungen und eine Verdrehung).

Modellbildung (Idealisierung):

Im *ersten Schritt* wird die Modellbildung behandelt, bei der das geplante oder vorhandene Tragwerk durch ein statisches System ersetzt wird. Dabei wird am Demonstrationsbeispiel angenommen, dass der dafür gewählte Rahmen durch entsprechend ausgebildete Fundamente fest eingespannt ist und dass Stiele und Riegel jeweils konstante Querschnitte aufweisen.

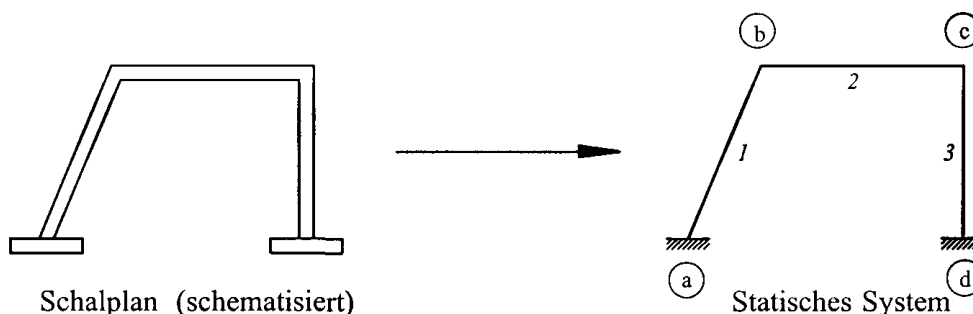
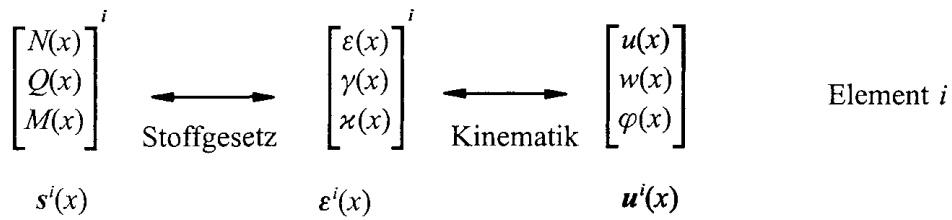


Bild 7.5 Zur Modellbildung

Außerdem sind sowohl die Abmessungen, Querschnittswerte, Materialkenngrößen und die Einwirkungen als auch die Elemententeilung festzulegen. Das hier betrachtete System besteht aus drei Elementen und vier Knoten; gesucht ist der Verlauf der Zustandsgrößen über die Elemente, deren Werte an den Knoten und an den Orten mit externen Werten.

Die Schnittgrößen eines Elements i sind in der Spaltenmatrix s^i aufgelistet, ebenso die zugeordneten Verzerrungen in ε^i und die Verschiebungen bzw. die Verdrehung in v^i . Diese Zustandsgrößen haben i. A. über das Element einen veränderlichen Verlauf:

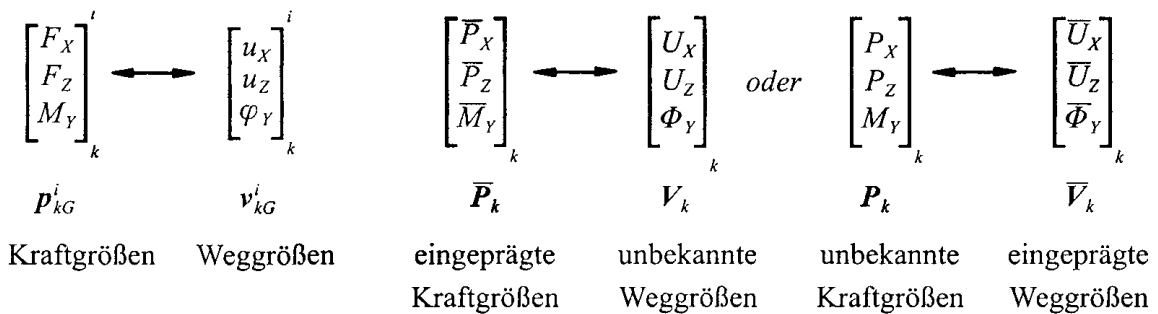


Wahl der Unbekannten und Diskretisierung:

Als Unbekannte der Berechnung werden in *Schritt 2* die Weggrößen (Verschiebungen und Verdrehungen) der Knoten gewählt. Um den kontinuierlichen Verlauf der Zustandsgrößen über das Element mit den diskreten Knotengrößen in Verbindung zu bringen, führt man die Randgrößen der Elemente ein. Sie werden in den Spaltenmatrizen p_{kG}^i für die Kraftgrößen und v_{kG}^i für die Weggrößen am Elementrand zusammengefasst, vgl. Kap. 4.2.1. Die entsprechenden unbekanntenen Größen am Knoten werden mit P_k bzw. V_k , die Einwirkungen mit \bar{P}_k bzw. \bar{V}_k bezeichnet:

Elementrand:

Knoten:



Am Beispiel eines Knotens sind die zugehörigen Kraftgrößen der benachbarten Stabenden und die Knotenlasten in Bild 7.6 dargestellt:

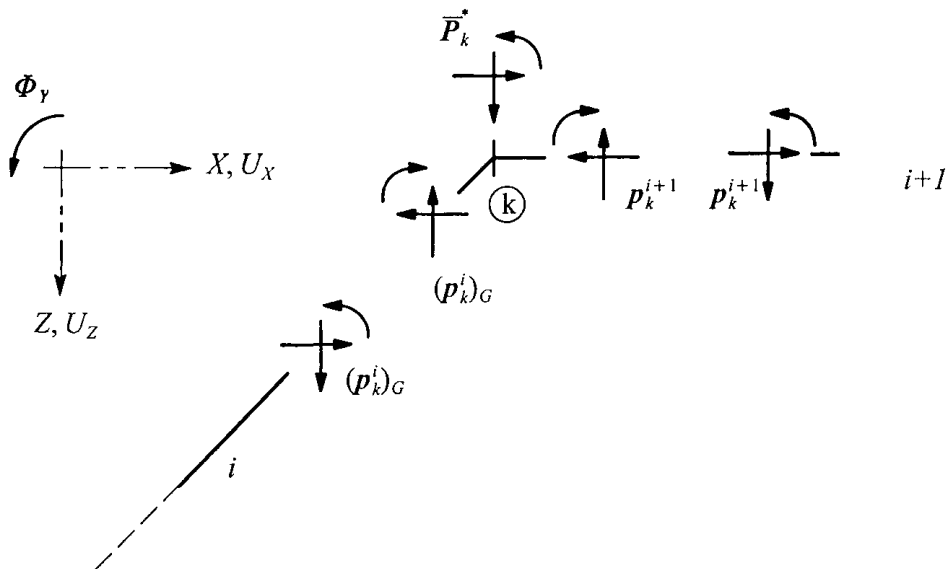
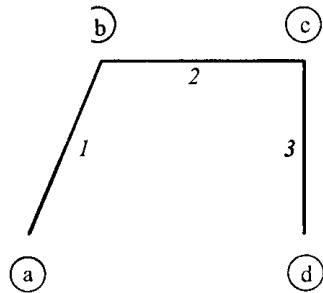


Bild 7.6 Weg- und Kraftgrößen am Knoten k, bezogen auf das globale Koordinatensystem

Elementmatrizen:

Im *dritten Schritt* werden die Elementeigenschaften der Stäbe gemäß Kapitel 4 durch die Beziehung zwischen den Kraftgrößen und den Weggrößen an den Elementrändern angegeben, vgl. Bild 7.7. Diese Koeffizienten sind ein Maß für die Steifigkeit des betreffenden Elements. Sie geben an, welche Kräfte für eine Einheitsverschiebung des Elementrandes erforderlich sind. In Matrizenanordnung spricht man von der Elementsteifigkeitsmatrix k^i . Diese ist im allgemeinen zunächst auf ein lokales Elementkoordinatensystem bezogen (*Schritt 3a*), z.B. für Stab 1:

$$\begin{bmatrix} p_a \\ p_b \end{bmatrix}^i = \begin{bmatrix} k_{aa} & k_{ab} \\ k_{ba} & k_{bb} \end{bmatrix}^i \begin{bmatrix} v_a \\ v_b \end{bmatrix}^i + \begin{bmatrix} p_a^0 \\ p_b^0 \end{bmatrix}^i \quad p_b^i = \begin{bmatrix} N \\ Q \\ M \end{bmatrix}_b^i, \quad v_b^i = \begin{bmatrix} u \\ w \\ \varphi \end{bmatrix}_b^i$$


$p^i = k^i v^i + p^{i0}$

(7-9)

lokale Elementsteifigkeiten k^i
und Volleinspannschnittgrößen p^{i0}

Bild 7.7 Elementeigenschaften

Transformation am Element:

Für den Zusammenbau zum System ist mit *Schritt 3b* noch die Transformation vom *lokalen* Koordinatensystem des Elements auf ein einheitliches Gesamtkoordinatensystem - das *globale* Koordinatensystem - vorzunehmen, vgl. Kapitel 7.2 .

Im globalen Koordinatensystem lautet die grundlegende Beziehung des Weggrößenverfahrens für ein ebenes Rahmenelement i :

$$\begin{bmatrix} F_X \\ F_Z \\ M_Y \end{bmatrix}_a^i = \begin{bmatrix} (k_{aa})_G & (k_{ab})_G \\ \text{---} & \text{---} \\ (k_{ba})_G & (k_{bb})_G \end{bmatrix}^i \begin{bmatrix} u_X \\ u_Z \\ \varphi_Y \end{bmatrix}_a^i + \begin{bmatrix} F_X^0 \\ F_Z^0 \\ M_Y^0 \end{bmatrix}_a^i$$

$$\begin{bmatrix} F_X \\ F_Z \\ M_Y \end{bmatrix}_b^i = \begin{bmatrix} F_X^0 \\ F_Z^0 \\ M_Y^0 \end{bmatrix}_b^i$$

$$p_G^i = k_G^i v_G^i + p_G^{i0} \quad (7-10)$$

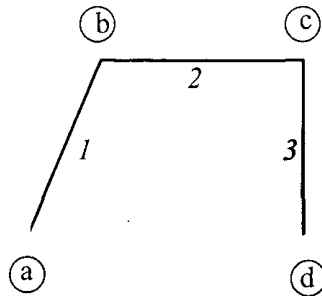
Die Elementsteifigkeitsmatrizen k_G^i (im *globalen* Koordinatensystem) und k^i (im *lokalen* Koordinatensystem) sind symmetrisch. Sie sind singulär, wenn die Randbedingungen noch nicht eingearbeitet sind.

Aufbau des Gleichungssystems:

In der weiteren Systemberechnung des Weggrößenverfahrens bildet man in *Schritt 4* das Gleichgewicht der Kraftgrößen im Knoten. Am Beispiel des Rahmens ist an allen Knoten (vgl. Bild 7.8) die Summe der Kraftgrößen an den Rändern aller benachbarten Elemente gleich den dort angreifenden Knotenlasten zu setzen. Außerdem sind für jeden Knoten die Stabend-Verschiebungen benachbarter Stäbe mit den Knoten-Verschiebungen gleichzusetzen (kinematische Verträglichkeit) wie dies in Bild 7.8 ebenfalls angegeben ist:

Gleichgewicht an den Knoten

$$\begin{aligned} (p_a^1)_G &= \bar{P}_a^* \\ (p_b^1)_G + (p_b^2)_G &= \bar{P}_b^* \\ (p_c^2)_G + (p_c^3)_G &= \bar{P}_c^* \\ (p_d^3)_G &= \bar{P}_d^* \end{aligned}$$



Kinematische Verträglichkeit an den Knoten:

$$\begin{aligned} (v_a^1)_G &= V_a \\ (v_b^1)_G &= (v_b^2)_G = V_b \\ (v_c^2)_G &= (v_c^3)_G = V_c \\ (v_d^3)_G &= V_d \end{aligned}$$

Bild 7.8 Gleichgewicht und kinematische Verträglichkeit an den Knoten

Die Kraftgrößen p_G der Elementränder werden dann mit Hilfe der Steifigkeitskoeffizienten k_G durch deren korrespondierende Weggrößen v_G ersetzt. Weiterhin verbindet man über die kinematische Verträglichkeit in den Knoten die Randgrößen $(v_k^i)_G$ der Elemente mit den Knotenweggrößen V_k , den Unbekannten des Gleichungssystems. Dies wird für die Knoten *a* und *b* dargestellt, wobei hier der an allen Größen anzuschreibende Index $(\cdot)_G$ zur Schreibvereinfachung weggelassen ist:

$$\begin{aligned} p_a^1 &= k_{aa}^1 v_a^1 + k_{ab}^1 v_b^1 + p_a^{10} = k_{aa}^1 V_a + k_{ab}^1 V_b + p_a^{10} = P_a^* \\ p_b^1 + p_b^2 &= k_{ba}^1 v_a^1 + k_{bb}^1 v_b^1 + p_b^{10} + k_{bb}^2 v_b^2 + k_{bc}^2 v_c^2 + p_b^{20} \\ &= k_{ba}^1 V_a + k_{bb}^1 V_b + p_b^{10} + k_{bb}^2 V_b + k_{bc}^2 V_c + p_b^{20} = P_b^* \end{aligned}$$

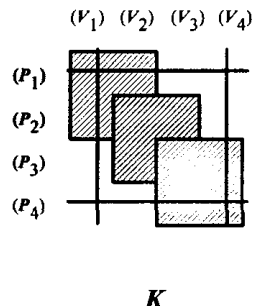
Das Knotengleichgewicht stellt sich jetzt als eine Überlagerung der Steifigkeiten benachbarter Elemente zur Gesamtsteifigkeitsmatrix K (Systemmatrix) dar. An ihrer Struktur ist deutlich die Koppung der Elementmatrizen benachbarter Stäbe am jeweiligen Knoten zu erkennen:

$$\begin{bmatrix} k_G^1 & & & \\ & k_G^1 & & \\ & & k_G^2 & \\ & & & k_G^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_a \\ V_b \\ V_c \\ V_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{P}_a^* \\ \bar{P}_b^* \\ \bar{P}_c^* \\ \bar{P}_d^* \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} (p_a^{10})_G \\ (p_b^{10} + p_b^{20})_G \\ (p_c^{20} + p_c^{30})_G \\ (p_d^{30})_G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{P}_a \\ \bar{P}_b \\ \bar{P}_c \\ \bar{P}_d \end{bmatrix}$$

$K \quad \quad \quad V \quad = \quad P^* \quad - \quad P^0 \quad = \quad \bar{P}$

Bild 7.9 Gleichungssystem ohne Berücksichtigung der Randbedingungen

Es ergibt sich das in Bild 7.9 dargestellte singuläre Gleichungssystem, das erst durch Einsetzen der Randbedingungen regulär wird und nach den Unbekannten V_k aufgelöst werden kann. Mit den Randbedingungen des gewählten Beispiels $V_1 = V_4 = 0$ werden die entsprechenden Zeilen und Spalten gestrichen und es verbleibt das Gleichungssystem:



$$\begin{array}{c}
 (P_1) \\
 (P_2) \\
 (P_3) \\
 (P_4)
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 (V_1) \\
 (V_2) \\
 (V_3) \\
 (V_4)
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \text{---} \\
 \text{---} \\
 \text{---} \\
 \text{---}
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \text{---} \\
 \text{---} \\
 \text{---} \\
 \text{---}
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \text{---} \\
 \text{---} \\
 \text{---} \\
 \text{---}
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \text{---} \\
 \text{---} \\
 \text{---} \\
 \text{---}
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \text{---} \\
 \text{---} \\
 \text{---} \\
 \text{---}
 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix}
 V_1 \\
 V_2 \\
 V_3 \\
 V_4
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 \bar{P}_1 \\
 \bar{P}_2 \\
 \bar{P}_3 \\
 \bar{P}_4
 \end{bmatrix}
 \Rightarrow
 V = \begin{bmatrix}
 V_2 \\
 V_3
 \end{bmatrix}
 = \begin{bmatrix}
 U_{X2} \\
 U_{Z2} \\
 \Phi_{Y2} \\
 U_{X3} \\
 U_{Z3} \\
 \Phi_{Y3}
 \end{bmatrix}$$

$$K \quad V = \bar{P}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix}
 (k_{22}^1)_G + (k_{22}^2)_G & (k_{23}^2)_G \\
 (k_{32}^2)_G & (k_{33}^2)_G + (k_{33}^3)_G
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 V_2 \\
 V_3
 \end{bmatrix}
 = \begin{bmatrix}
 \bar{P}_2 \\
 \bar{P}_3
 \end{bmatrix}$$

Bild 7.10 Gleichungssystem mit Berücksichtigung der Randbedingungen

Nach der Lösung des Gleichungssystems in *Schritt 5* schließt sich noch eine Nachlaufrechnung an, in der - wie bereits in Kapitel 6 gezeigt - in *Schritt 6* zunächst die Stabend-Verschiebungen über die Knoten-Verträglichkeit aus den errechneten Knoten-Verschiebungen bestimmt werden. Die für die Bemessung erforderlichen Schnittgrößen lassen sich dann in *Schritt 7* mit Hilfe der Stabend-Kraftgrößen $p^i = k^i v^i + p^{i0}$ (Vorzeichen-Konvention 2) ermitteln. Bevor der Verlauf der Schnittgrößen im Feld ergänzt wird, hat eine Umrechnung von Vorzeichen-Konvention 2 in Vorzeichen-Konvention 1 zu erfolgen.

Zusammenfassend kann man feststellen, dass der in der Übersicht in Kapitel 6.2.3 für das Drehwinkelverfahren dargestellte Lösungsweg entsprechend ergänzt in gleicher Weise für das allgemeine Weggrößenverfahren gilt wie dies aus der nachstehenden Übersicht- Kap. 7.3.3 deutlich wird.