

CARL HANSER VERLAG

Wolfgang Preuß, Günter Wenisch

Lehr- und Übungsbuch Numerische Mathematik
mit Softwareunterstützung

3-446-21375-9

www.hanser.de

Inhaltsverzeichnis

Bezeichnungen	11
1 Einführung	13
1.1 Allgemeines	13
1.2 Grundlagen	13
1.2.1 Aufgabenstellung der Numerischen Mathematik	13
1.2.2 Die Fehlerproblematik (Stabilität und Kondition)	17
1.2.3 Rundungsfehler bei der numerischen Rechnung	21
1.2.3.1 Addition und Subtraktion von Maschinenzahlen	22
1.2.3.2 Multiplikation und Division von Maschinenzahlen	24
1.2.4 Methoden der klassischen Fehleranalyse	26
1.2.4.1 Die Vorwärtsuntersuchung	26
1.2.4.2 Die Rückwärtsuntersuchung	29
1.2.5 Nichtklassische Methoden der Fehleranalyse	31
Aufgaben 1.1 bis 1.10	31
2 Die Nullstellenaufgabe in einer Variablen	35
2.1 Das Verfahren der Bisektion	37
2.2 Iterationsverfahren	40
2.2.1 Gewöhnliche Iterationsverfahren	43
2.2.2 Das NEWTON-Verfahren	44
2.2.3 Das Sekanten-Verfahren	45
2.2.4 Das STEFFENSEN-Verfahren	46
2.2.5 Das Pegasus-Verfahren	48
2.3 Das Konvergenzproblem/Fehlerschätzung	49
2.4 Konvergenzordnung und Effektivität	54
2.5 Konvergenzbeschleunigung	58
2.6 Modifikationen des NEWTON-Verfahrens	59
2.7 Polynomnullstellen	61
2.7.1 Das NEWTON-Verfahren für Polynomnullstellen	61
Aufgaben 2.1 bis 2.5	62
3 Lineare Gleichungssysteme	63
3.1 Einführung	63
3.2 Numerisch wichtige Vektor- und Matrixnormen	64
Aufgaben 3.1, 3.2	65
3.3 Lineare Gleichungssysteme	66
3.3.1 Die Kondition eines linearen Gleichungssystems	66
3.3.2 Direkte Verfahren	69
3.3.2.1 Methoden der $(L \cdot R)$ -Zerlegung	70
3.3.2.2 Orthogonale Transformation auf Dreiecksgestalt	78
3.3.2.3 Fehleranalyse direkter Verfahren	83

3.3.2.4	Der Satz von PRAGER-OETTLI	84
3.3.2.5	Nachkorrektur der Lösung	86
3.3.2.6	Bemerkungen	87
	Aufgaben 3.3 bis 3.8	87
3.3.3	Iterative Verfahren	89
3.3.3.1	Additive Zerlegung der Koeffizientenmatrix	93
3.3.3.2	Relaxationsverfahren	97
3.3.4	Minimierungsverfahren	100
3.3.4.1	Das cg-Verfahren	102
	Aufgabe 3.9	104
3.4	Lineare Ausgleichsprobleme	105
3.4.1	Berechnung der Fehlerquadratlösung (Normalgleichungssystem)	106
3.4.1.1	Berechnung der Minimum-Norm-Lösung (Regularisiertes Normalgleichungssystem)	107
3.4.2	Berechnung der Fehlerquadratlösung und der Minimum-Norm-Lösung (orthogonale Transformation)	108
	Aufgabe 3.10	110
4	Nichtlineare Gleichungssysteme und Ausgleichsprobleme	111
4.1	Aufgabenstellung und Vorbetrachtung	111
4.2	Iterationsverfahren für nichtlineare Gleichungssysteme	114
4.2.1	Konvergenz des allgemeinen Iterationsverfahrens	116
4.2.2	Relaxationsverfahren	120
4.2.3	Überlineare Konvergenz und NEWTON-Verfahren	122
4.2.4	NEWTON-ähnliche Verfahren	126
4.3	Globalisierte Verfahren	130
4.3.1	Abstiegsverfahren	130
4.3.2	Einbettungsverfahren	133
4.4	Nichtlineare Ausgleichsprobleme	139
	Aufgaben 4.1 bis 4.4	142
5	Matrizeneigenwertprobleme	143
5.1	Direkte Verfahren	145
5.2	Transformationsverfahren	146
5.2.1	JACOBI-Verfahren	146
5.2.2	HOUSEHOLDER-Tridiagonalisierung	149
5.2.3	QR-Verfahren	150
5.3	Unterraumverfahren	151
5.3.1	VON-MIESES-Verfahren – Vektoriteration	152
5.3.2	WIELANDT-Verfahren und inverse Iteration mit Spektralverschiebung	155
5.3.3	LANCZOS-Verfahren	156
	Aufgaben 5.1 bis 5.5	157
6	Interpolation und Approximation	159
6.1	Problemstellung und Übersicht	159
6.1.1	Diskrete Approximation	159
6.1.2	Lineare und nichtlineare Approximation	159

6.1.3	Interpolation, GAUSS- und TSCHEBYSCHJEFF-Approximation	160
6.1.4	Gewichtete Approximation	162
6.1.5	Kontinuierliche (stetige) Approximation	163
6.2	Polynominterpolation	164
6.2.1	Lösung mit linearem Gleichungssystem, Eindeutigkeit	164
6.2.2	Lösung nach LAGRANGE	166
6.2.3	Lösung nach NEWTON	167
6.2.4	Fehlerbetrachtungen, Konvergenz, Numerische Effekte	169
6.2.5	TSCHEBYSCHJEFF-Stützstellen	174
6.2.6	Berücksichtigung von Ableitungen, HERMITE-Interpolation	179
6.2.7	NEVILLE-Algorithmus	182
6.2.8	Zusammenfassung	183
6.3	Interpolation mit kubischen Splines	184
6.3.1	Einleitung	184
6.3.2	Definitionen	185
6.3.3	Berechnung	187
6.3.4	Minimaleigenschaften	195
6.3.5	Konvergenzeigenschaften	195
6.4	Lineare diskrete GAUSS-Approximation	197
6.4.1	Normalgleichungssystem	198
6.4.2	Diskrete orthogonale Ansatzfunktionen	200
6.5	Lineare kontinuierliche GAUSS-Approximation	202
6.5.1	Normalgleichungssystem	202
6.5.2	Kontinuierliche orthogonale Ansatzfunktionen	204
6.6	Lineare kontinuierliche TSCHEBYSCHJEFF-Approximation	206
6.6.1	Approximation durch ein Polynom	206
6.6.2	Minimierung des absoluten Fehlers durch eine Gerade	208
6.6.3	Minimierung des relativen Fehlers durch eine Gerade	209
6.7	Lineare diskrete TSCHEBYSCHJEFF-Approximation	210
6.7.1	Minimierung des absoluten Fehlers durch eine Gerade	210
6.7.2	Approximation durch ein Polynom	211
6.8	Parametrische Interpolation und Approximation	213
6.8.1	Parameterwahl	213
6.8.2	Interpolation	214
6.8.3	BEZIER-Kurven	218
6.9	Zweidimensionale Interpolation	219
6.9.1	Tensorproduktflächen	219
6.9.2	Triangulationen	220
	Aufgaben 6.1 bis 6.7	220
7	Numerische Differenziation und Integration	223
7.1	Numerische Differenziation	224
7.1.1	Der Vorwärts-Differenzenquotient	224
7.1.2	Fehleranalyse für den Vorwärtsdifferenzenquotienten	225
7.1.3	Differenziationsformeln	227
7.1.4	Fehlerordnung	228

7.1.5	Berechnung der JACOBI-Matrix mehrdimensionaler Funktionen	230
7.1.6	Extrapolation	231
7.1.7	Automatische Differenziation	234
	Aufgaben 7.1 bis 7.5	234
7.2	Numerische Integration	234
7.2.1	Integrationsformeln	235
7.2.2	Die Trapezregel	235
7.2.3	NEWTON-COTES-Formeln	236
7.2.4	Ordnung und Fehler einer Integrationsformel	238
	7.2.4.1 Verfahrensfehler der Trapezregel	238
7.2.5	Zusammengesetzte Formeln	239
7.2.6	Der Fehler zusammengesetzter Formeln	239
7.2.7	Offene NEWTON-COTES-Formeln	242
7.2.8	GAUSS'sche Formeln	244
	7.2.8.1 GAUSS-(LEGENDRE)-Formeln	244
	7.2.8.2 GAUSS-LOBATTO-Formeln	245
7.2.9	Algorithmen zur Fehlerschätzung und Schrittweitensteuerung: Adaptive Integration	248
	7.2.9.1 Fehlerschätzung	248
	7.2.9.2 Verfeinerung der Diskretisierung (Adaptive Diskretisierung)	251
7.2.10	Extrapolation: ROMBERG-Verfahren	253
7.2.11	Weitere Hinweise und Fehlerquellen	255
	7.2.11.1 Unstetigkeiten	255
	7.2.11.2 Tabellierte Funktionen	258
	7.2.11.3 Unendliche Intervalle	258
	7.2.11.4 Zusammenhang zwischen bestimmten Integralen und Differen- zialgleichungen	258
	Aufgaben 7.6 bis 7.12	259
8	Gewöhnliche Differenzialgleichungen	260
8.1	Anfangswertprobleme	260
8.1.1	Das EULER-Verfahren	261
	8.1.1.1 Systeme von Differenzialgleichungen	262
	8.1.1.2 Geometrische Interpretation	264
8.1.2	RUNGE-KUTTA-Verfahren	265
	8.1.2.1 Allgemeine Einschrittverfahren	267
8.1.3	Lokaler (Diskretisierungs-)Fehler und globaler Fehler	267
8.1.4	Fehlerschätzung und Schrittweitensteuerung	271
8.1.5	Extrapolationsverfahren	276
8.1.6	Mehrschrittverfahren	279
	8.1.6.1 ADAMS-Verfahren	279
	8.1.6.2 Allgemeine lineare Mehrschrittverfahren	284
8.1.7	Steife Systeme	285
8.1.8	Wann welches Verfahren?	291
8.1.9	Weitere Hinweise und Fehlerquellen	292
	8.1.9.1 Differenzialgleichungen höherer Ordnung	292

8.1.9.2	Unstetigkeiten	294
	Aufgaben 8.1 bis 8.8	296
8.2	Randwertprobleme	297
8.2.1	Schießverfahren	297
8.2.2	Differenzenverfahren	300
8.2.3	Die Methode der Finiten Elemente (eindimensional)	302
8.2.3.1	Einführung und Beispiele	302
8.2.3.2	Variationsformulierung für das eindimensionale Modellproblem	303
	Aufgaben 8.9 bis 8.11	307
9	Software	308
9.1	Übersicht	308
9.1.1	Integrierte Softwaresysteme	308
9.1.2	Programmbibliotheken	310
9.1.3	Numerisches und symbolisches Rechnen	311
9.2	Einblick in Mathematica, MATLAB und NAG	311
9.2.1	Mathematica	312
9.2.2	MATLAB	319
9.2.3	NAG-Bibliothek	327
9.2.4	Übungsaufgaben für Mathematica, MATLAB und NAG	337
	Aufgaben 9.1 bis 9.4	337
	Lösungen	339
	Literaturverzeichnis	384
	Sachwortverzeichnis	387