Teil I

Bewertung von Optionen

1 Finanzderivate

Die klassische Finanzmathematik beschäftigt sich in erster Linie mit grundlegenden Finanzinstrumenten oder Anlageformen wie Aktien, Devisen, festverzinslichen Anleihen, Rentenwerten und anderen mehr. Unter *Finanzderivaten* oder *derivativen Finanzinstrumenten* (*derivatives, derivative securities* oder *contingent claims*) versteht man Anlageformen, die von einfacheren Finanzinstrumenten abgeleitet werden. Der Wert des Derivats hängt vom Wert des zugrundeliegenden Instruments (*underlying*) ab. In diesem Abschnitt betrachten wir mit Terminkontrakten und Optionen zwei einfache Formen von Finanzderivaten sowie einige Kombinationen von ihnen. Da die moderne Finanzmathematik auch in der deutschen Praxis von englischen Begriffen dominiert wird, erwähnen wir auch jeweils den englischen Fachausdruck, wenn der nicht offensichtlich mit dem deutschen übereinstimmt.

Einfache Finanzderivate waren bereits um die Jahrhundertwende an den europäischen Börsen populär, um in der Zeit zwischen den Weltkriegen an Bedeutung zu verlieren. In den siebziger Jahren begann zuerst in den USA die Renaissance der abgeleiteten Finanzinstrumente gleichzeitig mit den bahnbrechenden Arbeiten von Black, Scholes und Merton, die die Berechnung eines angemessenen Preises für solche Anlageformen ermöglichten. Ihr allgemeiner finanzwissenschaftlicher Ansatz, der nicht nur die Bewertung von Finanzderivaten erlaubt, sondern überall dort Anwendungen findet, wo in der Finanzwelt das mit komplexen Investitionsformen verbundene Risiko gemessen und kontrolliert werden soll, wurde 1997 mit dem Nobelpreis für Wirtschaftswissenschaften gewürdigt. Gleichzeitig gab er den Anstoß zur Entwicklung der modernen analytischen Finanzmathematik, deren Grundlagen im ersten Teil dieses Buches beschrieben wird. Wir konzentrieren uns hierbei auf die mathematische Modellierung und Analyse. Dieser Abschnitt beschränkt sich daher darauf, in knapper Form die dafür nötige Fachterminologie aus der Finanzwelt einzuführen. Zahlreiche für die Praxis, nicht aber für die mathematische Behandlung von Finanzderivaten wichtige Details übergehen wir dabei und verweisen auf die einschlägige Fachliteratur, z.B. Hull (2000), Welcker, Kloy and Schindler (1992).

Eine besonders einfache Form von Finanzderivaten sind Terminkontrakte (*forward contract* oder *future contract*). Dabei handelt es sich um einen Vertrag zwischen zwei Parteien, zu einem bestimmten Zeitpunkt in der Zukunft eine Transaktion zu einem bereits bei Vertragsschluss festgelegten Preis durchzuführen. Gegenstand des Terminkontrakts können Aktien, Devisen und Anleihen, aber auch landwirtschaftliche Produkte (Getreide, Fleisch) oder Rohstoffe (Öl, Kupfer, elektrische Energie) sein.

Definition 1.1 (Terminkontrakt)
Ein Terminkontrakt *ist ein Vertrag zwischen zwei Parteien, bei der sich der Käufer bzw. der Verkäufer des Kontraktes zu einem Zeitpunkt t verpflichtet, zu einem bestimmten zukünftigen Zeitpunkt $T > t$, dem Ende der Laufzeit (expiration date oder maturity), ein Objekt zu einem heute vereinbarten Preis K, dem* Terminkurs *(delivery price), zu kaufen (*Terminkauf*) bzw. zu verkaufen (*Terminverkauf*).*

Der Wert $V_{K,T}(S_t, \tau)$ eines Terminkontrakts zur Zeit t hängt von dem aktuellen Wert S_t des zugrundeliegenden Objekts, das Gegenstand der vereinbarten Transaktion ist, von der Restlaufzeit *$\tau = T - t$ und von den Parametern K, T des Kontrakts ab.*

In der Praxis unterscheidet man bei Terminkontrakten zwischen *Forwards* und *Futures*. Forwards werden zwischen den beiden Vertragspartnern ausgehandelt, und zwischen dem Abschluss des Terminkontrakts und dem Ende der Laufzeit kommt es zu keinen weiteren Zahlungen. Futures werden an Terminbörsen gehandelt. Als Absicherung gegen hohe Verluste aufgrund der Zahlungsunfähigkeit eines der Vertragspartner am Ende der Laufzeit dient hier ein täglicher Gewinn-Verlust-Ausgleich. Unter bestimmten Bedingungen, die über kürzere Zeiträume hinweg approximativ erfüllt sind, unterscheiden sich Forwards und Futures nicht in ihrem Wert.

Beispiel 1.1 *Ein Investor erwirbt am 1. September einen Forward-Kontrakt mit dem Inhalt, in 90 Tagen 1 000 000* EUR *zum Umtauschkurs von 1.2* USD *zu kaufen. Falls der Kurs am Ende der 90 Tage auf 1.3 gestiegen ist, gewinnt der Investor, da 1 000 000* EUR *dann am Markt für* USD *1 300 000 verkauft werden können.*

In der obigen Notation ist also t = 1. September, τ = 90 Tage, T = 30. November und K = USD *1 200 000.*

Definition 1.2 (Spot-Preis, Forward-Preis, Future-Preis)
Der aktuelle Kurs S_t eines Objekts (Aktie, Währung, Rohstoff, ...) wird oft

auch als Spot-Preis *bezeichnet. Der* Forward-Preis F_t *des Objektes ist der Terminkurs, für den der Wert eines Forward-Kontraktes zur Zeit t 0 ist, d.h. er löst die Gleichung* $V_{F_t,T}(S_t,\tau) = 0$ *. Entsprechend ist der* Future-Preis *auf der Grundlage der Wertentwicklung eines Future-Kontrakts definiert.*

Den Wert eines Forwards, aus dem sich sofort der Forward-Preis ergibt, werden wir später berechnen. Aus der Wertgleichheit von Forwards und Futures ergibt sich sofort, dass unter den entsprechenden Bedingungen auch Forward-Preis und Future-Preis zusammenfallen. Beim Abschluss eines Terminkontraktes zur Zeit $t = 0$ wird meist als Terminkurs $K = F_0$ gewählt. Der Kontrakt hat dann anfangs für Käufer und Verkäufer den Wert 0, und es finden keine Zahlungen statt. Im Laufe der Zeit werden dann Terminkurs K und aktueller Forward-Preis F_t voneinander abweichen.

Bei einem Terminkontrakt wechselt das zugrundeliegende Objekt am Ende der Laufzeit auf jeden Fall den Besitzer. Im Gegensatz dazu gewährt eine Option einem der beiden Vertragspartner das Recht zu entscheiden, ob es überhaupt zu einer Transaktion kommt. Offensichtlich macht es dabei einen Unterschied, ob die Entscheidung beim Käufer oder beim Verkäufer liegt. Daher wird zwischen zwei grundlegenden Typen von Optionen unterschieden: zwischen Kaufoptionen und Verkaufsoptionen. Abgesehen davon gleichen europäische Optionen einem Forward-Kontrakt. Daneben gibt es amerikanische Optionen, bei denen der Inhaber des Ausübungsrechts sich auch schon vor Ende der Laufzeit zum Kauf oder Verkauf entschließen kann. Die Bezeichnungsweise hat historische Gründe und hängt nicht davon ab, wo die betreffenden Derivate gehandelt werden.

Definition 1.3 (Kaufoption - Call, Verkaufsoption - Put)
Eine europäische Kaufoption *oder* europäischer Call *ist ein Vertrag zwischen zwei Parteien, der dem Käufer das Recht gibt, zu einem bestimmten zukünftigen Zeitpunkt* $T > t$ *, dem Ende der Laufzeit oder Verfallszeitpunkt (expiration date oder maturity), ein Objekt zu einem bei Vertragsschluss vereinbarten Preis* K*, dem Ausübungskurs (strike price oder exercise price), zu kaufen. Übt er das Recht nicht aus, verfällt die Option zur Zeit* T *ohne weitere Konsequenzen.*

Eine europäische Verkaufsoption *oder* europäischer Put *gibt dem Käufer das Recht, das Objekt zur Zeit* T *zum vereinbarten Preis* K *zu verkaufen.*

Der Inhaber eines amerikanischen Calls *bzw. eines* amerikanisches Puts *kann sein Recht, das Objekt zu kaufen bzw. zu verkaufen, jederzeit vom Erwerb der Option bis zum Verfallszeitpunkt* T *ausüben.*

Die in der Definition eingeführten Optionsformen werden auch *Standardop-*

tionen (*plain vanilla options*) genannt. Daneben gibt es zahlreiche komplexere Finanzderivate, und es werden laufend neue entwickelt. Diese Finanzinstrumente werden meist nicht an den Terminbörsen gehandelt, sondern von Banken für einzelne Kunden maßgeschneidert entworfen. Man spricht hier von OTC-Derivaten (OTC = "over the counter"). Hierzu gehören z.B. Optionen auf Optionen, die dem Käufer zu einem Zeitpunkt T das Recht geben, eine Option mit Verfallszeitpunkt $T' > T$ zu kaufen oder zu verkaufen. Die mathematische Behandlung dieser *exotischen Optionen* ist besonders aufwändig, wenn der aktuelle Wert des Derivats nicht nur vom aktuellen Kurs S_t des zugrundeliegenden Objekts abhängt wie bei den Standardoptionen, sondern wenn der gesamte Kursverlauf $S_{t'}, 0 \leq t' \leq t$, eine Rolle spielt.

Beispiele für solche pfadabhängigen Optionen sind asiatische, Knockout- oder Lookback-Optionen: Bei asiatischen Optionen hängt der Ausübungskurs vom Mittelwert der Kurse des zugrundeliegenden Objekts über einen bestimmten Zeitraum ab. Knockout-Optionen verfallen, sobald der Kurs des zugrundeliegenden Objekts eine vorgegebene Schranke über- oder unterschreitet. Bei Lookback-Optionen hängt der Ausübungskurs vom Maximum oder Minimum der Kurse in einem bestimmten Zeitraum ab.

Die Bedeutung von Optionen reicht weit über den direkten Handel an den Terminbörsen und ihren Stellenwert als OTC-Derivate hinaus. Viele komplexe Finanzderivate, die auf den ersten Blick nichts mit Optionen zu tun haben, lassen sich durch geeignete Kombinationen mehrerer Optionen mit unterschiedlichen Parametern duplizieren. Auch viele klassische Finanzinstrumente wie z.B. Wandelanleihen oder Bezugsrechte bei Aktien besitzen einen Optionsanteil, und selbst in der Versicherungswirtschaft spielt die Optionsbewertungstheorie bei der Festlegung angemessener Prämien eine immer größere Rolle.

Um sich mit Terminkontrakten, Standardoptionen und einfachen Kombination von Optionen vertraut zu machen, ist es am einfachsten, zunächst nur den *Pay-off*, d.h. den Wert des Derivats am Verfallstag T, zu betrachten. Bei einem Terminkauf ist der Pay-off einfach $S_T - K$, wobei S_T der Spotpreis des zugrundeliegenden Objekts am Ende der Laufzeit ist. Der Käufer des Objekts erzielt einen Gewinn, wenn dieser aktuelle Kurs oberhalb des Terminkurses, den er zu zahlen hat, liegt. Er kann das für K erworbene Objekt sofort auf dem freien Markt wieder veräußern und dafür S_T einnehmen. Entsprechend ist der Pay-off eines Terminverkaufs $K - S_T$. Diese Pay-off Funktionen sind in Abbildung 1.1 dargestellt. Bei einem Call ist der Pay-off:

$$\max\{S_T - K, 0\} = (S_T - K)^+$$

Der Besitzer der Option wird sein Kaufrecht nur ausüben, wenn der Ausübungskurs K unterhalb des aktuellen Marktpreises S_T für das Objekt liegt, und

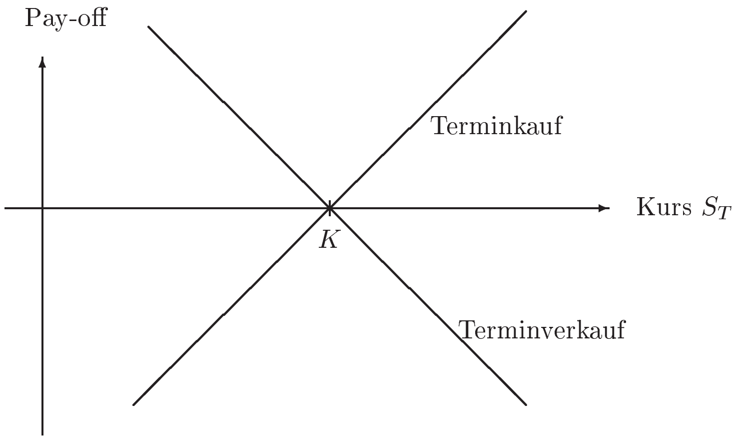

Abbildung 1.1: Wert des Derivates am Verfallstag

in diesem Fall denselben Ertrag wie bei einem Terminkauf erzielen. Andernfalls lässt er sein Recht verfallen. Bei einem Put ist der Pay-off entsprechend

$$\max\{K - S_T, 0\} = (K - S_T)^+$$

Für den Erwerb einer Kaufoption, die ja ein Recht darstellt, ist zur Zeit $t = 0$ (im Gegensatz zu einem Terminkontrakt) stets ein positiver Betrag $C(S_0, T)$ zu zahlen. Zur Veranschaulichung einer Option wird oft auch dieser ursprünglich gezahlte Preis vom Pay-off abgezogen. Die so bestimmte Ertrags- oder Gewinnfunktion, für einen Call $(S_T - K)^+ - C(S_0, T)$, ist aber finanzmathematisch nicht korrekt, da hier Einnahmen zur Zeit T mit Ausgaben zur Zeit 0 verrechnet werden. Den korrekten Gesamtertrag erhält man durch Aufzinsen der zur Zeit 0 gezahlten Optionsprämie auf die Zeit T, denn der Investor hätte die Prämie statt für den Call auch für eine risikolose festverzinsliche Anlage verwenden können. Bei kontinuierlicher Verzinsung mit konstantem Zinssatz r wäre der Ertrag eines Calls $(S_T - K)^+ - C(S_0, T)e^{rT}$.

Beispiel 1.2 *Wir betrachten zur Zeit* 0 *den Verkauf einer Kaufoption (Call short) mit Ausübungskurs* K *und Call-Prämie* C_0*. Der Pay-off und die Gewinnfunktion sind in Abbildung 1.2 bzw. in Abbildung 1.3 dargestellt.*

Beispiel 1.3 *Für den Kauf eines* Straddles*, das heißt eines Portfolios aus einem Call und einem Put mit demselben Ausübungskurs* K*, ist der Ge-*

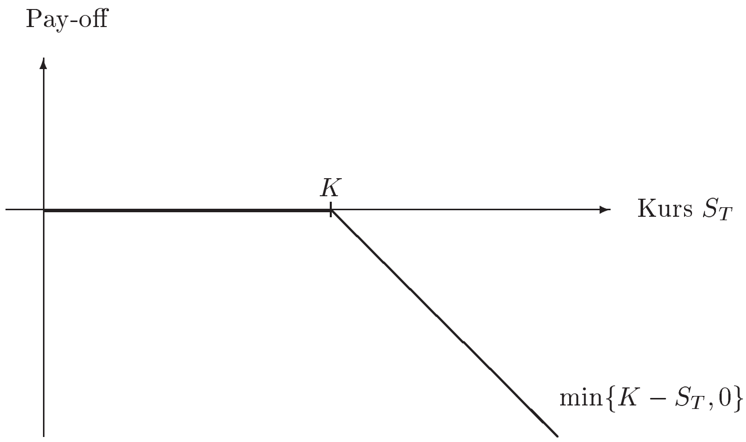

Abbildung 1.2: Pay-off beim Verkauf einer Kaufoption

winn/Verlust in Abbildung 1.4 dargestellt. C_0 *bzw.* P_0 *bezeichnen wieder die Call- bzw. Putprämie.*

Ein weiteres grundlegendes Finanzinstrument, das bei der Optionsbewertung eingesetzt wird, sind *Anleihen* oder *Bonds* . Neben den reinen Zinserträgen erhält der Käufer eventuell auch Couponzahlungen zu festen Zeitpunkten. Wir betrachten vor allem Zerobonds, d.h. Anleihen ohne Couponerträge.

Definition 1.4 (Zerobond)
Ein Zerobond *ist eine festverzinsliche Anleihe ohne Couponzahlungen. Der Käufer legt zur Zeit 0 einen Betrag* B_0 *an und erhält am Ende* T *der Laufzeit den Betrag* B_T *zurück, der sich aus* B_0 *zuzüglich des Zinsertrags ergibt. Der Wert des Zerobonds am Ende der Laufzeit wird auch als sein* nomineller Wert *bezeichnet.*

Der Kauf eines Zerobonds entspricht dem Anlegen eines Geldbetrags zu einem festen Zinssatz für eine feste Zeitspanne. Der Verkauf eines Zerobonds entspricht analog dem Leihen eines Geldbetrags. Bonds werden gehandelt und können zum aktuellen Wert B_t, d.h. B_0 zuzüglich der bis zur Zeit t aufgelaufenen Zinsen, vorzeitig veräußert werden.

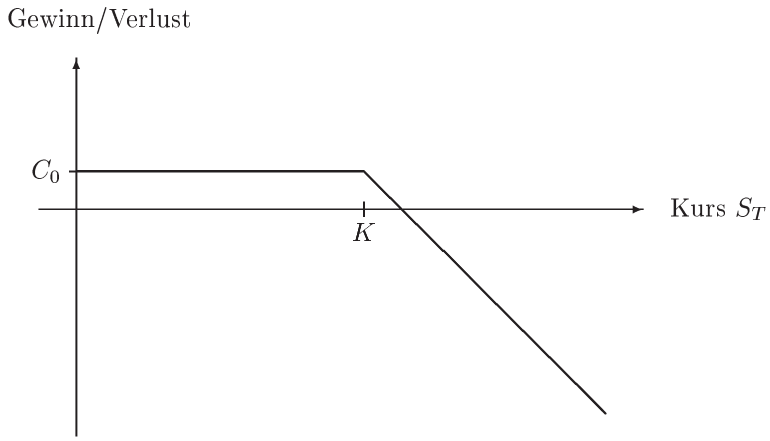

Abbildung 1.3: Gewinn/Verlust beim Verkauf einer Kaufoption

In der Praxis werden Zinsen zu diskreten Zeitpunkten (jährlich, halbjährlich, ...) gutgeschrieben und dann weiter verzinst. Bei jährlicher Verzinsung mit Zinssatz r p.a. (per annum) wächst das Anfangskapital B_0 in n Jahren einschließlich Zins und Zinseszins auf $B_n^{(1)} = B_0(1+r)^n$. Werden die Zinsen k-mal jährlich gutgeschrieben mit dann entsprechend geringerem Zinssatz $\frac{r}{k}$ pro $\frac{1}{k}$ Jahre, so ist das Kapital nach $n = \frac{nk}{k}$ Jahren $B_n^{(k)} = B_0(1+\frac{r}{k})^{nk}$. Für $k \to \infty$ erhält man den Grenzfall der *stetigen Verzinsung* . Dabei wächst das Anfangskapital nach n Jahren auf $B_n = B_0 \cdot e^{nr}$. Im Falle der stetigen Verzinsung wird r auch als *short rate* bezeichnet. Bei der Bewertung von Finanzderivaten wird meist von stetiger Verzinsung ausgegangen. Der Unterschied zur diskreten Verzinsung ist vor allem für häufige Gutschriften gering. Aus einem Kapital von $B_0 = 1000$ EUR wird bei einem Jahreszinssatz von $r = 10\%$ zum Beispiel innerhalb eines Jahres ($n = 1$) 1100 EUR bei jährlicher und 1105.17 EUR bei kontinuierlicher Verzinsung.

Um selbst diese kleinen Abweichungen zu umgehen, modifiziert man den stetigen Zinssatz geringfügig. Geht man von einer jährlichen Verzinsung r_1, die am Jahresende gutgeschrieben wird, aus, so erhält man bei kontinuierlicher Verzinsung dasselbe Kapital nach n Jahren, d.h. $B_n = B_n^{(1)}$, wenn man als stetigen Zinssatz $r = \log(1 + r_1)$ wählt.

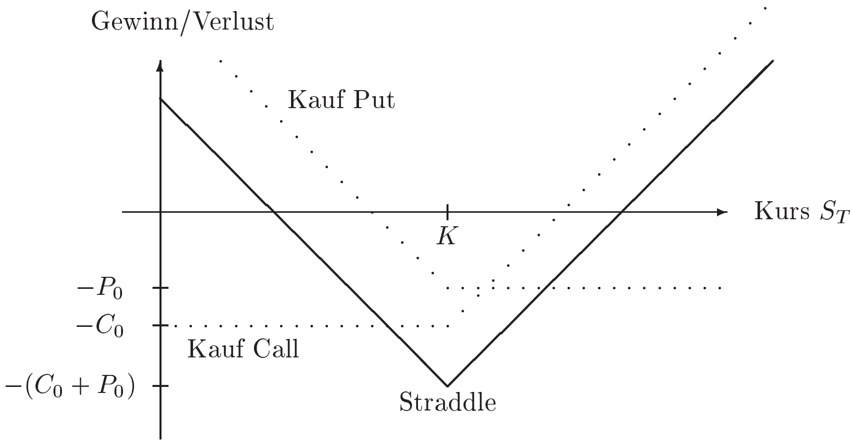

Abbildung 1.4: Gewinn/Verlust beim Kauf eines Straddles

Im folgenden wird stets von einer stetigen Verzinsung ausgegangen. Um Geldbeträge, die zu verschiedenen Zeitpunkten gezahlt werden, vergleichen zu können, müssen sie auf denselben Zeitpunkt aufgezinst bzw. abgezinst werden, d.h. der Zinsertrag über die betreffende Zeitspanne wird addiert oder subtrahiert. Bei kontinuierlicher Verzinsung wird aus einem Kapital B zur Zeit t (mit $\Delta t > 0$)

Aufzinsung : $B\,e^{r\Delta t}$ zur Zeit $t + \Delta t$

Abzinsung : $B\,e^{-r\Delta t}$ zur Zeit $t - \Delta t$

Zum Schluss dieses Abschnitts werden noch einige Sprechweisen aus der Finanzwelt eingeführt. Ein *Portfolio* oder *Portefeuille* ist eine Kombination mehrerer Finanzinstrumente, deren Wertentwicklung als Ganzes gesehen wird. Ein einzelnes Finanzinstrument in einem Portfolio wird auch *Position* genannt. Ein Investor nimmt eine *long position* ein, wenn er ein Finanzinstrument kauft, und eine *short position*, wenn er es verkauft. Ein *Call long* ist z.B. der Kauf einer Kaufoption, ein *Put long* der Kauf einer Verkaufsoption, ein *Forward short* der Verkauf eines Forward-Kontraktes.

Ein Investor *schließt eine Position* in seinem Portfolio, wenn er die zukünftige Wertentwicklung des Portfolios unabhängig von dem betreffenden Finanzinstrument macht. Wird das Instrument frei gehandelt, kann er es einfach verkaufen (z.B. eine Aktie oder einen Bond) oder zurückzahlen (z.B. einen verkauften Bond, d.h. geliehenes Geld) und damit ganz aus dem Portfolio entfernen. Manche Finanzinstrumente lassen sich aber nicht auf diese Weise schließen. Der Investor kann dann seinem Portfolio ein entgegengesetztes Finanzinstrument hinzufügen, so dass die Werte der beiden Positionen sich gegenseitig aufheben und für das Gesamtportfolio keine Rolle mehr spielen.

Beispiel 1.4 *Hat der Investor beispielsweise am 1. Februar einen über ein Jahr laufenden Forward-Kontrakt über 1000000* USD *mit Terminkurs 1200000* EUR *gekauft und möchte er diese Position vorzeitig am 1. Juni schließen, so kann er an diesem Termin einen entsprechenden Forward-Kontrakt über denselben* USD*-Betrag, mit demselben Terminkurs und demselben Fälligkeitstag 31. Januar* verkaufen. *Die Werte des gekauften und des verkauften Forwards addieren sich stets zu 0.*

Short selling ist eine Handelsstrategie, bei der der Investor Objekte, z.B. Aktien, die ihm nicht gehören, verkauft und sie später zurückkauft. In der Praxis wird hierzu ein Broker eingeschaltet, der einen Partner vermittelt, in dessen Besitz sich die betreffenden Objekte befinden und der sie für eine gewisse Zeitspanne ausleiht. Der Investor, der sich für das short selling entscheidet, verpflichtet sich, dem Besitzer der ausgeliehenen Objekte sämtliche Erträge wie z.B. Dividenden zu erstatten, die in der Zwischenzeit bis zur Rückgabe anfallen.

Beispiel 1.5 *Entschließt sich ein Investor zum Beispiel für das Short selling von 1000 Aktien, so leiht er sie sich vom Besitzer und verkauft sie sofort für 1000 S_0, wobei S_t den jeweilige Kurs zur Zeit t bezeichnet. Später, zur Zeit $t > 0$, schließt er die Position, indem er die Aktien für 1000 S_t zurückkauft und sie dem ursprünglichen Besitzer zurückgibt. Wird zur Zeit $t_0,\ 0 < t_0 < t$, eine Dividende D je Aktie ausgeschüttet, so muss der Short seller dem Aktienbesitzer $1000 \cdot D$ zahlen. Short selling wirft nur dann Gewinn ab, wenn S_t deutlich unterhalb von S_0 liegt. Außerdem ist das Short selling in der Praxis zahlreichen Restriktionen unterworfen. Für das folgende ist aber nur wichtig, dass im Prinzip die Möglichkeit besteht, Aktien und andere Finanzobjekte zu verkaufen, die man gar nicht besitzt.*

1.1 Literaturhinweise

Grundlegende Lehrbücher zu Finanzderivaten sind, unter vielen anderen, Hull (2000), Jarrow (1992) und Cox and Rubinstein (1985). Mathematisch etwas anspruchsvoller sind die Darstellungen von Neftci (1996) und Duffie (1996). Eine eher praxisorientierte und dennoch theoretisch fundierte Einführung geben Briys, Bellalah, Mai and de Varenne (1998).