

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	5
Arithmetik	9
1 Mengen	10
2 Natürliche Zahlen	12
3 Bruchzahlen	35
4 Dezimalbrüche	53
5 Größen aus dem Alltag	62
6 Prozentrechnen und Proportionalität	71
<i>Auf einen Blick: Arithmetische Regeln und Sätze</i>	81
Algebra	89
1 Die rationalen Zahlen \mathbb{Q}	90
2 Lineare Funktionen und ihre Graphen	109
3 Lineare Gleichungen und Ungleichungen	119
4 Die Menge der reellen Zahlen \mathbb{R}	135
5 Quadratische Gleichungen und quadratische Funktionen	141
6 Potenzen und Potenzfunktionen	154
7 Exponentialfunktionen und Logarithmusfunktionen	166
<i>Auf einen Blick: Algebraische Regeln und Sätze</i>	174
Stochastik	177
1 Zufallsexperimente	178
2 Häufigkeiten und Wahrscheinlichkeiten	184
3 Bedingte Wahrscheinlichkeiten	194
4 Bernoulli-Ketten	197
<i>Auf einen Blick: Regeln und Sätze in der Stochastik</i>	201
Geometrie	203
1 Geometrische Grundformen und Grundbegriffe	204
2 Grundbegriffe der ebenen Geometrie	223
3 Symmetrie und Kongruenz von Figuren	238
4 Dreiecke und der Satz des Pythagoras	245
5 Trigonometrie	260
6 Kreis- und Raummessung	275
<i>Auf einen Blick: Geometrische Regeln und Sätze</i>	282

Auf einen Blick:

Algebraische Regeln und Sätze

Rechenregeln in \mathbb{R}

In \mathbb{R} haben die Gleichungen $x^n = c$ und $a^x = b$ unter bestimmten Bedingungen eine (eindeutige) Lösung. Das besagen die folgenden Sätze:

Eindeutigkeitssatz der n -ten Wurzel

Zu einem $a \in \mathbb{R}^+_0$ und $n \in \mathbb{N}$ gibt es höchstens eine n -te Wurzel, d. h. höchstens ein $x \in \mathbb{R}^+_0$, so dass $x^n = a$ ist. x heißt dann die n -te Wurzel von a und wird geschrieben als $x = \sqrt[n]{a}$.

Existenz- und Eindeutigkeitssatz für Exponenten

Für $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ gibt es zu jedem $b \in \mathbb{R}^+$ genau ein $x \in \mathbb{R}$, das die folgende Gleichung erfüllt:

$$a^x = b. \text{ Es gilt: } b = a^x \Leftrightarrow x = \log_a b$$

Für alle Zahlen aus \mathbb{R} gelten die folgenden Rechenregeln ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$):

1. Klammern haben Vorrang
2. Punkt vor Strich
3. Kommutativgesetz
der Addition $a + b = b + a$
der Multiplikation $a \cdot b = b \cdot a$
4. Assoziativgesetz
der Addition $(a + b) + c = a + (b + c) = a + b + c$
der Multiplikation $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) = a \cdot b \cdot c$
5. Distributivgesetz
 $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

Daraus leiten sich ab:

Regel zum kreuzweise Ausmultiplizieren von Summen:

$$(a + b) \cdot (c + d) = ac + ad + bc + bd$$

Binomische Formeln:

1. binomische Formel: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
2. binomische Formel: $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
3. binomische Formel: $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

Definitionen der Potenzschreibweise, $a \in \mathbb{R}^+$, $m, n \in \mathbb{N}$:

$$a^n = a \cdot a \cdot \dots \cdot a \text{ (} n \text{ Faktoren)}$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

$$a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n}$$

$$a^{-\frac{n}{m}} = \frac{1}{\sqrt[m]{a^n}}$$

Potenzgesetze

Für $a, b \in \mathbb{R}^+$ und $x, z \in \mathbb{R}$ gilt:

$$1. a^x \cdot a^z = a^{x+z}$$

$$2. a^x : a^z = a^{x-z}$$

$$3. a^x \cdot b^x = (ab)^x$$

$$4. a^x : b^x = \left(\frac{a}{b}\right)^x$$

$$5. (a^x)^z = a^{x \cdot z}$$

Regeln für das Rechnen mit Logarithmen, $a, s, t \in \mathbb{R}^+$, $a \neq 1$, $z \in \mathbb{R}$:

$$\log_a (s \cdot t) = \log_a s + \log_a t$$

$$\log_a \left(\frac{s}{t}\right) = \log_a s - \log_a t$$

$$\log_a (s^z) = z \cdot \log_a s$$

Lösungsformel einer allgemeinen quadratischen Gleichung

Die quadratische Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ mit $a, b, c, x \in \mathbb{R}$ und $a \neq 0$ hat die Lösungen

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ falls } b^2 - 4ac > 0$$

$$\text{die Lösung } x = -\frac{b}{2a} \text{ falls } b^2 - 4ac = 0$$

und keine Lösung, falls $b^2 - 4ac < 0$.

Für quadratische Gleichungen in Normalform gilt der

Satz von Vieta

Sind x_1 und x_2 die Lösungen der quadratischen Gleichung

$$x^2 + px + q = 0 \text{ mit } x_1, x_2, x, p, q \in \mathbb{R}, \text{ dann gilt}$$

$$x_1 + x_2 = -p \text{ und } x_1 x_2 = q.$$

