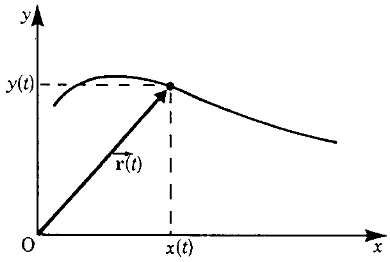
16 Parameterdarstellung, Linienintegral

16.1 Parameterdarstellung von Kurven

Die Bewegung eines Massenpunktes m wird durch die Angabe seines Ortsvektors beschrieben.

Wir betrachten zunächst Bewegungen in der x-y-Ebene. Die Spitze des Ortsvektors $\vec{r}(t)$ tastet die Bahnkurve ab, die der Massenpunkt durchläuft. Seine Koordinaten $x(t)$ und $(t)y$ sind Funktionen der Zeit.



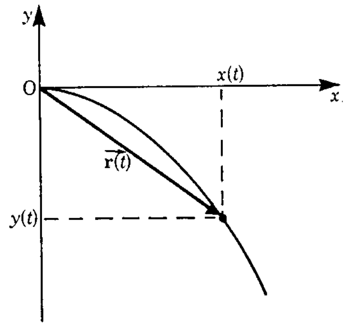
1. Beispiel: *Der waagerechte Wurf.*

Beim waagerechten Wurf werde ein Körper mit der Anfangsgeschwindigkeit v_{ox} in Richtung der x-Achse geworfen.

Die gleichförmige Bewegung in x-Richtung und der freie Fall in y-Richtung überlagern sich ungestört. Die x- und y-Koordinaten der Bewegung sind also gegeben durch

$$x(t) = v_{ox} \cdot t$$

$$y(t) = -\frac{g}{2} t^2$$



Der Ortsvektor ist hier

$$\vec{r}(t) = \left(v_{ox} \cdot t, \quad -\frac{g}{2}t^2\right)$$

Die x- und y- Koordinaten hängen von der Variablen „Zeit" ab. Man sagt allgemein, der Vektor $r(t)$ hängt von dem Parameter t ab.

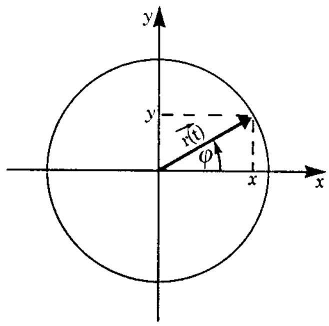
Eine Kurve in der x-y-Ebene war bisher durch eine Funktion $y = f(x)$ gegeben. Neu ist jetzt, daß die beiden Variablen x und y als Funktionen einer dritten Größe ausgedrückt werden. Eine solche Darstellung nennt man die *Parameterdarstellung* der Kurve. Die Parameterdarstellung ist ein wichtiges Hilfsmittel bei der Beschreibung von Ortsveränderungen. Die Gleichungen oben sind die Parameterdarstellung der Bahnkurve des waagerechten Wurfes. Man kann die Parameterdarstellung in die vertraute Form der Bahnkurve überführen, indem der Parameter eliminiert wird.

Wenn wir die Gleichung $x = v_{ox}\, t$ nach t auflösen, quadrieren und in die Gleichung $y = -\frac{g}{2}\, t^2$ einsetzen, erhalten wir den Ausdruck

$$y = -\frac{g}{2v_{ox}^2} x^2$$

Dieser Ausdruck ist die Funktion nur einer Veränderlichen. Er stellt eine Parabel dar, die sogenannte Wurfparabel.

2. Beispiel: *Rotation auf einer Kreisbahn.*
Der Ort eines Punktes kann neben der Angabe der kartesischen Koordinaten x und y auch durch die Angabe der Polarkoordinaten r undφ beschrieben werden.



Die beiden Darstellungen sind durch folgende Transformationsgleichungen miteinander verknüpft:

$$x = r\cos\varphi \qquad 0 \le \varphi < 2\pi$$
$$y = r\sin\varphi$$

Bei konstantem r sind die x- und die y-Koordinaten Funktionen einer dritten Größe, des Winkels φ. Wir haben eine Parameterdarstellung mit φ als Parameter.

Der Ortsvektor des Kreises ist $\vec{r}(\varphi) = (r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)$. Wir können den Parameter φ eliminieren.

$$x^2 + y^2 = r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi = r^2$$

Die Gleichung $x^2 + y^2 = r^2$ stellt einen Kreis dar.

Sonderfall: *Kreisbewegung mit konstanter Winkelgeschwindigkeit.*
Rotiert der Punkt gleichförmig auf der Kreisbahn, dann wächst der Winkel φ linear mit der Zeit an:

$$\varphi = \omega \cdot t$$

Die Größe ω wird bekanntlich Winkelgeschwindigkeit genannt. ω ist analog zur Geschwindigkeit bei der geradlinigen Bewegung definiert: $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$. Die Einheit der Winkelgeschwindigkeit ist 1/Sekunde.

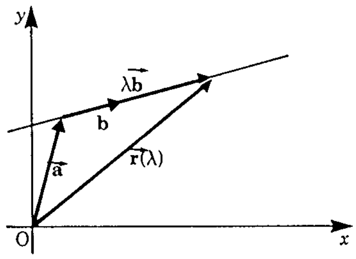
Die Parameterdarstellung der Kreisbewegung lautet jetzt:

$$x\,(t) = r\cos\omega t \qquad\qquad y\,(t) = r\sin\omega t$$

Der Ortsvektor, der die Kreisbahn abtastet, ist:

$\vec{r}(t) = (rcos\omega t, r\sin\omega t)$

3. Beispiel: *Parameterdarstellung der Geradengleichung.*
Gegeben sei eine Gerade in der Ebene.
$\vec{b}$ sei ein Vektor, der in Richtung der Geraden zeigt und $\vec{a}$ ein konstanter Vektor, der vom Koordinatenursprung zu einem beliebigen Punkt der Geraden reicht. Der Ortsvektor $\vec{r}(t) = \vec{a} + \vec{b} \cdot t$ tastet die gesamte Gerade ab, wenn der Parameter t den Bereich der reellen Zahlen durchläuft. Für die Koordinaten x und y gilt



$$x(t) = a_x + b_x t \qquad y(t) = a_y + b_y t$$

Bisher hatten wir nur Kurven in der Ebene betrachtet. Die Parameterdarstellung ist besonders hilfreich bei der Darstellung von Kurven im dreidimensionalen Raum.

4. Beispiel: *Gerade im Raum.*
Das Beispiel 3 läßt sich leicht auf den dreidimensionalen Fall erweitern. Die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{r}(t)$ sind jetzt aber räumliche Vektoren. Die Parameterdarstellung ist

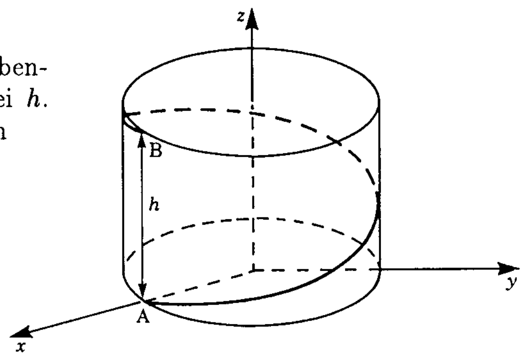
$$x(t) = a_x + b_x t \qquad y(t) = a_y + b_y t \qquad z(t) = a_z + b_z t$$

5. Beispiel: *Schraubenlinie*
Ein Punkt bewege sich auf einer Schraubenlinie. Der Höhengewinn pro Umlauf sei h. Die Koordinaten des Punktes sind dann

$$x(t) = r\cos t$$

$$y(t) = r\sin t$$

$$z(t) = \frac{h}{2\pi} t$$



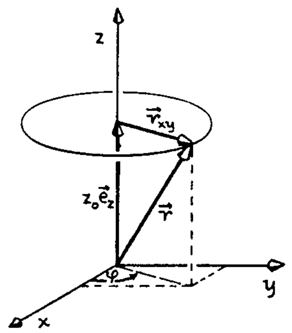
Durchläuft der Parameter t den Bereich von $t = 0$ bis $t = 2\pi$, ist ein Umlauf vollendet. Der Punkt $P = (x, y, z)$ läuft auf der Schraubenlinie von A nach B.

Der Ortsvektor der Schraubenlinie ist

$$\vec{r}(t) = \left(r\cos t, \quad r\sin t, \ \frac{h}{2\pi} t\right)$$

6. Beispiel: *Kreis im Raum* (parallel zur x-y-Ebene)
Ein Kreis mit dem Radius r liege mit dem Abstand z_0 parallel zur x-y-Ebene.
Aus der Skizze lesen wir ab

$$\vec{r} = z_0\vec{e}_z + \vec{r}_{xy}$$



Der Vektor $\vec{r}_{xy}$ hat
die z-Komponente $z_0 \cdot \vec{e}_z$,
die x-Komponente $r \cos\varphi \cdot \vec{e}_x$
die y-Komponente $r \sin\varphi \cdot \vec{e}_y$.
Der Ortsvektor $\vec{r}(\varphi)$ ist dann

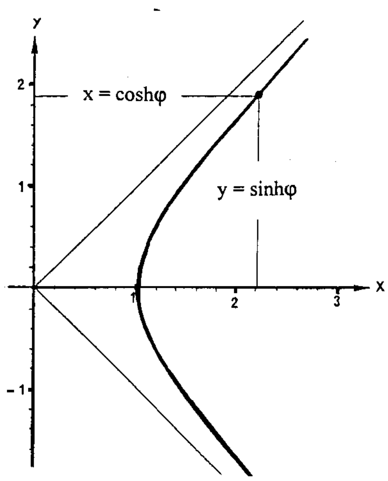
$$\vec{r}(\varphi) = r\cos\varphi \cdot \vec{e}_x + r\sin\varphi\vec{e}_y + z_0\vec{e}_z$$

$$= (r\cos\varphi, \quad r\sin\varphi, \quad z_0)$$

7. Beispiel: *Parameterdarstellung einer Hyperbel*:
Die Funktionsgleichung $x^2 - y^2 = 1$ stellt eine Hyperbel dar: Die Hyperbel hat eine Nullstelle bei $x = 1$ und sie hat die Asymptoten $y_{as1} = x$ und $y_{as2} = -x$.

Eine Parameterdarstellung dieser Hyperbel ist durch die hyperbolischen Funktionen möglich. Daher auch der Name *hyperbolische Funktionen.*

$$x = \cosh\varphi \qquad y = \sinh\varphi$$



Beweis durch Verifizierung. Wegen der Beziehung $(\cosh\varphi)^2 - (\sinh\varphi)^2 = 1$ kann der Paramter φ eliminiert werden und wir erhalten die Funktionsgleichung der Hyperbel $x^2 - y^2 = 1$.

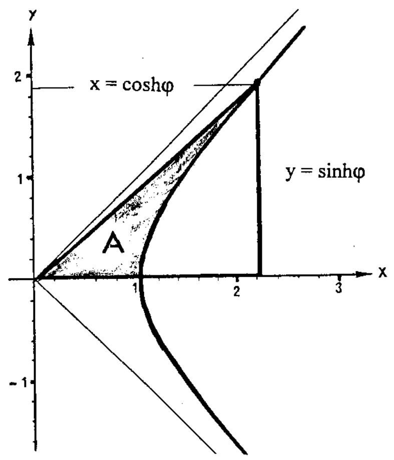
Gegeben sei ein bestimmter Wert φ_0 des Parameters. Damit ist ein Punkt P auf der Hyperbel definiert. Wächst φ von 0 bis ∞ so durchläuft P auf dem oberen Hyperbelast – beginnend mit $P_0(1,0)$ – alle Punkte des Graphen. Für negative Werte des Parameters durchläuft P den unteren Hyperbelast.

Die Umkehrfunktion heißt *Areafunktion*, $\varphi = Ar \sinh y$.
Die schraffierte Fläche A in der Abbildung entspricht dem halben Parameterwert $2A = \varphi_0$.
Wenn wir die Umkehrfunktion für den Hyperbelsinus bilden, erhalten wir eine Funktion, die eine geometrische Bedeutung hat, sie bezeichnet die schraffierte Fläche. Daher der Name *Areafunktion* .

$$\begin{aligned} \text{Hyperbelsinus } y &= \sinh\varphi \\ \text{Umkehrfunktion } \varphi &= Ar\sinh y \end{aligned}$$

Gelesen: φ entspricht der Fläche (Area), dessen Hyperbelsinus y ist.

Gemeint ist die vom Ortsvektor P der x-Achse und der Hyperbel eingeschlossene Fläche.



Beweis: Wir berechnen die schraffierte Fläche A.
A_0 = Fläche des Dreiecks = $\frac{1}{2}\cosh\varphi_0 \cdot \sinh\varphi_0$
A_1 = Fläche unterhalb der Hyperbel
Damit gilt: $A = A_0 - A_1$

Berechnung von A_1

$$A_1 = \int_0^{\varphi_0} \sinh\varphi_0 dx$$

Wir substituieren[1] dx und integrieren partiell.

$$\begin{aligned} A_1 &= \int_0^{\varphi_0} \sinh^2\varphi d\varphi \\ &= \underbrace{[\cosh\varphi_0 \cdot \sinh\varphi_0]_0^{\varphi_0}}_{=2A_0} - \int_0^{\varphi_0} \cosh^2\varphi d\varphi \end{aligned}$$

Umformung des Integrals ergibt[2]

$$A_1 = \int_0^{\varphi_0} \sinh^2\varphi d\varphi = 2A_0 - \int_0^{\varphi_0} \sinh^2\varphi d\varphi - \underbrace{\int_0^{\varphi_0} d\varphi}_{=\varphi_0}$$

Zusammenfassung der identischen Integrale führt zur

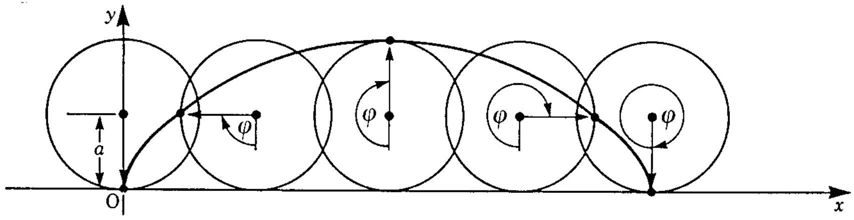
$$\begin{aligned} 2\int_0^{\varphi_0} \sinh^2\varphi d\varphi &= 2A_1 = 2A_0 - \varphi_0 \\ \varphi_0 &= 2[A_0 - A_1] \end{aligned}$$

[1] Substitution: $x = \cosh\varphi$ $\quad dx = \sinh\varphi d\varphi$
[2] Hinweis: $\cosh^2\varphi - \sinh^2\varphi = 1$ $\quad \cosh^2\varphi = 1 + \sinh^2\varphi$

8. Beispiel: *Parameterdarstellung einer Zykloide:*

Zykloide sind Kurven, die die Bewegungen von Punkten auf Rädern angeben, die ohne Schlupf rollen. Hier sei die Zykloide für den Punkt auf dem äußeren Rand des Rades mit dem Radius R angegeben. Der Parameter φ ist der Drehwinkel des Rades. Die Parameterdarstellung der Zykloide ist:

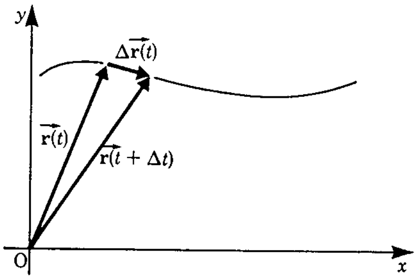
$$x = R(\varphi - \sin\varphi) \qquad y = R(1 - \cos\varphi)$$



16.2 Differentiation eines Vektors nach einem Parameter

Die Bahnkurve eines Punktes in der Ebene wird beschrieben durch den zeitabhängigen Ortsvektor

$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t)) = x(t)\vec{e}_x + y(t)\vec{e}_y$$



Nach einem Zeitintervall Δt ist der Ortsvektor

$$\vec{r}(t + \Delta t) = \vec{r}(t) + \Delta\vec{r}(t)$$

Wir fragen nun nach der Geschwindigkeit $\vec{v}(t)$ als dem Maß für die zeitliche Änderung des Ortsvektors.
Nach der Abbildung ergibt sie sich als Ortsänderung $\Delta\vec{r}$ pro Zeitänderung Δt

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}$$

In Komponentendarstellung

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \left(\frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}, \frac{y(t + \Delta t) - y(t)}{\Delta t}\right)$$

Führen wir den Grenzübergang durch, so erhalten wir

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right)$$